

---

# **Integrierte Produktions- und Distributionsplanung mit Routingentscheidungen**

**Modellierungsbaukasten und Lösungsverfahren**

---

**Dissertation**

verfasst von

**Rolf Wendt**

betreut von

**Prof. Dr. Peter Recht**

**2016**

# Danksagung

Herrn Prof. Dr. Peter Recht möchte ich ganz herzlich für die ausgezeichnete Betreuung danken, die wesentlich zum Gelingen meiner Dissertation beigetragen hat. Sein Enthusiasmus, seine Unterstützung und seine Anregungen in gemeinsamen Diskussionen sind mir eine unschätzbare Hilfe gewesen.

Herrn Prof. Dr. Ralf Gössinger und besonders Herrn JProf. Dr. Grigory Pishchulov danke ich für die vielen interessanten Gespräche im Kolloquium, in denen neue Aspekte eröffnet und alte diskutiert wurden. Dank dieser Gespräche konnten einige wichtige Themen in meine Arbeit einfließen.

Meinen Kolleginnen Eva-Maria Sprengel und Christin Otto möchte ich für die schöne Zeit während meiner Promotion danken. Die gesellige, aber auch stets arbeitsame Atmosphäre am Lehrstuhl hat mir besonders in schwierigen Phasen der Promotion sehr geholfen.

Besonderer Dank gebührt meiner Frau Daria, die mir in allen Phasen meiner Promotion stets zur Seite stand. Ihr Korrekturlesen und ihre Anmerkungen waren eine unermessliche Hilfe beim Erstellen dieser Arbeit.

Meinen Eltern Josef und Frieda Wendt danke ich dafür, mir den Wert von Bildung vermittelt und mich stets gefördert zu haben. Ohne die von ihnen geschaffenen Möglichkeiten wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Vielen herzlichen Dank!

Dortmund, im Mai 2016

Rolf Wendt

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Einstufige Produktions- und Distributionsmodelle</b>	<b>7</b>
2.1	Modellierung des allgemeinen Ein-Maschinen-Problems . . . . .	10
2.2	Modellierung des Reihenfolgeproblems mit unterschiedlichen parallelen Maschinen und reihenfolgeabhängigen Rüstzeiten . . . . .	12
2.3	Modellierung des Traveling Salesman Problems . . . . .	15
2.4	Modellierung des kapazitierten, distanzbeschränkten Vehicle Routing Problems mit Zeitfenstern . . . . .	24
2.5	Modellierung des Vehicle Routing Problems mit Belieferungsaufteilung . . . . .	33
2.6	Modellierung des Vehicle Routing Problems mit Zeitfenstern und mehrfachem Fahren der Transporter . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Formulierung des integrierten Produktions- und Distributionsplanungsproblems</b>	<b>51</b>
3.1	Beschreibung der Entscheidungssituation . . . . .	52
3.2	Beschreibung des Entscheidungsproblems . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Modellierung verschiedener Szenarien der integrierten Produktions- und Distributionsplanung</b>	<b>62</b>
4.1	Das Basis-Szenario der integrierten Produktions- und Distributionsplanung . . .	65
4.2	IPDSP-Szenarien mit Bestellungen mit Erfüllungszusage . . . . .	72
4.3	IPDSP-Szenarien mit einer Prioritätsordnung der Bestellungen . . . . .	73
4.4	IPDSP-Szenarien mit gebündelten Bestellungen . . . . .	73
4.5	IPDSP-Szenarien mit unterschiedlichem Höchstalter der jeweils bestellten Güter	74
4.6	IPDSP-Szenarien mit mehreren Maschinen unterschiedlichen Typs und Rüstzeiten	74
4.7	IPDSP-Szenarien mit mehreren Produktionsstandorten . . . . .	76
4.8	IPDSP-Szenarien mit einem heterogenem Fuhrpark . . . . .	79

4.8.1	Verallgemeinerung von IPDSP-Modellen mit heterogenem Fuhrpark . . .	81
4.9	IPDSP-Szenarien mit mehreren möglichen Belieferungszeitfenstern je Bestellung	82
4.10	IPDSP-Szenarien mit mehreren Touren pro Transporter . . . . .	83
4.10.1	Verallgemeinerung von IPDSP-Modellen mit mehreren Touren pro Transporter . . . . .	88
4.11	IPDSP-Szenarien mit Belieferungsaufteilung . . . . .	93
4.11.1	Verallgemeinerung von IPDSP-Modellen mit Belieferungsaufteilung . . . .	100
4.12	IPDSP-Szenarien mit mehreren Touren pro Transporter und Belieferungsaufteilung	103
4.12.1	Verallgemeinerung von IPDSP-Modellen mit mehreren Touren pro Transporter und Belieferungsaufteilung . . . . .	112
4.13	IPDSP-Szenarien mit Fahrtkosten, die vom Ladungsgewicht abhängen . . . . .	116
4.13.1	Berücksichtigung von Ladungsgewichtsabhängigen Fahrtkosten im IPDSP-Modell mit mehreren Touren pro Transportern . . . . .	117
4.13.2	Berücksichtigung von Ladungsgewichtsabhängigen Fahrtkosten im IPDSP-Modell mit mehreren Touren pro Transportern und Belieferungsaufteilung	119
<b>5</b>	<b>Ein Branch&amp;Bound-Verfahren zur Lösung des Basis-Szenarios der integrierten Produktions- und Distributionsplanung</b>	<b>122</b>
5.1	Ein allgemeines Branch&Bound-Verfahren . . . . .	123
5.2	Idee des Branch&Bound-Verfahrens zur Lösung des Problems . . . . .	125
5.3	Die untersuchten Lösungsraumteilmengen . . . . .	128
5.4	Die Zerlegung einer Lösungsraumteilmenge . . . . .	129
5.5	Wann eine Lösungsraumteilmenge nichtleer ist . . . . .	130
5.6	Eine zu einer Lösungsraumteilmenge gehörige Lösung . . . . .	131
5.7	Zulässigkeit eines Auslieferungsplans . . . . .	131
5.7.1	Überprüfung der Zulässigkeit eines Auslieferungsplans mittels eines MIP .	131
5.7.2	Notwendige Bedingungen für die Zulässigkeit eines Auslieferungsplans . .	133
5.7.3	Heuristische Bestimmung zulässiger Produktionsstartzeitpunkte und Auslieferungszeitpunkte . . . . .	135
5.8	Die untere Schrankenfunktion . . . . .	137
5.9	Die Wahl der zu verlängernden Auslieferungsreihenfolge . . . . .	144
5.10	Die Wahl der nächsten zu untersuchenden Lösungsraumteilmenge . . . . .	146
5.11	Das konkrete Branch&Bound-Verfahren . . . . .	147
<b>6</b>	<b>Performanceanalyse der Lösungsmethoden</b>	<b>149</b>

6.1	Generierung von Testinstanzen . . . . .	149
6.2	Analyse der Modelle von Tourenproblemen . . . . .	157
6.3	Analyse der unterschiedlichen Lösungsverfahren für das IPDSP . . . . .	162
6.3.1	Lösen von Probleminstanzen mit dem Basis-Modell . . . . .	162
6.3.2	Lösen von Probleminstanzen mit Verallgemeinerungen des Basis-Modells .	167
6.3.3	Lösen von Probleminstanzen mit dem Branch&Bound-Verfahren . . . . .	177
<b>7</b>	<b>Ein Programm zur Lösung von praktischen Problemstellungen</b>	<b>180</b>
7.1	Das Programm IntegratOR . . . . .	180
7.2	Technische Details der Implementierung . . . . .	184
7.3	Installationshinweise . . . . .	185
<b>8</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>186</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>188</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>194</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Vergleich von Entwicklungsaufwand und Güte eines Lösungsverfahrens bei unterschiedlichen Herangehensweisen (aus [Koc04]) . . . . .	9
2.2	Das Gantt-Diagramm eines Produktionsplans mit 3 Jobs auf einer Maschine . . .	11
2.3	Das Gantt-Diagramms eines Produktionsplans mit 6 Jobs auf 3 Maschinen . . .	13
2.4	Zulässige Lösung eines Rundreiseproblems mit 6 Orten . . . . .	16
2.5	Unzulässige Lösung eines Rundreiseproblems mit 6 Orten . . . . .	17
2.6	Zulässige Lösung eines Rundreiseproblems mit 6 Orten mit Positionen . . . . .	19
2.7	Unzulässige Lösung eines Rundreiseproblems mit 6 Orten mit Positionen . . . . .	20
2.8	Belegungen der Entscheidungsvariablen $x_{ij}$ des neuen Modells in der Lösung eines Rundreiseproblems mit 6 Orten . . . . .	22
2.9	Beispiel eines CDVRPTW . . . . .	25
2.10	Lösung eines CDVRPTW . . . . .	26
2.11	Die optimale Lösung eines CVRP und die optimale Lösung eines entsprechenden SDVRP (angelehnt an [DT89]) . . . . .	33
2.12	Beispiel eines $k$ -Teilkreises . . . . .	36
2.13	Nicht-schlechtere Lösung ohne $k$ -Teilkreis . . . . .	37
2.14	Die optimale Lösung eines VRPTWM . . . . .	41
2.15	Die optimale Lösung eines VRPTWM im neuen Modell . . . . .	46
3.1	Die jeweiligen Wege von Bestellungen durch die Entscheidungsstufen bei einem Problem der integrierten Produktions- und Distributionsplanung . . . . .	52
3.2	Beispiel einer Lösung einer Instanz des Basis-Szenarios des IPDSP . . . . .	60
4.1	Abhängigkeiten bei der Modellierung von Szenarien des IPDSP . . . . .	64
4.2	Beispiel für MIP . . . . .	66
4.3	Konstruktion der Nebenbedingungen (4.1.21) und (4.1.22) . . . . .	71
4.4	Zeitfensterabstand . . . . .	71

4.5	Beispiel für die Lösung einer Instanz eines IPDSP-Szenarios mit zwei Produktionsstandorten . . . . .	77
4.6	Beispiel für die Modellierung der Distribution in einer Lösung einer Instanz eines IPDSP-Szenarios mit mehreren Produktionsstandorten . . . . .	78
4.7	Beispiel für die Lösung einer Instanz eines Szenarios des IPDSP mit mehreren Touren pro Transporter . . . . .	84
4.8	Beispiel für die Modellierung der Distribution einer Lösung einer Instanz eines Szenarios des IPDSP mit mehreren Touren pro Transporter . . . . .	85
4.9	Beispiel für eine optimale Lösung einer Instanz eines Szenarios des IPDSP mit Belieferungsaufteilung . . . . .	94
4.10	Beispiel für die Distribution in einer optimalen Lösung einer Instanz eines Szenarios des IPDSP mit Belieferungsaufteilung ohne $k$ -Teilkreis . . . . .	95
4.11	Die Werte $d_{ik}$ im Verlauf einer Auslieferungsreihenfolge . . . . .	105
5.1	Beispiel für einen Branch&Bound-Baum . . . . .	124
5.2	Beispiel für gleichen Auslieferungsplan bei unterschiedlichem Entscheidungsweg .	127
5.3	Beispiel eines Entscheidungsprozesses . . . . .	127
5.4	( $J$ -)Fortsetzungen von $\sigma$ . . . . .	129
5.5	Relaxiertes Produktionszeitfenster . . . . .	134
5.6	Beispiel eines zulässigen Auslieferungsplans . . . . .	137
5.7	Beispiel der Fortsetzungsgraphen eines zulässigen Auslieferungsplans . . . . .	138
5.8	Verbleibende Auslieferungszeit . . . . .	139
5.9	Produktionszeit für einem einzelnen Transporter . . . . .	140
5.10	Relaxiertes Produktionszeitfenster für die Bestellungen von Transporter $k$ . . . .	141
6.1	Zielortskordinaten bei Testinstanzen ohne und mit Clustering . . . . .	150
6.2	Anpassung der Häufigkeiten in $\hat{P}_{x,y}$ . . . . .	152
7.1	Hauptfenster des Programms . . . . .	180
7.2	Dialog Unternehmenskonfiguration . . . . .	181
7.3	Dialog Werksverwaltung . . . . .	181
7.4	Dialog Kundenverwaltung . . . . .	182
7.5	Hauptfenster nach Eingabe einiger Ortsdaten . . . . .	182
7.6	Dialog Auftragsverwaltung . . . . .	182
7.7	Hauptfenster nach Lösungsvorgang . . . . .	183
7.8	Dialog Lösungsdetails des Produktionsplans . . . . .	183

7.9	Hauptfenster mit Dialog Lösungsdetails zum Fahrzeug „Transporter 1“ . . . . .	184
-----	---	-----

# Algorithmenverzeichnis

1	Allgemeines Branch&Bound-Verfahren . . . . .	124
2	Schrage-Algorithmus . . . . .	136
3	Konkretes Branch&Bound-Verfahren zur Lösung des Basis-Szenarios des IPDSP	147

# Kapitel 1

## Einleitung

Die Auswirkungen der Globalisierung sind allgegenwärtig. Standen Unternehmungen vor einigen Jahrhunderten hauptsächlich mit anderen Unternehmungen im regionalen Umfeld in Konkurrenz, so entwickelte sich diese Konkurrenzsituation immer weiter, bis sie zu Anfang des 21. Jahrhunderts einen Höhepunkt erreichte: Das Zeitalter der Globalisierung wurde erreicht. Ob es sich um T-Shirts aus Bangladesch oder Elektronikprodukte aus China handelt, häufig befindet sich dieser Tage der Konsument von Waren weit entfernt von deren Herstellungsort.

Somit stehen viele Unternehmungen in einem globalen Wettbewerb, in dem sie sich durchsetzen müssen. Ein Baustein hierzu ist eine effiziente Koordinierung der betrieblichen Produktions- und Transportabläufe. In diesem Bereich wurden in der Vergangenheit durch das Operations Research für vielfältige Problemstellungen Hilfsmittel entwickelt, ob für die Maschinenbelegungsplanung oder für die Transportplanung (z. B. für das Transportproblem, das Traveling Salesman Problem und das Vehicle Routing Problem), um nur einige zu nennen. Dabei umfasst die jeweils behandelte Problemstellung nur eine Stufe in der Wertschöpfungskette eines Unternehmens.

Insbesondere im letzten Jahrzehnt hat sich die Forschung auch Problemstellungen zugewandt, die mehrere Stufen umfassen. Die im Rahmen dieser Arbeit behandelten Problemstellungen der integrierten Produktions- und Distributionsplanung mit Routingentscheidungen fällt in diese Kategorie. In den hier behandelten zweistufigen Problemstellungen sind Produktions- und Distributionsentscheidungen koordiniert vorzunehmen. Es werden dabei zuerst Güter produziert und nachfolgend ausgeliefert. Damit fließen zwei Arten von „klassischen Problemstellungen“ des Operations Research in diese integrierte Problemstellung ein: Probleme der Maschinenbelegungsplanung sowie spezielle Vehicle Routing Probleme.

Durch die Lösung als integrierte Problemstellung wird eine größere Realitätsnähe der Lösung erreicht, als bei separater Planung von Produktion und Distribution ohne Berücksichtigung etwaiger Interdependenzen erreicht werden kann. Dies ermöglicht beispielsweise die Berücksichtigung einer Haltbarkeitsdauer der produzierten Güter. Durch die enge zeitliche Aufeinanderfolge von Produktion und Distribution wird aber auch erreicht, dass eine zwischenzeitliche Lagerung der produzierten Güter entfallen kann, was zu einer Kostenersparnis führt.

### Einordnung in die Literatur

Das dieser Arbeit zugrunde liegende Themengebiet entstammt dem Supply Chain Management (SCM). Das SCM ist nach Ellram und Cooper [EC90] definiert als „an integrative philosophy

to manage the total flow of a distribution channel from supplier to the ultimate user“, also als ein integrativer Ansatz, um den Gesamtfluss eines Vertriebskanals vom Lieferanten bis zum Endverbraucher zu verwalten. Dabei umfasst das Betätigungsfeld des SCM nach De Kok und Graves [DKG03] das taktische, das strategische und das operationelle SCM. Diese wiederum können (vgl. [CM07]) wie folgt beschrieben werden.

- Das strategische SCM, bei dem das Flussnetzwerk entworfen wird, indem Entscheidungen bezüglich der Struktur des Vertriebsnetzwerks für die nächsten Jahre getroffen werden.
- Das taktische SCM, bei dem in dem im strategischen SCM festgelegten Vertriebsnetzwerk Entscheidungen über einem Zeithorizont zwischen einem Vierteljahr und einem Jahr getroffen werden.
- Das operationelle SCM, das sich mit Unternehmensentscheidungen beschäftigt, die täglich oder wöchentlich getroffen werden sollen.

Innerhalb des SCM sind die in dieser Arbeit behandelten Problemstellungen somit dem *operationellen SCM* zuzuordnen, bei dem detaillierte Kundenanfragen vorliegen (Pull-Strategie) und eine dementsprechend detaillierte Planung erforderlich ist.

In der Literatur sind bereits ähnliche Problemstellungen der integrierten Produktions- und Distributionsplanung untersucht worden. Chen [Che10] unterteilt in einer Literaturübersicht die behandelten Probleme abhängig von der Art des Distributionsvorgangs in fünf Klassen. Die in dieser Arbeit untersuchten Problemstellungen entstammen der Klasse der Probleme, in denen die Auslieferung als „*Sammelauslieferung mit Rundreise*“ vorgenommen wird.

Dabei ist hervorzuheben, dass hier die Produktion und Distribution von Produkten betrachtet wird, die nur innerhalb einer gewissen Zeitspanne nach ihrer Produktion ausgeliefert werden können, die also über ein *beschränktes Höchstalter* verfügen. Aufgrund der Beschränkung des Höchstalters ist eine integrierte Planung besonders von Vorteil, da die Distribution nicht zu spät nach der Produktion erfolgen kann und bei separater Planung nicht ohne Weiteres gewährleistet werden kann, dass eine produzierte Menge auch vor Ablauf ihres Höchstalters ausgeliefert wird. Ein Ablauf des Höchstalters ist allerdings als wirtschaftlich ungünstig zu bewerten. Ein Höchstalter eines Produkts entstammt in der Regel aus einer beschränkten Haltbarkeitsdauer, wie sie zum Beispiel typischerweise bei den folgenden Produkten auftritt:

- Industrieklebstoffe [AGL08, GLLS08],
- Transportbeton [GL04],
- Biochemische Erzeugnisse [APS99],
- Frischeprodukte wie Milch, Gemüse, Fleisch [TK01],
- Arzneimittel [FPZ86, LKJL14],
- Backwaren [FGG12],
- Blumen [CHC09],
- Lebende Tiere [CHC09] und
- Nahrungsmittel im Bereich des Catering [CV05].

Industrieklebstoffe, Transportbeton, biochemische Erzeugnisse und Frischeprodukte müssen den Kunden innerhalb einer gewissen Zeitspanne erreichen, damit das jeweilige Produkt noch zur weiteren Verwendung geeignet ist. Arzneimittel<sup>1</sup> sind nur innerhalb einer gewissen Zeitspanne verwendungsfähig. Backwaren, Blumen und lebende Tiere wie z. B. Mehlwürmer zum Angeln müssen den jeweiligen Händler erreichen, solange sie noch verkaufsfähig sind. Nahrungsmittel im Catering müssen einige Kunden wie z. B. Restaurants und Cafés ebenfalls innerhalb einer gewissen Zeitspanne erreichen, um bei Anlieferung noch verkaufsfähig sein, und andere Kunden wie z. B. Krankenhäusern und Schulen, um den von den Kunden geäußerten Qualitätsansprüchen für deren Konsumenten zu entsprechen. Wegen der Verderblichkeit der vorgestellten Produkte ist eine enge Koordination zwischen Produktions- und Distributionsplanung notwendig, um eine rechtzeitige Auslieferung des jeweiligen Produkts sicherzustellen.

Im Rahmen der integrierten Produktions- und Distributionsplanung stellen insbesondere drei Publikationen einen konkreten Bezug zur wirtschaftlichen Realität her. Farahani, Grunow und Günther [FGG12] entwickeln auf Grundlage einer Fallstudie eines Catering-Unternehmens in Kopenhagen einen integrierten Ansatz zur Produktions- und Distributionsplanung. Sowohl Armstrong, Lei und Gao [AGL08] als auch Geismar et al. [GLLS08] motivieren ihre Entwicklung integrierter Ansätze mit der Produktions- und Distributionsplanung von Industrieklebstoffen für Sperrholzplatten.

Einige Probleme aus der Klasse „Sammelauslieferung mit Rundreise“, bei denen auch verderbliche Güter betrachtet werden, sind bereits untersucht worden. Geismar et al. [GLLS08] entwickeln einen genetischen und einen memetischen Algorithmus zur Lösung einer Problemstellung, in welcher die Produktion von Bestellungen über eine gewisse Menge eines verderblichen Gutes auf einer einzelnen Maschine vorgenommen werden muss. Die Auslieferung muss von einem einzelnen Fahrzeug vorgenommen werden, welches zur Auslieferung mehrfach das Depot verlassen und wieder zurückkehren darf. Das Ziel ist die Minimierung des spätesten Auslieferungszeitpunkts. Für diesen entwickeln sie auch untere Schranken.

Devapriya [Dev08] untersucht Problemstellungen mit einem oder zwei Produktionsstätten, wobei jede Produktionsstätte über eine Transporterflotte verfügt. Diese Transporter dürfen weder direkt noch indirekt von einer Produktionsstätte zur anderen fahren. Es liegen Kundenaufträge für jeweils eine bestimmte Menge eines verderblichen Guts vor, die innerhalb des Planungshorizonts und innerhalb der Haltbarkeitsdauer den Standort des jeweiligen Kunden erreichen müssen. Ziel ist es, eine Produktionszuordnung, einen Produktionsplan und einen Distributionsplan zu finden, der die Distributionskosten minimiert, welche sich aus Transporterfixkosten und Fahrtkosten zusammensetzen. Sowohl eine Formulierung des Problems als gemischt-ganzzahliges lineares Programm als auch Heuristiken zur Lösung des Problems werden entwickelt. Auch untere Schranken für die Zielfunktion werden gegeben. Eine optimale Lösung für die von ihm vorgestellten Probleminstanzen kann innerhalb von 20 Stunden mittels des von Devapriya formulierten gemischt-ganzzahligen linearen Programms nur für Probleminstanzen mit höchstens vier Kundenaufträgen ermittelt werden.

Ein weiteres Problem wurde von Chen und Vairaktarakis [CV05] untersucht. Ihr Ziel ist die Maximierung einer Konvexkombination von Kundenservicequalität und Distributionskosten. Dabei findet die Produktion des betrachteten verderblichen Gutes entweder auf einer einzelnen oder auf parallelen Maschinen statt. Es liegen entweder von einem oder von mehreren Kunden Aufträge vor. Die Servicequalität wird entweder über die späteste oder die mittlere Auslieferungszeit gemessen. Für die Auslieferung stehen ausreichend viele homogene Transporter bereit. Für jede

---

<sup>1</sup>Insbesondere Radiopharmaka verfügen nur über eine sehr geringe Haltbarkeitsdauer.

der so entstehenden acht Variationen ihres Problems entwickeln sie, wenn möglich, einen exakten Algorithmus, dessen Laufzeit zwar in der Anzahl der Kunden exponentiell wächst, aber nicht in der Anzahl der Kundenaufträge.<sup>2</sup> Ist dies nicht möglich, entwickeln sie eine Heuristik und untersuchen sowohl ihre Laufzeit im schlimmsten Fall als auch ihre asymptotische Laufzeit. Auch führen sie Performanceanalysen durch.

Die integrierte Planung von Produktion und Distribution eines Produkts ohne Haltbarkeitsbeschränkung in einem Szenario mit parallelen Maschinen wurde von Ullrich [Ull13] untersucht. Im betrachteten Szenario liegen Aufträge vor, die von einer heterogenen Flotte von Fahrzeugen ausgeliefert werden müssen. Zu jedem Auftrag existieren eine Bearbeitungszeit, ein Belieferungszeitfenster, eine Servicezeit und ein Ort für die Auslieferung. Jede Maschine und jeder Transporter verfügt über einen bestimmten Bereitstellungszeitpunkt. Für das betrachtete Problem gibt Ullrich ein gemischt-ganzzahliges lineares Programm mit einer vier-Index-Formulierung an und entwickelt einen genetischen Algorithmus, den er mit klassischen Dekompositionsansätzen vergleicht.

Einen starken Einfluss auf diese Arbeit hat auch der Artikel von Armstrong, Lei und Gao [AGL08], obgleich er eine Problemstellung ohne Routingentscheidungen behandelt. Es wird ein Szenario mit einer Maschine und einem Fahrzeug betrachtet, in dem Kunden Bestellungen über eine bestimmte Menge eines verderblichen Guts aufgeben, das sie innerhalb eines von ihnen vorgegebenen Zeitfensters erhalten möchten. Dabei ist eine Reihenfolge der Bestellungen vorgegeben. Es ist nun zu entscheiden, welche Bestellung angenommen und welche abgelehnt werden soll. Daraus ergibt sich eine Reihenfolge der angenommenen Bestellungen als Teilreihenfolge der Reihenfolge der Bestellungen. Die Reihenfolge der angenommenen Bestellungen ist sowohl die Reihenfolge für die Produktion als auch für die Auslieferung der Bestellungen, demzufolge muss keine Rundreisepflicht vorgenommen werden. Das Ziel ist die Maximierung der Anzahl der ausgelieferten Güter. Armstrong, Lei und Gao entwickeln ein gemischt-ganzzahliges lineares Programm zur Formulierung ihres Problems und einen Branch&Bound-Algorithmus.

Generalisierungen des von Armstrong, Lei und Gao betrachteten Problems wurden von Viergutz [Vie11] untersucht. Dabei wurden variable Produktions- und Distributionsreihenfolgen ebenso betrachtet wie mehrere Transporter und mehrfaches Fahren von Transportern. Für die größte Generalisierung wird ein gemischt-ganzzahliges lineares Programm mit einer drei-Index-Formulierung basierend auf [AGP10] entwickelt. Für die Lösung der betrachteten Probleme wurden auf Tabu-Suche basierende Algorithmen entwickelt. Auch wird eine leicht korrigierte Version des von Armstrong, Lei und Gao vorgestellten Branch&Bound-Algorithmus gegeben.

Über die vorstehend erwähnten Artikel lässt sich zusammenfassend sagen, dass sich eine große Mehrheit der Veröffentlichungen im Bereich der integrierten Produktions- und Distributionsplanung mit Routingentscheidungen mit dem Nachweis der  $\mathcal{NP}$ -Schwierigkeit der Problemstellung, gefolgt von der Entwicklung einer Heuristik, gegebenenfalls ergänzt durch die Herleitung von Schranken, mit denen die Güte der mit der Heuristik gefundenen Lösungen eingeordnet werden kann, beschäftigt. Hingegen wurde bisher wenig Wert auf die Entwicklung von exakten Verfahren im Bereich der integrierten Produktions- und Distributionsplanung mit Routingentscheidungen gelegt, insbesondere da es sich um ein  $\mathcal{NP}$ -schweres Problem handelt. Ebenfalls existieren bisher keine Modelle, die in Hinsicht auf die Lösung derartiger Probleme von Nutzen wären.

---

<sup>2</sup>Es wird davon ausgegangen, dass von den Kunden jeweils mehrere Aufträge eingehen und die Anzahl der Kundenaufträge weitaus größer ist als die Anzahl der Kunden.

## Ziele der Arbeit

Mit der vorliegenden Arbeit soll nun die Literatur an ebendieser Stelle erweitert werden. Es steht also die *optimale* Lösung von Problemstellungen der integrierten Produktions und Distributionsplanung mit Routingentscheidungen im Mittelpunkt. Hierzu werden zwei Wege aufgezeigt: Ein erster beginnt mit der mathematischen Modellierung der behandelten Problemstellungen, gefolgt von der Bestimmung einer Lösung mit einer Standard-Software. Im Gegensatz zu den aus der Literatur bekannten Modellen sollen sich die in dieser Arbeit vorgestellten Modelle auch dazu eignen, mit ihnen Probleminstanzen einer derartigen Größe zu lösen, dass sie auch hinsichtlich praktischer Anwendungen von Relevanz sind.

Zur Konzeption derartiger Modelle sollen zunächst Modelle für einstufige Problemstellungen aus der Literatur aufgearbeitet und gegebenenfalls neu entwickelt werden. Insbesondere im Bereich der Rundreiseprobleme gibt es zwar für einige Problemklassen wie das kapazitierte, das distanzbeschränkte sowie für das Vehicle Routing Problem mit Zeitfenstern bereits Modelle, die zur Verwendung in der Praxis geeignet sind. Für andere Problemklassen wie das Vehicle Routing Problem mit Belieferungsaufteilung und das Vehicle Routing Problem mit Zeitfenstern und mehrfachem Fahren der Transporter enthalten die jeweils aus der Literatur bekannten Modelle allerdings eine Anzahl binärer Entscheidungsvariablen, die kubisch von der Eingabegröße abhängt, sodass vermutet werden kann, dass neue Modelle mit einer quadratischen Anzahl binärer Entscheidungsvariablen diesen hinsichtlich der Lösbarkeit mittels MIP-Solver überlegen sind. Eben solche Modelle sollen im Rahmen dieser Arbeit entwickelt werden.

Beim Übergang zur Betrachtung von integrierten Problemstellungen zeigt sich, dass sich um eine *Klasse* von Problemstellungen handelt, welcher sich anhand verschiedener Merkmale charakterisieren lassen. Je nach Ausprägung dieser Merkmale sind unterschiedliche Modellierungsansätze zu verfolgen. Dazu soll ein Modellierungsbaukasten entwickelt werden, mit dessen Hilfe sich flexibel für jede Problemstellung ein entsprechendes Modell formulieren lässt. Um eine Verwendung dieses Modellierungsbaukastens zu erleichtern und ihn übersichtlich darzustellen, ist ein strukturiertes Vorgehen bei der Analyse der unterschiedlichen Problemstellungen vonnöten.

Ein zweiter Weg, der für eine spezielle integrierte Problemstellung eingeschlagen wird, besteht in der Entwicklung eines Branch&Bound-Verfahrens. Mit diesem soll ein erster Zugang zur Lösung von Problemstellungen der integrierten Produktions- und Distributionsplanung mit Routingentscheidungen mittels eines Branch&Bound-Verfahrens geschaffen werden. In diesem Rahmen sind insbesondere eine Systematik zur Untersuchung des Lösungsraums sowie Schranken zum Ausschließen von Lösungsraumteilen zu bestimmen.

## Aufbau der Arbeit

Eine Analyse einstufiger Problemstellungen, die entweder der Produktions- oder der Distributionsplanung entstammen, wird im zweiten Kapitel durchgeführt. Zu diesen werden Modelle aus der Literatur vorgestellt, aber ebenfalls neue Modelle entwickelt. Insbesondere wird betrachtet, inwiefern sich Modelle mit einer geringeren Anzahl binärer Entscheidungsvariablen formulieren lassen.

Im dritten Kapitel wird dann die im Rahmen dieser Arbeit intensiv untersuchte Problemklasse der integrierten Produktions und Distributionsplanung detailliert vorgestellt und die in ihr enthaltenen Problemstellungen anhand von 13 Eigenschaften in unterschiedliche „Szenarien“ unterteilt. Die Modellierung derartiger Szenarien wird in Kapitel vier vorgestellt. Dabei werden

für alle Kombinationen von Ausprägungen der Eigenschaften Modelle entwickelt, wobei teils die Erkenntnisse aus Kapitel zwei zurate gezogen werden. Neben „klassischen Zugängen“ werden hier auch neue Modellierungsideen vorgestellt.

Für die Lösung des einfachsten „Basis-Szenarios“ der integrierten Produktions- und Distributionsplanung wird im fünften Kapitel ein Branch&Bound-Algorithmus entwickelt. Es folgt in Kapitel sechs die Vorstellung der Generierung von Testinstanzen für die im Rahmen der Arbeit behandelten Problemstellungen. Darauf aufbauend erfolgt eine Evaluation der Modelle einstufiger Problemstellungen. Zuletzt wird eine Analyse der Lösungsmöglichkeit der Testinstanzen mit Hilfe der in Kapitel vier vorgestellten Modelle beziehungsweise des in Kapitel fünf vorgestellten Branch&Bound-Algorithmus vorgenommen.

Eine praktische Anwendung der entwickelten Modelle wird in Kapitel sieben in Form einer Java-Applikation vorgestellt. Diese demonstriert, wie ein in Kapitel fünf entwickeltes Modell zur Lösung einer praktischen Problemstellung eingesetzt werden kann. Abschließend folgt im achten Kapitel ein Resümee.

## Kapitel 2

# Einstufige Produktions- und Distributionsmodelle

In diesem Kapitel werden Modelle für einstufige Produktions- beziehungsweise Distributionsplanungsprobleme vorgestellt und evaluiert. Dazu werden die jeweiligen Problemstellungen vorgestellt, motiviert und modelliert. Zur Modellierung werden zum einen in der Literatur bekannte Modelle ausgearbeitet sowie teilweise angepasst, zum anderen werden für einige Problemstellungen neue Modelle entwickelt.

Bei der Entwicklung der innerhalb dieses Kapitels neu vorgestellten Modelle war es von zentraler Bedeutung, dass sich diese möglichst gut dazu eignen, in der jeweiligen Form modellierte Probleminstanzen zu lösen. Insbesondere in Hinsicht auf die weitere Verwendung der Modellierungsideen im Rahmen von integrierten Produktions- und Distributionsmodellen im folgenden Kapitel ist dies wesentlich.

Die Grundlage für eine Lösung der im Folgenden entwickelten Modelle wurde 1947 von Georg Dantzig gelegt [Dan98], indem dieser das sogenannte *Simplex-Verfahren* publizierte, welches – in unterschiedlichen Variationen – noch heute Verwendung findet. Die Verfahrensklasse der Simplex-Verfahren dient zur Lösung linearer Programme, welche bei gegebener Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und gegebener rechter Seite  $b \in \mathbb{R}^m$  sowie gesuchtem  $x \in \mathbb{R}^n$  die folgende Form haben.

$$\begin{aligned} \max \quad & c^t x \\ \text{u.d.N.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Es existieren Verfahren mit polynomieller Laufzeit zur Lösung dieses Problemtyps [Kha79]. Dennoch werden fast durchweg die Simplex-Verfahren angewandt, obwohl sie über eine im schlimmsten Fall exponentielle Laufzeit verfügen [KM72, Jer73, GS79, BDF<sup>+</sup>95]. In der Praxis sind die Simplex-Verfahren den Verfahren mit polynomieller Laufzeit überlegen.

Als problematisch an der Formulierung von Problemen als lineares Programm erwies sich im Laufe der Zeit, dass reale Sachverhalte nicht immer hinreichend gut abgebildet werden können. Insbesondere wenn ganzzahlige Lösungen gesucht sind, etwa die Anzahl von nicht-teilbaren Objekten wie Flugzeugen, Personen oder Aufgaben, kann nicht garantiert werden, dass bei einer

für ein lineares Programm bestimmten Lösung die entsprechende Entscheidungsvariable auch einen ganzzahligen Wert annimmt.<sup>1</sup> Auch die Modellierung einiger logischer Implikationen kann im Allgemeinen nicht mit kontinuierlichen Variablen umgesetzt werden.

Dementsprechend war es ein logischer Schritt, ein lineares Programm zu formulieren, in dem einige Variablen auch einer Ganzzahligkeitsbedingung genügen müssen. Ein derartiges gemischt-ganzzahliges lineares Programm hat bei gegebener Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und gegebener rechter Seite  $b \in \mathbb{R}^m$  sowie gesuchtem  $x \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{N}_0^{n_2}$  mit  $n = n_1 + n_2$  die folgende Form.

$$\begin{aligned} & \max c^t x \\ & \text{u.d.N. } Ax \leq b \\ & \quad x \geq 0 \\ & \quad x_{n_1+1}, \dots, x_n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Derartige gemischt-ganzzahlige lineare Programme zu lösen ist im Allgemeinen  $\mathcal{NP}$ -schwer. Um sie dennoch ebenso wie lineare Programme optimal lösen zu können, war es notwendig, neue Verfahren zu entwickeln. Diese mussten auch in der Lage sein, Ganzzahligkeitsbedingungen zu berücksichtigen. Von großer Bedeutung sind hierbei die Schnittebenenverfahren. Ein solches wurde erstmals 1958 von Gomory [Gom58] vorgestellt. Bei Schnittebenenverfahren wird das gemischt-ganzzahlige lineare Programm sukzessive um weitere Nebenbedingungen ergänzt, wodurch aber keine zulässige Lösung unzulässig werden darf. Dies geschieht solange, bis eine Lösung des zugehörigen relaxierten linearen Programms, welches sich aus dem gemischt-ganzzahligen linearen Programm durch Entfernen der Ganzzahligkeitsbedingungen  $x_{n_1+1}, \dots, x_n \in \mathbb{N}_0$  ergibt, ganzzahlig ist. Mittels dieser hinzugefügten Nebenbedingungen, welche auch als Schnittebenen bezeichnet werden, werden also im relaxierten linearen Programm nicht-ganzzahlige, unzulässige Lösungen „abgeschnitten“, ohne dabei auch ganzzahlige, zulässige Lösungen „abzuschneiden“, bis das (mittels eines Simplex-Verfahrens „leicht“ zu lösende) relaxierte lineare Programm eine ganzzahlige optimale Lösung besitzt.

Zu einer anderen bedeutenden Verfahrensklasse zur Lösung gemischt-ganzzahliger linearer Programme gehören sogenannte Branch-and-Bound-Verfahren. Ein solches wurde erstmals 1960 von Land und Doig [LD60] formuliert. Bei dieser Verfahrensklasse wird der Ansatz verfolgt, den Lösungsraum, das heißt die Menge aller zulässigen Lösungen des gemischt-ganzzahligen linearen Programms, sukzessive vollständig disjunkt in Teilmengen zu zerlegen („Branching“). Durch gegebenenfalls im Verlauf des Verfahrens gefundene zulässige Lösungen und Schranken für den Zielfunktionswert aller Lösungen in einer Teilmenge können im Verlauf des Verfahrens Teilmengen von der weiteren Untersuchung ausgeschlossen werden („Bounding“), da sie keine optimale Lösung enthalten. Im günstigen Fall kann die Lösung eines gemischt-ganzzahligen linearen Programms schnell bestimmt werden, da viele Lösungen gar nicht untersucht werden müssen, weil diejenige Teilmenge, welche sie enthält, im Laufe des Verfahrens von der weiteren Untersuchung ausgeschlossen wurde.

Insbesondere durch diese beiden Verfahren und durch das aus einer Kombination von beiden hervorgehende Branch-and-Cut-Verfahren, welches von Padberg und Rinaldi (s. [PR87, PR91])

<sup>1</sup>Zumindest kann dies im Allgemeinen nicht garantiert werden. Für spezielle lineare Programme, die gewissen hinreichenden Bedingungen (vollständige Unimodularität der Matrix  $A$ , Ganzzahligkeit der rechten Seite  $b$  und Existenz einer optimalen Lösung des linearen Programms) genügen, kann die Existenz einer optimalen ganzzahligen Lösung garantiert werden, da genau bei ebendiesen linearen Programmen jede Ecke des durch den zulässigen Bereich bestimmten Polytops auf einer ganzzahligen Koordinate liegt [HK56].

entwickelt wurde, ist es möglich, gemischt-ganzzahlige lineare Programme hinreichend effizient zu lösen. Da, wie erwähnt, das Lösen eines gemischt-ganzzahligen linearen Programms im Allgemeinen  $\mathcal{NP}$ -schwer ist, sind aber auch den mit diesen Verfahren lösbaren Problemen Grenzen bezüglich ihrer Größenordnung gesetzt. Die als gemischt-ganzzahlige lineare Programme formulierten Probleme sind zumeist aber auch  $\mathcal{NP}$ -schwer, sodass es dennoch Sinn ergibt, Probleme in diese Form zu bringen, weil in der Vergangenheit viel Aufwand für die Entwicklung von Programmen zur Lösung gemischt-ganzzahliger linearer Programme („MIP-Solver“) betrieben wurde. Deswegen besteht vielfach die schnellste Möglichkeit zur Entwicklung eines Lösungsverfahrens für ein Optimierungsproblem darin, es als gemischt-ganzzahlige lineare Programme zu formulieren und mithilfe eines MIP-Solvers zu lösen, falls dieses Vorgehen möglich ist. Allerdings sei erwähnt, dass dies zwar einen sehr schnell umzusetzenden Ansatz darstellt, es aber abhängig davon, mit welcher Intention das Entscheidungsproblem gelöst werden soll, gegebenenfalls bessere Lösungsverfahren gibt. Soll ein Lösungsverfahren häufiger angewendet werden oder ist der finanzielle Einfluss der Entscheidung groß, so ist auch ein größerer Entwicklungsaufwand gerechtfertigt.

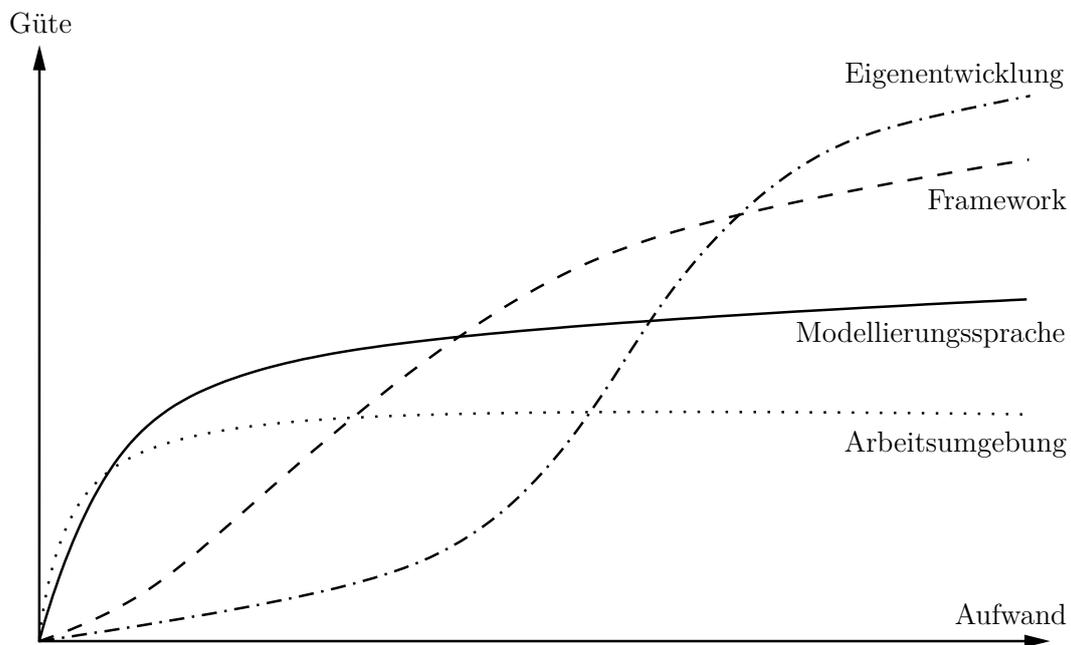


Abbildung 2.1: Vergleich von Entwicklungsaufwand und Güte eines Lösungsverfahrens bei unterschiedlichen Herangehensweisen (aus [Koc04])

Für die effiziente Lösung spezieller Optimierungsprobleme ist die Entwicklung besonderer, auf das jeweilige Problem bezogener Lösungsverfahren unabdinglich. Dies wird durch Abbildung 2.1 illustriert. In dieser von Koch [Koc04] postulierten Grafik sind die Güte eines nach dem jeweiligen Konzept entwickelten Lösungsverfahrens in Abhängigkeit von der zur Entwicklung des Lösungsverfahrens benötigten Zeit (Aufwand) dargestellt. Koch vergleicht dabei die folgenden Herangehensweisen:

- **Arbeitsumgebung:** Zur Lösung des Problems werden mathematische Arbeitsumgebungen wie MATLAB<sup>2</sup> oder Mathematica<sup>3</sup> benutzt.
- **Modellierungssprache:** Ein theoretisches Modell des Problems wird mittels einer Modellierungssprache in eine für den Rechner verständliche Darstellung überführt und mittels einer allgemeinen Lösungssoftware gelöst.
- **Framework:** Ein generelles Framework zur Lösung allgemeiner Optimierungsprobleme wird auf das spezielle Optimierungsproblem angepasst, z. B. durch Angabe von speziellen Ablaufregeln oder Schranken für den Zielfunktionswert von Lösungen.
- **Eigenentwicklung:** Zur Lösung des Problems wird ein Algorithmus entworfen und implementiert, gegebenenfalls unter Rückgriff auf bestehende Programmbibliotheken.

Aus Abbildung 2.1 lässt sich entnehmen, dass sich die besten Lösungsverfahren als Eigenentwicklungen entwerfen lassen. Wenn das Ziel hingegen ist, in kurzer Zeit ein möglichst gutes Lösungsverfahren zu entwickeln, so ist die Formulierung des behandelten Problems in Form eines theoretischen Modells zu bevorzugen, welches dann mit Hilfe einer Modellierungssprache in für einen Rechner verständliche Form gebracht und mit Hilfe von allgemeiner Lösungssoftware gelöst wird. Für einen detaillierten Vergleich der Ansätze siehe [Koc04].

Ein Ziel dieser Arbeit soll es sein, dem Leser mathematische Modelle von einstufigen Produktions- beziehungsweise Distributionsproblemen vorzustellen und zu evaluieren, inwiefern sie dazu geeignet sind, sich mittels einer Modellierungssprache übersetzen und dann von Lösungssoftware lösen zu lassen. Dies erlaubt auch eine Einschätzung darüber, ob es sinnvoll ist, die in der jeweiligen Modellierung verwendeten Ideen auch zur Modellierung von Teilen komplexer Problemstellungen zu verwenden.

In diesem Kapitel erfolgt deshalb ein Überblick über die Formulierung einiger ausgewählter einstufiger Probleme als gemischt-ganzzahlige lineare Programme. Dazu wird zum einen die entsprechende Literatur aufgearbeitet, zum anderen werden bei Problemen aus dem Bereich der Tourenplanung zusätzlich neue Modellierungsansätze verfolgt. Weiterhin werden im Bereich der Tourenplanung die jeweiligen Modelle für einige Probleminstanzen aufgestellt und es wird evaluiert, in welchem Rahmen sie sich durch einen MIP-Solver lösen lassen.

Die ersten beiden untersuchten Problemstellungen entstammen dem Scheduling. Zunächst wird ein Modell für das allgemeine Ein-Maschinen-Problem vorgestellt, nachfolgend eines für das Reihenfolgeproblem mit unterschiedlichen parallelen Maschinen und reihenfolgeabhängigen Rüstzeiten. Danach erfolgt eine Behandlung verschiedener Tourenplanungsprobleme: des Traveling Salesman Problems, des kapazitierten, distanzbeschränkten Vehicle Routing Problems mit Zeitfenstern, des Vehicle Routing Problems mit Belieferungsaufteilung und des Vehicle Routing Problems mit Zeitfenstern und mehrfachem Fahren der Transporter.

## 2.1 Modellierung des allgemeinen Ein-Maschinen-Problems

Der Bereich der Reihenfolgeprobleme ist eines der am intensivsten untersuchten Teilgebiete des Operations Research, dementsprechend viele Modelle sind entwickelt worden. Eine grundlegende

---

<sup>2</sup><http://www.mathworks.de/products/matlab/>

<sup>3</sup><http://www.wolfram.com/mathematica/>

Formulierung des allgemeinen Ein-Maschinen-Problems, die auf der Arbeit von Manne [Man60] beruht, soll an dieser Stelle vorgestellt werden.

Das allgemeine Ein-Maschinen-Problem gliedert sich wie folgt. Es sind  $n$  Jobs gegeben, wobei jeder Job  $i = 1, \dots, n$  über eine Bearbeitungszeit  $p_i$  verfügt. Diese Jobs sollen nun unter einer gewissen Zielsetzung auf der zur Verfügung stehenden Maschine bearbeitet werden. Es dürfen dabei zu keinem Zeitpunkt mehrere Jobs gleichzeitig bearbeitet werden, der Produktionsplan muss also „überschneidungsfrei“ sein. Auch darf die einmal gestartete Bearbeitung eines Jobs nicht unterbrochen werden.

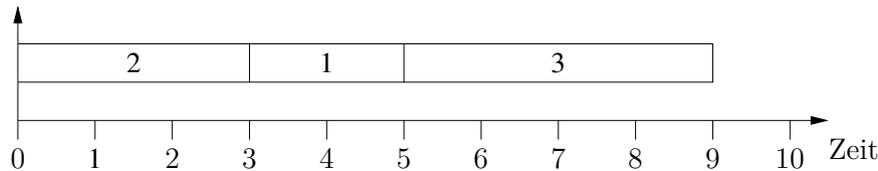


Abbildung 2.2: Das Gantt-Diagramm eines Produktionsplans mit 3 Jobs auf einer Maschine

Abbildung 2.2 zeigt einen Produktionsplan für ein Beispiel mit 3 Jobs mit jeweiliger Bearbeitungszeit  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$  und  $p_3 = 4$  in Form eines Gantt-Diagramms. In dieser Darstellungsform werden die Jobs in Form von Rechtecken dargestellt, deren Länge der jeweiligen Bearbeitungszeit entspricht. Auf der horizontalen Achse wird die Zeit abgetragen und durch die Position des Rechtecks ergibt sich der Bearbeitungszeitraum des jeweiligen Jobs. So wird Job 1 im Intervall  $[3, 5]$  bearbeitet, Job 2 im Intervall  $[0, 3]$  und Job 3 im Intervall  $[5, 9]$ .

In der von Manne vorgeschlagenen Formulierung soll für jeden Job  $i = 1, \dots, n$  der Produktionsstartzeitpunkt durch die nichtnegative Entscheidungsvariable

$$s_i \hat{=} \text{Produktionsstartzeitpunkt von Job } i$$

festgelegt werden. Da der Produktionsplan überschneidungsfrei sein muss, muss nun für zwei Jobs  $i$  und  $j$  mit  $i \neq j$  entweder

$$s_i + p_i \leq s_j \text{ oder } s_j + p_j \leq s_i$$

gelten. Zur Modellierung dieser Entscheidungsschranken der Überschneidungsfreiheit werden binäre Variablen

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls Job } i \text{ (irgendwann) vor Job } j \text{ produziert wird} \\ 0, & \text{falls Job } j \text{ (irgendwann) vor Job } i \text{ produziert wird} \end{cases}$$

eingeführt. Es gilt  $y_{ji} = 1 - y_{ij}$ , wodurch sich die Anzahl der binären Entscheidungsvariablen auf  $n(n - 1)/2$  reduzieren lässt, indem diese Entscheidungsvariablen auf  $y_{ij}$  mit  $i < j$  für  $i, j = 1, \dots, n$  beschränkt werden.

Mit Hilfe dieser binären Entscheidungsvariablen  $y_{ij}$  soll nun erreicht werden, dass für jedes  $i = 1, \dots, n$  und  $j = 1, \dots, n$  mit  $i < j$  jeweils eine der Nebenbedingungen  $s_i + p_i \leq s_j$  beziehungsweise  $s_j + p_j \leq s_i$  gilt. Im Falle, dass  $y_{ij} = 1$  gilt, soll  $s_i + p_i \leq s_j$  gelten, falls  $y_{ij} = 0$  gilt, soll  $s_j + p_j \leq s_i$  gelten. Um dies zu modellieren, wird bei derjenigen Nebenbedingung, welche nicht notwendigerweise erfüllt sein muss, auf der rechten Seite ein ausreichend großer Parameter  $M_1$

addiert.<sup>4</sup> Dieser sorgt dafür, dass die jeweilige Nebenbedingung von allen zulässigen Belegungen von  $s_i$  und  $s_j$  erfüllt wird. Es soll also gelten:

$$\begin{aligned} y_{ij} = 1 &\implies s_i + p_i \leq s_j \text{ und } s_j + p_j \leq s_i + M_1 \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, \\ y_{ij} = 0 &\implies s_j + p_j \leq s_i \text{ und } s_i + p_i \leq s_j + M_1 \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j. \end{aligned}$$

Um zu erreichen, dass abhängig von der Belegung von  $y_{ij}$  auf der entsprechenden rechten Seite der Parameter  $M_1$  addiert wird, soll dieser Parameter nun mit der Entscheidungsvariable  $y_{ij}$  derart verknüpft werden, dass er abhängig von ihrer Belegung addiert wird. Dies führt zu den folgenden beiden Nebenbedingungen.

$$\begin{aligned} s_i + p_i &\leq s_j + M_1 \cdot (1 - y_{ij}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, \\ s_j + p_j &\leq s_i + M_1 \cdot y_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j \end{aligned}$$

Damit ergibt sich bei zu minimierender Zielfunktion  $f(s_1, \dots, s_n)$  folgendes Modell:

$$\begin{aligned} \min & f(s_1, \dots, s_n) \\ \text{u.d.N.} & s_i + p_i \leq s_j + M_1 \cdot (1 - y_{ij}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, \\ & s_j + p_j \leq s_i + M_1 \cdot y_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, \\ & y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, \\ & s_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Die Zielfunktion ist in diesem Modell allgemein gehalten, da sie in den folgenden Ausführungen nicht von Belang sein wird. Übliche Systemziele sind die Minimierung des spätesten Beendigungszeitpunkts, die Minimierung der Gesamtdurchlaufzeit bei gegebenen Bereitstellungszeitpunkten für alle Jobs oder die Minimierung der maximalen Verspätung, wenn für alle Jobs späteste Beendigungszeitpunkte gegeben sind. Teilweise müssen dem Modell zur Modellierung dieser Systemziele in einem gemischt-ganzzahligen linearen Programm neben einer speziellen Zielfunktion auch zusätzliche Nebenbedingungen hinzugefügt werden, wie etwa die Einhaltung eines Bereitstellungsstermins  $r_i$  für jeden Job  $i = 1, \dots, n$  durch die Nebenbedingung  $r_i \leq s_i$  sichergestellt wird. Eine ausführliche Übersicht über mögliche Systemziele findet sich in [Pin12].

## 2.2 Modellierung des Reihenfolgeproblems mit unterschiedlichen parallelen Maschinen und reihenfolgeabhängigen Rüstzeiten

Das von Manne formulierte Modell des Ein-Maschinen-Problems lässt sich, wie Balakrishnan, Kanet und Sridharan [BKS99] sowie Zhu und Heady [ZH00] gezeigt haben, auch auf den Fall von unterschiedlichen parallelen Maschinen und reihenfolgeabhängigen Rüstzeiten erweitern. Die jeweiligen Modelle beruhen auf den gleichen Ideen, daher soll in diesem Abschnitt nur dasjenige der Erstgenannten vorgestellt werden.

---

<sup>4</sup>Diese Idee, zu einer Seite einer Nebenbedingung fallabhängig einen ausreichend großen Parameter  $M_\square$  zu addieren, wird im Rahmen dieser Arbeit häufiger Verwendung finden. Zum besseren Verständnis kann der Leser annehmen, dass  $M_\square = \infty$  gilt. Um zu verdeutlichen, dass diese Parameter unterschiedlich und von der jeweiligen Nebenbedingung abhängig sind, seien diese durchnummeriert.

Bei einem Reihenfolgeproblem mit unterschiedlichen parallelen Maschinen und reihenfolgeabhängigen Rüstzeiten ist eine Menge  $\Omega$  von Maschinen gegeben. Auf einer Maschine  $k \in \Omega$  kann ein Job  $i \in \{1, \dots, n\}$  in der Bearbeitungszeit  $p_{ik}$  bearbeitet werden. Die Bearbeitung eines Jobs darf nicht unterbrochen werden und auf einer Maschine kann maximal ein Job zur Zeit bearbeitet werden. Jeder Job muss genau einmal auf genau einer der Maschinen bearbeitet werden. Des Weiteren sind Rüstzeiten  $\vartheta_{ijk}$  gegeben. Während dieser Zeitspanne muss Maschine  $k \in \Omega$  zwischen dem Ende der Produktion von Job  $i$  und dem Beginn der Produktion von Job  $j$  ruhen, falls auf ihr Job  $j$  nach Job  $i$  produziert werden soll. In dieser Zeit ist zum Beispiel eine Umrüstung der Maschine vorzunehmen. Außerdem sind Rüstzeiten  $\vartheta_{0jk}$  gegeben, welche der Zeit zum Rüsten einer ungerüsteten Maschine zur Produktion von Job  $j$  entsprechen. Analog sind Rüstzeiten  $\vartheta_{i0k}$  für die Abrüstung einer Maschine denkbar, finden aber im vorgestellten Modell keine Berücksichtigung.

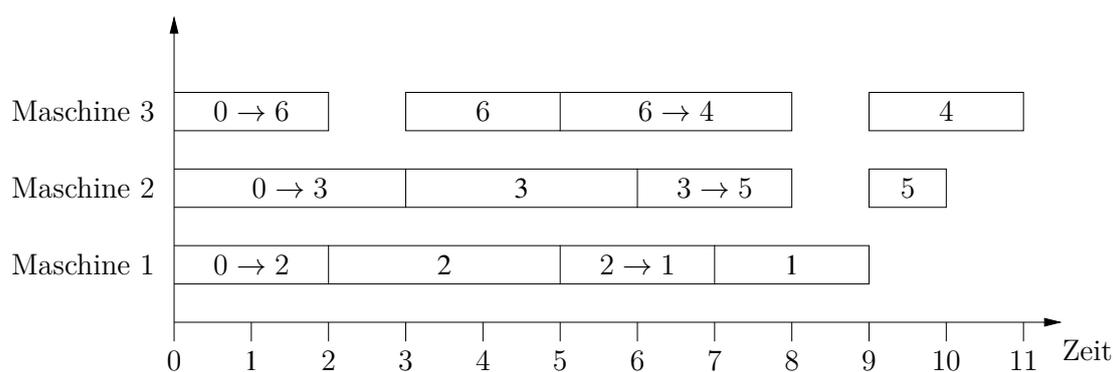


Abbildung 2.3: Das Gantt-Diagramm eines Produktionsplans mit 6 Jobs auf 3 Maschinen

Abbildung 2.3 zeigt das Gantt-Diagramm eines Produktionsplans mit 6 Jobs auf 3 Maschinen. Die Jobs werden durch Rechtecke dargestellt, welche die Nummer des jeweiligen Jobs  $i$  enthalten und deren Länge  $p_i$  beträgt. In Zeiten, in denen in einer Zeile kein Rechteck vorhanden ist, ruht die jeweilige Maschine. Jede Maschine  $k$  muss zu Beginn vom ungerüsteten Zustand in den Zustand für die Bearbeitung des jeweils ersten Jobs  $j_k$  umgerüstet werden. Der auf der jeweiligen Maschine dafür notwendige Rüstvorgang ist durch ein Rechteck der Breite  $\vartheta_{0j_k k}$  dargestellt, welches die Bezeichnung  $0 \rightarrow j_k$  enthält. Rechtecke mit einer Bezeichnung der Art  $i \rightarrow j$  stellen die Umrüstung von der Konfiguration zur Bearbeitung von Job  $i$  zur Konfiguration zur Bearbeitung von Job  $j$  auf der jeweiligen Maschine  $k$  dar. Die Länge dieser Rechtecke entspricht der Rüstzeit  $\vartheta_{ijk}$ .

Es wird davon ausgegangen, dass ebendiese Rüstzeiten die Dreiecksungleichung

$$\vartheta_{ijk} + \vartheta_{jlk} \geq \vartheta_{ilk} \quad \forall i, j, l = 0, \dots, n, k \in \Omega$$

einhalten. Ein direktes Umrüsten von der Maschinenkonfiguration zur Produktion von Job  $i$  zur Maschinenkonfiguration zur Produktion von Job  $l$  soll also nicht länger dauern als ein sukzessives Umrüsten von der Maschinenkonfiguration zur Produktion von Job  $i$  über die Maschinenkonfiguration zur Produktion von Job  $j$  zur Maschinenkonfiguration zur Produktion von Job  $l$ . Diese Annahme ist realistisch, denn wenn in der Praxis ein Umrüsten über den „Umweg“ einer zwischenzeitlichen Maschinenkonfiguration zur Produktion zur Bearbeitung von Job  $j$  zeitlich günstiger wäre als ein direktes Umrüsten, so würde dieser „Umweg“ in der Praxis standardmäßig als Umrüstmöglichkeit gewählt werden. Dies hätte zur Folge, dass das direkte Umrüsten wiederum genauso schnell ginge wie das Umrüsten mit dem zwischenzeitlichen Umrüsten auf

die Maschinenkonfiguration zur Bearbeitung von Job  $j$ . Die Gültigkeit der Dreiecksungleichung ist also eine sinnvolle Annahme.

Balakrishnan, Kanet und Sridharan schlagen zur Formulierung analog zu [Man60] nichtnegative Entscheidungsvariablen

$$s_i \triangleq \text{Produktionsstartzeitpunkt von Job } i$$

mit  $i = 1, \dots, n$  vor.<sup>5</sup> Außerdem führen sie binäre Entscheidungsvariablen

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls Job } i \text{ (irgendwann) vor Job } j \text{ auf der selben Maschine produziert wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für  $i, j = 1, \dots, n$  und  $i < j$  ein. Weiterhin verwenden sie binäre Entscheidungsvariablen

$$z_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{falls Job } i \text{ auf Maschine } k \text{ produziert wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für  $i = 1, \dots, n$  und  $k \in \Omega$ .

Da jeder Job auf genau einer Maschine bearbeitet werden muss, muss

$$\sum_{k \in \Omega} z_{ik} = 1 \tag{2.2.1}$$

gelten.

Falls Job  $i$  und  $j$  auf derselben Maschine  $k$  bearbeitet werden, also  $z_{ik} = z_{jk} = 1$  gilt, ist mit diesen Entscheidungsvariablen entweder

$$s_i + p_{ik} + \vartheta_{ijk} \leq s_j \text{ oder } s_j + p_{jk} + \vartheta_{jik} \leq s_i$$

zu fordern, um für die jeweilige Maschine  $k \in \Omega$  einen überschneidungsfreien Produktionsplan zu erhalten. Bei derjenigen dieser beiden Nebenbedingungen, welche nicht notwendigerweise eingehalten werden muss, soll analog zur Formulierung von Manne [Man60] ein ausreichend großer Parameter  $M_2$  zur rechten Seite addiert werden, sodass die betreffende Nebenbedingung für alle zulässigen Belegungen von  $s_i$  und  $s_j$  erfüllt ist. Es soll also für alle  $i, j = 1, \dots, n$  mit  $i < j$  und  $k \in \Omega$  gelten:

$$\begin{aligned} y_{ij} = 1, z_{ik} = z_{jk} = 1 &\implies s_i + p_{ik} + \vartheta_{ijk} \leq s_j \text{ und } s_j + p_{jk} + \vartheta_{jik} \leq s_i + M_2, \\ y_{ij} = 0, z_{ik} = z_{jk} = 1 &\implies s_j + p_{jk} + \vartheta_{jik} \leq s_i \text{ und } s_i + p_{ik} + \vartheta_{ijk} \leq s_j + M_2, \\ z_{ik} = 0 \text{ oder } z_{jk} = 0 &\implies s_j + p_{jk} + \vartheta_{jik} \leq s_i + M_2 \text{ und } s_i + p_{ik} + \vartheta_{ijk} \leq s_j + M_2. \end{aligned}$$

Es sei dabei auch erlaubt, dass in diesen Ungleichungen statt  $M_2$  ein Vielfaches von  $M_2$  zur jeweiligen rechten Seite addiert wird, wenn mehrere notwendige Voraussetzungen dafür, dass eine Nebenbedingung eingehalten werden muss, nicht erfüllt sind. Dies lässt sich durch die folgenden beiden Nebenbedingungen ausdrücken.

$$s_i + p_{ik} + \vartheta_{ijk} \leq s_j + M_2 \cdot (3 - y_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k \in \Omega, \tag{2.2.2}$$

$$s_j + p_{jk} + \vartheta_{jik} \leq s_i + M_2 \cdot (2 + y_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k \in \Omega. \tag{2.2.3}$$

<sup>5</sup>Tatsächlich haben die in [BKS99] formulierten Entscheidungsvariablen andere Bezeichnungen, die hier – wie im Folgenden bei anderen Modellen auch – zur Vereinheitlichung angepasst wurden.

Eine weitere Feststellung, die getroffen werden muss, ist, dass im Unterschied zur Formulierung von Manne [Man60] die Belegung  $y_{ij} = 0$  nicht notwendigerweise bedeuten muss, dass Job  $j$  (irgendwann) vor Job  $i$  auf der selben Maschine bearbeitet wird. Hinreichend für  $y_{ij} = 0$  ist ebenfalls, dass Job  $i$  und Job  $j$  auf unterschiedlichen Maschinen bearbeitet werden. Dies soll im Modell explizit durch die Nebenbedingung

$$z_{ik} + \left( \sum_{k' \in \Omega \setminus \{k\}} z_{jk'} \right) + y_{ij} \leq 2 \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k \in \Omega \quad (2.2.4)$$

gefordert werden. Ist Job  $i$  Maschine  $k$  zugeordnet und Job  $j$  einer anderen Maschine  $k'$ , so wird mit dieser Nebenbedingung erreicht, dass  $y_{ij} = 0$  gelten muss.

Geht man wiederum von einer zu minimierenden Zielfunktion  $f(s_1, \dots, s_n)$  aus, so ergibt sich folgendes Modell:

$$\begin{aligned} & \min f(s_1, \dots, s_n) \\ \text{u.d.N. } & \sum_{k \in \Omega} z_{ik} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

$$s_i + p_{ik} + \vartheta_{ijk} \leq s_j + M_2 \cdot (3 - y_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k \in \Omega, \quad (2.2.2)$$

$$s_j + p_{jk} + \vartheta_{jik} \leq s_i + M_2 \cdot (2 + y_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k \in \Omega, \quad (2.2.3)$$

$$z_{ik} + \sum_{k' \in \Omega \setminus \{k\}} z_{jk'} + y_{ij} \leq 2 \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k \in \Omega, \quad (2.2.4)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j,$$

$$z_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n, k \in \Omega,$$

$$s_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Auch für diese Art von Problemstellung sind zahlreiche Zielfunktionen denkbar, deren explizite Spezifikation im weiteren Verlauf dieser Arbeit aber nicht von Relevanz ist. Deswegen sei auch hier auf [Pin12] verwiesen. Balakrishnan, Kanet und Sridharan [BKS99] verwenden in ihrem Artikel als Zielfunktion die Summe einer Linearkombination von Frühzeitigkeit und Verspätung der Jobs.

## 2.3 Modellierung des Traveling Salesman Problems

Nach der Behandlung von Reihenfolgeproblemen im Rahmen von Maschinenbelegungsplanung soll mit der Untersuchung von Tourenplanungsproblemen fortgefahren werden. Als erstes wird in in diesem Abschnitt das Traveling Salesman Problem (TSP, oft auch Problem des Handlungsreisenden genannt) untersucht.

Beim TSP sind  $n$  Orte gegeben, die in einer kürzesten Rundreise besucht werden sollen. Bekannt sind dabei die Entfernungen  $t_{ij}$ , welche bei der Fahrt von einem Ort  $i = 1, \dots, n$  zu einem Ort  $j = 1, \dots, n$  zurückzulegen sind.

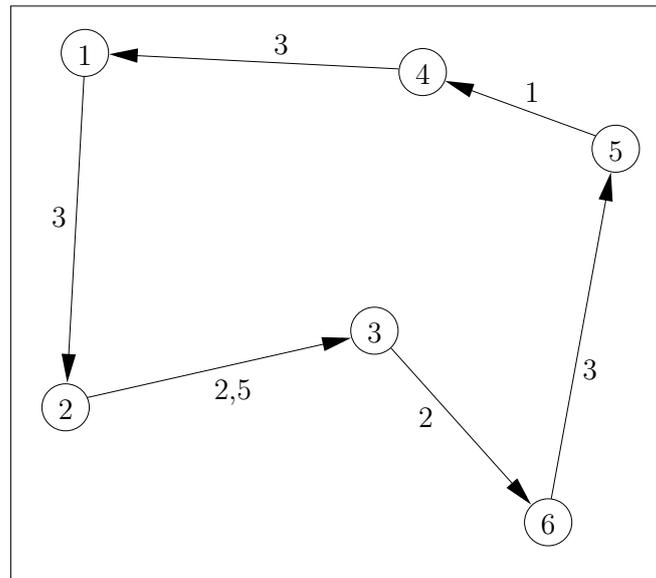


Abbildung 2.4: Zulässige Lösung eines Rundreiseproblems mit 6 Orten

Abbildung 2.4 zeigt, wie eine zulässige Lösung des Rundreiseproblems mit 6 Orten aussehen kann. Die umkreisten Zahlen stehen für den jeweiligen Ort. Ein Pfeil von einem Ort  $i$  zu einem Ort  $j$  zeigt an, dass Ort  $j$  direkt nach Ort  $i$  auf der hier angegebenen Rundreise besucht wird. Die Zahlen an den Pfeilen geben die Entfernungen zwischen den jeweiligen Orten an (die Entfernungen zwischen den nicht aufeinanderfolgend besuchten Orten seien der Übersichtlichkeit halber nicht dargestellt). Die dargestellte Rundreise hat die Länge 14,5.

### Formulierung nach Dantzig, Fulkerson und Johnson

Zur Formulierung des Rundreiseproblems als gemischt-ganzzahliges lineares Programm hat es im Laufe der Zeit viele Ansätze gegeben, der erste hier vorgestellte erfolgte im Jahr 1959 durch Dantzig, Fulkerson und Johnson [DFJ59].

Es werden dabei binäre Entscheidungsvariablen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls Ort } i \text{ direkt vor Ort } j \text{ auf der Rundreise besucht wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für  $i, j = 1, \dots, n$  definiert.

Jeder dieser Orte soll auf einer Rundreise genau einmal erreicht und genau einmal verlassen werden. Dies lässt sich über die folgenden Nebenbedingungen modellieren.

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \tag{2.3.1}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \tag{2.3.2}$$

Diese Nebenbedingungen sind allerdings nicht hinreichend für die Zulässigkeit einer Lösung des Rundreiseproblems, wie sich anhand der unzulässigen Lösung in Abbildung 2.5 erkennen lässt.

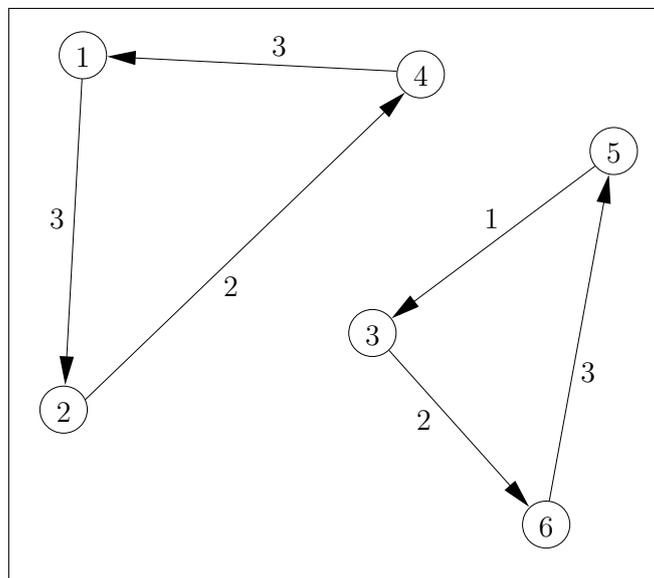


Abbildung 2.5: Unzulässige Lösung eines Rundreiseproblems mit 6 Orten

In dieser Lösung wird jeder Ort zwar genau einmal erreicht und genau einmal verlassen, aber durch die Pfeile entstehen nicht eine, sondern zwei Rundreisen.

Um derartige Subtouren zu vermeiden, sind weitere Nebenbedingungen notwendig. Die Überlegungen Dantzig's, Fulkerson's und Johnson's beruhen darauf, dass in jeder Lösung, die aus genau einer Rundreise besteht, von einer Teilmenge der Orte mindestens eine Fahrt zu einem Ort stattfinden muss, der nicht Element dieser Teilmenge ist. Zerlegt man also die Menge aller Orte vollständig disjunkt in zwei Teilmengen, so muss jeweils mindestens eine Fahrt von einem Ort in der einen Teilmenge zu einem Ort in der anderen Teilmenge stattfinden, da alle Orte auf einer gemeinsamen Rundreise liegen. Dies muss für jede vollständige disjunkte Zerlegung der Menge aller Orte gelten (wobei in jeder Teilmenge mindestens ein Ort enthalten sein muss). Dies wird mit der folgenden Nebenbedingung gefordert.

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S'} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S, S' \subsetneq \{1, \dots, n\}, S \cup S' = \{1, \dots, n\} \quad (2.3.3)$$

Betrachtet man Abbildung 2.5 in Hinsicht auf diese Nebenbedingungen, so lässt sich für  $S = \{1, 2, 4\}$  und  $S' = \{3, 5, 6\}$  erkennen, dass

$$\sum_{i \in \{1, 2, 4\}} \sum_{j \in \{3, 5, 6\}} x_{ij} = 0$$

gilt, die Nebenbedingung für diese Wahl von  $S$  und  $S'$  also verletzt wird.

Zusammen mit der Zielfunktion, in der die insgesamt zurückgelegte Distanz minimiert wird, ergibt sich schließlich das folgende Modell.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \\ \text{u.d.N.} \quad & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.3.2)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S'} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S, S' \subsetneq \{1, \dots, n\}, S \cup S' = \{1, \dots, n\} \quad (2.3.3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Unvorteilhaft an dieser Formulierung sind die Nebenbedingungen (2.3.3). Die Anzahl dieser Nebenbedingungen beträgt  $2^n - 2$ , wodurch alleine das explizite Ausformulieren dieses Modells eine mit  $n$  exponentiell wachsende Zeit erfordert.<sup>6</sup> Diese Problematik tritt bei dem folgenden Modell des TSP nicht auf.

### Formulierung nach Miller, Tucker und Zemlin

Die im Jahr 1960 von Miller, Tucker und Zemlin [MTZ60] vorgestellte Formulierung des TSP verfügt über eine polynomielle Anzahl von Nebenbedingungen. Ebenso bietet das von ihnen vorgestellte Modell vielfältige Erweiterungsmöglichkeiten.

Miller, Tucker und Zemlin greifen genau wie Dantzig, Fulkerson und Johnson in ihrer Formulierung auf binäre Entscheidungsvariablen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls Ort } i \text{ direkt vor Ort } j \text{ auf der Rundreise besucht wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Orte  $i, j = 1, \dots, n$  zurück. Außerdem sind in ihrem Modell nichtnegative Hilfsvariablen

$$h_i \hat{=} \text{Position von Ort } i \text{ auf der Rundreise}$$

für jeden Ort  $i = 1, \dots, n$  gegeben.

Jeder Ort muss nun zum einen genau einen Vorgänger und zum anderen genau einen Nachfolger haben, dies wird ebenso wie bei [DFJ59] mittels der folgenden Nebenbedingungen erreicht.

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.3.4)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.3.5)$$

Die Vermeidung von Subtouren erfolgt mit einem anderen Ansatz als in [DFJ59]. Es soll die Position  $h_i$  beginnend mit  $h_1 = 1$  beim ersten Ort bei jedem nachfolgenden Ort um 1 hochgezählt werden. Eine Ausnahme soll bei der Rückkehr vom letzten besuchten Ort auf der Rundreise zum

<sup>6</sup> Auch durch Ausnutzen von Symmetrieüberlegungen zwischen den Mengen  $S$  und  $S'$  in den Nebenbedingungen (2.3.3) lässt sich die Anzahl dieser Nebenbedingungen nicht signifikant senken.

Ausgangsort 1 gemacht werden. Dies wird mit den folgenden Nebenbedingungen, welche auch als Miller-Tucker-Zemlin-Nebenbedingungen bezeichnet werden, erreicht.

$$h_1 = 1 \tag{2.3.6}$$

$$2 \leq h_i \leq n \quad \forall i = 2, \dots, n \tag{2.3.7}$$

$$h_i + 1 \leq h_j + (n - 1)(1 - x_{ij}) \quad \forall i, j = 2, \dots, n \tag{2.3.8}$$

Mit der ersten Nebenbedingung (2.3.6) wird die Position von Ort 1 auf 1 fixiert. Die zweite Art von Nebenbedingungen (2.3.7) engt die möglichen Positionen der anderen Orte auf Werte zwischen 2 und  $n$  ein. Mittels der letzten Art von Nebenbedingungen (2.3.8) wird das Hochzählen der Positionen von Ort  $i$  zu Ort  $j$  erreicht, wenn Ort  $j$  direkter Nachfolger von Ort  $i$  ist, also  $x_{ij} = 1$  gilt. In diesem Fall lautet die Nebenbedingung  $h_i + 1 \leq h_j$ , die Position von Ort  $j$  muss also um mindestens eins größer sein als die Position von Ort  $i$ . Gilt  $x_{ij} = 0$ , so ist die Nebenbedingung für alle bezüglich der zweiten Nebenbedingungsart zulässigen Belegungen von  $h_i$  und  $h_j$  erfüllt, da sich mit  $(n - 1)$  ein ausreichend großer Summand auf der rechten Seite der Nebenbedingung befindet.

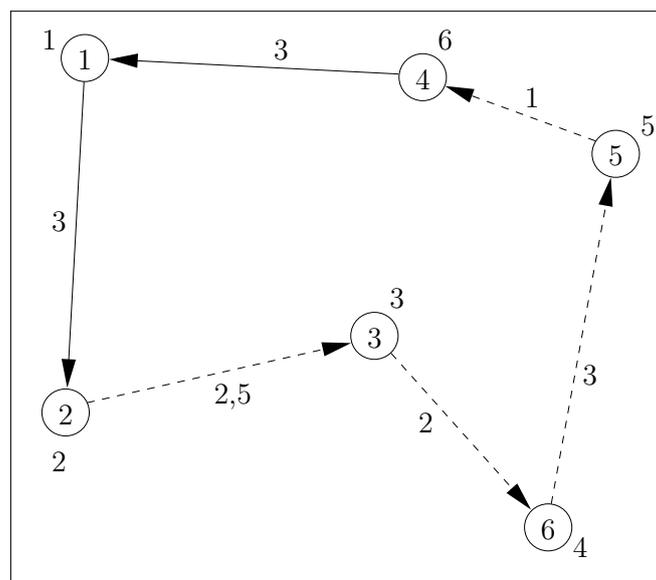


Abbildung 2.6: Zulässige Lösung eines Rundreiseproblems mit 6 Orten mit Positionen

Abbildung 2.6 zeigt die Lösung des Rundreiseproblems aus Abbildung 2.4, ergänzt um die Positionsangaben der Orte, welche als Zahlen neben den Orten stehen. Gilt  $h_i = l$ , so wird Ort  $i$  als  $l$ -ter besucht. Bei den Pfeilen mit gestrichelten Linien ist eine Nebenbedingung der letzten Art wirksam, das heißt zum Beispiel, dass  $h_2 + 1 \leq h_3$  wegen  $x_{2,3} = 1$  gilt. Die Nebenbedingungen (2.3.8) sorgen somit dafür, dass keine Subtour entstehen kann, die nicht Ort 1 enthält.

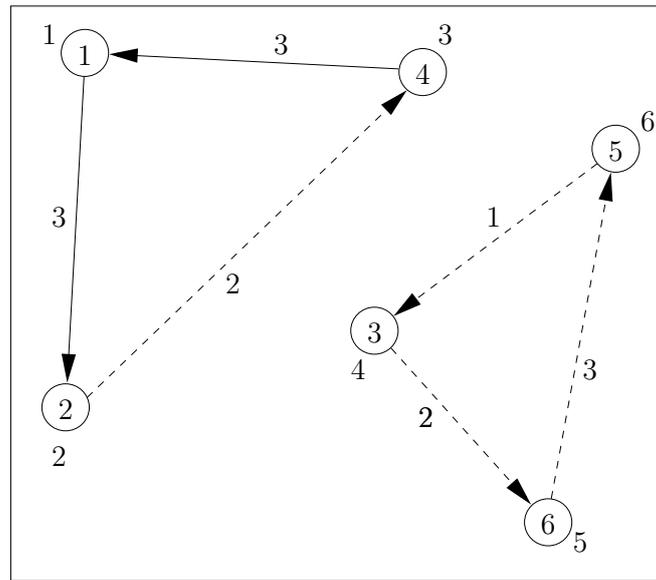


Abbildung 2.7: Unzulässige Lösung eines Rundreiseproblems mit 6 Orten mit Positionen

Dies wird in Abbildung 2.7 illustriert. Während die Subtour mit den Orten 1, 2 und 4 alle Nebenbedingungen einhält, verletzt die Subtour mit den Orten 3, 5 und 6 die Miller-Tucker-Zemlin-Nebenbedingungen. Es müssen wegen  $x_{3,6} = x_{6,5} = x_{5,3} = 1$  die Ungleichungen  $h_3 + 1 \leq h_6$ ,  $h_6 + 1 \leq h_5$  und  $h_5 + 1 \leq h_3$  gelten, woraus der Widerspruch  $h_3 + 3 \leq h_3$  folgt. Durch diese Subtour ist die Lösung demzufolge unzulässig. Anschaulich lässt sich dies in Abbildung 2.7 dadurch erkennen, dass Ort 3 an Position  $h_3 = 4$  ist, Ort 6 an Position  $h_6 = 5$  und Ort 5 an Position  $h_5 = 6$ . Aufgrund von  $x_{5,3} = 1$  müsste Ort 4 aber auch mindestens Position  $h_4 = 7$  einnehmen, jedoch ist für diesen Ort bereits Position 4 festgelegt.

Zusammen mit der Zielfunktion, in der die insgesamt zurückgelegte Distanz minimiert wird, ergibt sich aus den vorgestellten Nebenbedingungen das folgende Modell.

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij}$$

$$\text{u.d.N.} \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.3.4)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.3.5)$$

$$h_1 = 1 \quad (2.3.6)$$

$$2 \leq h_i \leq n \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.3.7)$$

$$h_i + 1 \leq h_j + (n-1)(1-x_{ij}) \quad \forall i, j = 2, \dots, n \quad (2.3.8)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

$$h_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Dieses Modell verfügt im Gegensatz zum in [DFJ59] vorgestellten nur über  $\mathcal{O}(n^2)$  Nebenbedingungen, dafür aber über die zusätzlichen nichtnegativen Hilfsvariablen  $h_i$ . Durch ihren von den

Nebenbedingungen (2.3.7) beschränkten Wertebereich und das mit Hilfe der Nebenbedingungen (2.3.8) abgebildete „Hochzählen“ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Orten nehmen diese Hilfsvariablen  $h_i$  nur ganzzahlige Werte an.

### Ein neues gemischt-ganzzahliges lineares Programm für das Traveling Salesman Problem

Ein weiteres Modell für das Rundreiseproblem soll in dieser Arbeit beruhend auf [Man60] bzw. [BKS99] formuliert werden. Bisher wurden in der Literatur keine Adaptionen der in [Man60] bzw. [BKS99] vorgestellten Modelle auf Tourenplanungsprobleme untersucht, dies soll in diesem Unterabschnitt nachgeholt werden.

Das im Folgenden vorgestellte Modell eignet sich allerdings nur zur Lösung eines metrischen TSPs. Ein metrisches TSP oder  $\Delta$ -TSP ist ein TSP, bei dem die Entfernungen  $t_{ij}$  die Dreiecksungleichung

$$t_{ij} + t_{jl} \geq t_{il}$$

einhalten. Bei der Mehrheit der praktischen Problemstellungen handelt es sich um ein  $\Delta$ -TSP.

Das im Folgenden präsentierte Modell ähnelt der disjunktiven Scheduling-Formulierung des TSP von Baker [Bak83]. Unter der Annahme symmetrischer Entfernungen ( $t_{ij} = t_{ji}$ ) formuliert Baker mit nichtnegativen Hilfsvariablen

$$\varphi_i \hat{=} \text{bis zu Ort } i \text{ zurückgelegte Entfernung}$$

mit  $i = 1, \dots, n+1$ , wobei Ort  $n+1$  und Ort 1 identisch sind, das TSP folgendermaßen:

$$\min \varphi_1 - \varphi_{n+1} \tag{2.3.9}$$

$$\text{u.d.N. } \varphi_i - \varphi_{n+1} \geq t_{1i} \quad \forall i = 2, \dots, n \tag{2.3.10}$$

$$|\varphi_j - \varphi_i| \geq t_{ji} \quad \forall i, j = 2, \dots, n \text{ mit } i < j \tag{2.3.11}$$

$$\varphi_1 - \varphi_i \geq t_{i1} \quad \forall i = 2, \dots, n \tag{2.3.12}$$

$$\varphi_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n+1$$

Die dem Modell zugrunde liegende Idee ist, dass für die bis zu Ort  $i$  bzw. bis zu Ort  $j$  zurückgelegten Entfernungen entweder

$$\varphi_i + t_{ij} \leq \varphi_j$$

(wenn Ort  $j$  nach Ort  $i$  besucht wird) oder

$$\varphi_j + t_{ji} \leq \varphi_i$$

(wenn Ort  $i$  nach Ort  $j$  besucht wird) gelten. Aufgrund der Symmetrie der Entfernungen ist dies äquivalent zu den Nebenbedingungen (2.3.11). Ort  $n+1$  steht dabei erster und Ort 1 als letzter fest, demzufolge vereinfachen sich die Nebenbedingungen für diese Orte zu (2.3.10) und (2.3.12).

Leider ist dieses Modell aufgrund der Betragsfunktionen in den Nebenbedingungen (2.3.11) nicht linear. Das im Folgenden vorgestellte Modell für das  $\Delta$ -TSP stellt eine Linearisierung des Modells von Baker dar, die auch asymmetrische Entfernungen berücksichtigt. Es ist analog zu den Überlegungen aus Abschnitt 2.2 basierend auf der Formulierung von Balakrishnan, Kanet und Sridharan [BKS99] für das Parallel-Maschinen-Scheduling-Problem mit Rüstzeiten formuliert.

Bei diesem Modell soll zuerst angenommen werden, dass die Rundreise in Ort 1 sowohl startet als auch endet. Die Reihenfolge der übrigen Orte werde durch binäre Entscheidungsvariablen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls Ort } i \text{ (irgendwann) vor Ort } j \text{ auf der Rundreise besucht wird} \\ 0, & \text{falls Ort } j \text{ (irgendwann) vor Ort } i \text{ auf der Rundreise besucht wird} \end{cases}$$

mit  $i, j = 2, \dots, n$  und  $i < j$  festgelegt.

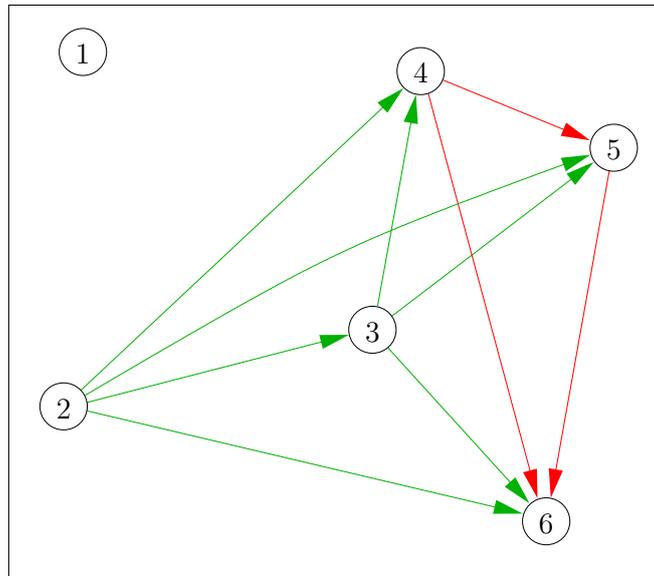


Abbildung 2.8: Belegungen der Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  des neuen Modells in der Lösung eines Rundreiseproblems mit 6 Orten

In Abbildung 2.8 werden die Belegungen der so definierten Entscheidungsvariablen bezüglich der Lösung  $(1, 2, 3, 6, 5, 4, 1)$  aus Abbildung 2.4 dargestellt. Jede Kante  $(i, j)$ , bei der Ort  $i$  vor Ort  $j$  besucht wird ( $x_{ij} = 1$ ), wurde dabei grün eingefärbt, jede Kante  $(i, j)$ , bei der Ort  $j$  vor Ort  $i$  besucht wird ( $x_{ij} = 0$ ), rot. Die rot gefärbte Kante  $(4, 6)$  gibt also zum Beispiel an, dass Ort 6 vor Ort 4 besucht wird, die grün gefärbte Kante  $(3, 6)$ , dass Ort 3 vor Ort 6 besucht wird. Da Ort 1 als Start- und Endort festgelegt worden ist, gibt es keine Kanten von oder zu Knoten 1. Dabei muss die durch die Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  vorgenommene Orientierung der Kanten konsistent sein. Das heißt, dass Ort  $i$  vor Ort  $l$  in der Reihenfolge sein muss, falls Ort  $i$  vor Ort  $j$  und Ort  $j$  vor Ort  $l$  in der Reihenfolge ist. Abbildung 2.8 lässt auch erkennen, dass sich aus der Belegung der Entscheidungsvariablen nicht ohne Weiteres die zugehörige Rundtour erkennen lässt, wie es bei der Formulierung nach [DFJ59] oder [MTZ60] möglich war.

Für die in der Zielfunktion zu berücksichtigende Tourlänge seien nichtnegative Hilfsvariablen

$$\varphi_i \hat{=} \text{bis zu Ort } i \text{ zurückgelegte Entfernung}$$

für  $i = 2, \dots, n$  gegeben. Außerdem werde die nichtnegative Hilfsvariable

$$\varphi_1 \hat{=} \text{insgesamt zurückgelegte Entfernung}$$

definiert. Wird nun Ort  $i$  (irgendwann) vor Ort  $j$  besucht, so muss

$$\varphi_i + t_{ij} \leq \varphi_j$$

gelten. Dies lässt sich unter Zuhilfenahme eines ausreichend großen Parameters  $M_3$ , ähnlich wie wie bei der Modellierung des Parallel-Maschinen-Scheduling-Problem mit Rüstzeiten, durch die Nebenbedingungen

$$\varphi_i + t_{ij} \leq \varphi_j + M_3 \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j = 2, \dots, n \text{ mit } i < j \quad (2.3.13)$$

$$\varphi_j + t_{ji} \leq \varphi_i + M_3 \cdot x_{ij} \quad \forall i, j = 2, \dots, n \text{ mit } i < j \quad (2.3.14)$$

sicherstellen (diese entsprechen abgesehen von den asymmetrischen Entfernungen den Nebenbedingungen (2.3.11) in der disjunktiven Scheduling-Formulierung des TSP von Baker [Bak83]). Die bis zu einem Ort  $j = 2, \dots, n$  zurückgelegte Entfernung muss mindestens der direkten Entfernung vom Ausgangsort entsprechen, was durch die Nebenbedingungen

$$t_{1j} \leq \varphi_j \quad \forall j = 2, \dots, n \quad (2.3.15)$$

sichergestellt ist (diese entsprechen den Nebenbedingungen (2.3.10) mit  $\varphi_{n+1} = 0$ ). Die Nebenbedingungen

$$\varphi_i + t_{i1} \leq \varphi_1 \quad \forall i = 2, \dots, n \quad (2.3.16)$$

stellen auf der anderen Seite sicher, dass die insgesamt zurückgelegte Entfernung mindestens der Summe der bis zu einem Kunden  $i = 2, \dots, n$  zurückgelegten Entfernung und der Entfernung von ebendiesem Kunden  $i$  zum Ausgangsort entspricht (diese entsprechen den Nebenbedingungen (2.3.12)).

Das  $\Delta$ -TSP lässt sich also mit dem ausreichend großen Parameter  $M_3$  wie folgt modellieren:

$$\begin{aligned} & \min \varphi_1 \\ \text{u.d.N. } & \varphi_i + t_{ij} \leq \varphi_j + M_3 \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j = 2, \dots, n \text{ mit } i < j \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

$$\varphi_j + t_{ji} \leq \varphi_i + M_3 \cdot x_{ij} \quad \forall i, j = 2, \dots, n \text{ mit } i < j \quad (2.3.14)$$

$$t_{1j} \leq \varphi_j \quad \forall j = 2, \dots, n \quad (2.3.15)$$

$$\varphi_i + t_{i1} \leq \varphi_1 \quad \forall i = 2, \dots, n \quad (2.3.16)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 2, \dots, n \text{ mit } i < j$$

$$\varphi_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Verglichen mit dem von Miller, Tucker und Zemlin vorgestellten Modell zeigt sich, dass hier statt  $n(n-1)$  nur  $(n-1)(n-2)/2$  binäre Entscheidungsvariablen benötigt werden. Allerdings lässt sich auch erkennen, dass eine optimale Lösung der zu dem Modell gehörigen LP-Relaxation<sup>7</sup> (bei entsprechend großem  $M_3$ ) durch

$$x_{ij} = 0,5 \quad \forall i, j = 2, \dots, n,$$

$$\varphi_i = t_{1i} \quad \forall i = 2, \dots, n \text{ und}$$

$$\varphi_1 = \max_{i=2}^n (t_{1i} + t_{i1})$$

gegeben ist. Durch das Setzen von  $x_{ij} = 0,5$  werden bei entsprechend großem Parameter  $M_3$  (von dem ausgegangen werden kann) die beiden Nebenbedingungen (2.3.13) und (2.3.14) erfüllt. Der Zielfunktionswert einer Lösung der zugehörigen LP-Relaxation stellt somit eine schwache untere Schranke dar. Da bei den meisten MIP-Solvern eben diese durch die Lösung der zugehörigen LP-Relaxation bestimmte untere Schranke einen großen Einfluss auf die Geschwindigkeit des Lösungsprozess hat, ist dies in Hinblick auf die Lösbarkeit eines so modellierten TSP ungünstig.

<sup>7</sup>Als LP-Relaxation wird das zu einem gemischt-ganzzahligen Programm gehörige lineare Programm bezeichnet, bei dem die Ganzzahligkeitsbedingung entfällt. Statt z. B.  $x_{ij} \in \{0, 1\}$  wird in diesem  $x_{ij} \in [0, 1]$  gefordert.

## 2.4 Modellierung des kapazitierten, distanzbeschränkten Vehicle Routing Problems mit Zeitfenstern

Beim kapazitierten, distanzbeschränkten Vehicle Routing Problem mit Zeitfenstern (CDVRP-TW) liegen von  $n$  Kunden Nachfragen einer gewissen Größe vor, die von einem Depot aus mit einer Flotte von Fahrzeugen in einem jeweils vom Kunden vorgegebenen Zeitfenster befriedigt werden sollen. Der Bedarf eines Kunden  $i = 1, \dots, n$  hat die Größe  $q_i$  und muss Ort  $i$  im Zeitfenster  $[a_i, b_i]$  erreichen.<sup>8</sup> Zur Auslieferung stehen am Depot, welches Ort 0 entspricht,  $m$  Transporter zur Verfügung, wobei jeder Transporter über die Kapazität  $Q$  verfügt. Jeder dieser Transporter kann mehrere Kunden auf einer Rundtour beliefern, allerdings darf diese Rundtour nicht länger als  $T$  Zeiteinheiten dauern. Fährt ein Transporter von Ort  $i = 0, \dots, n$  zu Ort  $j = 0, \dots, n$ , dann fallen Kosten in Höhe von  $c_{ij}$  an. Die Fahrt eines Transporters von Ort  $i = 0, \dots, n$  zu Ort  $j = 0, \dots, n$  dauert  $t_{ij}$  Zeiteinheiten.

Damit sind die zentralen Entscheidungsschranken beim CDVRPTW die folgenden.

1. Die Beschränkung der Transporterkapazität durch  $Q$ .
2. Die Beschränkung der Rundtourlänge durch  $T$ .
3. Die Beschränkung des Belieferungszeitfensters auf  $[a_i, b_i]$ .

Diese Problemstellung ist ein Spezialfall des kapazitierten Vehicle Routing Problems (CVRP), des distanzbeschränkten Vehicle Routing Problems (DVRP) sowie des Vehicle Routing Problems mit Zeitfenstern (VRPTW).

Beim kapazitierten Vehicle Routing Problem liegen im Unterschied zum CDVRPTW keine Belieferungszeitfenster  $[a_i, b_i]$  vor, außerdem ist die Länge der jeweiligen Rundtour eines Transporters nicht durch  $T$  Zeiteinheiten beschränkt. Einzige zentrale Entscheidungsschranke beim CVRP ist demzufolge die Beschränkung der Transporterkapazität.

Beim distanzbeschränkten Vehicle Routing Problem (DVRP) ist im Unterschied zum CDVRP-TW für die Belieferung von Kunde  $i$  keine Beschränkung auf ein Zeitfenster  $[a_i, b_i]$  vorgegeben, des Weiteren ist die Transporterkapazität unbeschränkt. Somit ist die einzige zentrale Entscheidungsschranke beim DVRP die Beschränkung der Rundtourlänge durch  $T$ .

Beim Vehicle Routing Problem mit Zeitfenstern (VRPTW) ist die Rundtourlänge im Unterschied zum CDVRPTW unbeschränkt. Die zentralen Entscheidungsschranken in dieser Problemstellung sind demzufolge die Beschränkung der Transporterkapazität und die Einhaltung der Belieferungszeitfenster  $[a_i, b_i]$ .

---

<sup>8</sup>Die Kunden  $1, \dots, n$  seien den Orten  $1, \dots, n$  somit in eindeutiger Weise zugeordnet

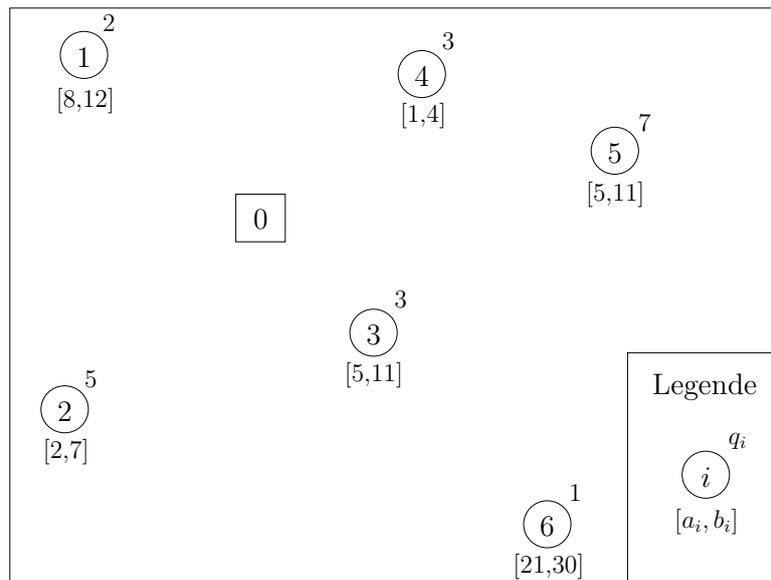


Abbildung 2.9: Beispiel eines CDVRPTW

Abbildung 2.9 stellt einen Teil der Entscheidungssituation dar. Gesucht seien  $m = 2$  Rundtouren, die jeweils im Depot starten, einen Teil der Orte besuchen und im Depot enden. Dabei muss jeder Ort auf genau einer Rundtour besucht werden. Weiterhin werden das einzuhaltende Belieferungszeitfenster  $[a_i, b_i]$  und die Größe  $q_i$  der Nachfrage des jeweiligen Kunden  $i$  dargestellt. Auf die Darstellung der Entfernungen wird aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet, diese entsprechen der euklidischen Distanz der Orte in der Ebene. Die Kosten  $c_{ij}$  sollen dabei den Fahrtdauern  $t_{ij}$  entsprechen. Die Transporterkapazität sei  $Q = 12$  und die maximale Rundtourlänge betrage  $T = 20$ .

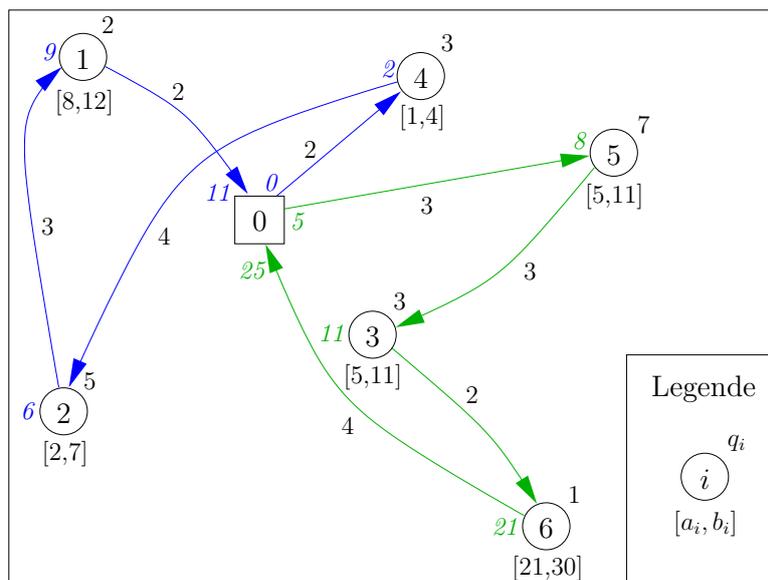


Abbildung 2.10: Lösung eines CDVRPTW

Eine Lösung des CDVRPTW kann wie in Abbildung (2.10) dargestellt werden. Diese Abbildung zeigt eine Lösung der Entscheidungssituation aus Abbildung (2.9), bei welcher die erste Rundtour (blau) die Folge von Orten (0, 4, 2, 1, 0) und die zweite Rundtour (grün) die Folge von Orten (0, 5, 3, 6, 0) ist. Es lässt sich erkennen, dass in beiden Rundtours mit einer insgesamt ausgelieferten Gütermenge von 10 bzw. 11 die Kapazitätsbeschränkung nicht verletzt wird. Die Belieferungszeitpunkte lassen sich als blaue beziehungsweise grüne kursive Zahlen links neben den Orten  $1, \dots, 6$  ablesen, die Entfernungen der Orte auf den Touren als Zahlen neben den jeweiligen Pfeilen. Es werden also bei diesen beiden Rundtours die Belieferungszeitfenster eingehalten. Der Abfahrtszeitpunkt und der Rückkehrzeitpunkt des jeweiligen Transporters wird als blaue beziehungsweise grüne kursive Zahl am Depot dargestellt. So beginnt die erste Rundtour zum Zeitpunkt 0 und endet zum Zeitpunkt 11, die zweite Rundtour beginnt zum Zeitpunkt 5 und endet zum Zeitpunkt 25. Beide Rundtours halten also die Rundtourlängenbeschränkung ein. Diese Lösung hat den Zielfunktionswert 23.

Es sollen im Folgenden Modelle für das CDVRPTW entwickelt werden. Innerhalb dieser Modelle soll es leicht möglich sein, einzelne der vorgestellten zentralen Entscheidungsbedingungen zu relaxieren, sodass sich mit Hilfe des jeweiligen Modells auch einfach ein Modell für das CVRP, das DVRP oder das VRPTW herleiten lässt. Dazu müssen nur diejenigen Nebenbedingungen, deren zugehörige Entscheidungsbedingung in der jeweiligen Verallgemeinerung nicht notwendigerweise erfüllt sein muss, sowie die zugehörigen Variablen aus dem Modell entfernt werden.

### Modellierung nach Kulkarni und Bhave sowie nach Desrochers, Lenstra, Savelsbergh und Soumis

Als erstes soll ein aus der Literatur übernommenes Modell vorgestellt werden. Dies beruht im Wesentlichen auf der Arbeit von Kulkarni und Bhave [KB85], welche um die Modellierung der

Zeitfensterrestriktion durch Desrochers, Lenstra, Savelsbergh und Soumis [DLSS88] ergänzt wurde. Die Modellierung erfolgt bei beiden Quellen ähnlich zur Modellierung des TSP in [MTZ60].

Es sei in diesem Rahmen darauf hingewiesen, dass die von Kulkarni und Bhave vorgestellten Nebenbedingungen für die Einhaltung der Transportkapazität, anders als in [KLB04] postuliert wurde, korrekt sind, wie auch in [KB85] gezeigt wurde.<sup>9</sup> Die von Kulkarni und Bhave vorgestellten Nebenbedingungen für die Einhaltung der Rundtourlängenbeschränkung hingegen sind leider nicht korrekt, daher soll der von Naddef [Nad94] vorgestellte Korrekturvorschlag verwendet werden.

Für die Gestaltung der Touren der Transporter seien binäre Entscheidungsvariablen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls Ort } i \text{ direkt vor Ort } j \text{ auf einer Tour besucht wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Orte  $i, j = 0, \dots, n$  gegeben. Als Hilfsvariablen für die Einhaltung der Transporterkapazität sind nichtnegative Hilfsvariablen

$$\gamma_i \hat{=} \begin{array}{l} \text{die vom jeweiligen Transporter vor dem Erreichen von Kunde } i \text{ bereits} \\ \text{ausgelieferte Menge} \end{array}$$

für jeden Kunden  $i = 1, \dots, n$  gegeben.<sup>10</sup> Für die Einhaltung der Rundtourlängenbeschränkung seien nichtnegative Hilfsvariablen

$\lambda_i \hat{=} \text{die vom jeweiligen Transporter bei Erreichen von Kunde } i \text{ bereits zurückgelegte Fahrzeit}$

für alle Kunden  $i = 1, \dots, n$  definiert. Als letzte Klasse von Hilfsvariablen seien für die Einhaltung der Zeitfensterrestriktionen nichtnegative Entscheidungsvariablen

$$\tau_i \hat{=} \text{die Ankunftszeit des ihn bedienenden Transporters bei Kunde } i$$

für alle  $i = 1, \dots, n$  gegeben.

Mit den folgenden beiden Arten von Nebenbedingungen sei der Entscheidungsschranke Rechnung getragen, dass jeder Kunde genau einmal beliefert werden muss, also genau einmal erreicht und verlassen wird. Es müssen also die Nebenbedingungen

$$\sum_{i=0}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.4.1)$$

$$\sum_{j=0}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.4.2)$$

gelten. Da insgesamt  $m$  Transporter zur Verfügung stehen und keiner dieser Transporter mehrfach fahren darf, darf das Depot maximal  $m$ -mal erreicht und verlassen werden, dies wird Hilfe der beiden folgenden Nebenbedingungen modelliert.

$$\sum_{i=0}^n x_{i0} \leq m \quad (2.4.3)$$

<sup>9</sup>Leider enthält der Beweis zur Korrektheit der Transporterkapazitätsbedingungen die Ungenauigkeit, dass an einer nicht unwesentlichen Stelle eine Formel „ $\geq$ “ statt „ $>$ “ enthält. Dennoch ist ersichtlich, dass der Beweis mit entsprechenden leichten Korrekturen korrekt ist.

<sup>10</sup>Kulkarni und Bhave lassen auch  $\gamma_i \in \mathbb{R}$  zu, was ohne Weiteres möglich ist, aber die Interpretation der Bedeutung dieser Hilfsvariablen erschwert.

$$\sum_{j=0}^n x_{0j} \leq m \quad (2.4.4)$$

Die Einhaltung der Transporterkapazität wird nach [KB85] durch die folgenden Nebenbedingungen sichergestellt.

$$\gamma_i + q_i \leq \gamma_j + Q \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (2.4.5)$$

Die Idee hinter diesen Nebenbedingungen ist, dass wenn Kunde  $j$  direkt nach Kunde  $i$  beliefert wird (also  $x_{ij} = 1$  gilt), die bis zu Kunde  $j$  ausgelieferte Menge  $\gamma_j$  mindestens um den Bedarf  $q_i$  von Kunde  $i$  größer sein muss als  $\gamma_i$ . Dadurch wird im Verlauf der Tour des jeweiligen Transporters die von diesem insgesamt auszuliefernde Menge aufsummiert. Durch die Transporterkapazität  $Q$  auf der rechten Seite der Nebenbedingung wird erreicht, dass dieses Aufsummieren derart beschränkt ist, dass die Transporterkapazität nicht überschritten wird (Beweis siehe [KB85]).

Die Nebenbedingungen

$$\lambda_i + t_{ij} \leq \lambda_j + (T + t_{ij} - t_{i0} - t_{0j}) \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (2.4.6)$$

sichern nach [Nad94] die Einhaltung der Beschränkung der Rundtourlänge auf  $T$  Zeiteinheiten, indem die auf einer Rundtour zurückgelegten Fahrtzeiten  $t_{ij}$  aufsummiert werden. Wenn  $\lambda_i$  der Fahrtzeit eines Transporters bis Kunde  $i$  auf einer Rundreise entspricht und Kunde  $j$  direkt nach ebendiesem Kunden bedient werden soll ( $x_{ij} = 1$ ), dann muss  $\lambda_i + t_{ij} \leq \lambda_j$  gelten. Durch den Term  $(T + t_{ij} - t_{i0} - t_{0j})$  auf der rechten Seite der Nebenbedingung wird sichergestellt, dass diese Summation derart begrenzt wird, dass die zurückgelegten Fahrtzeiten auf einer Rundtour (auf der die Depotanfahrt nicht berücksichtigt wird) nicht die maximal erlaubte Rundtourlänge  $T$  abzüglich der für die Depotanfahrt zusätzlich anfallenden Distanz  $t_{i0} + t_{0j} - t_{ij}$  überschreiten.

Im von Kulkarni und Bhave entwickelten Modell werden statt der Nebenbedingungen (2.4.6) fälschlicherweise (s. [BW88]) die Nebenbedingungen  $\lambda_i + t_{ij} \leq \lambda_j + T \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n$  gefordert. Die hier angegebene Berichtigung entstammt [Nad94], der Beweis zur Korrektheit findet sich ebenda. Im Unterschied zu anderen bisher vorgestellten Korrekturen dieser Nebenbedingungen (s. [AC91, DL91]) erfolgt die Korrektur in [Nad94] mit minimalen Änderungen.

Eine weitere Klasse von Nebenbedingungen stellen nach [DLSS88]

$$\tau_i + t_{ij} \leq \tau_j + M_4 \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (2.4.7)$$

$$a_i \leq \tau_i \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.4.8)$$

dar, mit deren Hilfe die Einhaltung der Zeitfensterrestriktionen sichergestellt wird. Der Parameter  $M_4$  stellt dabei eine ausreichend große Konstante dar, sodass die Variablen  $\tau_i$  und  $\tau_j$  in einer der Nebenbedingungen (2.4.7) nicht eingeschränkt werden, falls  $x_{ij} = 0$  gilt. Für die Wahl von  $M_4$  wird in [DL91]  $M_4 \geq \max_{i,j=1,\dots,n} (b_i - a_j + t_{ij})$  postuliert. Es lässt sich aber auch für jede Nebenbedingung separat statt  $M_4$  der Term  $(b_i - a_j + t_{ij})$  verwenden. Falls  $x_{ij} = 1$  gilt, ist der Belieferungszeitpunkt von Kunde  $j$  mindestens um die Fahrtzeit  $t_{ij}$  später als der Belieferungszeitpunkt von Kunde  $i$ . Ergänzend muss durch die Nebenbedingungen

$$t_{0j} \leq \tau_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.4.9)$$

sichergestellt werden, dass bei der Bestimmung der Ankunftszeit beim ersten von einem Transporter Kunden die Fahrtzeit vom Depot zu ebendiesem berücksichtigt wird.<sup>11</sup>

<sup>11</sup>Diese Nebenbedingungen setzen die Gültigkeit der Dreiecksungleichung voraus. Ist von dieser nicht auszugehen, so sind stattdessen die Nebenbedingungen  $t_{0j} \cdot x_{0j} \leq \tau_j$  zu formulieren.

Damit ergibt sich zusammenfassend das folgende Modell.

$$\min \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{u.d.N. } \sum_{i=0}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.4.1)$$

$$\sum_{j=0}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.4.2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i0} \leq m \quad (2.4.3)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{0j} \leq m \quad (2.4.4)$$

$$\gamma_i + q_i \leq \gamma_j + Q \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (2.4.5)$$

$$\lambda_i + t_{ij} \leq \lambda_j + (T + t_{ij} - t_{i0} - t_{0j}) \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (2.4.6)$$

$$\tau_i + t_{ij} \leq \tau_j + M_4 \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (2.4.7)$$

$$a_i \leq \tau_i \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.4.8)$$

$$t_{0j} \leq \tau_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.4.9)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 0, \dots, n \quad (2.4.10)$$

$$\gamma_i \geq 0 \quad \forall i = 0, \dots, n \quad (2.4.11)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 0, \dots, n \quad (2.4.12)$$

$$\tau_i \geq 0 \quad \forall i = 0, \dots, n \quad (2.4.13)$$

Damit sind – wie zuvor erwähnt – auch Modelle des kapazitierten VRP (durch die Nebenbedingungen (2.4.1) bis (2.4.5), (2.4.10) und (2.4.11)), des distanzbeschränkten VRP (durch die Nebenbedingungen (2.4.1) bis (2.4.4), (2.4.6), (2.4.10) und (2.4.12)) sowie des VRP mit Zeitfenstern (durch die Nebenbedingungen (2.4.1) bis (2.4.5), (2.4.7) bis (2.4.11) und (2.4.13)) gegeben.

### Modellierung basierend auf der Formulierung von Balakrishnan, Kanet und Sridharan

Ebenso, wie sich das Traveling Salesman Problem mit Hilfe der Formulierung des Reihenfolgeproblems von Balakrishnan, Kanet und Sridharan [BKS99] modellieren lässt, soll an dieser Stelle das kapazitierte, distanzbeschränkte Vehicle Routing Problem mit Zeitfenstern modelliert werden. Für die Zuordnung der Kunden zu den Transportern seien hierbei binäre Entscheidungsvariablen

$$z_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{falls Ort } i \text{ von Transporter } k \text{ besucht wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Orte  $i = 1, \dots, n$  und Transporter  $k = 1, \dots, m$  gegeben. Weiterhin seien binäre Entscheidungsvariablen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls Ort } i \text{ (irgendwann) vor Ort } j \text{ auf einer Tour besucht wird} \\ 0, & \text{falls Ort } j \text{ (irgendwann) vor Ort } i \text{ auf einer Tour besucht wird} \\ 0 \text{ oder } 1, & \text{falls Ort } i \text{ und Ort } j \text{ auf unterschiedlichen Touren besucht werden} \end{cases}$$

für alle Orte  $i, j = 1, \dots, n$  mit  $i < j$  gegeben. Falls Ort  $i$  und Ort  $j$  auf unterschiedlichen Touren besucht werden (also  $z_{ik} = 1$  und  $z_{jk'} = 1$  für  $k \neq k'$  gilt), kann die Belegung der entsprechenden Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  beliebig aus der Menge  $\{0, 1\}$  gewählt werden, da sie nicht weiter von Belang ist. Mittels dieser Entscheidungsvariablen ist es bereits möglich, eine Lösung des CDVRPTW (bis auf die Belieferungszeitpunkte) vollständig zu beschreiben. Durch die Entscheidungsvariablen  $z_{ik}$  ist die Zuordnung der Transporter zu den Kunden und durch die Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  die Reihenfolge der Belieferung gegeben. Allerdings gilt es, sowohl das Systemziel als auch die Entscheidungsschranken zu berücksichtigen.

Für das Systemziel einer kostenminimalen Belieferung seien zum einen nichtnegative Hilfsvariablen

$\varphi_i \hat{=}$  die bis zum Erreichen von Kunde  $i$  vom zugeordneten Transporter verursachten Kosten

für alle Kunden  $i = 1, \dots, n$  gegeben, zum anderen nichtnegative Hilfsvariablen

$\psi_k \hat{=}$  die von Transporter  $k$  insgesamt verursachten Kosten

für alle Transporter  $k = 1, \dots, m$ .

Die korrekte Belegung der Hilfsvariablen  $\varphi_i$  und  $\psi_k$  wird unter Zuhilfenahme eines ausreichend großen Parameters  $M_5$  durch die Nebenbedingungen

$$c_{0j} \leq \varphi_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.4.14)$$

$$\varphi_i + c_{ij} \leq \varphi_j + M_5 \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k = 1, \dots, m \quad (2.4.15)$$

$$\varphi_j + c_{ji} \leq \varphi_i + M_5 \cdot (2 + x_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k = 1, \dots, m \quad (2.4.16)$$

$$\varphi_i + c_{i0} \leq \psi_k + M_5 \cdot (1 - z_{ik}) \quad \forall i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m \quad (2.4.17)$$

sichergestellt. Die Nebenbedingungen (2.4.14) sorgen dafür, dass die Fahrtkosten bis zu einem Kunden mindestens den direkten Fahrtkosten vom Depot zu ebendiesem Kunden entsprechen. Mit den Nebenbedingungen (2.4.15) wird erreicht, dass, wenn ein Kunde  $j$  irgendwann nach einem Kunden  $i$  mit  $i < j$  vom Transporter  $k$  besucht wird, die insgesamt bis zu Kunde  $j$  angefallenen Fahrtkosten mindestens der Summe aus den Fahrtkosten zu Kunde  $i$  und den direkten Fahrtkosten von Kunde  $i$  zu Kunde  $j$  entsprechen. Die Nebenbedingungen (2.4.16) bewirken analoges, wenn ein Kunde  $i$  irgendwann nach einem Kunden  $j$  mit  $i < j$  vom Transporter  $k$  besucht wird. Die von einem Transporter  $k$  insgesamt verursachten Kosten müssen weiterhin, wie Nebenbedingungen (2.4.17) fordern, mindestens den Kosten bis zu Kunde  $i$  und den Kosten von diesem Kunden  $i$  zum Depot entsprechen, wenn Kunde  $i$  von Transporter  $k$  besucht wird.

Damit lässt sich die Zielfunktion schlicht als

$$\min \sum_{k=1}^m \psi_k$$

formulieren.

Als erste zentrale Entscheidungsschranke ist gefordert, dass jeder Kunde von genau einem Transporter beliefert wird. Dies lässt sich durch die Nebenbedingungen

$$\sum_{k=1}^m z_{ik} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.4.18)$$

modellieren. Weiterhin muss die Einhaltung der Kapazitätsrestriktion jedes Transporters  $k = 1, \dots, m$  sichergestellt werden, dies lässt sich mittels der Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^n z_{ik} q_i \leq Q \quad \forall k = 1, \dots, m \quad (2.4.19)$$

erreichen, in welcher die Bedarfe  $q_i$  derjenigen Kunden  $i$ , welche Transporter  $k$  zugeordnet sind, aufsummiert werden. Diese dürfen die Transporterkapazität  $Q$  nicht überschreiten.

Für die Einhaltung der maximalen Rundtourlänge seien nichtnegative Hilfsvariablen

$\lambda_i \hat{=}$  die vom jeweiligen Transporter bei Erreichen von Kunde  $i$  schon zurückgelegte Entfernung

für jeden Kunden  $i = 1, \dots, n$  gegeben. Eine ihrer Beschreibung entsprechende Belegung wird unter Verwendung eines ausreichend großen Parameters  $M_6$  durch die Nebenbedingungen

$$t_{0j} \leq \lambda_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.4.20)$$

$$\lambda_i + t_{ij} \leq \lambda_j + M_6 \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k = 1, \dots, m \quad (2.4.21)$$

$$\lambda_j + t_{ji} \leq \lambda_i + M_6 \cdot (2 + x_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k = 1, \dots, m \quad (2.4.22)$$

erreicht. Zum einen muss die bis zu einem Kunden  $j$  zurückgelegte Fahrtzeit  $\lambda_j$  mindestens der Fahrtzeit  $t_{0j}$  direkt vom Depot entsprechen, dies stellt Nebenbedingung (2.4.20) sicher. Zum anderen muss, wenn Kunde  $i$  (irgendwann) vor Kunde  $j$  vom selben Transporter bedient wird (Nebenbedingung (2.4.21)) oder umgekehrt Kunde  $j$  (irgendwann) vor Kunde  $i$  vom selben Transporter bedient wird (Nebenbedingung (2.4.22)), die bis zum später besuchten Kunden angefallene Fahrtzeit höher sein als die bis zum früher besuchten Kunden, und zwar mindestens um die direkte Fahrtzeit  $t_{ij}$  bzw.  $t_{ji}$  vom früher zum später besuchten Kunden. Die Einhaltung der maximalen Rundtourlänge wird dann durch die Nebenbedingungen (2.4.23) sichergestellt.

$$\lambda_i + t_{i0} \leq T \quad \forall i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m \quad (2.4.23)$$

Da von jedem Kunden  $i$  aus für den ihn beliefernden Transporter noch die direkte oder indirekte Rückkehr zum Depot anfällt, muss dabei die bis zu Kunde  $i$  angefallene Fahrtzeit mindestens um die direkte Fahrtzeit  $t_{i0}$  von Kunde  $i$  zum Depot geringer sein als die maximal erlaubte Fahrtzeit  $T$ .

Zur Einhaltung der Zeitfensterrestriktionen seien nichtnegative Entscheidungsvariablen

$\tau_i \hat{=}$  die Ankunftszeit des ihn bedienenden Transporters bei Kunde  $i$

für jeden Kunden  $i = 1, \dots, n$  gegeben. Ebenso wie die Fahrtzeiten müssen die Ankunftszeiten bei den Kunden entsprechend der Transporterzuordnung und Kundenreihenfolge belegt werden. Dies und die Einhaltung der Belieferungszeitfenster wird mit einem ausreichend großen Parameter  $M_7$  mittels der Nebenbedingungen

$$t_{0j} \leq \tau_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.4.24)$$

$$\tau_i + t_{ij} \leq \tau_j + M_7 \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k = 1, \dots, m \quad (2.4.25)$$

$$\tau_j + t_{ji} \leq \tau_i + M_7 \cdot (2 + x_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k = 1, \dots, m \quad (2.4.26)$$

$$a_i \leq \tau_i \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.4.27)$$

erreicht. Die Nebenbedingungen (2.4.24) bewirken, dass die Ankunftszeit bei einem Kunden  $j$  mindestens der direkten Fahrtzeit vom Depot zu ebendiesem Kunden entspricht. Die Ankunftszeit  $\tau_j$  bzw.  $\tau_i$  bei einem später von einem Transporter bedienten Kunden muss mindestens

um die direkte Fahrtzeit  $t_{ij}$  bzw.  $t_{ji}$  vom früher zum später bedienten Kunden später sein als die Ankunftszeit  $\tau_i$  bzw.  $\tau_j$  eines früher vom selben Transporter bedienten Kunden, dies stellen die Nebenbedingungen (2.4.25) und (2.4.26) sicher. Außerdem müssen sich die Ankunftszeiten jeweils innerhalb eines vorgegebenen Intervalls bewegen. Dies wird durch die Nebenbedingungen (2.4.27) bewirkt.

Zusammengefasst ergibt sich also das folgende Modell:

$$\min \sum_{k=1}^m \psi_k$$

$$\text{u.d.N. } c_{0j} \leq \varphi_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.4.14)$$

$$\varphi_i + c_{ij} \leq \varphi_j + M_5 \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k = 1, \dots, m \quad (2.4.15)$$

$$\varphi_j + c_{ji} \leq \varphi_i + M_5 \cdot (2 + x_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k = 1, \dots, m \quad (2.4.16)$$

$$\varphi_i + c_{i0} \leq \psi_k + M_5 \cdot (1 - z_{ik}) \quad \forall i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m \quad (2.4.17)$$

$$\sum_{k=1}^m z_{ik} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.4.18)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{ik} q_i \leq Q \quad \forall k = 1, \dots, m \quad (2.4.19)$$

$$t_{0j} \leq \lambda_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.4.20)$$

$$\lambda_i + t_{ij} \leq \lambda_j + M_6 \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k = 1, \dots, m \quad (2.4.21)$$

$$\lambda_j + t_{ji} \leq \lambda_i + M_6 \cdot (2 + x_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k = 1, \dots, m \quad (2.4.22)$$

$$\lambda_i + t_{i0} \leq T \quad \forall i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m \quad (2.4.23)$$

$$t_{0j} \leq \tau_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.4.24)$$

$$\tau_i + t_{ij} \leq \tau_j + M_7 \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k = 1, \dots, m \quad (2.4.25)$$

$$\tau_j + t_{ji} \leq \tau_i + M_7 \cdot (2 + x_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k = 1, \dots, m \quad (2.4.26)$$

$$a_i \leq \tau_i \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.4.27)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j \quad (2.4.28)$$

$$z_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m \quad (2.4.29)$$

$$\varphi_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.4.30)$$

$$\psi_k \geq 0 \quad \forall k = 1, \dots, m \quad (2.4.31)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.4.32)$$

$$\tau_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.4.33)$$

Damit ist mit den Nebenbedingungen (2.4.14) bis (2.4.19) und (2.4.28) bis (2.4.31) auch ein Modell für das kapazitierte VRP gegeben. Das distanzbeschränkte VRP wird durch die Nebenbedingungen (2.4.14) bis (2.4.18), (2.4.20) bis (2.4.23) und (2.4.28) bis (2.4.32) modelliert. Mit den Nebenbedingungen (2.4.14) bis (2.4.19), (2.4.24) bis (2.4.31) und (2.4.33) wird das VRP mit Zeitfenstern modelliert.

Im Vergleich zum vorherigen Modell für das CDVRPTW ist die Anzahl an binären Variablen geringer, wenn die Anzahl an Transportern im Vergleich zur Kundenanzahl gering ist. Hier beträgt die Anzahl an binären Variablen  $n((n - 1)/2 + m)$ , im vorherigen Modell  $n(n + 1)$ . Falls also  $m < (n + 1)/2$  gilt, so hat dieses Modell weniger binäre Variablen als das vorige.

## 2.5 Modellierung des Vehicle Routing Problems mit Belieferungsaufteilung

Das kapazitierte Vehicle Routing Problem ist unter der Annahme formuliert, dass jeder Kunde nur einmal von genau einem Transporter beliefert werden soll. Diese Annahme ist beim von Dror und Trudeau [DT89] vorgestellten Vehicle Routing Problem mit Belieferungsaufteilung (split delivery vehicle routing problem, SDVRP) nicht gegeben. Hier darf die Befriedigung des Bedarfs eines Kunden durch mehrere Transporter erfolgen. Im Unterschied zu den vorhergehenden Problemstellungen sind im SDVRP auch die Kapazitäten der einzelnen Transporter nicht notwendigerweise identisch.

Es sind also wiederum  $n$  Kunden gegeben, wobei Kunde  $i = 1, \dots, n$  an Ort  $i$  mit Gütern der Größe  $q_i$  beliefert werden muss. Zur Auslieferung stehen am Depot (Ort 0)  $m$  Transporter zur Verfügung, wobei Transporter  $k = 1, \dots, m$  über eine Kapazität  $Q_k$  verfügt. Für die Fahrt eines Transporters von Ort  $i = 0, \dots, n$  zu Ort  $j = 0, \dots, n$  werden Fahrtkosten  $c_{ij}$  fällig. Gesucht ist ein kostenminimaler Transportplan. Dieser setzt sich zusammen aus einer Rundtour für jeden Transporter und aus der Angabe der vom jeweiligen Transporter auf seiner Rundtour an die bedienten Kunden ausgelieferten Mengen.

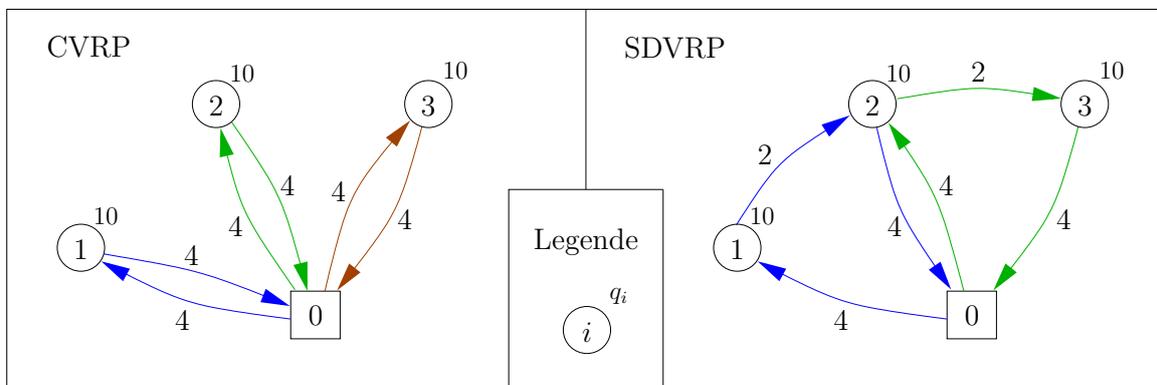


Abbildung 2.11: Die optimale Lösung eines CVRP und die optimale Lösung eines entsprechenden SDVRP (angelehnt an [DT89])

Abbildung 2.11 (angelehnt an [DT89]) zeigt eine optimale Lösung eines CVRP und die eines SDVRP mit den selben Parametern. Es seien jeweils 3 Transporter (blau, grün und braun) mit einer Kapazität von jeweils 15 gegeben. Bei der optimalen Lösung des CVRP werden sämtliche Transporter benötigt, die jeweils genau einen Kunden mit 10 Einheiten in einer Pendeltour versorgen. Insgesamt werden 24 Entfernungseinheiten zurückgelegt. Bei der optimalen Lösung des SDVRP werden nur 2 Transporter benötigt, indem die Belieferung von Kunde 2 aufgeteilt

wird. Ein Transporter (blau) bedient Kunde 1 mit 10 Einheiten und versorgt Kunde 2 mit 5 Einheiten. Ein weiterer Transporter (grün) liefert an Kunde 2 weitere 5 Einheiten und bedient danach Kunde 3 mit 10 Einheiten. Durch die Aufteilung der Belieferung von Kunde 2 auf zwei Transporter verringern sich die Kosten für diese Lösung im Vergleich zur Lösung des CVRP auf 20 Entfernungseinheiten. Es ergibt also aus ökonomischen Gesichtspunkten Sinn zu untersuchen, wie sich derartige Vehicle Routing Probleme mit Belieferungsaufteilung modellieren und lösen lassen. Eine ausführliche Untersuchung der zu erzielenden Einsparungen findet sich in [ASGS08].

## Modellierung von Dror und Trudeau

Für die Modellierung des so beschriebenen SDVRPs entwickeln Dror und Trudeau [DT90] ein gemischt-ganzzahliges lineares Programm. Dies soll hier in der leicht modifizierten Fassung von Archetti und Speranza [AS12] vorgestellt werden. Dabei wird mit binären Entscheidungsvariablen

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{falls Transporter } k \text{ direkt von Ort } i \text{ zu Ort } j \text{ fährt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für  $i, j = 0, \dots, n$  und  $k = 1, \dots, m$  der Verlauf der Touren modelliert. Nichtnegative Entscheidungsvariablen

$$\alpha_{ik} \hat{=} \text{die von Transporter } k \text{ an Kunde } i \text{ gelieferte Menge}$$

für  $i = 1, \dots, n$  und  $k = 1, \dots, m$  geben an, inwiefern Transporter  $k$  an der Belieferung von Kunde  $i$  beteiligt ist.

Es muss jeder Ort  $j = 0, \dots, n$  mindestens einmal von einem Transporter erreicht werden, was die Nebenbedingungen

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^m x_{ij}^k \geq 1 \quad \forall j = 0, \dots, n \quad (2.5.1)$$

sicherstellen. Durch die Nebenbedingungen

$$\sum_{i=0}^n x_{ih}^k - \sum_{j=0}^n x_{hj}^k = 0 \quad \forall h = 0, \dots, n, k = 1, \dots, m \quad (2.5.2)$$

wird bewirkt, dass jeder Transporter  $k = 1, \dots, m$  jeden Kunden  $h = 0, \dots, n$  genauso oft verlässt, wie er ihn erreicht. Jeder Kunde  $i = 1, \dots, n$  muss mit seiner kompletten Bestellmenge versorgt werden, was durch die Nebenbedingungen

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} = q_i \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.5.3)$$

formuliert wird. Die Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ik} \leq Q_k \quad \forall k = 1, \dots, m \quad (2.5.4)$$

sorgen für die Einhaltung der Kapazitätsrestriktion des jeweiligen Transporters  $k = 1, \dots, m$ . Falls ein Transporter  $k = 1, \dots, m$  einen Kunden  $i = 1, \dots, n$  nicht bedient, so muss die von

diesem Transporter an diesen Kunden gelieferte Menge Null sein. Andernfalls ist diese Menge durch den Bedarf  $q_i$  desjenigen Kunden  $i$  beschränkt. Dafür tragen die Nebenbedingungen

$$\alpha_{ik} \leq q_i \sum_{j=0}^n x_{ij}^k \quad \forall i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m \quad (2.5.5)$$

Sorge. Mittels der Nebenbedingungen

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij}^k \leq |S| - 1 \quad \forall k = 1, \dots, m, S \subseteq \{1, \dots, n\} \quad (2.5.6)$$

werden für jeden Transporter  $k$  Subtouren analog zum Ansatz bei der Formulierung des TSP in [DFJ59] verhindert.

Zusammen mit der Zielfunktion, in welcher die insgesamt zurückgelegte Strecke minimiert wird, ergibt sich das folgende Modell:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^m c_{ij} x_{ij}^k \\ \text{u.d.N.} \quad & \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^m x_{ij}^k \geq 1 \quad \forall j = 0, \dots, n \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

$$\sum_{i=0}^n x_{ih}^k - \sum_{j=0}^n x_{hj}^k = 0 \quad \forall h = 0, \dots, n, k = 1, \dots, m \quad (2.5.2)$$

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} = q_i \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.5.3)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ik} \leq Q_k \quad \forall k = 1, \dots, m \quad (2.5.4)$$

$$\alpha_{ik} \leq q_i \sum_{j=0}^n x_{ij}^k \quad \forall i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m \quad (2.5.5)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij}^k \leq |S| - 1 \quad \forall k = 1, \dots, m, S \subseteq \{1, \dots, n\} \quad (2.5.6)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 0, \dots, n, k = 1, \dots, m$$

$$\alpha_{ik} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$$

Das so formulierte Modell verfügt über  $\mathcal{O}(n^2m)$  binäre Entscheidungsvariablen und über  $\mathcal{O}(2^n)$  Nebenbedingungen. Bei Verwendung der Ideen von Miller, Tucker und Zemlin [MTZ60] durch Einführen von nichtnegativen Hilfsvariablen

$$h_i \hat{=} \text{„Position“ von Kunde } i$$

für alle Kunden  $i = 1, \dots, n$  und Ersetzen der Nebenbedingungen(2.5.6) durch die Nebenbedingungen

$$h_i + 1 \leq h_j + n \left( 1 - \sum_{k=1}^m x_{ij}^k \right) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (2.5.7)$$

lässt sich die Anzahl der Nebenbedingungen auf  $\mathcal{O}(n \cdot \max(n, m))$  verringern. Die Nebenbedingungen (2.5.7) sorgen dafür, dass die Position  $h_j$  von Kunde  $j = 1, \dots, n$  um mindestens eins

größer ist als die Position  $h_i$  von Kunde  $i = 1, \dots, n$ , falls Kunde  $j$  direkt nach Kunde  $i$  von einem Transporter  $k$  bedient wird ( $x_{ij}^k = 1$ ). Falls dies für keinen Transporter  $k$  der Fall ist, so gilt  $\sum_{k=1}^m x_{ij}^k = 0$  und mit  $n$  ist auf der rechten Seite ein ausreichend großer Parameter gegeben, sodass die Nebenbedingungen die Belegung der Hilfsvariablen  $h_i$  und  $h_j$  nicht wesentlich einschränken.<sup>12</sup>

### Ein neues gemischt-ganzzahliges lineares Programm für das Split Delivery Vehicle Routing Problem

Bevor ein neues Modell für das SDVRP entwickelt wird, soll eine grundlegende Aussage von Dror und Trudeau [DT90] für das SDVRP aufgearbeitet werden, die für die nachfolgende Modellierung notwendig ist.

**Definition 2.1** (s. [DT90]) Seien  $k$  Kunden  $i_1, \dots, i_k$  und  $k$  Transportertouren gegeben, wobei auf Tour 1 die Kunden  $i_1$  und  $i_2$ , auf Tour 2 die Kunden  $i_2$  und  $i_3, \dots$ , auf Tour  $k - 1$  die Kunden  $i_{k-1}$  und  $i_k$  und auf Tour  $k$  die Kunden  $i_k$  und  $i_1$  beliefert werden. Eine derartige Teilmenge  $\{i_1, \dots, i_k\}$  von Kunden werde als  **$k$ -Teilkreis** bezeichnet.

Ein  $k$ -Teilkreis ist also eine Menge von Kunden, sodass sich aus (ungerichteten) Teilwegen von Transportertouren ein Kreis durch diese Kunden zusammensetzen lässt, wobei diese Teilwege das Depot nicht enthalten. In Abbildung 2.12 sind drei Touren zu sehen. Die auf der jeweiligen Tour an die jeweiligen Kunden ausgelieferte Menge ist an den zu den Kunden gehörigen Knoten in der jeweiligen Farbe markiert. Bei diesen Touren bilden die jeweils ungerichteten Wege  $(4, 3)$ ,  $(6, 3)$  und  $(6, 7, 5, 4)$ , die fett markiert sind, einen Kreis. Dementsprechend enthalten die Transportertouren den 3-Teilkreis  $\{3, 4, 6\}$ .

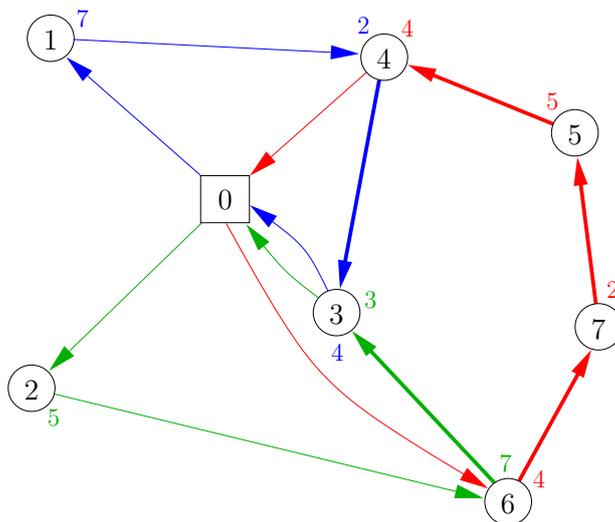


Abbildung 2.12: Beispiel eines  $k$ -Teilkreises

<sup>12</sup>Es kann bei einem metrischen TSP ohne Einschränkung davon ausgegangen werden, dass die „Position“ eines Kunden auf allen Touren, auf denen der Kunde bedient wird, die selbe ist. Dies ist darin begründet, dass immer eine optimale Lösung existiert, die keinen sogenannten  $k$ -Teilkreis enthält. Näheres dazu ist der noch folgenden Definition 2.1 und Satz 2.2 bzw. Korollar 2.3 zu entnehmen.

**Satz 2.2 (s. [DT90])** Wenn die Kostenmatrix  $(c_{ij})$  die Dreiecksungleichung erfüllt, dann existiert eine optimale Lösung, die keinen  $k$ -Teilkreis enthält.

*Beweis:* Siehe [DT90]. Der Beweis verwendet die Idee, in einer optimalen Lösung, welche einen  $k$ -Teilkreis enthält, die jeweils ausgelieferten Mengen derart umzuverteilen, dass der Besuch eines Kunden auf dem  $k$ -Teilkreis entfallen kann und somit eine nicht schlechtere Lösung entsteht, die ebendiesen  $k$ -Teilkreis nicht mehr enthält.  $\square$

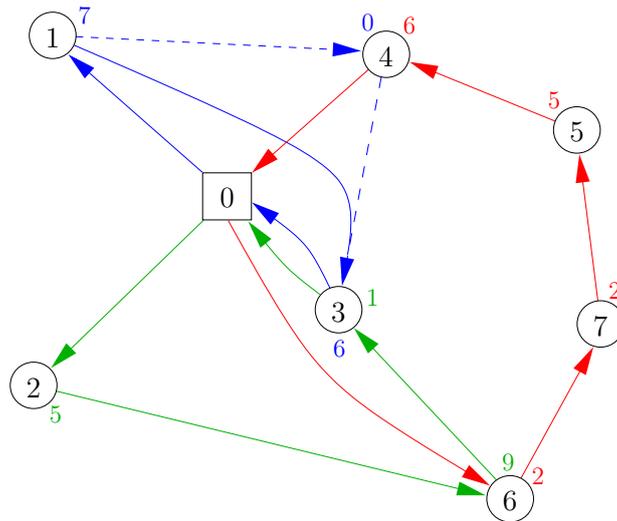


Abbildung 2.13: Nicht-schlechtere Lösung ohne  $k$ -Teilkreis

Abbildung 2.13 zeigt, wie sich in der Lösung aus Abbildung 2.12 eine im Beweis zu Satz 2.2 erwähnte Umverteilung vornehmen lässt. Die an die jeweiligen Kunden insgesamt ausgelieferten Mengen ändern sich ebenso wenig wie die insgesamt vom jeweiligen Transporter ausgelieferte Menge. Es folgt allerdings aus Umverteilung der Auslieferungsmengen auf dem 3-Teilkreis  $\{3, 4, 6\}$ , dass in der blauen Tour die Belieferung von Kunde 4 ausgelassen werden kann, wodurch sich aufgrund der Gültigkeit der Dreiecksungleichung der Zielfunktionswert nicht verschlechtert. Durch das Auslassen von Kunde 4 wird der 3-Teilkreis aus der Lösung entfernt.

Aus diesem von Dror und Trudeau erarbeiteten Satz 2.2 folgt Korollar 2.3.

**Korollar 2.3** Es existiert eine Permutation  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$  der Kunden, sodass in keiner Tour der optimalen Lösung ein Kunde  $\pi_i$  nach einem Kunden  $\pi_j$  mit  $j > i$  besucht wird.

Mit Hilfe dieses Korollars lässt sich die Suche nach einer optimalen Lösung demzufolge auf Lösungen beschränken, in denen zwei Orte  $i$  und  $j$  nicht sowohl in der einen wie auch in der anderen Reihenfolge besucht werden. Demzufolge ist es keine Einschränkung, wie bei den vorhergehenden auf [BKS99] basierenden Modellen binäre Entscheidungsvariablen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls Ort } i \text{ (irgendwann) vor Ort } j \text{ auf einer Tour besucht wird} \\ 0, & \text{falls Ort } j \text{ (irgendwann) vor Ort } i \text{ auf einer Tour besucht wird} \\ 0 \text{ oder } 1, & \text{falls Ort } i \text{ und Ort } j \text{ auf unterschiedlichen Touren besucht werden} \end{cases}$$

für alle Orte  $i, j = 1, \dots, n$  mit  $i < j$  einzuführen. Falls Ort  $i$  und Ort  $j$  auf unterschiedlichen Touren besucht werden, ist die Belegung der entsprechenden Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  beliebig aus der Menge  $\{0, 1\}$  zu wählen.

Binäre Entscheidungsvariablen

$$z_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{falls Ort } i \text{ von Transporter } k \text{ besucht wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

geben für jeden Transporter  $k = 1, \dots, m$  eine Teilmenge von zu beliefernden Kunden an. Durch die Belegung der Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  und  $z_{ik}$  wird für jeden Transporter eine Tour induziert.

Die von den Transportern an die jeweiligen Kunden ausgelieferten Mengen werden durch nichtnegative Entscheidungsvariablen

$$\alpha_{ik} \hat{=} \text{die von Transporter } k \text{ an Kunde } i \text{ ausgelieferte Menge}$$

für alle Kunden  $i = 1, \dots, n$  und Transporter  $k = 1, \dots, m$  bestimmt. Das Systemziel ist eine kostenminimale Belieferung. Hierzu seien als Hilfsvariablen nichtnegative Hilfsvariablen

$$\varphi_{ik} \hat{=} \text{die von Transporter } k \text{ bis zum Erreichen von Kunde } i \text{ verursachten Kosten}$$

für alle Kunden  $i = 1, \dots, n$  und Transporter  $k = 1, \dots, m$  gegeben. Wird Kunde  $i$  nicht von Transporter  $k$  beliefert, so sei  $\varphi_{ik}$  beliebig und es kann ohne Einschränkung  $\varphi_{ik} = 0$  gelten. Weiterhin seien nichtnegative Hilfsvariablen

$$\psi_k \hat{=} \text{die von Transporter } k \text{ insgesamt verursachten Kosten}$$

für alle Transporter  $k = 1, \dots, m$  gegeben.

Durch die erste Art von Nebenbedingungen

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} = q_i \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.5.8)$$

wird sichergestellt, dass jeder Kunde  $i = 1, \dots, n$  genau die von ihm bestellte Menge erhält. Die Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ik} \leq Q_k \quad \forall k = 1, \dots, m \quad (2.5.9)$$

hingegen tragen dafür Sorge, dass die Kapazitätsbeschränkung jedes Transporters  $k = 1, \dots, m$  eingehalten wird. Mit Hilfe der Nebenbedingungen

$$\alpha_{ik} \leq z_{ik}q_i \quad \forall i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m \quad (2.5.10)$$

wird erreicht, dass die von einem Transporter  $k = 1, \dots, m$  an einen Kunden  $i = 1, \dots, n$  gelieferte Menge  $\alpha_{ik}$  Null ist, wenn dieser Transporter demjenigen Kunden nicht zugeordnet ist ( $z_{ik} = 0$ ). Andernfalls ist diese Menge durch die Nachfrage  $q_i$  des Kunden  $i$  beschränkt. Mittels der vier Arten von Nebenbedingungen

$$z_{jk}c_{0j} \leq \varphi_{jk} \quad \forall j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m \quad (2.5.11)$$

$$\varphi_{ik} + c_{ij} \leq \varphi_{jk} + M_8 \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k = 1, \dots, m \quad (2.5.12)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji} \leq \varphi_{ik} + M_8 \cdot (2 + x_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k = 1, \dots, m \quad (2.5.13)$$

$$\varphi_{ik} + z_{ik}c_{i0} \leq \psi_k \quad \forall i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m \quad (2.5.14)$$

werden unter Zuhilfenahme eines ausreichend großen Parameters  $M_8$ , ähnlich wie bei dem neuen Modell für das CDVRPTW, die Kosten der Lösung bestimmt. Wenn ein Transporter  $k = 1, \dots, m$  einen Kunden  $j = 1, \dots, n$  bedient, so betragen die von diesem Transporter  $k$  bis zum Erreichen von Kunde  $j$  verursachten Kosten  $\varphi_{jk}$  mindestens  $c_{0j}$ , wie die Nebenbedingungen (2.5.11) fordern. Die sukzessive Summation der Kosten, wenn zwei Kunden  $i = 1, \dots, n$  und  $j = 1, \dots, n$  (nicht notwendigerweise direkt) nacheinander vom selben Transporter  $k = 1, \dots, m$  beliefert werden, erfolgt – je nach Reihenfolge ebendieser Kunden – durch die Nebenbedingungen (2.5.12) und (2.5.13). Abschließend stellen die Nebenbedingungen (2.5.14) sicher, dass die von einem Transporter  $k = 1, \dots, m$  insgesamt verursachten Kosten  $\psi_k$  mindestens der Summe der von ihm bis zu Kunde  $i = 1, \dots, n$  verursachten Kosten  $\varphi_{ik}$  und des Rückwegs zum Depot  $c_{i0}$  entspricht, wenn ebendieser Kunde  $i$  von ihm besucht wird.

Zusammengefasst mit der Zielfunktion, in welcher die insgesamt angefallenen Fahrtkosten minimiert werden, ergibt sich das folgende Modell des SDVRP:

$$\min \sum_{k=1}^m \psi_k$$

$$\text{u.d.N.} \quad \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} = q_i \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.5.8)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ik} \leq Q_k \quad \forall k = 1, \dots, m \quad (2.5.9)$$

$$\alpha_{ik} \leq z_{ik}q_i \quad \forall i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m \quad (2.5.10)$$

$$z_{jk}c_{0j} \leq \varphi_{jk} \quad \forall j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m \quad (2.5.11)$$

$$\varphi_{ik} + c_{ij} \leq \varphi_{jk} + M_8 \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k = 1, \dots, m \quad (2.5.12)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji} \leq \varphi_{ik} + M_8 \cdot (2 + x_{ij} - z_{ik} - z_{jk}) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j, k = 1, \dots, m \quad (2.5.13)$$

$$\varphi_{ik} + z_{ik}c_{i0} \leq \psi_k \quad \forall i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m \quad (2.5.14)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i < j$$

$$z_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$$

$$\alpha_{ik} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$$

$$\begin{aligned}\varphi_{ik} &\geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m \\ \psi_k &\geq 0 \quad \forall k = 1, \dots, m\end{aligned}$$

Im Vergleich zum vorherigen Modell lässt sich erkennen, dass die Anzahl der binären Variablen mit  $\mathcal{O}(n \cdot \max(n, m))$  geringer ist. Nachteilig ist, dass der Zielfunktionswert dieses Modells nicht direkt von der Belegung der binären Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  abhängt. Damit ist nicht zu erwarten, dass der Zielfunktionswert der Lösung der LP-Relaxation des Modells eine gute untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert liefert.

## 2.6 Modellierung des Vehicle Routing Problems mit Zeitfenstern und mehrfachem Fahren der Transporter

Das Vehicle Routing Problem mit Zeitfenstern und mehrfachem Fahren der Transporter (VRPTWM) formulieren Azi, Gendreau und Potvin[AGP10] wie folgt. Es seien  $m$  Fahrzeuge mit jeweils identischer Kapazität  $Q$  gegeben, mit denen von einem Depot aus ein verderbliches Produkt an  $n$  Kunden geliefert werden kann. Das Produkt verfüge über eine Haltbarkeitsdauer  $B$ , ein Transporter muss also spätestens  $B$  Zeiteinheiten nach Verlassen des Depots alle Kunden auf seiner derzeitigen Tour beliefert haben. Jeder Kunde  $i = 1, \dots, n$  an Ort  $i$  hat einen Bedarf von  $q_i$  Einheiten des Produkts, eine Bedienzeit  $s_i$  und ein Belieferungszeitfenster  $[a_i, b_i]$ , in dem seine Belieferung beginnen darf. Im Unterschied zu den bisher vorgestellten Problemen ist es beim VRPTWM nicht zwingend erforderlich, alle Kunden zu beliefern. Allerdings sind mit der Belieferung von Kunde  $i$  Einnahmen in Höhe von  $g_i$  verbunden. Für eine Fahrt zwischen Ort  $i = 0, \dots, n$  und Ort  $j = 0, \dots, n$  seien Fahrtkosten  $c_{ij}$  und Fahrtzeiten  $t_{ij}$  gegeben, wobei Ort 0 den Standort des Depots darstellt. Minimiert werden soll die Differenz aus den gesamten Fahrtkosten und den gesamten Einnahmen bei Belieferung, wobei ein Faktor  $\alpha$  angibt, wie stark die Einnahmen im Verhältnis mit den Fahrtkosten gewichtet werden sollen. Die Auslieferung soll nun an einem Arbeitstag geplant werden. Im Verlauf eines Arbeitstags darf ein Transporter mehrere Touren fahren, die sich zeitlich nicht überschneiden dürfen. Vor dem Beginn einer Tour muss noch Zeit zum Beladen des jeweiligen Transporters eingeplant werden, welche dieser beim Depot verbringen muss. Diese Ladezeit entspreche einem Anteil von  $\beta$  der Summe der Bedienzeiten der in der Tour belieferten Kunden.

Abbildung 2.14 zeigt die Lösung eines VRPTWM für die Problem Instanz aus Abbildung 2.9, allerdings bei Vorliegen von zwei Transportern mit jeweiliger Transporterkapazität von  $Q = 10$ . Das CDVRPTW aus Abbildung 2.9 wäre so nicht lösbar, da die Summe der Bedarfe die Summe der Transporterkapazitäten übersteigt. Die Bedienzeiten seien in diesem Beispiel  $s_i = 0$ , der Ladezeitfaktor  $\beta$  ist damit nicht von Belang. Die Tour von Transporter 1 ist durch den blauen Kantenzug dargestellt, sie verläuft genau wie die Tour des ersten Transporters in der Lösung des CDVRPTW in Abbildung 2.10. Die nicht auf dieser ersten Tour bedienten Kunden können allerdings aufgrund der geringeren Transporterkapazität nicht wie bei der Lösung des CDVRPTW auf einer gemeinsamen Tour bedient werden. Stattdessen fährt Transporter 2 (grüner Kantenzug) erst eine Pendeltour zu Kunde 5, kehrt zum Depot zurück, und bedient dann auf einer weiteren Tour Kunde 3 und Kunde 6, bevor er endgültig zum Depot zurückkehrt. Durch die Ermöglichung von mehrfachem Fahren der Transporter wird in diesem Beispiel also ermöglicht, eine Lösung zu bestimmen, in der alle Kunden beliefert werden, was aufgrund der beschränkten Transporterkapazitäten andernfalls nicht möglich wäre. Auch sind Fälle denkbar, in denen sich durch die Ermöglichung des mehrfachen Fahrens von Transportern die Anzahl der benötigten

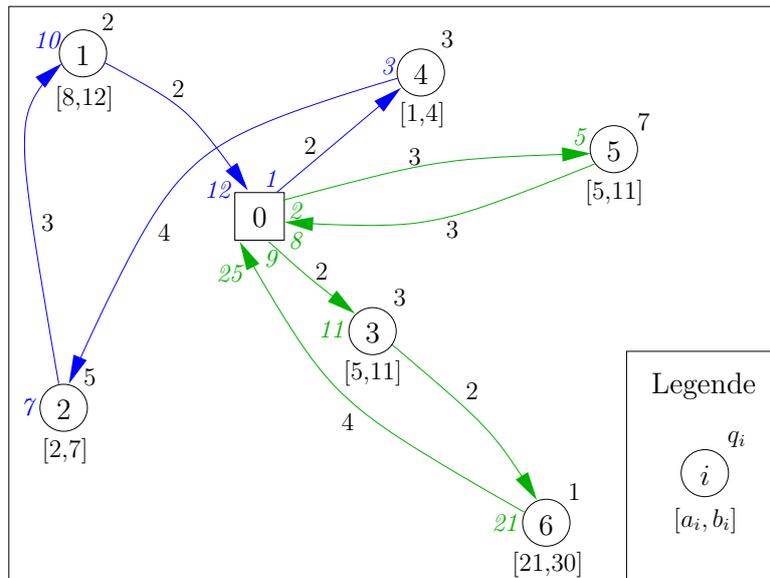


Abbildung 2.14: Die optimale Lösung eines VRPTWM

Transporter reduziert (etwa in dem Beispiel aus Abbildung 2.14, wenn die Zeitfenster der Kunden 1, 2 und 4 weit genug in der Zukunft lägen, sodass Transporter 2 diese auf einer dritten Tour bedienen könnte).

### Modellierung von Azi, Gendreau und Potvin

Um das von ihnen formulierte Vehicle Routing Problem mit Zeitfenstern und mehrfachem Fahren der Transporter exakt zu formulieren, stellen Azi, Gendreau und Potvin in [AGP10] ein gemischt-ganzzahliges lineares Programm vor. In ihrem Ansatz modellieren Sie das Depot sowohl als Ort 0 als auch als Ort  $n + 1$ , wobei der erstgenannte Ort den Anfangsort einer jeden Tour und der letztgenannte Ort den Endort jeder Tour darstellt. Die Fahrkosten und Fahrtzeiten werden in natürlicher Weise auf das Enddepot erweitert, wobei die Fahrkosten und die Fahrtzeit von Depot zu Depot  $c_{0,n+1} = t_{0,n+1} = 0$  seien. Mit dem Depot sei eine Bedienzeit von  $s_0 = s_{n+1} = 0$  verbunden. Mit der Menge

$$N = \{1, \dots, n\}$$

seien die Kunden, mit der Menge

$$N^+ := N \cup \{0, n + 1\}$$

die Orte gegeben. Für die Verbindungen zwischen den Kunden sei die Menge

$$A = N \times N \setminus \{(i, i) \mid i \in N\}$$

gegeben, für die Verbindungen zwischen den Orten<sup>13</sup> die Menge

$$A^+ = A \cup \{(0, i), (i, n + 1) \mid i \in N\} \cup \{(0, n + 1)\}.$$

<sup>13</sup>Irrtümlicherweise wird  $A^+ = A \cup \{(0, n + 1)\}$  in [AGP10] definiert, wodurch aber unter anderem im folgenden Modell kein Kunde vom Depot aus erreichbar ist. Dies wurde in [Vie11] bei einer Adaption des Modells bereits berichtigt.

Die Touren seien durch eine Menge  $R$  gegeben. Zur Bestimmung der Touren  $r \in R$  werden binäre Variablen

$$y_i^r = \begin{cases} 1, & \text{falls Kunde } i \text{ auf Tour } r \text{ besucht wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Orte  $i \in N$  und Touren  $r \in R$  und binäre Variablen

$$x_{ij}^r = \begin{cases} 1, & \text{falls Ort } j \text{ direkter Nachfolger von Ort } i \text{ auf Tour } r \text{ ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Verbindungen  $(i, j) \in A^+$  und Touren  $r \in R$  eingeführt. Da ein Transporter mehrere Touren fahren darf, führen Azi, Gendreau und Potvin binäre Variablen

$$z_{r\bar{r}} = \begin{cases} 1, & \text{falls Tour } \bar{r} \text{ direkt nach Tour } r \text{ vom selben Transporter gefahren wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Touren  $r, \bar{r} \in R$  mit  $r < \bar{r}$  ein. Außerdem werden nichtnegative Entscheidungsvariablen

$$t_i^r \triangleq \text{Ankunftszeit bei Ort } i \text{ auf Tour } r$$

für alle  $i \in N^+$ ,  $r \in R$  eingeführt. Die vor einer Tour anfallende Beladung wird in Form von Hilfsvariablen

$$\sigma^r \triangleq \text{Dauer der Beladung vor Tour } r$$

für alle  $r \in R$  berücksichtigt.

Als Ziel gilt es, die Differenz von Fahrtkosten und den gewichteten Einnahmen zu minimieren, durch

$$\min \sum_{r \in R} \sum_{(i,j) \in A^+} c_{ij} x_{ij}^r - \alpha \sum_{r \in R} \sum_{i \in N} g_i y_i^r$$

ist also die Zielfunktion gegeben.

Als Entscheidungsschranke ist zu fordern, dass jeder Kunde von höchstens einem Transporter bedient wird, was durch die Nebenbedingungen

$$\sum_{r \in R} y_i^r \leq 1 \quad \forall i \in N \quad (2.6.1)$$

modelliert wird. Ein Kunde muss auf einer Tour genau dann verlassen werden, wenn ebendieser Kunde auf der betreffenden Tour bedient wird, dies wird durch die Nebenbedingungen

$$\sum_{j \in N^+ \setminus \{0\}} x_{ij}^r = y_i^r \quad \forall i \in N, r \in R \quad (2.6.2)$$

gesichert.<sup>14</sup> Außerdem muss in jeder Tour zu jedem Kunden genausooft hin- wie wieder weggefahren werden, was mit den Nebenbedingungen

$$\sum_{i \in N^+ \setminus \{n+1\}} x_{ih}^r - \sum_{j \in N^+ \setminus \{0\}} x_{hj}^r = 0 \quad \forall h \in N, r \in R \quad (2.6.3)$$

<sup>14</sup>In dieser wie auch in den folgenden beiden Nebenbedingungen wird in [AGP10] irrtümlicherweise die Summe über alle  $i \in N^+$  beziehungsweise  $j \in N^+$  gebildet. Dies wurde bereits in einer Adaption des Modells (vgl. [Vie11]) korrigiert.

modelliert wird. Es muss jede Tour im Depot beginnen und enden, was die Nebenbedingungen

$$\sum_{j \in N^+ \setminus \{0\}} x_{0j}^r = 1 \quad \forall r \in R \quad (2.6.4)$$

und

$$\sum_{i \in N^+ \setminus \{n+1\}} x_{i,n+1}^r = 1 \quad \forall r \in R \quad (2.6.5)$$

abbilden. Die Einhaltung der Transporterkapazität auf Tour  $r \in R$  wird durch die Nebenbedingungen

$$\sum_{i \in N} q_i y_i^r \leq Q \quad \forall r \in R \quad (2.6.6)$$

sichergestellt, indem gefordert wird, dass Summe der Bedarfe  $q_i$  der auf ebendieser Tour bedienten Kunden die Kapazität  $Q$  nicht überschreitet. Durch die Nebenbedingungen

$$t_i^r + s_i + t_{ij} - M_9 (1 - x_{ij}^r) \leq t_j^r \quad \forall (i, j) \in A^+, r \in R \quad (2.6.7)$$

ist sichergestellt, dass die Ankunftszeit bei Kunde  $j$  in Tour  $r$  später als die Ankunftszeit bei Kunde  $i$  in Tour  $r$  ist, falls Kunde  $j$  direkt nach Kunde  $i$  in Tour  $r$  besucht wird, und zwar mindestens um die Servicezeit bei Kunde  $i$  und die Fahrtzeit von Kunde  $i$  zu Kunde  $j$ . Der Parameter  $M_9$  sei dabei ausreichend groß gewählt, sodass eine dieser Nebenbedingungen im Falle von  $x_{ij}^r = 0$  nicht bindend ist. Durch die Nebenbedingungen

$$a_i y_i^r \leq t_i^r \leq b_i y_i^r \quad \forall i \in N, r \in R \quad (2.6.8)$$

wird die Einhaltung der Zeitfensterrestriktionen sichergestellt. Die Nebenbedingungen

$$t_0^r \geq \sigma^r \quad \forall r \in R \quad (2.6.9)$$

sorgen dafür, dass bis zur Abfahrt eines Transporters auf einer Tour mindestens die für die Beladung notwendige Zeit verstreichen muss. Die maximale Zeit zwischen Abfahrt und Erreichen eines Kunden ist beschränkt, dies wird durch die Nebenbedingungen

$$t_i^r \leq t_0^r + B \quad \forall i \in N, r \in R \quad (2.6.10)$$

modelliert. Durch die Nebenbedingungen

$$\sigma^r = \beta \sum_{i \in N} s_i y_i^r \quad \forall r \in R \quad (2.6.11)$$

berechnet sich die Beladezeit vor der Durchführung einer Tour. Wird eine Tour  $\bar{r}$  nach einer Tour  $r$  vom selben Transporter gefahren, so darf die Tour  $\bar{r}$  frühestens dann starten, wenn nach dem Rückkehr auf Tour  $r$  ausreichend Zeit für die Beladung des Transporters zur Durchführung von Tour  $\bar{r}$  verstrichen ist. Dies stellen die Nebenbedingungen

$$t_0^{\bar{r}} + M_{10} (1 - z_{r\bar{r}}) \geq t_{n+1}^r + \sigma^{\bar{r}} \quad \forall r, \bar{r} \in R, r < \bar{r} \quad (2.6.12)$$

sicher, wobei  $M_{10}$  ein ausreichend groß zu wählender Parameter ist. Durch die begrenzte Anzahl an Transportern müssen auch ausreichend viele Touren hintereinander durchgeführt werden, was durch die Nebenbedingung

$$|R| - \sum_{r \in R} \sum_{\bar{r} \in R | r < \bar{r}} z_{r\bar{r}} \leq m \quad (2.6.13)$$

bewirkt wird. Auf der linken Seite dieser Nebenbedingungen wird die Anzahl der Touren bestimmt, die keine direkte Nachfolgertour besitzen, indem von der Anzahl aller Touren die Anzahl derjenigen Touren  $r$  mit Nachfolgertour  $\bar{r}$  abgezogen wird. Besitzt eine Tour keine Nachfolgertour, so endet mit ihr die Tourenfolge eines Transporters, d. h. eine Tour ohne Nachfolgertour impliziert die Benutzung eines Transporters. Es dürfen demzufolge maximal  $m$  Touren ohne Nachfolgertour auftreten. Dies wird mit den Nebenbedingungen (2.6.13) gefordert.

Durch die Nebenbedingungen

$$\sum_{\bar{r} \in R | r < \bar{r}} z_{r\bar{r}} \leq 1 \quad \forall r \in R \quad (2.6.14)$$

und

$$\sum_{r \in R | r < \bar{r}} z_{r\bar{r}} \leq 1 \quad \forall \bar{r} \in R \quad (2.6.15)$$

wird erreicht, dass jede Tour maximal einen Nachfolger und maximal einen Vorgänger besitzt. Diese Nebenbedingungen wurden in [AGP10] nicht gefordert, aber in [Vie11] in einer Erweiterung hinzugefügt. Es kann gezeigt werden, dass das Modell ohne diese Nebenbedingungen nicht korrekt ist, da ohne diese Nebenbedingungen mehr als  $m$  Touren möglich sind.

Zusammengefasst ergibt sich das folgende Modell.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{r \in R} \sum_{(i,j) \in A^+} c_{ij} x_{ij}^r - \alpha \sum_{r \in R} \sum_{k \in N} g_i y_i^r \\ \text{u.d.N.} \quad & \sum_{r \in R} y_i^r \leq 1 \quad \forall i \in N \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

$$\sum_{j \in N^+ \setminus \{0\}} x_{ij}^r = y_i^r \quad \forall i \in N, r \in R \quad (2.6.2)$$

$$\sum_{i \in N^+ \setminus \{n+1\}} x_{ih}^r - \sum_{j \in N^+ \setminus \{0\}} x_{hj}^r = 0 \quad \forall h \in N, r \in R \quad (2.6.3)$$

$$\sum_{j \in N^+ \setminus \{0\}} x_{0j}^r = 1 \quad \forall r \in R \quad (2.6.4)$$

$$\sum_{i \in N^+ \setminus \{n+1\}} x_{i,n+1}^r = 1 \quad \forall r \in R \quad (2.6.5)$$

$$\sum_{i \in N} q_i y_i^r \leq Q \quad \forall r \in R \quad (2.6.6)$$

$$t_i^r + s_i + t_{ij} - M_9 (1 - x_{ij}^r) \leq t_j^r \quad \forall (i,j) \in A^+, r \in R \quad (2.6.7)$$

$$a_i y_i^r \leq t_i^r \leq b_i y_i^r \quad \forall i \in N, r \in R \quad (2.6.8)$$

$$t_0^r \geq \sigma^r \quad \forall r \in R \quad (2.6.9)$$

$$t_i^r \leq t_0^r + B \quad \forall i \in N, r \in R \quad (2.6.10)$$

$$\sigma^r = \beta \sum_{i \in N} s_i y_i^r \quad \forall r \in R \quad (2.6.11)$$

$$t_0^{\bar{r}} + M_{10} (1 - z_{r\bar{r}}) \geq t_{n+1}^r + \sigma^{\bar{r}} \quad \forall r, \bar{r} \in R, r < \bar{r} \quad (2.6.12)$$

$$|R| - \sum_{r \in R} \sum_{\bar{r} \in R | r < \bar{r}} z_{r\bar{r}} \leq m \quad (2.6.13)$$

$$\sum_{\bar{r} \in R | r < \bar{r}} z_{r\bar{r}} \leq 1 \quad \forall r \in R \quad (2.6.14)$$

$$\sum_{r \in R | r < \bar{r}} z_{r\bar{r}} \leq 1 \quad \forall \bar{r} \in R \quad (2.6.15)$$

$$x_{ij}^r \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A^+, r \in R \quad (2.6.16)$$

$$y_i^r \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N, r \in R \quad (2.6.17)$$

$$z_{r\bar{r}} \in \{0, 1\} \quad \forall r, \bar{r} \in R, r < \bar{r} \quad (2.6.18)$$

$$t_i^r \geq 0 \quad \forall i \in N, r \in R \quad (2.6.19)$$

Ohne weitere Überlegungen kann die Anzahl möglicher Touren in einer optimalen Lösung nach oben durch die Anzahl der Kunden  $n$  abgeschätzt werden, woraus folgt, dass die Anzahl der binären Entscheidungsvariablen, welche durch die Entscheidungsvariablen  $x_{ij}^r$  bestimmt wird,  $\mathcal{O}(n^3)$  ist.

### Ein neues gemischt-ganzzahliges lineares Programm für das Vehicle Routing Problem mit Zeitfenstern und mehrfachem Fahren der Transporter

Das VRPTWM lässt sich, wie der folgende Unterabschnitt zeigt, auch mit weniger binären Variablen formulieren. Dabei sei die Menge aller Kunden durch  $N = \{1, \dots, n\}$  und die Menge aller Orte durch  $N_0 = \{0, \dots, n\}$  gegeben

Dazu seien zunächst binäre Entscheidungsvariablen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls Ort } j \text{ direkt nach Ort } i \text{ oder nach Rückkehr zum Depot besucht wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle  $i, j \in N_0$  definiert. Um das mehrfache Fahren von Transportern abbilden zu können, werden binäre Entscheidungsvariablen

$$\hat{x}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls der zwischen der Belieferung von Ort } i \text{ und Ort } j \text{ eine zusätzliche} \\ & \text{Depotfahrt stattfindet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Kunden  $i, j \in N$  eingeführt. Das bedeutet, dass im Fall  $x_{ij} = 1$  und  $\hat{x}_{ij} = 1$  der Transporter nicht direkt von Ort  $i$  zu Ort  $j$  fährt, sondern dazwischen noch das Depot besucht.

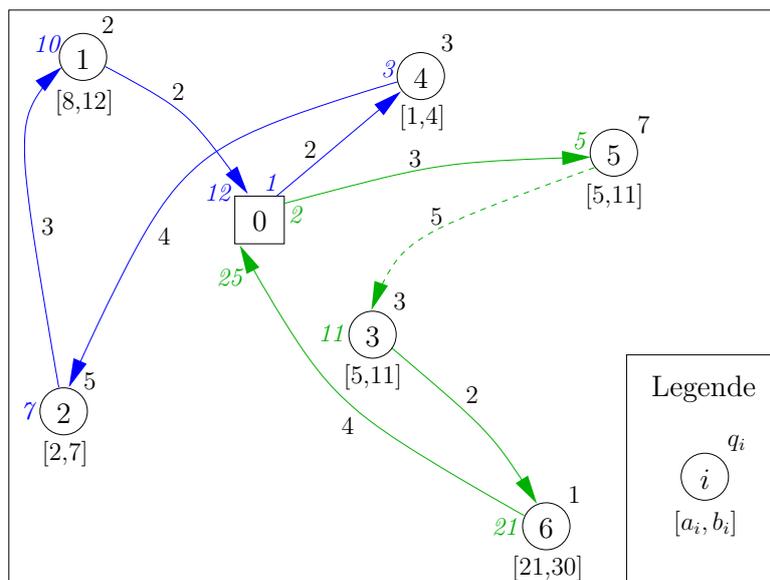


Abbildung 2.15: Die optimale Lösung eines VRPTWM im neuen Modell

In Abbildung 2.15 wird dies veranschaulicht. Diese zeigt die selbe Lösung wie Abbildung 2.14, allerdings wird die zwischenzeitliche Depotrückkehr hier durch die gestrichelte Kante (5, 3) statt durch die durchgezogenen Kanten (5, 0) und (0, 3) dargestellt. Eine gestrichelte Kante  $(i, j)$  bedeutet also, dass sowohl  $x_{ij} = 1$  als auch  $\hat{x}_{ij} = 1$  gelten. Die zurückgelegte Entfernung beträgt durch die zwischenzeitliche Depotrückkehr auch nicht  $t_{5,3} = 3$ , sondern  $t_{5,0} + t_{0,3} = 5$  Einheiten.

Nichtnegative Entscheidungsvariablen

$d_i \hat{=}$  Abfahrtszeit der Tour, auf der Kunde  $i$  beliefert wird

werden für alle Kunden  $i \in N$  ebenso eingeführt wie nichtnegative Hilfsvariablen

$\gamma_i \hat{=}$  insgesamt auf der Tour schon ausgelieferte Menge nach Verlassen von Kunde  $i$ .

Die auf einer Tour anfallenden Bedienzeiten sollen mittels nichtnegativer Hilfsvariablen

$S_i \hat{=}$  Summe der Bedienzeiten von Kunde  $i$  bis zum letzten Kunden auf der jeweiligen Tour

für alle Kunden  $i \in N$  ermittelt werden. Diese aufsummierten Bedienzeiten werden im Folgenden nützlich sein, um die nichtnegativen Hilfsvariablen

$\xi_i \hat{=}$  bei der Depotanfahrt vor der Bedienung von Kunde  $i$  anfallende Einladezeit

für alle Kunden  $i \in N$  zu ermitteln. Für die Ankunft bei einem Kunden  $i$  werden nichtnegative Entscheidungsvariablen

$\tau_i \hat{=}$  Ankunftszeit bei Kunde  $i$

für alle Kunden  $i \in N$  formuliert.

Das Systemziel lässt sich über die Zielfunktion

$$\min \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N_0} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} (c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}) \hat{x}_{ij} - \alpha \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N_0} x_{ij} g_i$$

modellieren. Neben den regulär anfallenden Kosten  $c_{ij}$  bei Fahrt von Ort  $i$  zu Ort  $j$  müssen dabei auch die gegebenenfalls zusätzlich anfallenden Kosten  $c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}$  summiert werden.

Jeder Kunde darf höchstens einmal verlassen werden, was durch die Nebenbedingungen

$$\sum_{j \in N_0} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in N \quad (2.6.20)$$

modelliert wird. Außerdem muss jeder Kunde genauso oft Verlassen werden, wie er erreicht wird, was durch

$$\sum_{j \in N_0} x_{ij} = \sum_{j \in N_0} x_{ji} \quad \forall i \in N \quad (2.6.21)$$

gefordert wird. Es stehen  $m$  Transporter zur Verfügung, wodurch das Depot maximal  $m$ -mal verlassen werden darf, wie die Nebenbedingung

$$\sum_{j \in N} x_{0j} \leq m \quad (2.6.22)$$

sicherstellt. Eine zusätzliche Depotrückkehr zwischen der Bedienung zweier Kunden  $i, j = 1, \dots, n$  kann nur dann stattfinden, wenn diese hintereinander bedient werden, was durch die Nebenbedingungen

$$\hat{x}_{ij} \leq x_{ij} \quad \forall i, j \in N \quad (2.6.23)$$

modelliert wird. Die auf einer Tour nach Verlassen eines Kunden  $i = 1, \dots, n$  bereits ausgelieferte Menge  $\gamma_i$  muss zwischen der Nachfrage  $q_i$  ebendieses Kunden und der Transporterkapazität  $Q$  liegen, wie die Nebenbedingungen

$$q_i \leq \gamma_i \leq Q \quad \forall i \in N \quad (2.6.24)$$

fordern. Wenn ein Transporter direkt von einem Kunden  $i = 1, \dots, n$  zum nächsten Kunden  $j = 1, \dots, n$  fährt, so wird die schon ausgelieferte Menge  $\gamma_j$  beim nächsten Kunden mittels der Nebenbedingungen

$$\gamma_i + q_j \leq \gamma_j + Q(1 - x_{ij} + \hat{x}_{ij}) \quad \forall i, j \in N \quad (2.6.25)$$

im Vergleich zur bis Kunde  $i$  ausgelieferten Menge  $\gamma_i$  um den Bedarf  $q_j$  dieses nächsten Kunden erhöht. Die Summe der anfallenden Bedienzeiten von einem Kunden bis zum letzten auf der jeweiligen Tour müssen zum einen wenigstens der Bedienzeit dieses Kunden entsprechen, was die Nebenbedingungen

$$s_i \leq S_i \quad \forall i \in N \quad (2.6.26)$$

fordern. Zum anderen muss diese Summe von Bedienzeiten eines Kunden  $i = 1, \dots, n$  mindestens der Summe der Bedienzeiten eines Kunden  $j = 1, \dots, n$  und der Bedienzeit  $s_i$  ebendieses Kunden  $i$  entsprechen. Dies wird durch die Nebenbedingungen

$$S_i \geq S_j + s_i - M_{11}(1 - x_{ij} + \hat{x}_{ij}) \quad \forall i, j \in N \quad (2.6.27)$$

mit Hilfe eines ausreichend großen Parameters  $M_{11}$  gesichert. Falls vor einem Kunden  $j = 1, \dots, n$  eine Depotanfahrt stattfindet, so soll in diesem Fall die anfallende Einladezeit  $\xi_j$  durch

$$\xi_j \geq \beta S_j - M_{12} \left( 1 - \sum_{i \in N} \hat{x}_{ij} \right) \quad \forall j \in N \quad (2.6.28)$$

auf den  $\beta$ -ten Teil der angefallenen Bedienzeiten von ebendiesem Kunden bis zum letzten auf der jeweiligen Tour gesetzt werden. Andernfalls kann ohne Einschränkung  $\xi_j = 0$  gelten. Dabei stelle der Parameter  $M_{12}$  eine ausreichend große Konstante dar.

Die Ankunft zum Zeitpunkt  $\tau_j$  bei einem zu beliefernden Kunden  $j = 1, \dots, n$  findet frühestens nach der Zeit statt, die durch das Einladen der Bestellungen ( $\beta S_k$ ) und die Fahrt zu ebendiesem Kunden ( $t_{0j}$ ) verstreichen, wie die Nebenbedingungen

$$t_{0j} + \beta S_j \leq \tau_j + (t_{0j} + \beta \cdot M_{13}) \cdot \left(1 - \sum_{i \in N} x_{ji}\right) \quad \forall j \in N \quad (2.6.29)$$

fordern. Dabei ist zu beachten, dass mit  $t_{0j} + \beta \cdot M_{13}$  im Falle der Nichtbelieferung von Kunde  $j$  auf der rechten Seite ein hinreichend großer Term addiert wird, sodass  $\tau_j = 0$  gelten kann

Wird ein Kunde  $j = 1, \dots, n$  direkt oder nach Rückkehr zum Depot nach einem anderen Kunden  $i = 1, \dots, n$  beliefert, so ist die Ankunftszeit  $\tau_j$  bei ihm um eine gewisse Zeit später als die Ankunftszeit  $\tau_i$  bei Kunde  $i$ , nämlich um die Bedienzeit  $s_i$ , um die Fahrzeit  $t_{ij}$ , um die zusätzlich Fahrzeit durch den Umweg zum Depot ( $t_{i0} + t_{0j} - t_{ij}$ ), falls eine zusätzliche Depotanfahrt stattfindet, und um  $\xi_j$ , welches der Einladezeit entspricht, falls eine Depotrückkehr stattfindet, und ansonsten ohne Einschränkung Null sein kann. Dies lässt sich unter Verwendung eines ausreichend großen Parameters  $M_{14}$  durch die Nebenbedingungen

$$\tau_i + s_i + t_{ij} + (t_{i0} + t_{0j} - t_{ij}) \hat{x}_{ij} + \xi_j \leq \tau_j + M_{14} (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j \in N \quad (2.6.30)$$

abbilden. Des Weiteren wird durch die Nebenbedingungen

$$a_i \cdot \sum_{j \in N_0} x_{ij} \leq \tau_i \leq b_i \cdot \sum_{j \in N_0} x_{ij} \quad \forall i \in N \quad (2.6.31)$$

für einen Kunden  $i = 1, \dots, n$  die Einhaltung der jeweiligen Belieferungszeitfenster  $[a_i, b_i]$  sichergestellt. Im Falle der Nichtbelieferung von Kunde  $i$  wird  $\tau_i = 0$  fixiert.

Zwischen dem Abfahrtszeitpunkt  $d_i$  des zugehörigen Transporters und dem Belieferungszeitpunkt  $\tau_i$  eines zu beliefernden Kunden  $i = 1, \dots, n$  muss mindestens die zur direkten Fahrt vom Depot zu ebendiesem Kunden nötige Zeit  $t_{0i}$  verstrichen sein, wie die Nebenbedingungen

$$d_i \leq \tau_i - t_{0i} \cdot \sum_{j \in N_0} x_{ij} \quad \forall i \in N \quad (2.6.32)$$

besagen. Falls Kunde  $i$  nicht beliefert wird, darf auf der rechten Seite der Nebenbedingung der Term  $t_{0i}$  nicht abgezogen werden, ansonsten folgte mit der Fixierung  $\tau_i = 0$  die Ungleichung  $d_i \leq -t_{0i}$ , welche aufgrund der Nichtnegativität von  $d_i$  bei zumeist positivem  $t_{0i}$  nicht erfüllt werden kann.

Wird ein Kunde  $j = 1, \dots, n$  direkt nach einem anderen Kunden  $i = 1, \dots, n$  beliefert, so werden sie auch vom selben Transporter beliefert und die Abfahrtszeit  $d_j$  bzw.  $d_i$  des sie beliefernden Transporters ist die selbe. Es genügt allerdings, die Einhaltung der Nebenbedingungen

$$d_j \leq d_i + M_{15} (1 - x_{ij} + \hat{x}_{ij}) \quad \forall i, j \in N \quad (2.6.33)$$

unter Zuhilfenahme eines ausreichend großen Parameters  $M_{15}$  zu fordern.

Zwischen dem Verlassen des Depots zum Zeitpunkt  $d_i$  und dem Erreichen des Kunden  $i = 1, \dots, n$  zum Zeitpunkt  $\tau_i$  dürfen, wie die Nebenbedingungen

$$\tau_i - d_i \leq B \quad \forall i \in N \quad (2.6.34)$$

ausdrücken, aufgrund der beschränkten Haltbarkeitsdauer maximal  $B$  Zeiteinheiten verstreichen. Es kann durch die Zeitfensterrestriktionen ausgeschlossen werden, dass ein Kunde  $j = 1, \dots, n$  Nachfolger eines anderen Kunden  $i = 1, \dots, n$  ist, wenn bei frühestmöglicher Abfahrt bei Kunde  $i$  zum Zeitpunkt  $a_i$  durch die Fahrtzeit  $t_{ij}$  der Kunde  $j$  nicht mehr innerhalb seines Zeitfensters  $[a_j, b_j]$  erreicht werden kann. Deshalb können mit den Nebenbedingungen

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in N, a_i + t_{ij} > b_j \quad (2.6.35)$$

die entsprechenden Variablen fixiert werden.

Gegebenenfalls ist bei einigen Paaren von Kunden aufgrund der Haltbarkeitsdauer eine aufeinanderfolgende Belieferung von Kunde  $i$  und  $j$  nur möglich, wenn zwischenzeitlich eine Depotrückkehr erfolgt. Falls Kunde  $i$  und  $j$  aufeinanderfolgend beliefert werden, ist die Gesamtfahrtzeit zu Kunde  $j$  nach unten beschränkt durch die Summe der Fahrtzeit  $t_{0i}$  vom Depot zu Kunde  $i$  und der Zeit  $\max(s_i + t_{ij}, a_j - b_i)$ , die zwischen der Belieferung von Kunde  $i$  und Kunde  $j$  mindestens verstreicht. Ist diese Gesamtfahrtzeit größer als die Haltbarkeitsdauer, so muss bei aufeinanderfolgender Belieferung von Kunde  $i$  und  $j$  eine zwischenzeitliche Depotrückkehr erfolgen. Dies wird mittels

$$x_{ij} = \hat{x}_{ij} \quad \forall i, j \in N, t_{0i} + \max(s_i + t_{ij}, a_j - b_i) > B \quad (2.6.36)$$

modelliert.

Zusammengefasst ergibt sich somit das folgende mathematische Modell.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N_0} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} (c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}) \hat{x}_{ij} - \alpha \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N_0} x_{ij} g_i \\ \text{u.d.N.} \quad & \sum_{j \in N_0} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in N \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

$$\sum_{j \in N_0} x_{ij} = \sum_{j \in N_0} x_{ji} \quad \forall i \in N \quad (2.6.21)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0j} \leq m \quad (2.6.22)$$

$$\hat{x}_{ij} \leq x_{ij} \quad \forall i, j \in N \quad (2.6.23)$$

$$q_i \leq \gamma_i \leq Q \quad \forall i \in N \quad (2.6.24)$$

$$\gamma_i + q_j \leq \gamma_j + Q(1 - x_{ij} + \hat{x}_{ij}) \quad \forall i, j \in N \quad (2.6.25)$$

$$s_i \leq S_i \quad \forall i \in N \quad (2.6.26)$$

$$S_i \geq S_j + s_i - M_{11}(1 - x_{ij} + \hat{x}_{ij}) \quad \forall i, j \in N \quad (2.6.27)$$

$$\xi_j \geq \beta S_j - M_{12} \left( 1 - \sum_{i \in N} \hat{x}_{ij} \right) \quad \forall j \in N \quad (2.6.28)$$

$$t_{0j} + \beta S_j \leq \tau_j + (t_{0j} + \beta \cdot M_{13}) \cdot \left( 1 - \sum_{i \in N} x_{ji} \right) \quad \forall j \in N \quad (2.6.29)$$

$$\tau_i + s_i + t_{ij} + (t_{i0} + t_{0j} - t_{ij}) \hat{x}_{ij} + \xi_j \leq \tau_j + M_{14}(1 - x_{ij}) \quad \forall i, j \in N \quad (2.6.30)$$

$$a_i \cdot \sum_{j \in N_0} x_{ij} \leq \tau_i \leq b_i \cdot \sum_{j \in N_0} x_{ij} \quad \forall i \in N \quad (2.6.31)$$

$$d_i \leq \tau_i - t_{0i} \cdot \sum_{j \in N_0} x_{ij} \quad \forall i \in N \quad (2.6.32)$$

$$d_j \leq d_i + M_{15}(1 - x_{ij} + \hat{x}_{ij}) \quad \forall i, j \in N \quad (2.6.33)$$

$$\tau_i - d_i \leq B \quad \forall i \in N \quad (2.6.34)$$

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in N, a_i + t_{ij} > b_j \quad (2.6.35)$$

$$x_{ij} = \hat{x}_{ij} \quad \forall i, j \in N, t_{0i} + \max(s_i + t_{ij}, a_j - b_i) > B \quad (2.6.36)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N_0$$

$$\hat{x}_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N$$

$$d_i \geq 0 \quad \forall i \in N_0$$

$$\gamma_i \geq 0 \quad \forall i \in N_0$$

$$S_i \geq 0 \quad \forall i \in N_0$$

$$\xi_i \geq 0 \quad \forall i \in N_0$$

$$\tau_i \geq 0 \quad \forall i \in N_0$$

Es ist ersichtlich, dass mit dieser Formulierung im Vergleich zur vorhergehenden eine deutliche Reduktion der Anzahl an binären Variablen gelungen ist. Um dies zu erreichen war es allerdings notwendig, einige nichtnegative Variablen einzuführen. Außerdem wird beim Sicherstellen einer korrekten Belegung etlicher nichtnegativer Variablen wie bei der Formulierung des CDVRPTW auf eine Verallgemeinerung der Ideen von Miller, Tucker und Zemlin [MTZ60] zurückgegriffen.

Wie Desrochers und Laporte [DL91] erwähnen, führt dies eventuell zu einer schwachen LP-Relaxation des Modells. Diesen Nachteil hat die vorhergehend vorgestellte Formulierung allerdings ebenfalls, auch wenn er sich bei ihr auf die Ankunftszeiten beschränkt.

## Kapitel 3

# Formulierung des Integrierten Produktions- und Distributionsplanungsproblems

Im vorherigen Kapitel wurden verschiedene Problemstellungen sowohl der Produktionsplanung als auch der Distributionsplanung jeweils separat betrachtet. Bei der integrierten Produktions- und Distributionsplanung sollen nun Produktion und Distribution innerhalb eines Unternehmens simultan geplant werden. Dadurch kann vermieden werden, dass in der Planung einer Stufe Entscheidungen getroffen werden, welche ungünstige Auswirkungen auf die Planungsmöglichkeiten in anderen Stufen nach sich ziehen. Damit einher geht in der im Folgenden untersuchten Problemstellung die Möglichkeit, Abhängigkeiten zwischen Produktion und Distribution direkt zu berücksichtigen.

Die Entscheidungen in der betrachteten Problemstellung werden simultan für drei Stufen getroffen. Damit wird der innerhalb eines Unternehmens stattfindende Entscheidungsprozess bezüglich Annahme, Produktion und Distribution von Bestellungen abgebildet. Abbildung 3.1 zeigt die Wege, welche Bestellungen durch diese Entscheidungsstufen nehmen, exemplarisch für ein Szenario, in dem sieben Bestellungen vorliegen. Die in der Selektion getroffenen Entscheidungen geben vor, dass vier dieser Bestellungen angenommen und drei abgelehnt werden. Die Modalitäten der Produktion werden mit den Produktionsentscheidungen vorgegeben. Wie die derart produzierten Bestellungen auszuliefern sind, ist durch die Distributionsentscheidungen bestimmt.

Genau genommen handelt es sich bei dem im Weiteren behandelten Problemtyp also nicht nur um ein Produktions- und Distributionsplanungsproblem, sondern auch um ein Selektionsproblem. Da diese Selektion jedoch im Rahmen der Produktions- und Distributionsplanung geschieht, ist der vorgestellte Problemtyp als Problem der integrierten Produktions- und Distributionsplanung (mit Selektionsentscheidungen) zu charakterisieren.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird die Entscheidungssituation detailliert geschildert. In diesem Kontext zeigt sich, dass nicht eine einzelne Problemstellung zu untersuchen ist, sondern ein Typ von Problemen, die sich je nach Ausprägung von gewissen Merkmalen unterscheiden. Diese Merkmale werden innerhalb dieses Abschnitts weiter klassifiziert.

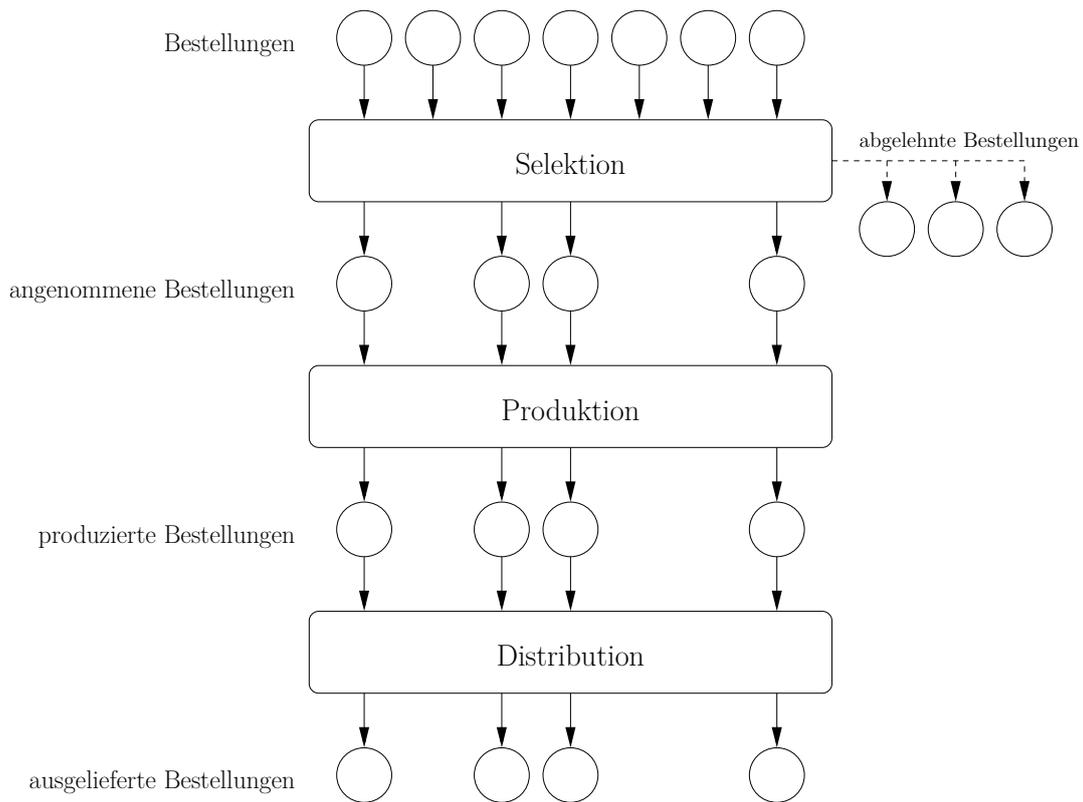


Abbildung 3.1: Die jeweiligen Wege von Bestellungen durch die Entscheidungsstufen bei einem Problem der integrierten Produktions- und Distributionsplanung

Im Anschluss daran erfolgt im zweiten Abschnitt des Kapitels eine formale Beschreibung des Entscheidungsproblems. Hierfür werden die gegebenen Parameter, die zu treffenden Entscheidungen, die dabei einzuhaltenden Entscheidungsschranken und das Systemziel detailliert vorgestellt.

### 3.1 Beschreibung der Entscheidungssituation

Der im Folgenden mit IPDSP (integrated production and distribution scheduling problem) bezeichnete Problemtyp gliedert sich im Allgemeinen wie folgt.

Es ist ein produzierendes Unternehmen gegeben. Bei diesem liegen Bestellungen von Kunden über eine bestimmte Menge eines Produkts vor, die innerhalb eines von eventuell mehreren vorgegebenen Zeitfenstern an einem bestimmten Zielort angeliefert werden soll. Es sei vorausgesetzt, dass von jedem Kunden genau eine Bestellung vorliegt.<sup>1</sup> Wenn eine Bestellung angenommen wird, erzielt das Unternehmen Verkaufserlöse, ist aber auch verpflichtet, die Bestellung zu produzieren<sup>2</sup> und fristgerecht an den vom Kunden vorgegebenen Zielort auszuliefern. Demzufolge wird der Fall, dass eine angenommene Bestellung nicht oder verspätet ausgeliefert wird, nicht

<sup>1</sup>Falls von einem Kunden mehrere Bestellungen vorliegen, so kann dieser Kunde durch entsprechend viele „künstliche“ Kunden mit jeweils einer Bestellung ersetzt werden. Es stellt also keine Einschränkung dar.

<sup>2</sup>Die „Produktion einer Bestellung“ wird im Folgenden als Kurzform für die „Produktion der in einer Bestellung bestellten Menge des Produkts für den bestellenden Kunden“ verwendet.

betrachtet. Falls eine Bestellung nicht angenommen wird, so können für den Produzenten gegebenenfalls Nichtbelieferungsstrafen anfallen.

Für einige Bestellungen kann bereits vorab eine Erfüllungszusage gegeben sein. Dies bedeutet, dass diese Bestellungen in jedem Fall angenommen werden müssen. Des Weiteren ist es möglich, dass für die Bestellungen jeweils angegeben ist, mit welcher Priorität sie zu anzunehmen sind. In dem Fall ist es nur möglich, die Annahme einer Bestellung einzuplanen, wenn auch alle Bestellungen mit höherer Priorität angenommen werden. Außerdem ist es möglich, dass einige Bestellungen nur gemeinsam angenommen oder abgelehnt werden können, die jeweiligen Bestellungen sind also „gebündelt“.

Das produzierende Unternehmen verfügt über einen oder mehrere Produktionsstandorte („Depots“). An diesen Produktionsstandorten stehen jeweils eine oder mehrere Maschinen zur Produktion zur Verfügung. Die Produktionszeit einer Bestellung kann dabei maschinenabhängig sein, wenn mehrere Maschinentypen vorhanden sind, und es können Rüstzeiten anfallen. Die Produktion soll unterbrechungsfrei erfolgen, die Bestellung eines Kunden darf also nicht in mehreren Teilen produziert werden. Zwischen der Produktion zweier Bestellungen darf eine Maschine jedoch ruhen („Leerlauf“). Die Produktion muss überschneidungsfrei geplant werden, es dürfen also keine zwei Bestellungen gleichzeitig auf der selben Maschine produziert werden. Die auf den Maschinen produzierten Güter haben ein nicht notwendigerweise identisches Höchstalter, das bei der jeweiligen Auslieferung nicht überschritten sein darf.

Es muss zu einem festgelegten Zeitpunkt entschieden werden, welche Bestellungen angenommen und welche abgelehnt werden. Danach wird die Produktion auf den Maschinen durchgeführt, wobei zu entscheiden ist, welche angenommene Bestellung wann und wo produziert werden soll.

Nach der Produktion erfolgt die Auslieferung der Bestellungen. Hierzu steht dem Produzenten ein homogener Fuhrpark von identischen oder ein heterogener Fuhrpark von unterschiedlichen Transportern zur Verfügung, die jeweils an einem der Produktionsstandorte stationiert sind. Bei der Benutzung eines Transporters fallen sowohl Fixkosten als auch transporterabhängige Fahrtkosten und Fahrtzeiten bei Fahrt von einem Ort zu einem anderen Ort an. Der Begriff „Ort“ kann sowohl einen Produktionsstandort als auch ein Zielort einer Bestellung bezeichnen.

Für jeden Transporter ist zu entscheiden, ob er benutzt wird, und wenn ja, welche Bestellungen mit ihm ausgeliefert werden sollen. Dabei ist die Gesamtmenge der innerhalb einer Tour ausgelieferten Güter durch die Kapazität des jeweiligen Transporters beschränkt. Weiter ist zu entscheiden, wann der Transporter das jeweilige Depot verlässt und wann er welchen Kunden erreicht. Ein Kunde darf nur innerhalb eines mit der Bestellung gegebenen Belieferungszeitfensters und nicht nach dem Überschreiten des Höchstalters des von ihm bestellten Produkts beliefert werden. Bei verfrühter Ankunft darf der Transporter bis zum Beginn des Belieferungszeitfensters warten. Es muss jede angenommene Bestellung ausgeliefert werden. Jede angenommene Bestellung muss je nach Entscheidungssituation von genau einem Transporter ausgeliefert werden oder darf auf mehrere Transporter verteilt werden. In letzterem Fall ist zu entscheiden, welche Quantitäten von den jeweiligen Transportern ausgeliefert werden. Des Weiteren darf jeder benutzte Transporter erst dann sein Depot verlassen, wenn die Produktion aller Bestellungen, die auf seiner nächsten Tour ausgeliefert werden sollen, abgeschlossen ist. Ein Transporter darf entweder genau eine oder mehrere Touren fahren, zwischen denen er jeweils zu demjenigen Depot zurückkehrt, an welchem er stationiert ist.

Das produzierende Unternehmen sucht nun bei gegebenen Bestellungen nach einer Auswahl von Kunden, die beliefert werden sollen, sowie nach einem Produktionsplan und einem Distribu-

onsplan für deren Bestellungen. Dabei soll der Gesamtgewinn, welcher sich aus Verkaufserlösen, Nichtbelieferungsstrafen, Transporterfixkosten und Fahrtkosten zusammensetzt, maximiert werden.

### Analyse von unterschiedlichen IPDSP-Szenarien

Die Problemstellung des integrierten Produktions- und Distributionsplanungsproblems wurde hiermit beschrieben, aber an mehreren Stellen lässt sich feststellen, dass einige Eigenschaften des IPDSP nicht konkret erläutert wurden, sondern stattdessen mehrere Ausprägungen von Eigenschaften möglich waren. Je nach Ausprägung dieser Eigenschaften lassen sich IPDSP-Szenarien unterscheiden. Welche Eigenschaften in welchen Ausprägungen auftreten können, wird in Tabelle 3.1 aufgeführt.

Tabelle 3.1: Eigenschaften von IPDSP-Szenarien und deren mögliche Ausprägungen

Nr.	Eigenschaft	Ausprägungen	
1:	Bestellungen mit Erfüllungszusage	nein	ja
2:	Prioritätsordnung der Bestellungen	nein	ja
3:	Gebündelte Bestellungen	nein	ja
4:	Höchstalter eines Gutes bei Auslieferung	identisch	unterschiedlich
5:	Maschinenanzahl	eine	mehrere
6:	Maschinentypen	einer	mehrere
7:	Rüstzeiten	nein	ja
8:	Anzahl Produktionsstandorte	einer	mehrere
9:	Fuhrpark	homogen	heterogen
10:	Belieferungszeitfenster pro Bestellung	eins	mehrere möglich
11:	Anzahl Touren pro Transporter	höchstens eine	mehrere möglich
12:	Belieferungsaufteilung	nicht möglich	möglich
13:	Fahrtkosten abhängig vom Ladungsgewicht	nein	ja

Die in der Tabelle aufgelisteten Eigenschaften lassen sich dabei wie folgt wirtschaftlich motivieren.

- 1: Bestellungen mit Erfüllungszusage können durch verpflichtende Lieferverträge vorgegeben sein. Es ist weiterhin denkbar, dass durch die Unternehmenspolitik einige Kunden einen derart hohen Stellenwert für das Unternehmen besitzen, dass eine Nichtannahme ihrer Bestellungen nicht in Frage kommt. Andererseits ist es aber auch möglich, dass keine Bestellung zwingend anzunehmen ist.
- 2: Nicht in jeder Entscheidungssituation sind alle Bestellungen gleich wichtig. So können Bestellungen einiger Kunden gegenüber Bestellungen anderer Kunden bei der Selektion bevorzugt oder benachteiligt werden, z. B. je nachdem, wie hoch das jeweilige Umsatzvolumen des Kunden im letzten Jahr war. Auch kann durch Unternehmensvorgaben für die zu den jeweiligen Bestellungen gehörigen Kunden eine Prioritätsordnung induziert sein. Es sei angenommen, dass diese in Form einer Prioritätsbewertung für jede Bestellung gegeben ist.

Damit ist vorgegeben, dass eine Bestellung nur dann angenommen werden kann, wenn alle Bestellungen mit höherer Prioritätsbewertung ebenfalls angenommen werden. Ob die Berücksichtigung einer derartigen Prioritätsordnung sinnvoll ist, hängt maßgeblich von der Bedeutung der einzelnen Kunden bzw. Bestellungen für das Unternehmen und von der Ausrichtung des Unternehmens ab.

- 3: Es wurde angenommen, dass zwischen den einzelnen Bestellungen keine direkten Abhängigkeiten bestehen. Dies ist in einer realen Entscheidungssituation nicht immer der Fall. Liegen von einem Kunden mehrere Bestellungen mit unterschiedlichen Zielorten vor (z. B. bei einem Bäcker mit mehreren Filialen), so ist es möglich, dass diese Bestellungen zur Sicherung einer einheitlichen Qualität vom selben Produzenten hergestellt werden sollen. Auch können mehrere Bestellungen gebündelt sein, weil eine große Bestellung über mehrere Posten vorlag, die in mehrere Bestellungen aufgeteilt wurde. Es ist dem produzierenden Unternehmen also bei diesen Bestellungen nicht gestattet, nur einen Teil von ihnen anzunehmen. Weiterhin kann es sein, dass eine Gruppe von Kunden gemeinsam bestellt hat, um einen besseren Kaufpreis zu verhandeln. Die von diesen Kunden aufgegebenen Bestellungen sollten dementsprechend auch nicht nur in Teilen angenommen werden.
- 4: Bei den im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Szenarien wird vorausgesetzt, dass bei den einzelnen Bestellungen zwischen der Produktion der bestellten Güter und ihrer Auslieferung nur eine gewisse Zeit, die auch als „Höchstalter“ bezeichnet wird, vergehen darf. Dieses Höchstalter entspricht vielfach einer beschränkten Haltbarkeitsdauer des jeweils bestellten Guts. Es ist zu beachten, dass hier davon ausgegangen wird, dass eine Bestellung nur eine Art von Produkt umfasst, sich das Höchstalter also auf das eine bestellte Gut bezieht und somit für jede Bestellung genau ein Höchstalter vorliegt.

Es ist anzunehmen, dass bei der Betrachtung eines homogenen Gutes dessen Haltbarkeitsdauer unabhängig vom Kunden und somit konstant ist, woraus auch identische Höchstalter der Bestellungen folgen. Unter gewissen Voraussetzungen ist dies jedoch nicht gegeben. Die Berücksichtigung von unterschiedlichen Höchstaltern kann auch bei einem homogenen Gut mit fester Haltbarkeitsdauer Sinn ergeben, falls die Kunden jeweils eine gewisse Resthaltbarkeit des ausgelieferten Gutes wünschen. Bei Gütern wie Nahrungsmitteln ist dies der Fall, wenn die jeweiligen Kunden die Güter an Endkunden weiterverkaufen wollen und dabei unterschiedliche Ansprüche an die Qualität derjenigen Güter haben, welche sie ihren Endkunden anbieten. Bei Gütern wie Industrieklebstoffen sichern Resthaltbarkeiten einen zeitlichen Spielraum für den Verbrauch des Gutes durch den jeweiligen Kunden. Je nachdem, wieviel Spielraum sich die einzelnen Kunden wünschen, ergeben sich unterschiedliche Resthaltbarkeiten. Um diese unterschiedlichen Resthaltbarkeiten verkürzt sich somit die Haltbarkeitsdauer der jeweils bestellten Güter, was zu unterschiedlichen Höchstaltern führt. Bei der Betrachtung heterogener Güter ist die Berücksichtigung unterschiedlicher Haltbarkeitsdauern und somit unterschiedlicher Höchstalter schon per se sinnvoll.

- 5: Neben der Betrachtung eines einfachen Szenarios mit nur einer Maschine ergibt es auch Sinn, weitere Maschinenkonfigurationen zu berücksichtigen. So kann es je nach Unternehmensgröße oder produziertem Gut sinnvoll sein anzunehmen, dass das Unternehmen über mehrere Maschinen verfügt. Insbesondere falls das betrachtete Unternehmen über mehrere zu koordinierende Produktionsstandorte verfügt, ist diese Annahme zwingend erforderlich.
- 6: Abhängig vom produzierten Gut ist es möglich, dass die Produktion auf unterschiedlichen Maschinen auch unterschiedlich schnell vonstatten geht, was sich in mehreren unterschiedlichen Maschinentypen widerspiegelt.

- 7: Rüstzeiten können bei der Umrüstung von Maschinen wie etwa bei der Säuberung zwischen der Produktion zweier Bestellungen anfallen. Dies ist insbesondere bei der Produktion unterschiedlicher Güter der Fall. Bei Betrachtung von unterschiedlichen Industrieklebstoffen oder Farben ist der Reinigungsaufwand stark schwankend und kann nicht in den Bearbeitungszeiten berücksichtigt werden. Insbesondere bei Farben zeigt sich dies dadurch, dass größerer Reinigungsaufwand betrieben werden muss, wenn helle Farben nach dunklen produziert werden.
- 8: In Abhängigkeit von der Unternehmensstruktur kann auch die Produktion und Distribution von unterschiedlichen Produktionsstandorten zusammengefasst koordiniert werden. In diesem Fall ist im Szenario anzunehmen, dass Produktion und Distribution an mehreren Produktionsstandorten gemeinsam geplant werden müssen und die Selektionsentscheidung zentral erfolgt. Dies muss aber nicht zwingend gegeben sein, z. B. wenn im Unternehmen die Planungskompetenz beim jeweiligen Produktionsstandort liegt.
- 9: Weiterhin hängt stark von der Art des betrachteten Unternehmens ab, ob sich die Transporter in Hinsicht auf ihre Fixkosten, ihre Kapazitäten, ihre Fahrtzeiten oder ihre Fahrtkosten unterscheiden. Für eine Transporterflotte, die ausschließlich aus Lastkraftwagen besteht, ist es eine sinnvolle Annahme, von gleichen Eigenschaften der Transporter und somit von einem heterogenen Fuhrpark auszugehen. Eine Ausnahme stellt derjenige Fall dar, in dem die Fahrzeugflotte im Verlauf des Bestehens eines Unternehmens gewachsen ist und dabei keine einheitliche Beschaffungsstrategie verfolgt wurde. Auch falls sich in der Transporterflotte neben Lastkraftwagen ebenfalls Kleintransporter befinden, ist von unterschiedlichen, vom jeweiligen Transporter abhängigen Fahrtkosten, Fahrtzeiten und Kapazitäten auszugehen. Dabei sind unterschiedliche Fahrtzeiten damit zu begründen, dass Kleintransporter auf den meisten Straßen keinen oder höheren Tempolimits unterliegen. Auch sind ihre Fixkosten ebenso wie ihre Kapazität signifikant geringer als die von Lastkraftwagen, sodass es sinnvoll ist, von fahrzeugabhängigen Fixkosten auszugehen. In diesen Fällen ist der Fuhrpark dementsprechend heterogen.
- 10: Neben der Möglichkeit, dass ein Kunde durch die Planung seines Produktionsprozesses bereits ein Belieferungszeitfenster festgelegt hat, besteht die Möglichkeit, dass dem Kunden mehrere für ihn gleichwertige Produktionsalternativen zur Verfügung stehen. Diese lassen mehrere mögliche Zeitfenster für die Anlieferung der Bestellung zu, von denen eins gewählt werden muss. Ebenfalls kann es der Fall sein, dass durch zeitabhängige Personalverfügbarkeiten beim Kunden die Entgegennahme der Bestellung nicht jederzeit, sondern nur innerhalb mehrerer vorgegebener Zeitfenster erfolgen kann.
- 11: Einen weiteren Punkt stellt die Frage dar, ob Transportern gestattet sein soll, gegebenenfalls mehrere Touren durchzuführen. Dies hängt stark davon ab, ob es im Kontext einer betrieblichen Problemstellung sinnvoll ist. Im Allgemeinen ist es nicht nachteilig, die Rückkehr von Transportern zum Produktionsstandort zur Durchführung weiterer Touren zuzulassen. Allerdings ist eine Lösung des entsprechenden Problems dann schwieriger zu bestimmen. Dementsprechend stellt sich bei einer konkreten Problemstellung die Frage, ob es in einer optimalen Lösung auftreten kann, dass ein Transporter mehrere Touren bewältigt. Ist das Höchstalter von Gütern bei deren Auslieferung im Verhältnis zum Planungshorizont gering und die Transporterkapazität im Verhältnis zu den Bestellgrößen auch gering, so erlaubt ein mehrfaches Fahren von Transportern eine Senkung der Transporterfixkosten der gesamt eingesetzten Transporter. Dies ist der Fall, da nun eine Auslieferungstour mit einem

bereits zurückgekehrten Transporter durchgeführt werden kann, statt hierfür einen noch nicht verwendeten Transporter einzusetzen.

- 12: Weiterhin soll, motiviert durch die Betrachtung des Vehicle Routing Problems mit Belieferungsaufteilung in Abschnitt 2.5, die Berücksichtigung von Belieferungsaufteilung im Rahmen des IPDSP Beachtung finden. Ebenso wie beim SDVRP kann untersucht werden, welche Auswirkungen sich durch die Möglichkeit zur Aufteilung der Belieferung auf mehrere Transporter ergeben.
- 13: Stark vom Typus des betrachteten Unternehmens wird beeinflusst, ob vom Ladungsgewicht abhängige Fahrtkosten berücksichtigt werden sollen. Die Auswirkungen des Gewichts der Ladung auf die Fahrtkosten ist sicherlich in vielen Fällen gering, insbesondere da oft weitaus gravierendere Kostenkomponenten berücksichtigt werden müssen. Sind jedoch in einer betrieblichen Problemstellung Transporter gegeben, deren Gewicht wesentlich geringer ist als das ihrer Ladung, so ist auch deren Verbrauch in aller Regel stark vom Ladungsgewicht abhängig. In dieser Arbeit soll vereinfacht angenommen werden, dass die Zunahme des Verbrauchs linear zur Zunahme des Ladungsgewichts erfolgt.

Vom Ladungsgewicht abhängige Fahrzeiten sollen hingegen nicht berücksichtigt werden. In seltenen Fällen mag es Sinn ergeben, ebenfalls vom Ladungsgewicht abhängige Fahrzeiten zu berücksichtigen. Zumeist wird jedoch eine Fahrt nur zu Beginn durch das höhere Gewicht verzögert wird und somit ist der Einfluss des Ladungsgewichts auf die Fahrzeit zu vernachlässigen.

Es wird also ersichtlich, dass es sich bei *dem* IPDSP um eine *Klasse* von Problemstellungen handelt. Mit Hilfe der vorgestellten Eigenschaften lässt sich diese Problemklasse weiter zerlegen, indem eine Unterklasse betrachtet wird, die nur Probleme enthält, die bezüglich einer oder mehrere Eigenschaften über die gleiche Ausprägung verfügen. Eine Unterklasse von Problemstellungen, bei der alle Probleminstanzen in allen Eigenschaften über die gleiche Ausprägung verfügen, wird im Folgenden als ein *IPDSP-Szenario* bezeichnet. Wird die Vereinigung mehrerer Unterklassen, deren Probleme alle über eine gewisse Eigenschaft (zum Beispiel das Vorliegen von Bestellungen mit Erfüllungszusage) zu charakterisieren sind, betrachtet, so werden diese Problemstellungen „IPDSP-Szenarien mit ebendieser Eigenschaft“ (zum Beispiel „IPDSP-Szenarien mit Bestellungen mit Erfüllungszusage“) genannt.

Es fällt auf, dass bei jeder Eigenschaft von IPDSP-Szenarien in Tabelle 3.1 die linke Ausprägung immer ein Spezialfall der rechten Ausprägung darstellt. Diese ist häufig auch einfacher zu behandeln. Dasjenige IPDSP-Szenario, bei dem alle Eigenschaften der Probleminstanzen in der linken, speziellen Ausprägung vorliegen, werde als *Basis-Szenario* bezeichnet. Dahingegen soll das IPDSP-Szenario, bei dem alle Eigenschaften der Probleminstanzen in der rechten, allgemeinen Ausprägung vorliegen, *das allgemeine IPDSP-Szenario* genannt werden.

## 3.2 Beschreibung des Entscheidungsproblems

An dieser Stelle soll nun das Entscheidungsproblem des IPDSP anhand des allgemeinen IPDSP-Szenarios mathematisch formuliert werden. Dieses allgemeine IPDSP-Szenario lässt sich wie folgt formulieren.

Gegeben sind:

- Die Menge  $N = \{1, \dots, n\}$  der  $n$  Bestellungen. Eine Bestellung  $i \in N$ 
  - stammt von Kunde  $i$ ,
  - ist an Ort  $i$  zu liefern (diese Orte werden auch als *Zielort* der jeweiligen Bestellung bezeichnet),<sup>3</sup>
  - hat die Größe  $q_i$ ,
  - erbringt Verkaufserlöse in Höhe von  $\hat{e}_i$  Geldeinheiten, wenn sie angenommen wird,
  - verursacht Kosten in Höhe von  $f_i$  Geldeinheiten, wenn sie nicht angenommen wird,
  - ist in einem der  $\lambda_i$  Zeitfenster  $[a_i^1, b_i^1], \dots, [a_i^{\lambda_i}, b_i^{\lambda_i}]$  auszuliefern,
  - muss innerhalb von  $B_i$  Zeiteinheiten nach Beendigung ihrer Produktion ausgeliefert werden und
  - verfügt über eine Prioritätsbewertung  $g_i$ .
- Die Teilmenge  $I^0 \subseteq N$  von Bestellungen mit Erfüllungszusage.
- Die Mengen  $I^1, \dots, I^\nu \subset N$  von gebündelten Bestellungen.
- Die Menge  $\Omega = \{1, \dots, \omega\}$  der  $\omega$  Maschinen zur Produktion. Von jeder Maschine  $k \in \Omega$ 
  - sind die Bearbeitungszeit  $p_i^k$  für Bestellung  $i$  und
  - die Rüstzeit  $\vartheta_{ij}^k$  zwischen der Produktion von Bestellung  $i$  und Bestellung  $j$  bekannt.
- Die Menge  $K := \{1, \dots, m\}$  der  $m$  Transporter. Von jedem Transporter  $k \in K$  sind
  - seine Kapazität  $Q_k$ ,
  - seine Fixkosten  $C_k$  bei Inanspruchnahme,
  - seine Fahrzeiten  $t_{ij}^k$  von Ort  $i$  zu Ort  $j$ ,
  - seine fixen Fahrtkosten  $c_{ij}^k$  von Ort  $i$  zu Ort  $j$  und
  - seine lastabhängigen Fahrtkosten  $\hat{c}_{ij}^k$  pro Mengeneinheit von Ort  $i$  zu Ort  $j$  bekannt, wobei die Orte  $i$  und  $j$  entweder Zielorten oder Produktionsstandorten entsprechen.
- Die Menge  $W = \{0, \dots, -(w-1)\}$  der  $w$  Produktionsstandorte.<sup>4</sup> Ein Produktionsstandort  $v \in W$ 
  - befindet sich an Ort  $v$ ,
  - verfügt über die nichtleere Menge  $\Omega_v \subset \Omega$  der am Produktionsstandort  $v$  vorhandenen Maschinen und

<sup>3</sup>Da von jedem Kunden genau eine Bestellung vorliegt, lassen sich die Bestellungen den Kunden in eindeutiger Weise zuordnen. Gleiches gilt für die Zielorte. Zu einer Bestellung  $i$  sind dementsprechend ein Kunde  $i$  und ein Zielort  $i$  zugehörig.

<sup>4</sup>Um bei der Indizierung der Fahrzeiten  $t_{ij}^k$  und Fahrtkosten  $c_{ij}^k$  mit Orten  $i$  und  $j$ , d.h. Zielorten oder Produktionsstandorten  $i$  und  $j$ , die Konsistenz zu wahren, seien diese Produktionsstandorte mit nichtpositiven Zahlen indiziert. Dieser Formalismus erlaubt es, die Fahrzeit eines Transporters  $k$  von einem Zielort  $i \in N$  zu einem Produktionsstandort  $v \in W$  einfach als  $t_{iv}^k$  anzugeben. Falls die Produktionsstandorte analog zu den Zielorten durch  $W = \{1, \dots, w\}$  indiziert wäre, wäre dies wegen  $N \cap W \neq \emptyset$  fehlerhaft, da z.B. bei  $i = 1$  und  $v = 1$  nicht klar wäre, ob jeweils der erste Zielort oder das erste Depot gemeint ist. Ein Index  $i \leq 0$  bzw.  $j \leq 0$  soll folglich einem Produktionsstandort, ein Index  $i > 0$  bzw.  $j > 0$  einem Zielort entsprechen.

- verfügt über die nichtleere Menge  $K_v \subset K$  der am Produktionsstandort  $v$  stationierten Transporter.

Festzulegen sind in der jeweiligen Entscheidungsstufe:

- Selektion:** Eine Auswahl  $I \subseteq N$  von Bestellungen, die angenommen werden sollen.
- Produktion:** Ein Produktionsplan für die angenommenen Bestellungen  $I$ . Dieser wird durch eine Produktionsreihenfolge  $\pi_k = (\pi_{k,1}, \pi_{k,2}, \dots, \pi_{k,n_k^p})$  nebst  $n_k^p \in \mathbb{N}_0$  für jede Maschine  $k \in \Omega$  sowie durch Produktionsstartzeitpunkte  $s_i \geq 0$  für jede Bestellung  $i \in I$  charakterisiert.
- Distribution:** Ein Distributionsplan für die angenommenen Bestellungen  $I$  in Form von Auslieferungsreihenfolgen<sup>5</sup>  $\sigma_k = (\sigma_{k,1}, \sigma_{k,2}, \dots, \sigma_{k,n_k^d})$  nebst  $n_k^d \in \mathbb{N}_0$  mit  $\sigma_{k,j} \in I \cup W$  für jeden Transporter  $k \in K$  sowie Belieferungszeitpunkte  $\tau_i$  für alle  $i \in I$ .<sup>6</sup> Die Folge  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$  werde als Auslieferungsplan bezeichnet.
- Bei der Berücksichtigung von Belieferungsaufteilung ist zusätzlich die Größe  $\alpha_i^k$  gesucht, die dem Teil von Bestellung  $i$  entspricht, der durch Transporter  $k$  ausgeliefert wird.

Dabei sind folgende Bedingungen einzuhalten:

1. Die Menge der angenommenen Bestellungen  $I$  muss Obermenge von  $I^0$  sein.
2. Wird eine Bestellung  $i$  mit Prioritätsbewertung  $g_i$  angenommen, so muss auch jede Bestellung  $j$  mit höherer Prioritätsbewertung  $g_j > g_i$  angenommen werden.
3. Der Produktionsplan muss überschneidungsfrei sein.
4. Der Produktionsplan muss die Rüstzeiten der Maschinen berücksichtigen.
5. Jede angenommene Bestellung muss auf genau einer Maschine produziert werden.
6. Jede angenommene Bestellung muss vollständig am Zielort eingehen.
7. Ein Transporter darf sein Depot erst zu einer Tour verlassen, wenn die Produktion aller von ihm auf dieser Tour auszuliefernden Bestellungen abgeschlossen ist.
8. Jede angenommene Bestellung muss von einem Transporter ausgeliefert werden, der an dem jeweiligen Depot, an welchem die Bestellung produziert wird, stationiert ist.
9. Jeder angenommene Bestellung muss in einem ihrer Zeitfenster ausgeliefert werden.
10. Die jeweilige Transporterkapazität darf nicht überschritten werden.
11. Das Höchstalter jedes für eine angenommene Bestellung produzierten Guts darf bei seiner Auslieferung nicht überschritten sein.

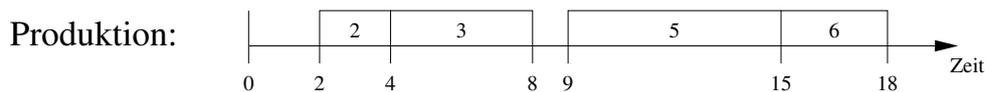
<sup>5</sup>Gilt  $\sigma_k = ()$  nebst  $n_k^d = 0$ , so wird Transporter  $k$  nicht benutzt.

<sup>6</sup>Die „Beliierungszeitpunkte“ beim jeweiligen Depot  $v$  sind nicht explizit zu bestimmen. Sie lassen sich ohne Einschränkung mittels  $\tau_j - t_{vj}$  aus der Ankunftszeit beim nächsten Kunden  $j$  bestimmen. Insbesondere beim mehrmaligen Fahren der Transporter existiert auch nicht *ein einzelner* Belieferungszeitpunkt des jeweiligen Depots.

12. Eine Bestellung aus einer Menge von gebündelten Bestellungen kann nur dann angenommen werden, wenn die anderen Bestellungen aus ebendieser Menge ebenfalls angenommen werden.

Ziel ist die Minimierung des Verlustes.<sup>7</sup> Dieser setzt sich zusammen aus

- Kosten in Höhe von  $e_i = \hat{e}_i + f_i$  bei Ablehnung von Bestellung  $i$ , welche sich additiv aus entgangenen Verkaufserlösen  $\hat{e}_i$  und den Kosten  $f_i$  für die Nichtannahme der Bestellung zusammensetzen. Diese Kosten werden in der Folge als *Nichtbelieferungskosten* bezeichnet.
- Transporterfixkosten in Höhe von  $C_k$  Geldeinheiten bei Verwendung von Transporter  $k$ .
- Fahrtkosten in Höhe von  $c_{ij}^k + \hat{Q}_{ij}^k c_{ij}^k$  Geldeinheiten, wenn  $\hat{Q}_{ij}^k$  Güter durch Transporter  $k$  von Ort  $i$  zu Ort  $j$  befördert werden.



Distribution:

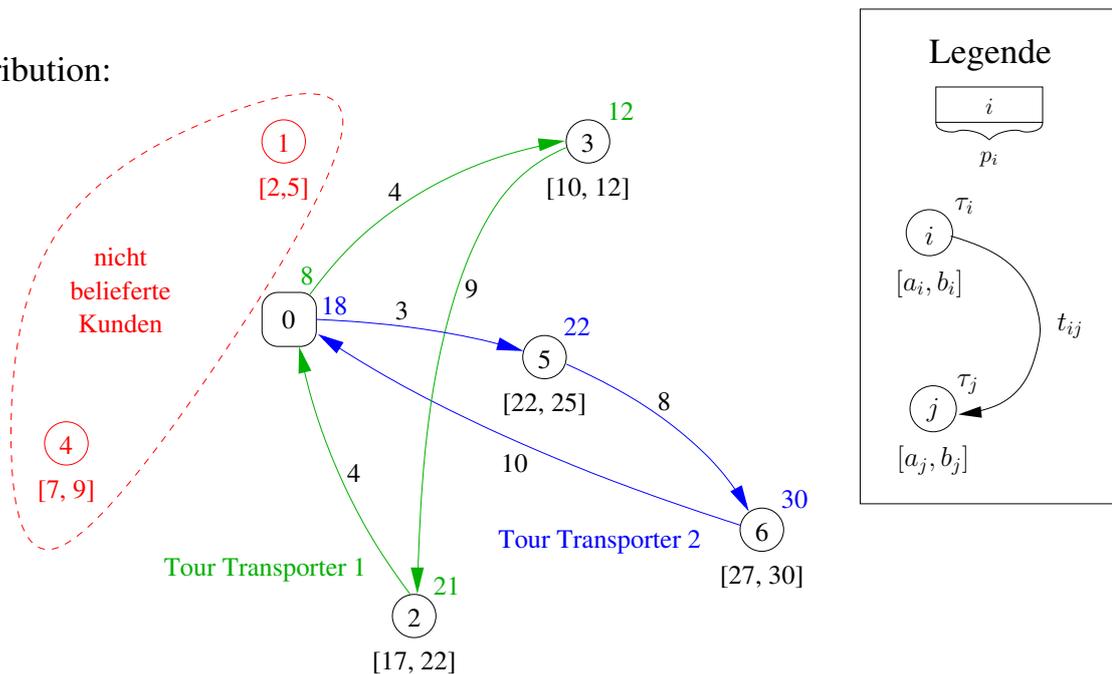


Abbildung 3.2: Beispiel einer Lösung einer Instanz des Basis-Szenarios des IPDSP

<sup>7</sup>Um den für die wirtschaftliche Einschätzung der Planung wichtigeren Gewinn zu erhalten, ist dieser Verlust von der Summe aller Verkaufserlöse  $\sum_{i \in N} \hat{e}_i$  abzuziehen. Da es sich bei dieser Summe allerdings um einen konstanten Term handelt, ist es korrekt, statt der Maximierung des Gewinns den oben definierten „Verlust“ zu minimieren. Dies führt zu einer Nichtnegativen Zielfunktion, mit deren Hilfe sich insbesondere die Güte von Lösungsverfahren besser beurteilen lässt.

Betrachten wir das Beispiel aus Abbildung 3.2, in welchem eine zulässige Lösung für eine Problem Instanz dargestellt wird, ohne auf den Verlust einzugehen. Es sind 6 Bestellungen, dargestellt als Balken, gegeben, die zur Auswahl stehen. Dabei gibt die Zahl in den Balken die Nummer der jeweiligen Bestellung und die Länge des Balkens sowohl die Produktionsdauer  $p_i$  als auch die Bestellungsgröße  $q_i = p_i$  an. Es sei das Höchstalter  $B_i = 18$  für alle Bestellungen  $i = 1, \dots, 6$  und die Menge der Bestellungen mit Erfüllungszusage sei  $I^0 = \emptyset$ . Für die Produktion ist eine einzelne Maschine ohne Rüstzeiten gegeben. Zur Auslieferung stehen zwei Transporter mit identischer Geschwindigkeit zur Verfügung, welche eine Kapazität von jeweils  $Q_1 = Q_2 = 12$  besitzen. Nicht angenommene Bestellungen sind rot markiert. In der Lösung dieses Beispiels sollen die Bestellungen 1 und 4 nicht angenommen werden, demzufolge erfolgt auch keine Produktion ebendieser Bestellungen 1 und 4. Die Produktion der anderen Bestellungen erfolgt wie im Gantt-Diagramm angegeben, also Bestellung 2 im Zeitfenster  $[2, 4]$ , Bestellung 3 im Zeitfenster  $[4, 8]$ , Bestellung 5 im Zeitfenster  $[9, 15]$  und Bestellung 6 im Zeitfenster  $[15, 18]$ .

Danach erfolgt die Auslieferung. Die Bestellungen 1 und 4 wurden nicht angenommen, demzufolge sind die jeweiligen Kunden nicht zu beliefern und in der Abbildung rot markiert. Der Transporter 1 liefert die Bestellungen 3 und 2 aus. Daher kann er das Depot erst verlassen, wenn die Produktion dieser Bestellungen abgeschlossen ist, also zum Zeitpunkt 8. Danach benötigt er 4 Zeiteinheiten und erreicht Ort 3 somit zum Zeitpunkt  $\tau_3 = 12$ . Nach weiteren 9 Zeiteinheiten erreicht er Ort 2 zum Zeitpunkt  $\tau_2 = 21$  und kehrt zum Depot zurück. Der Transporter 2 liefert die Bestellungen 5 und 6 aus. Demzufolge verlässt er das Depot zum Zeitpunkt 18 und erreicht Ort 5 nach 3 Zeiteinheiten zum Zeitpunkt 21. Da eine Belieferung vor  $a_5 = 22$  allerdings unzulässig ist, muss Transporter 2 erst eine Zeiteinheit warten und liefert Bestellung 5 somit zum Zeitpunkt  $\tau_5 = 22$  aus. Nach 8 weiteren Zeiteinheiten erreicht er Ort 6 zum Zeitpunkt  $\tau_6 = 30$  und kehrt zum Depot zurück. Der Auslieferungsplan  $\sigma$  setzt sich somit aus  $\sigma_1 = (0, 3, 2, 0)$  und  $\sigma_2 = (0, 5, 6, 0)$  zusammen.

Es gelten  $\tau_i - s_i - p_i \leq B$  für  $i = 2, 3, 5, 6$ , demzufolge ist der Plan bezüglich der Höchstalter zulässig. Des Weiteren ist  $q_2 + q_3 = 6 \leq 8 = Q_1$  und  $q_5 + q_6 = 9 \leq 12 = Q_2$ , der Plan ist also auch bezüglich der Transporterkapazität zulässig.

## Kapitel 4

# Modellierung verschiedener Szenarien der integrierten Produktions- und Distributionsplanung

Einen Schwerpunkt dieser Arbeit stellt die Formulierung von Szenarien der integrierten Produktions- und Distributionsplanung in Form von gemischt-ganzzahligen linearen Programmen (*mixed integer program, MIP*) dar. Diese Art der Problemformulierung zeichnet sich insbesondere dadurch aus, dass für die Lösung derartiger gemischt-ganzzahliger linearer Programme spezielle Lösungsverfahren existieren, welche durch jahrzehntelange Weiterentwicklung sehr leistungsfähig sind. Demzufolge sollen die im vorherigen Kapitel vorgestellten Szenarien des IPDSP als gemischt-ganzzahliges lineares Programm formuliert werden. Bei der Formulierung von Szenarien des IPDSP als MIP soll ebenso wie in Kapitel 2 im Vordergrund stehen, dass das jeweils formulierte MIP sich auch dazu eignet, mittels eines MIP-Solvers gelöst zu werden. Ziel dieses Kapitels ist demzufolge nicht nur, durch ein mathematisches Modell das jeweilige Szenario exakt zu beschreiben, sondern auch, dieses mathematische Modell derart zu gestalten, dass in ihm die Anzahl von Variablen und Nebenbedingungen möglichst gering ist. Insbesondere die Anzahl von binären Variablen eines linearen Modells ist ein Indikator, der darauf schließen lässt, wie aufwendig es ist, dieses Modell mit Hilfe eines MIP-Solvers zu lösen. Erfahrungsgemäß steigt der Lösungsaufwand mit steigender Anzahl binärer Variablen übermäßig stark an.

Dabei haben die in diesem Kapitel entwickelten Modelle grundsätzlich Anleihen bei einstufigen Produktions- und Distributionsmodellen, wie sie in Kapitel 2 vorgestellt wurden. Die Modellierung einiger Aspekte bedurfte jedoch neuer Ansätze, die in der Literatur noch nicht behandelt wurden. So muss die Produktion einer Bestellung beendet sein, wenn der jeweilige Transporter das Depot verlässt, um sie auszuliefern. Dazu werden – abhängig von den jeweils untersuchten Szenarien – in dieser Arbeit unterschiedliche Modellierungen entwickelt. Weiterhin ist die Modellierung von mehreren Touren pro Transporter hervorzuheben, für die ein neuer Ansatz entwickelt wurde, um die zwischenzeitliche Depotrückkehr eines Transporters zu modellieren. Auch die Modellierung von Belieferungsaufteilung, bei welcher die Modellierung der Distribution im Grunde auf dem im vorhergehenden Kapitel vorgestellten Modell des SDVRP beruht, ist bisher nicht in der Literatur zu finden. Dies gilt auch für die Modellierung von Szenarien des IPDSP, in denen sowohl mehrere Touren pro Transportern als auch Belieferungsaufteilung Berücksich-

tigung finden. Die im Folgenden vorgestellten Modelle beruhen auf solch speziell entwickelten Modellierungsideen.

Dieses Kapitel beginnt im ersten Abschnitt mit der Vorstellung eines Modells für das Basis-Szenario. Dieses Szenario soll als das *Basis-Modell* bezeichnet werden. Unter allen Modellen ist es das am wenigsten komplexe. Davon ausgehend soll in den weiteren Abschnitten dargestellt werden, wie IPDSP-Szenarien, die bezüglich der in Tabelle 3.1 vorgestellten Eigenschaften allgemeiner sind, auf dem Basis-Modell aufbauend formuliert werden können, falls dies möglich ist. Andernfalls sollen diese allgemeineren IPDSP-Szenarien mittels eines neuen Modells formal dargestellt werden.

Es ist in diesem Kontext zu beachten, dass zwischen der Modellierung von unterschiedlichen Verallgemeinerungen des Basis-Szenarios des IPDSP gewisse Interdependenzen bestehen, welche in Abbildung 4.1 dargestellt werden. In den Kästchen werden die Verallgemeinerungen und derjenige Abschnitt, in dem ihre Modellierung entwickelt wird, dargestellt. Dabei sollen im Folgenden die Modellierung der Verallgemeinerung in Bezug auf mehrere Maschinen, unterschiedliche Maschinentypen und Rüstzeiten gemeinsam in Abschnitt 4.6 präsentiert werden, sodass diese in Abbildung 4.1 zu einem einzigen grau hinterlegtem Kästchen zusammengefasst sind.

Ein Pfeil von Kästchen  $A$  zu Kästchen  $B$  zeigt an, dass die Modellierung der Verallgemeinerung  $A$  nur dann erfolgen kann, wenn auch die Modellierung der Verallgemeinerung  $B$  erfolgt ist. So ist zur Modellierung von IPDSP-Szenarien mit mehreren Produktionsstandorten auch eine Modellierung von mehreren Maschinen vorzunehmen (was z. B. in diesem Fall damit begründet ist, dass sich an jedem Produktionsstandort mindestens eine Maschine befindet).

Eine Polygonzug zwischen zwei Kästchen  $A$  und  $B$  weist darauf hin, dass die Modellierung der Verallgemeinerung  $A$  und die Modellierung der Verallgemeinerung  $B$  nicht unabhängig voneinander vorgenommen werden können. Dies ist vor allem durch die gewählte Modellierungstechnik bedingt. So hat das Vorhandensein von Maschinen unterschiedlichen Typs mit unterschiedlichen Bearbeitungszeiten  $p_i^k$  Einfluss auf die Berechnung desjenigen Zeitpunktes, an dem das Höchstalter der für eine Bestellung produzierten Güter überschritten wird. Dementsprechend sind diese unterschiedlichen Bearbeitungszeiten auch bei unterschiedlichen Höchstaltern der für die Bestellungen produzierten Güter zu berücksichtigen. Wenn beide Verallgemeinerungen modelliert werden sollen, so ist dies anders vorzunehmen als die jeweils einzelne Modellierung von unterschiedlichen Höchstaltern beziehungsweise mehrerer Maschinentypen. An dem jeweiligen Polygonzug finden sich die Nummern derjenigen Abschnitte, in welchen vorgestellt wird, wie sich die Kombination beider Verallgemeinerungen modellieren lässt. Je nachdem, welche Verallgemeinerungen noch zusätzlich betrachtet werden, kann die Kombination unterschiedlich zu modellieren sein.

Die Modellierung der Verallgemeinerung in Bezug auf mehrere Touren pro Transporter und Belieferungsaufteilung ist sehr komplex, weshalb ihr der eigene Abschnitt 4.12 gewidmet ist. Dies wird in Abbildung 4.1 durch das blaue Kästchen, welches die Kästchen der beiden einzelnen Verallgemeinerungen umfasst, dargestellt. Bei denjenigen der übrigen Verallgemeinerungen, welche sich nicht unabhängig von diesen beiden Verallgemeinerungen modellieren lassen, ist der Abschnitt 4.12.1 blau an der jeweiligen Kante notiert, falls sich die zur gemeinsamen Modellierung nötigen Informationen in diesem Abschnitt finden lassen. Die Markierung in blau dient in erster Linie der optischen Unterscheidung.

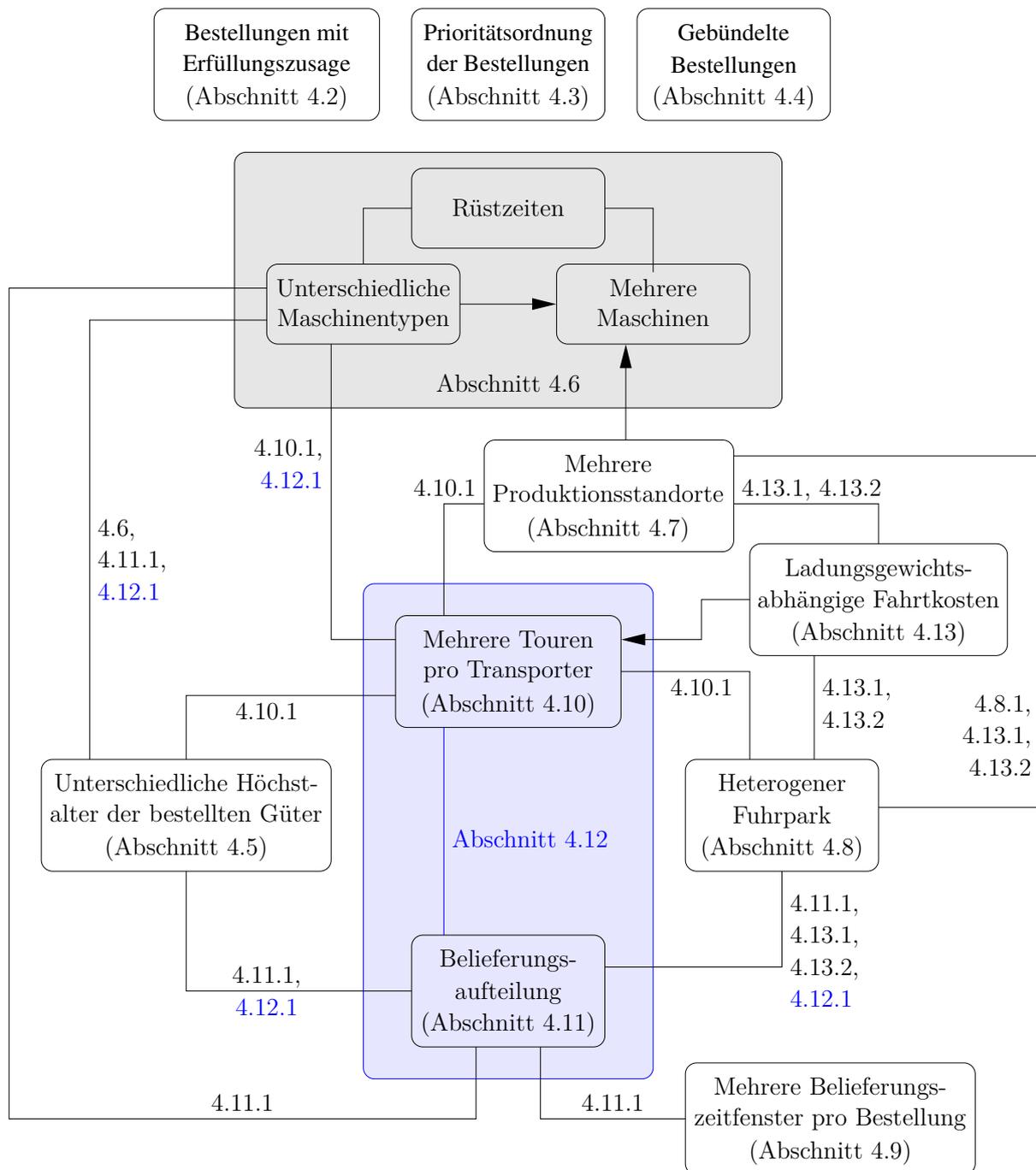


Abbildung 4.1: Abhängigkeiten bei der Modellierung von Szenarien des IPDSP

Mittels dieser Abbildung ist es möglich, je nach betrachtetem Szenario des IPDSP zu bestimmen, in welchen der folgenden Abschnitte sich Informationen zur Modellierung ebendieses Szenarios finden lassen. Sie dient also als Übersicht über den Modellierungsbaukasten.

## 4.1 Das Basis-Szenario der integrierten Produktions- und Distributionsplanung

Als Basis-Szenario des IPDSP soll – wie bereits erwähnt – dasjenige Szenario des IPDSP betrachtet werden, in welchem alle Eigenschaften (vgl. Tabelle 3.1) in der jeweils speziellen Ausprägung vorliegen. Dies bedeutet, dass in diesem Szenario keine Bestellungen mit Erfüllungszusage berücksichtigt werden, dass keine Bestellungsrioritäten gegeben sind, dass keine gebündelten Bestellungen vorliegen, dass die Höchstalter der für die Bestellungen produzierten Güter identisch sind, dass zur Produktion eine einzelne Maschine zu Verfügung steht (und damit auch nur ein Maschinentyp), dass keine Rüstzeiten zu beachten sind, dass ein einzelner Produktionsstandort betrachtet wird, dass die Transporter über einheitliche Kapazität, Fixkosten, Fahrtkosten und Fahrtzeiten verfügen, dass zu jeder Bestellung genau ein Zeitfenster zur Auslieferung vorgegeben ist, dass die Lieferung nicht aufgeteilt werden darf, dass jeder Transporter maximal eine Auslieferungstour fährt und dass die Fahrtkosten unabhängig von der Auslastung des jeweiligen Transporters sind.

Da bei jeder Bestellung  $i$  nur ein Zeitfenster vorgegeben ist, sei dieses mit  $[a_i, b_i]$  bezeichnet. Das bei allen Bestellungen identische Höchstalter sei mit  $B$  statt jeweils mit  $B_i$  bezeichnet. Die Bearbeitungszeit einer Bestellung  $i$  auf der einzelnen Maschine betrage  $p_i$ . Dadurch, dass ein homogener Fuhrpark vorliegt, vereinfachen sich die Kapazitäten von  $Q_k$  zu  $Q$ , die Fixkosten von  $C_k$  zu  $C$ , die Fahrtzeiten von  $t_{ij}^k$  zu  $t_{ij}$  und die fixen Fahrtkosten von  $c_{ij}^k$  zu  $c_{ij}$ . Lastabhängige Fahrtkosten liegen nicht vor.

### Modellierung des Basis-Szenarios

Vor der Modellierung des Basis-Szenarios sollen einige prinzipielle Ideen der Formulierung angesprochen werden. Der (einzige) Produktionsstandort 0 wird, wie in Abbildung 4.2 für das Beispiel aus Abbildung 3.2 gezeigt wird, auf  $2m$  künstliche Depots vervielfältigt. Neben den Orten  $1, \dots, n$ , welche den Zielorten der Bestellungen entsprechen, gibt es für jeden Transporter  $k \in K = \{1, \dots, m\}$  in Form von Ort  $n + k$  ein (künstliches) Startdepot und in Form von Ort  $n + m + k$  ein (künstliches) Enddepot. Dementsprechend ist in Abbildung 4.2 der Ort 7 künstliches Startdepot für Transporter 1, Ort 8 künstliches Startdepot für Transporter 2, Ort 9 künstliches Enddepot für Transporter 1 und Ort 10 künstliches Enddepot für Transporter 2. Jeder Transporter muss einen Weg von seinem künstlichen Startdepot zu seinem künstlichen Enddepot zurücklegen. Fährt ein Transporter direkt von seinem künstlichen Start- zum Enddepot, so liefert er keine Bestellung aus und wird demzufolge nicht benutzt.<sup>1</sup>

Zur Formulierung der Problemstellung als MIP seien neben der Menge

$$N := \{1, \dots, n\}$$

die Ort Mengen

$$N^+ := \left\{ 1, \dots, n, \underbrace{n + 1, \dots, n + m}_{\text{Startdepots}} \right\},$$

<sup>1</sup>Die Idee, zu Modellierungszwecken das Depot zu vervielfachen, wurde für das  $m$ -TSP von Svestka und Huckfeldt [SH73] und für das DVRP von Lenstra und Rinnooy Kan [LR75] vorgestellt. In den angegebenen Artikeln wurde das Depot ver- $m$ -facht, um das  $m$ -TSP bzw. DVRP in ein TSP zu transformieren.

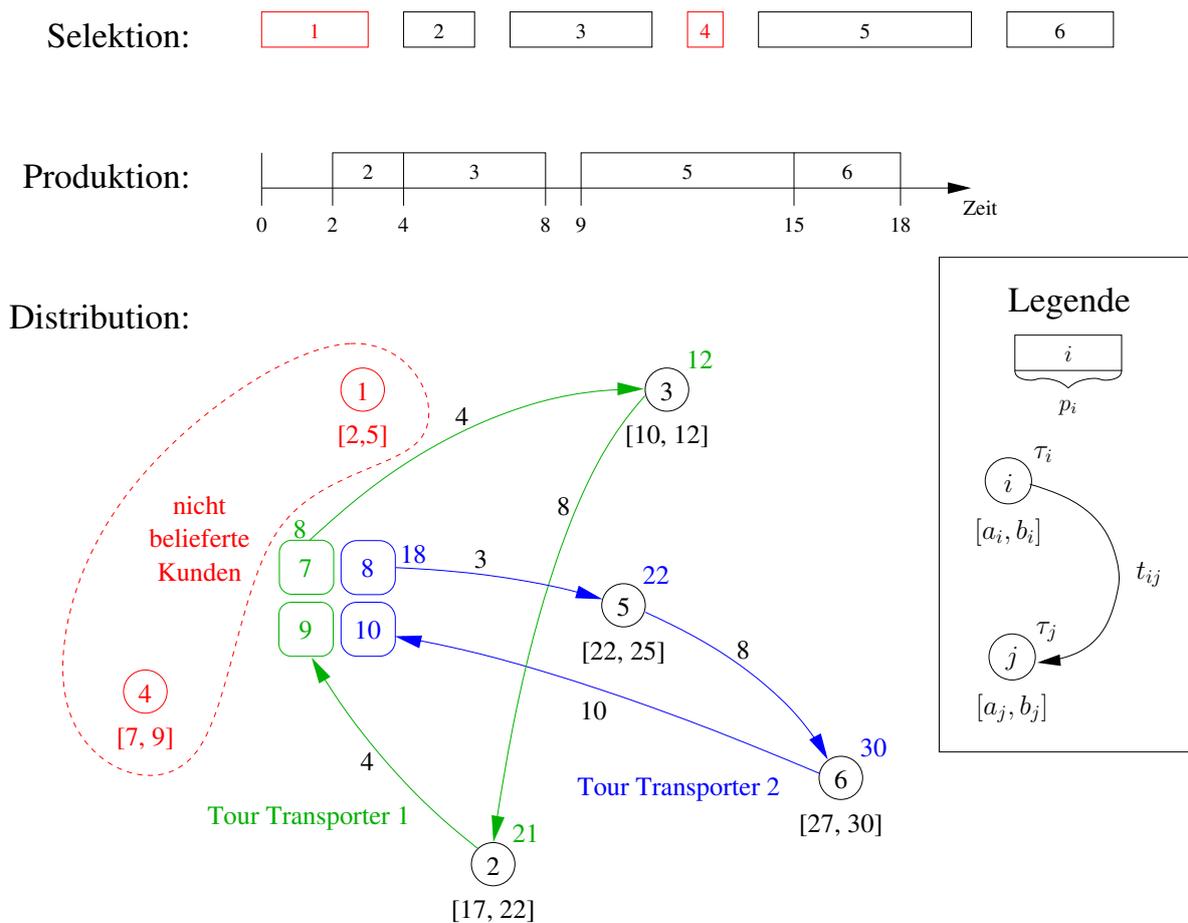


Abbildung 4.2: Beispiel für MIP

$$N^- := \left\{ 1, \dots, n, \underbrace{n + m + 1, \dots, n + m + m}_{\text{Enddepots}} \right\} \text{ und}$$

$$\bar{N} := \{1, \dots, n + 2 \cdot m\}$$

gegeben. Die Menge  $N^+$  enthält dabei alle Orte, die verlassen werden können, die Menge  $N^-$  alle Orte, die erreicht werden können. Die Menge  $\bar{N}$  enthält alle Orte und somit alle Zielorte von Bestellungen und alle Depots. Die Fahrtzeiten  $t_{ij}$  und Fahrtkosten  $c_{ij}$  sind für die künstlichen Depots, welche Ort 0, dem Depot, entsprechen, zu definieren, indem

$$t_{i,j} = t_{i,0} \text{ und } c_{i,j} = c_{i,0} \quad \forall i \in N, j \in N^- \setminus N,$$

$$t_{i,j} = t_{0,j} \text{ und } c_{i,j} = c_{0,j} \quad \forall i \in N^+ \setminus N, j \in N \text{ sowie}$$

$$t_{i,j} = t_{0,0} \text{ und } c_{i,j} = c_{0,0} \quad \forall i \in N^+ \setminus N, j \in N^- \setminus N$$

gesetzt werden.

Insbesondere auch für die Wahl der anzunehmenden Bestellungen seien binäre Entscheidungsvariablen

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Ort } i \text{ besucht wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Orte  $i \in \bar{N}$  gegeben.<sup>2</sup> Für die Bestellungen 1 und 4 aus Abbildung 4.2 gilt also  $I_1 = I_4 = 0$ , für die anderen Bestellungen  $I_2 = I_3 = I_5 = I_6 = 1$  und für die künstlichen Depots  $I_7 = I_8 = I_9 = I_{10} = 1$ .

Zur Planung der Produktion seien analog zur in Abschnitt 2.1 vorgestellten, von Manne [Man60] entwickelten Formulierung des allgemeinen Ein-Maschinen-Problems, binäre Entscheidungsvariablen

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls Bestellung } i \text{ (irgendwann) vor Bestellung } j \text{ produziert wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Bestellungen  $i, j \in N$  mit  $i < j$  gegeben. Wird Bestellung  $i$  oder  $j$  nicht angenommen, so sei  $y_{ij}$  beliebig. Die Belegung der Entscheidungsvariablen  $y_{ij}$  ist also nur in dem Fall von Bedeutung, dass  $I_i = I_j = 1$  gilt. Im Beispiel aus Abbildung 4.2 gilt z.B.  $y_{2,3} = y_{2,6} = 1$ , da Bestellung 2 sowohl vor Bestellung 3 als auch vor Bestellung 6 produziert wird. Außerdem seien zur Produktionsplanung nichtnegative Entscheidungsvariablen

$$s_i \hat{=} \text{Produktionsstartzeit von Bestellung } i$$

für alle Bestellungen  $i \in N$  gegeben. Wird Bestellung  $i$  nicht angenommen, so muss sie auch nicht produziert werden und dementsprechend ist  $s_i$  nicht von Bedeutung.

Um den Auslieferungsplan festzulegen, seien ähnlich wie bei der Formulierung des TSP durch Dantzig, Fulkerson und Johnson [DFJ59] binäre Entscheidungsvariablen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls ein Transporter direkt von Ort } i \text{ zu Ort } j \text{ fährt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Orte  $i \in N^+$  und  $j \in N^-$  definiert. In dem Beispiel aus Abbildung 4.2 ist also zum Beispiel  $x_{7,3} = 1$  gesetzt, weil Bestellung 3 als erste von Transporter 1 nach Verlassen seines Startdepots 7 ausgeliefert wird. Andererseits ist  $x_{3,6} = 0$  gesetzt, weil Bestellung 6 nicht direkt nach Bestellung 3 von einem Transporter ausgeliefert wird. Analog zur Modellierung des VRPTW in [DLSS88] werden die nichtnegativen Entscheidungsvariablen

$$\tau_i \hat{=} \text{Besuchszeitpunkt von Ort } i$$

für alle Orte  $i \in \bar{N}$  definiert. Da Bedienzeiten keine Berücksichtigung finden, entspricht dieser Zeitpunkt sowohl dem Ankunfts- als auch dem Abfahrtszeitpunkt an Ort  $i$ . Er kann wiederum auch als Auslieferungszeitpunkt von Bestellung  $i$  aufgefasst werden, wenn es sich bei Ort  $i$  um den Zielort einer Bestellung handelt.

Des Weiteren werden binäre Entscheidungsvariablen

$$z_{ik}^d = \begin{cases} 1, & \text{falls Ort } i \text{ Transporter } k \text{ zugeordnet ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

---

<sup>2</sup>Entsprechend der Belegung der Entscheidungsvariablen  $I_1, \dots, I_n$  ergibt sich also die Menge  $I$  der ausgewählten Bestellungen.

für alle Orte  $i \in \bar{N}$  und Transporter  $k \in K$  eingeführt.<sup>3</sup> In dem Beispiel aus Abbildung 4.2 sind somit  $z_{7,1}^d = z_{3,1}^d = z_{2,1}^d = z_{9,1}^d = 1$ , da neben den entsprechenden künstlichen Depots 7 und 9 auch die Bestellungen 3 und 2 Transporter 1 zugeordnet sind. Analog gilt  $z_{8,2}^d = z_{5,2}^d = z_{6,2}^d = z_{10,2}^d = 1$ , alle weiteren  $z_{ik}^d$  sind 0. Auf den ersten Blick mögen diese Entscheidungsvariablen redundant erscheinen, da bereits durch die Entscheidungsvariablen  $y_{ij}, s_i, x_{ij}$  und  $\tau_i$  Produktion und Distribution vollständig beschrieben sind. Allerdings ist es für die Formulierung einiger Nebenbedingungen notwendig, dass die Zuordnung von Bestellungen zu Transportern explizit gegeben ist.

Ob ein Transporter benutzt wird, wird durch die binären Entscheidungsvariablen

$$u_k = \begin{cases} 1, & \text{wenn Transporter } k \text{ benutzt wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Transporter  $k \in K$  modelliert.

Mit der folgenden Zielfunktion werden im vorgestellten Modell die Kosten minimiert, welche sich aus Kosten bei Nichtannahme von Bestellungen, Fahrtkosten und anfallenden Transporterfixkosten zusammensetzen.

$$\min \sum_{i \in N} (1 - I_i) \cdot e_i + \sum_{i \in N^+, j \in N^-} c_{ij} x_{ij} + \sum_{k \in K} u_k \cdot C$$

Dies geschieht unter den folgenden Nebenbedingungen. Ebenfalls wie in Kapitel 2 finden in diesen Parameter  $M_{\square}$  Verwendung, bei denen es sich um im jeweiligen Kontext ausreichend große Parameter handelt. Als erste Art von Nebenbedingungen stellen die Nebenbedingungen

$$I_i = 1 \quad \forall i = n + 1, \dots, n + 2 \cdot m \quad (4.1.1)$$

sicher, dass jedes künstliche Depot besucht wird.

Durch die Nebenbedingungen

$$s_j + p_j \leq s_i + M_{16} \cdot y_{ij} + M_{16} \cdot (2 - I_i - I_j) \quad \forall i, j \in N, i < j \quad (4.1.2)$$

$$s_i + p_i \leq s_j + M_{16} \cdot (1 - y_{ij}) + M_{16} \cdot (2 - I_i - I_j) \quad \forall i, j \in N, i < j \quad (4.1.3)$$

wird sichergestellt, dass, wenn sowohl Bestellung  $i$  als auch Bestellung  $j$  angenommen werden, Bestellung  $i$  entweder vor oder nach Bestellung  $j$  produziert wird. Diese Nebenbedingungen sind eine Erweiterung der in Abschnitt 2.1 vorgestellten Nebenbedingungen des allgemeinen Ein-Maschinen-Problems hinsichtlich der Möglichkeit, Bestellungen abzulehnen.

Jeder Ort, der besucht wird, muss sowohl erreicht als auch wieder verlassen werden (abgesehen von den künstlichen Depots: Ein künstliches Startdepot muss ausschließlich verlassen, ein künstliches Enddepot ausschließlich erreicht werden), wie die Nebenbedingungen

$$\sum_{i \in N^+} x_{ij} = I_j \quad \forall j \in N^- \quad (4.1.4)$$

<sup>3</sup>Der Exponent  $d$  der Entscheidungsvariablen  $z_{ik}^d$  stellt keinen hochgestellten Index dar, sondern ist als Indikator zu verstehen, dass es sich hierbei um Zuordnungen in der Distribution handelt. Man beachte, dass in den folgenden Abschnitten auch Zuordnungen in der Produktion Betrachtung finden, wenn mehrere Maschinen zur Verfügung stehen, sowie Zuordnungen bei mehreren offerierten Auslieferungszeitfenstern.

$$\sum_{j \in N^-} x_{ij} = I_i \quad \forall i \in N^+ \quad (4.1.5)$$

fordern.

Die Nebenbedingungen

$$z_{n+k,k}^d = z_{n+m+k,k}^d = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.1.6)$$

$$z_{n+k,k'}^d = z_{n+m+k,k'}^d = 0 \quad \forall k, k' \in K, k \neq k' \quad (4.1.7)$$

bewirken, dass ein Transporter genau seinem jeweiligen künstlichen Start- beziehungsweise End-depot zugeordnet wird.

Mittels der Nebenbedingungen

$$\sum_{k \in K} z_{ik}^d = I_i \quad \forall i \in N \quad (4.1.8)$$

wird erreicht, dass jeder angenommenen Bestellung genau ein Transporter zugeordnet wird.

Werden zwei Orte  $i$  und  $j$  direkt aufeinanderfolgend besucht, so sind also beide dem selben Transporter zuzuordnen. Dies stellen die Nebenbedingungen

$$z_{ik}^d \leq z_{jk}^d + 1 - x_{ij} \quad \forall i \in N^+, j \in N^-, k \in K \quad (4.1.9)$$

$$z_{jk}^d \leq z_{ik}^d + 1 - x_{ij} \quad \forall i \in N^+, j \in N^-, k \in K \quad (4.1.10)$$

sicher. Falls  $x_{ij} = 0$  gilt, wird die jeweilige Nebenbedingung aufgrund der Binarität der Entscheidungsvariablen  $z_{ik}^d$  beziehungsweise  $z_{jk}^d$  unabhängig von deren Belegung eingehalten. Falls  $x_{ij} = 1$  gilt, folgt aus den beiden Nebenbedingungen  $z_{ik}^d = z_{jk}^d \forall k \in K$  und somit eine identische Transporterzuordnung der beiden aufeinanderfolgenden Orte.

Die Auslieferung jeder angenommenen Bestellung  $i$  muss im jeweils vorgegebenen Zeitfenster  $[a_i, b_i]$  erfolgen, wie die Nebenbedingungen

$$a_i \leq \tau_i + M_{17} \cdot (1 - I_i) \quad \forall i \in N \quad (4.1.11)$$

$$\tau_i \leq b_i \quad \forall i \in N \quad (4.1.12)$$

fordern. Diese sind ebenso wie die folgenden Nebenbedingungen an diejenigen Nebenbedingungen angelehnt, welche bei der Formulierung des VRPTW (vgl. Abschnitt 2.4, [DLSS88]) die Einhaltung der Zeitfensterrestriktion sicherstellen.

Die Nebenbedingungen

$$\tau_i + t_{ij} \leq \tau_j + M_{18} \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i \in N^+, j \in N^- \quad (4.1.13)$$

sorgen dafür, dass der Besuchszeitpunkt  $\tau_j$  von Ort  $j$  um mindestens  $t_{ij}$  später ist als der Besuchszeitpunkt  $\tau_i$  von Ort  $i$ , wenn Ort  $j$  direkt auf Ort  $i$  folgend besucht wird.

Durch die Nebenbedingungen

$$\sum_{i \in N} z_{ik}^d \cdot q_i \leq Q \quad \forall k \in K \quad (4.1.14)$$

wird die Einhaltung der Transporterkapazität sichergestellt.

Die Nichtbenutzung eines Transporters wird dadurch modelliert, dass er direkt von dem ihm zugehörigen künstlichen Startdepot zum künstlichen Enddepot fährt, demzufolge ist

$$u_k = 1 - x_{n+k, n+m+k} \quad \forall k \in K \quad (4.1.15)$$

zu setzen.

Die Nebenbedingungen

$$s_i + p_i \leq \tau_{n+k} + M_{19} \cdot (1 - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.1.16)$$

tragen dafür Sorge, dass ein Transporter  $k$  erst nach Beendigung der Produktion aller von ihm auszuliefernden Bestellungen sein Startdepot  $n + k$  verlassen kann.

Durch die Nebenbedingungen

$$\tau_i \leq s_i + p_i + B \quad \forall i \in N \quad (4.1.17)$$

wird erreicht, dass das Höchstalter der für eine Bestellung produzierten Güter bei ihrer Auslieferung nicht überschritten ist.

Mittels der Nebenbedingungen

$$\tau_i \leq M_{20} \cdot I_i \quad \forall i \in N \quad (4.1.18)$$

$$s_i \leq M_{21} \cdot I_i \quad \forall i \in N \quad (4.1.19)$$

werden  $\tau_i = s_i = 0$  fixiert für alle nicht angenommenen Bestellungen  $i$ .

### Propagierung weiterer Nebenbedingungen

Zu diesen Nebenbedingungen können durch Plausibilitätsbetrachtungen weitere Nebenbedingungen hergeleitet werden. So muss, wenn Bestellung  $j$  aufgrund des Belieferungszeitfensters nicht direkt nach Bestellung  $i$  ausgeliefert werden kann,  $x_{ij} = 0$  gelten, dieser Umstand wird durch die Nebenbedingungen

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in N, a_i + t_{ij} > b_j \quad (4.1.20)$$

abgebildet. Ebenso lässt sich folgern, dass, wenn aufgrund des Höchstalters die Bestellungen  $i$  und  $j$  beziehungsweise  $i$ ,  $j$  und  $l$  nicht aufeinanderfolgend ausgeliefert werden können, dann  $x_{ij} = 0$  gelten muss beziehungsweise nicht  $x_{ij} = x_{jl} = 1$  gelten kann. Dies wird durch die Nebenbedingungen

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in N, t_{0i} + \max(t_{ij}, a_j - b_i) > B \quad (4.1.21)$$

$$x_{ij} + x_{jl} \leq 1 \quad \forall i, j, l \in N, t_{0i} + \max(\max(t_{ij}, a_j - b_i) + \max(t_{jl}, a_l - b_j), a_l - b_i) > B \quad (4.1.22)$$

bewirkt.

Die Korrektheit der Nebenbedingungen (4.1.21) ist – wie Abbildung 4.3 deutlich macht – darin begründet, dass, falls Bestellung  $j$  direkt nach Bestellung  $i$  ausgeliefert wird, zwischen der Auslieferung von Bestellung  $i$  und Bestellung  $j$  zum einen mindestens  $t_{ij}$  Zeiteinheiten wegen der Fahrtzeit, zum anderen aber auch mindestens  $a_j - b_i$  Zeiteinheiten wegen des Abstands der Zeitfenster (vgl. Abbildung 4.4) vergehen. Da aufgrund der Gültigkeit der Dreiecksungleichung

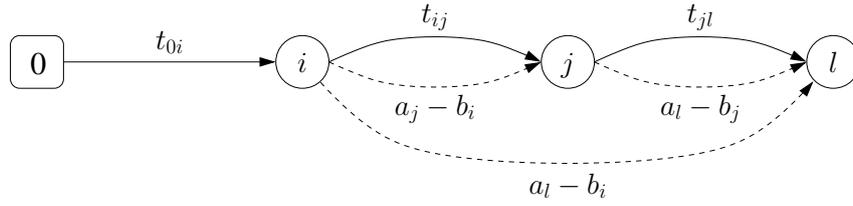


Abbildung 4.3: Konstruktion der Nebenbedingungen (4.1.21) und (4.1.22)

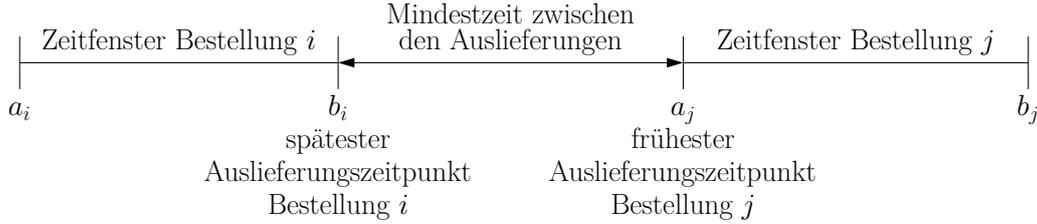


Abbildung 4.4: Zeitfensterabstand

vom Verlassen des Depots 0 bis zur Auslieferung von Bestellung  $i$  mindestens  $t_{0i}$  Zeiteinheiten vergehen, verstreichen zwischen der Abfahrt am Depot und der Auslieferung von Bestellung  $j$  mindestens  $t_{0i} + \max(t_{ij}, a_j - b_i)$  Zeiteinheiten. Sind dies bereits mehr als  $B$  Zeiteinheiten, so ist es nicht möglich, die Bestellungen  $i$  und  $j$  aufeinanderfolgend auszuliefern und es muss  $x_{ij} = 0$  gelten.

Die Nebenbedingungen (4.1.22) lassen sich daraus ableiten, dass zwischen der Auslieferung von Bestellung  $j$  und Bestellung  $l$  aufgrund von Fahrtzeit und Zeitfensterabstand mindestens  $\max(t_{jl}, a_l - b_j)$  Zeiteinheiten vergehen. Aufgrund des Zeitfensterabstands von Bestellung  $i$  und Bestellung  $l$  vergehen zwischen der Auslieferung ebendieser Bestellungen mindestens  $a_l - b_i$  Zeiteinheiten. Somit vergehen zwischen der Auslieferung von Bestellung  $i$  und Bestellung  $l$  mindestens  $\max(\max(t_{ij}, a_j - b_i) + \max(t_{jl}, a_l - b_j), a_l - b_i)$  Zeiteinheiten und demzufolge vom Verlassen des Depots 0 bis zur Auslieferung von Bestellung  $l$  mindestens  $t_{0i} + \max(\max(t_{ij}, a_j - b_i) + \max(t_{jl}, a_l - b_j), a_l - b_i)$  Zeiteinheiten. Sind dies mehr als  $B$  Zeiteinheiten, so können in einer Auslieferungsreihenfolge nicht Bestellung  $i$ ,  $j$  und  $l$  aufeinanderfolgend ausgeliefert werden und es muss  $x_{ij} + x_{jl} \leq 1$  gelten.

Diese propagierten Nebenbedingungen sind bei der Berücksichtigung weiterer Verallgemeinerungen in IPDSP-Szenarien in aller Regel ungültig, da sich die hier getroffenen Plausibilitätsbetrachtungen nicht ohne Weiteres übertragen lassen. Ist es in Einzelfällen möglich, diese Nebenbedingungen anzupassen, so wird dies an den entsprechenden Stellen erläutert.

Zusammengefasst ergibt sich somit das folgende Basis-Modell.

$$\min \sum_{i \in N} (1 - I_i) \cdot e_i + \sum_{i \in N^+, j \in N^-} c_{ij} x_{ij} + \sum_{k \in K} u_k \cdot C$$

$$\text{u.d.N. } I_i = 1 \quad \forall i = n + 1, \dots, n + 2 \cdot m \quad (4.1.1)$$

$$s_j + p_j \leq s_i + M_{16} \cdot y_{ij} + M_{16} \cdot (2 - I_i - I_j) \quad \forall i, j \in N, i < j \quad (4.1.2)$$

$$s_i + p_i \leq s_j + M_{16} \cdot (1 - y_{ij}) + M_{16} \cdot (2 - I_i - I_j) \quad \forall i, j \in N, i < j \quad (4.1.3)$$

$$\sum_{i \in N^+} x_{ij} = I_j \quad \forall j \in N^- \quad (4.1.4)$$

$$\sum_{j \in N^-} x_{ij} = I_i \quad \forall i \in N^+ \quad (4.1.5)$$

$$z_{n+k,k}^d = z_{n+m+k,k}^d = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.1.6)$$

$$z_{n+k,k'}^d = z_{n+m+k,k'}^d = 0 \quad \forall k, k' \in K, k \neq k' \quad (4.1.7)$$

$$\sum_{k \in K} z_{ik}^d = I_i \quad \forall i \in N \quad (4.1.8)$$

$$z_{ik}^d \leq z_{jk}^d + 1 - x_{ij} \quad \forall i \in N^+, j \in N^-, k \in K \quad (4.1.9)$$

$$z_{jk}^d \leq z_{ik}^d + 1 - x_{ij} \quad \forall i \in N^+, j \in N^-, k \in K \quad (4.1.10)$$

$$a_i \leq \tau_i + M_{17} \cdot (1 - I_i) \quad \forall i \in N \quad (4.1.11)$$

$$\tau_i \leq b_i \quad \forall i \in N \quad (4.1.12)$$

$$\tau_i + t_{ij} \leq \tau_j + M_{18} \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i \in N^+, j \in N^- \quad (4.1.13)$$

$$\sum_{i \in N} z_{ik}^d \cdot q_i \leq Q \quad \forall k \in K \quad (4.1.14)$$

$$u_k = 1 - x_{n+k,n+m+k} \quad \forall k \in K \quad (4.1.15)$$

$$s_i + p_i \leq \tau_{n+k} + M_{19} \cdot (1 - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.1.16)$$

$$\tau_i \leq s_i + p_i + B \quad \forall i \in N \quad (4.1.17)$$

$$\tau_i \leq M_{20} \cdot I_i \quad \forall i \in N \quad (4.1.18)$$

$$s_i \leq M_{21} \cdot I_i \quad \forall i \in N \quad (4.1.19)$$

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in N, a_i + t_{ij} > b_j \quad (4.1.20)$$

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in N, t_{0i} + \max(t_{ij}, a_j - b_i) > B \quad (4.1.21)$$

$$x_{ij} + x_{jl} \leq 1 \quad \forall i, j, l \in N, t_{0i} + \max(\max(t_{ij}, a_j - b_i) + \max(t_{jl}, a_l - b_j), a_l - b_i) > B \quad (4.1.22)$$

$$I_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N, i < j$$

$$s_i \geq 0 \quad \forall i \in N$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N^+, j \in N^-$$

$$\tau_i \geq 0 \quad \forall i \in \bar{N}$$

$$z_{ik}^d \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \bar{N}, k \in K$$

$$u_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K$$

## 4.2 IPDSP-Szenarien mit Bestellungen mit Erfüllungszusage

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Fragestellung, wie sich IPDSP-Szenarien modellieren lassen, in denen eine Teilmenge  $I^0 \subseteq N$  von Bestellungen, die zwingend angenommen werden müssen, vorgegeben ist. Für die Modellierung dieser Verallgemeinerung ist es nicht notwendig, ein komplett neues Modell entwerfen. Stattdessen können sowohl das Basis-Modell als auch die im Nachfolgenden vorgestellten Modelle für IPDSP-Szenarien wie folgt erweitert werden.

### Verallgemeinerung von Modellen in Hinsicht auf Bestellungen mit Erfüllungszusage

Die Modellierung einer verpflichtenden Annahme der Bestellungen in der Menge  $I^0$  lässt sich im jeweiligen Modell durch die zusätzlichen Nebenbedingungen

$$I_i = 1 \quad \forall i \in I^0 \quad (4.2.1)$$

realisieren.

### 4.3 IPDSP-Szenarien mit einer Prioritätsordnung der Bestellungen

Ein weiterer Typ von IPDSP-Szenarien sind diejenigen, in denen jeder Bestellung  $i$  eine Prioritätsbewertung  $g_i$  zugeordnet ist, bei der vorgegeben ist, dass eine Bestellung nur dann angenommen werden kann, wenn alle Bestellungen mit höherer Prioritätsbewertung auch angenommen werden. Diese IPDSP-Szenarien mit Bestellungsriorisierung lassen sich basierend auf den in diesem Kapitel vorgestellten Modellen von IPDSP-Szenarien modellieren, indem das jeweilige Modell wie folgt ergänzt wird.

#### Verallgemeinerung von Modellen in Hinsicht auf Bestellungsriorisierung

Ist vorgeschrieben, dass eine Bestellung  $i$  nicht angenommen werden darf, wenn eine Bestellung  $j$  mit höherer Prioritätsbewertung nicht angenommen wird, so lässt sich dies im jeweiligen Modell mittels der zusätzlichen Nebenbedingungen

$$I_i \leq I_j \quad \forall i, j \in N, g_i < g_j \quad (4.3.1)$$

berücksichtigen. Wird also eine Bestellung  $i$  angenommen ( $I_i = 1$ ), so müssen auch alle Bestellungen  $j$  mit höherer Prioritätsbewertung  $g_j > g_i$  angenommen werden ( $I_j = 1$ ).

### 4.4 IPDSP-Szenarien mit gebündelten Bestellungen

Die Modellierung von IPDSP-Szenarien, in denen Bestellungen vorliegen, die nur gemeinsam angenommen oder abgelehnt werden können, kann ebenfalls leicht mit dem vorgestellten Basis-Modell und mit den noch folgenden Modellen vorgenommen werden. Dazu sind diese Modelle wie folgt zu anzupassen.

#### Verallgemeinerung von Modellen in Hinsicht auf gebündelte Bestellungen

Es müssen innerhalb einer Menge von gebündelten Bestellungen  $I^k$  alle Entscheidungsvariablen  $I_i$  mit  $i \in I^k$  identisch belegt sein. Dazu genügt es sicherzustellen, dass zu jeweils zwei Bestellungen  $i, j \in I^k$  für alle Mengen von gebündelten Bestellungen  $I^k = I^1, \dots, I^\nu$  die Entscheidungsvariablen  $I_i$  und  $I_j$  identisch belegt werden. Die Nebenbedingungen

$$I_i = I_j \quad \forall i, j \in I^k, k = 1, \dots, \nu \quad (4.4.1)$$

bewirken dies und sind dem jeweiligen Modell hinzuzufügen.

## 4.5 IPDSP-Szenarien mit unterschiedlichem Höchstalter der jeweils bestellten Güter

Dieser Abschnitt behandelt die Modellierung von IPDSP-Szenarien, in denen die bestellten Güter kein identisches Höchstalter  $B$  haben, sondern jede Bestellung  $i$  über ein gewisses Höchstalter  $B_i$  der in ihr bestellten Güter verfügt. Dazu wird vorgestellt, wie sich das Basis-Modell derart modifizieren lässt, dass es dies berücksichtigt. Sind neben den unterschiedlichen Höchstaltern weitere Verallgemeinerungen zu betrachten, so finden sich die Anpassungen in den folgenden Abschnitten (für Genaueres siehe Abbildung 4.1).

### Verallgemeinerung des Basis-Modells in Hinsicht auf Bestellungen mit unterschiedlichem Höchstalter der bestellten Güter

Dieses IPDSP-Szenario lässt sich leicht durch Anpassung der Nebenbedingungen der Verknüpfung von Produktion und Distribution

$$\tau_i \leq s_i + p_i + B \quad \forall i \in N \quad (4.1.17)$$

zu

$$\tau_i \leq s_i + p_i + B_i \quad \forall i \in N \quad (4.5.1)$$

modellieren.

In den zusätzlich propagierten Nebenbedingungen

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in N, t_{0i} + \max(t_{ij}, a_j - b_i) > B \quad (4.1.21)$$

$$x_{ij} + x_{jl} \leq 1 \quad \forall i, j, l \in N, t_{0i} + \max(\max(t_{ij}, a_j - b_i) + \max(t_{jl}, a_l - b_j), a_l - b_i) > B \quad (4.1.22)$$

ist das einheitliche Höchstalter  $B$  jeweils durch das spezielle Höchstalter zu ersetzen, dadurch ergeben sich die Nebenbedingungen

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in N, t_{0i} + \max(t_{ij}, a_j - b_i) > B_j \quad (4.5.2)$$

$$x_{ij} + x_{jl} \leq 1 \quad \forall i, j, l \in N, t_{0i} + \max(\max(t_{ij}, a_j - b_i) + \max(t_{jl}, a_l - b_j), a_l - b_i) > B_l. \quad (4.5.3)$$

## 4.6 IPDSP-Szenarien mit mehreren Maschinen unterschiedlichen Typs und Rüstzeiten

Nachdem in den vorhergehenden Abschnitten Verallgemeinerungen betrachtet wurden, die Auswirkungen auf die Verknüpfung von Produktion und Distribution bzw. auf die Selektion haben, wird in diesem Abschnitt nun die Modellierung von IPDSP-Szenarien betrachtet, in denen mehrere Maschinen zur Verfügung stehen, die dabei von unterschiedlichem Typ sind und dementsprechend über unterschiedliche Bearbeitungsgeschwindigkeiten verfügen. Weiterhin sollen maschinenabhängige Rüstzeiten gegeben sein. Es liegt also eine Menge  $\Omega$  von Maschinen vor, wobei die Produktion von Bestellung  $i \in N$  auf Maschine  $k \in \Omega$  eine Dauer von  $p_i^k$  hat und zwischen der Beendigung der Produktion einer Bestellung  $i \in N$  und dem Beginn der Produktion einer Bestellung  $j \in N$  auf Maschine  $k \in \Omega$  eine Rüstzeit von  $\vartheta_{ij}^k$  anfällt.

Mit der Betrachtung dieses Szenarios werden drei Verallgemeinerungen vorgenommen. Dies sind die Verallgemeinerung auf mehrere Maschinen, die Verallgemeinerung auf mehrere unterschiedliche Maschinentypen und die Verallgemeinerung auf das Vorhandensein von Rüstzeiten. Aus dem folgenden Modell lassen sich aber auch Modellierungen der einzelnen Spezialfälle herleiten, da bei parallelen identischen Maschinen  $p_i^k = p_i$  sowie  $\vartheta_{ij}^k = \vartheta_{ij}$  gelten und bei einer einzelnen Maschine weiterhin  $|\Omega| = 1$  gilt, woraus  $z_{i,1}^p = I_i$  folgt. Bei der Annahme, dass keine Rüstzeiten zu berücksichtigen sind, ist  $\vartheta_{ij}^k = 0$  zu setzen.

Die gemeinsame Betrachtung dieser drei Verallgemeinerungen ergibt Sinn, da dies auf der einen Seite der Übersichtlichkeit der Arbeit dient, es auf der anderen Seite aber auch keine Schwierigkeit darstellt, die einzelnen Verallgemeinerungen zu separieren.

### Verallgemeinerung des Basis-Modells in Hinsicht auf mehrere Maschinen unterschiedlichen Typs und Rüstzeiten

Zur Modellierung der Produktion seien zunächst binäre Entscheidungsvariablen

$$z_{ik}^p = \begin{cases} 1, & \text{falls Bestellung } i \text{ auf Maschine } k \text{ produziert wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Bestellungen  $i \in N$  und Maschinen  $k \in \Omega$  gegeben.<sup>4</sup>

Weiterhin seien für die Produktionsreihenfolge binäre Entscheidungsvariablen

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn Bestellung } i \text{ (irgendwann) vor Bestellung } j \text{ auf der selben Maschine} \\ & \text{produziert wird} \\ 0, & \text{wenn Bestellung } j \text{ (irgendwann) vor Bestellung } i \text{ auf der selben Maschine} \\ & \text{produziert wird} \\ 0 \text{ oder } 1, & \text{wenn die Bestellungen auf unterschiedlichen Maschinen produziert werden} \end{cases}$$

für alle Bestellungen  $i, j \in N$  mit  $i < j$  gegeben. Diese Modellierung erfolgt somit ähnlich wie in [BKS99].

Die bisherigen Nebenbedingungen zur zeitlichen Produktionsplanung

$$s_j + p_j \leq s_i + M_{15} \cdot y_{ij} + M_{15} \cdot (2 - I_i - I_j) \quad \forall i, j \in N, i < j \quad (4.1.2)$$

$$s_i + p_i \leq s_j + M_{15} \cdot (1 - y_{ij}) + M_{15} \cdot (2 - I_i - I_j) \quad \forall i, j \in N, i < j \quad (4.1.3)$$

müssen weiterhin durch die Nebenbedingungen

$$\sum_{k \in \Omega} z_{ik}^p = I_i \quad \forall i \in N, \quad (4.6.1)$$

$$s_i + p_i^k + \vartheta_{ij}^k \leq s_j + M_{22} \cdot (1 - y_{ij}) + M_{22} \cdot (2 - z_{ik}^p - z_{jk}^p) \quad \forall i, j \in N, i < j, k \in \Omega, \quad (4.6.2)$$

$$s_j + p_j^k + \vartheta_{ji}^k \leq s_i + M_{22} \cdot y_{ij} + M_{22} \cdot (2 - z_{ik}^p - z_{jk}^p) \quad \forall i, j \in N, i < j, k \in \Omega \quad (4.6.3)$$

ersetzt werden. Die Nebenbedingungen (4.6.1) stellen sicher, dass jede angenommene Bestellung genau einer Maschine zugeordnet wird. Durch die Nebenbedingungen (4.6.2) und die Nebenbedingungen (4.6.3) wird sichergestellt, dass in dem Fall, dass zwei unterschiedliche Bestellungen  $i$

<sup>4</sup>Der hochgestellte Index  $p$  der Entscheidungsvariablen  $z_{ik}^p$  zeigt an, dass diese Entscheidungsvariablen Zuordnungen in der Produktion abbilden.

und  $j$  auf der selben Maschine  $k$  produziert werden (also  $z_{ik}^p = z_{jk}^p = 1$  gilt), entweder Bestellung  $j$  nach Beendigung der Produktion von Bestellung  $i$  und entsprechender Rüstzeit  $\vartheta_{ij}^k$  produziert wird, oder Bestellung  $i$  nach Beendigung der Produktion von Bestellung  $j$  und entsprechender Rüstzeit  $\vartheta_{ji}^k$ .

Des Weiteren sind entsprechend der maschinenabhängigen Bearbeitungszeiten  $p_i^k$  die Nebenbedingungen

$$s_i + p_i \leq \tau_{n+k} + M_{18} \cdot (1 - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.1.16)$$

in

$$s_i + \sum_{k \in \Omega} z_{ik}^p p_i^k \leq \tau_{n+k} + M_{23} \cdot (1 - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.6.4)$$

abzuändern. Ebenso müssen die Nebenbedingungen

$$\tau_i \leq s_i + p_i + B \quad \forall i \in N \quad (4.1.17)$$

des Basis-Modells in

$$\tau_i \leq s_i + \sum_{k \in \Omega} z_{ik}^p p_i^k + B \quad \forall i \in N \quad (4.6.5)$$

abgeändert werden.

### Verallgemeinerung dieses IPDSP-Modells in Hinsicht auf Bestellungen mit unterschiedlichem Höchstalter der bestellten Güter

Sind weiterhin unterschiedliche Höchstalter der bestellten Güter zu berücksichtigen, so muss der letzte Typ von Nebenbedingungen (4.1.17) statt in (4.6.5) in

$$\tau_i \leq s_i + \sum_{k \in \Omega} z_{ik}^p p_i^k + B_i \quad \forall i \in N \quad (4.6.6)$$

abgeändert werden. Kombinationen mit anderen bereits vorgestellten Verallgemeinerungen des Basis-Modells sind unproblematisch. Sie können separat gehandhabt werden.

## 4.7 IPDSP-Szenarien mit mehreren Produktionsstandorten

Auf den ersten Blick mag es ein großer Schritt sein, nach der Betrachtung eines einzelnen Produktionsstandorts zur Betrachtung von mehreren Produktionsstandorten überzugehen. Wie im Folgenden dargestellt wird, lässt sich das bisher vorgestellte Basis-Modell aber relativ leicht zu einem Modell für IPDSP-Szenarien mit mehreren Produktionsstandorten erweitern.

Wie bereits erwähnt, seien nun eine Menge  $W$  von  $w > 1$  Produktionsstandorten gegeben und zu jedem Depot  $v \in W$  seien die Menge der an Produktionsstandort  $v$  vorhandenen Maschinen  $\Omega_v \subset \Omega$  und die Menge der an Depot  $v$  stationierten Transporter  $K_v \subset K$  bekannt.

In einem IPDSP-Szenario mit mehreren Produktionsstandorten ist es zwingend erforderlich, dass auch mehrere Maschinen betrachtet werden, da sich bei jedem Produktionsstandort mindestens

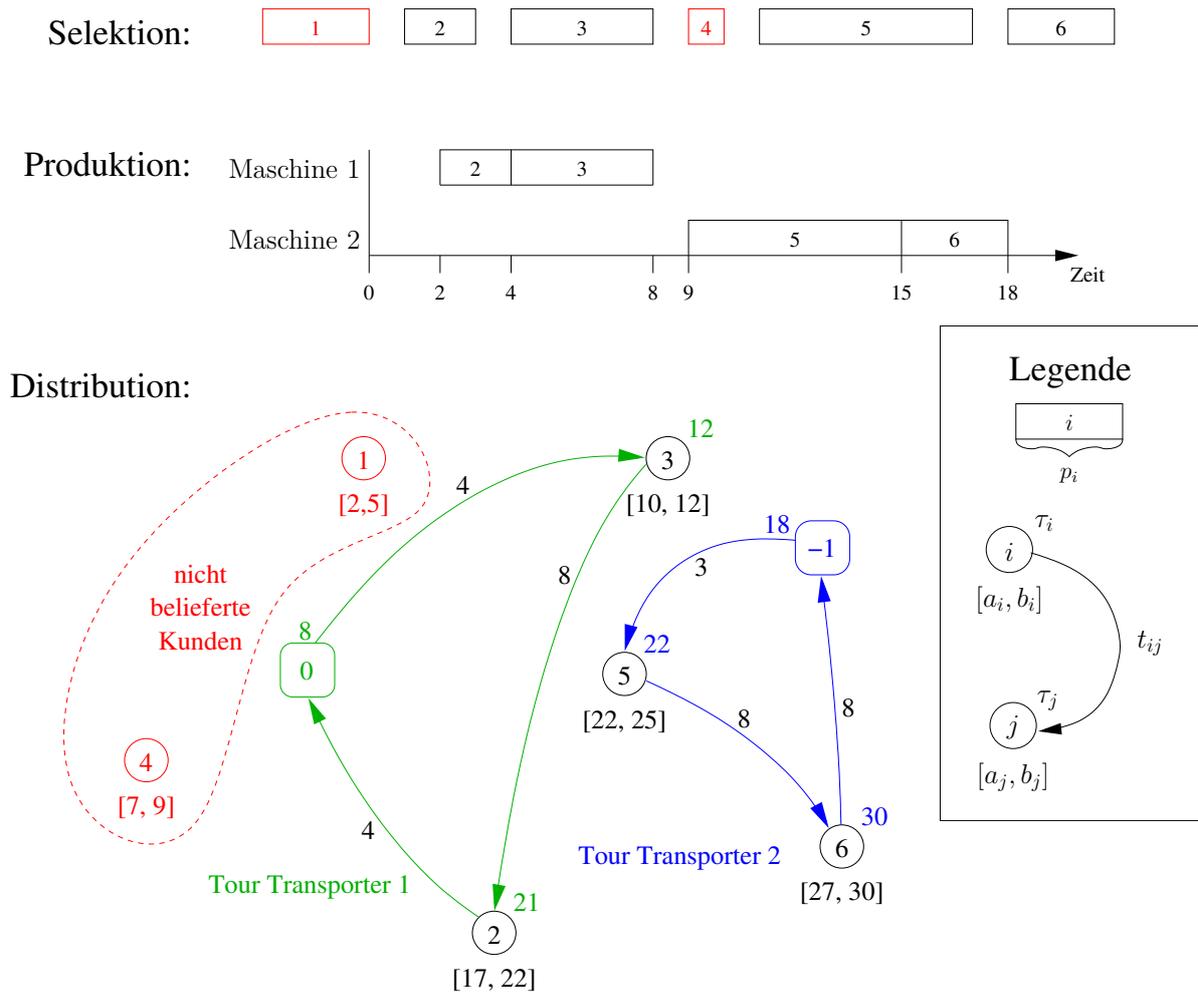


Abbildung 4.5: Beispiel für die Lösung einer Instanz eines IPDSP-Szenarios mit zwei Produktionsstandorten

eine befinden muss. Dementsprechend soll die Modellierung von IPDSP-Szenarien mit mehreren Produktionsstandorten auf dem bezüglich mehrerer Maschinen verallgemeinerten Basis-Modell basieren, welches in Abschnitt 4.6 beschrieben wurde.

Abbildung 4.5 zeigt die Lösung einer Instanz eines Szenarios des IPDSP mit mehreren Produktionsstandorten. In dieser Instanz gibt es die beiden Depots 0 und  $-1$ , an denen jeweils eine Maschine und ein Transporter stationiert sind. Maschine 1 und Transporter 1 befinden sich an Depot 0, Maschine 2 und Transporter 2 an Depot  $-1$ .

### Verallgemeinerung von IPDSP-Modellen mit mehreren Maschinen in Hinsicht auf mehrere Produktionsstandorte

Bei der Modellierung gilt es, die vom Depot eines Transporters abhängigen Fahrtzeiten und Fahrtkosten zu berücksichtigen. Im Basis-Modell wurde für jeden der  $m$  Transporter dasjenige Depot, an dem dieser stationiert ist, in Form eines künstlichen Startdepots und eines künstlichen

Enddepot dargestellt. Demzufolge ergaben sich  $2m$  künstliche Depots und Ort Mengen  $N^+$ ,  $N^-$  und  $\bar{N}$ .

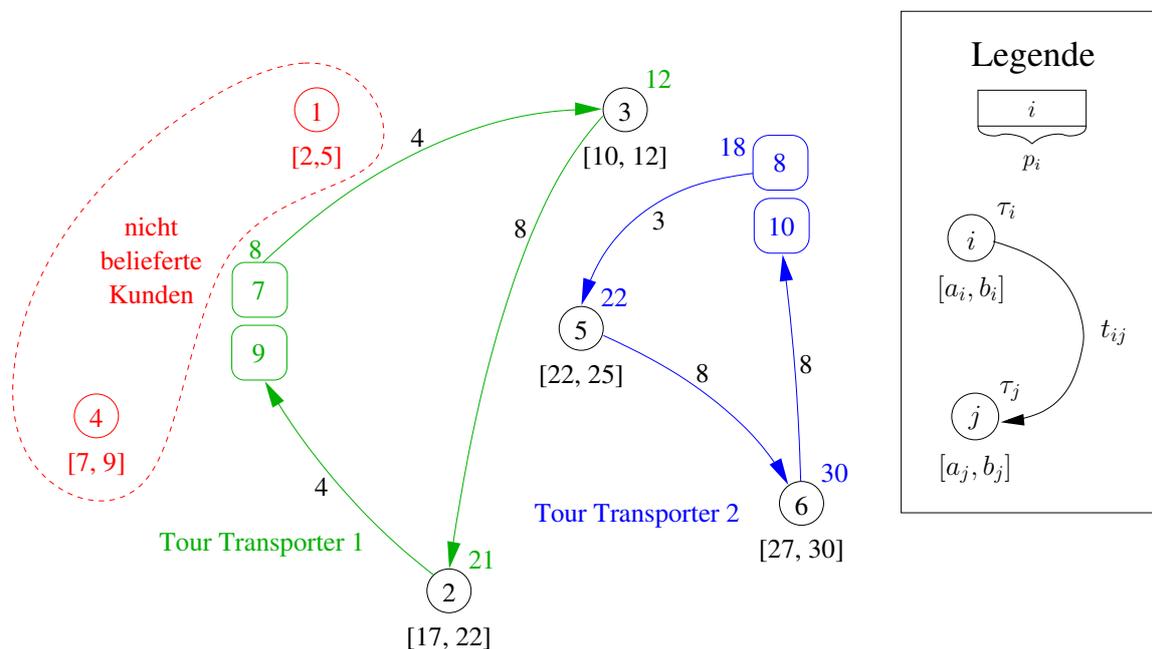


Abbildung 4.6: Beispiel für die Modellierung der Distribution in einer Lösung einer Instanz eines IPDSP-Szenarios mit mehreren Produktionsstandorten

In einem IPDSP-Szenario mit mehreren Produktionsstandorten ist zu berücksichtigen, dass die künstlichen Depots nicht notwendigerweise dem selben Produktionsstandort entsprechen, wie es im Basis-Modell war. Dies zeigt Abbildung 4.6. Der Produktionsstandort 0 von Transporter 1 wird als die künstlichen Depots 7 und 9 dargestellt, Produktionsstandort  $-1$  von Transporter 2 in Form der künstlichen Depots 8 und 10. Die Berücksichtigung von mehreren Produktionsstandorten erfolgt nun, indem für einen Transporter  $k \in K_v$  die Fahrtzeiten und Fahrtkosten vom künstlichen Startdepot zu einem Zielort einer Bestellung und von einem Zielort einer Bestellung zum künstlichen Enddepot derart gesetzt werden, dass sie den entsprechenden Parametern desjenigen Produktionsstandortes  $v$  entsprechen, an dem Transporter  $k$  stationiert ist. Ist also ein Transporter  $k$  an Produktionsstandort  $v$  stationiert ( $k \in K_v$ ), so gilt für die Fahrtzeit  $t_{n+k,j}$  vom künstlichen Startdepot  $n+k$  von Transporter  $k$  zu einem Zielort einer Bestellung  $j \in N$

$$t_{n+k,j} = t_{vj}$$

und für die Fahrtzeit von einem Zielort  $i \in N$  zum künstlichen Enddepot  $n+m+k$  von Transporter  $k \in K_v$  entsprechend

$$t_{i,n+m+k} = t_{iv}$$

Für die Fahrtkosten  $c_{n+k,j}$  und  $c_{i,n+m+k}$  gelten analog

$$c_{n+k,j} = c_{vj}$$

und

$$c_{i,n+m+k} = c_{iv}$$

Da durch die weiteren Nebenbedingungen sichergestellt ist, dass ein Transporter nicht von demjenigen Depot, dem er zugeordnet ist, zu einem anderen fährt, kann für die Fahrtzeiten und Fahrtkosten zwischen den künstlichen Depots ohne Einschränkung

$$t_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in \bar{N} \setminus N$$

sowie

$$c_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in \bar{N} \setminus N$$

gelten. Durch dieses Vorgehen ist die korrekte Zuordnung von Fahrtzeiten und Fahrtkosten sichergestellt. Es muss aber auch dafür Sorge getragen werden, dass eine an einem Produktionsstandort  $v$  produzierte Bestellung auch von einem an ebendiesem Produktionsstandort stationierten Transporter ausgeliefert wird. Dies lässt sich durch die zusätzlichen Nebenbedingungen

$$\sum_{k \in \Omega_v} z_{ik}^p = \sum_{k' \in K_v} z_{ik'}^d \quad \forall i \in N, v \in W \quad (4.7.1)$$

erreichen. Diese Nebenbedingungen stellen sicher, dass eine Bestellung, welche einer Maschine an Produktionsstandort  $v$  zugeordnet wird, auch einem Transporter am selben Produktionsstandort zugeordnet wird.

Die in Abschnitt 4.1 zusätzlich propagierten Nebenbedingungen

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in N, t_{0i} + \max(t_{ij}, a_j - b_i) > B \quad (4.1.21)$$

$$x_{ij} + x_{jl} \leq 1 \quad \forall i, j, l \in N, t_{0i} + \max(\max(t_{ij}, a_j - b_i) + \max(t_{jl}, a_l - b_j), a_l - b_i) > B \quad (4.1.22)$$

sind in dem so modifizierten Modell nicht gültig. Stattdessen können die Nebenbedingungen

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in N, \min_{v \in W} t_{vi} + \max(t_{ij}, a_j - b_i) > B \quad (4.7.2)$$

$$x_{ij} + x_{jl} \leq 1 \quad \forall i, j, l \in N, \min_{v \in W} t_{vi} + \max(\max(t_{ij}, a_j - b_i) + \max(t_{jl}, a_l - b_j), a_l - b_i) > B \quad (4.7.3)$$

mit ähnlichen Argumenten wie bei den Nebenbedingungen (4.1.21) und (4.1.22) propagiert werden. In der dabei berechneten minimalen Reisezeit ist statt der festen Fahrtzeit  $t_{0i}$  zum jeweils ersten Zielort einer Bestellung die minimale Fahrtzeit  $\min_{v \in W} t_{vi}$  eines Transporters zu berücksichtigen.

Die hier vorgestellte Modellierung kann unabhängig von den vorhergehend vorgestellten Modellierungen von Verallgemeinerungen des Basis-Szenarios des IPDSP erfolgen.

## 4.8 IPDSP-Szenarien mit einem heterogenem Fuhrpark

Während in den bisher betrachteten IPDSP-Szenarien von einem Fuhrpark ausgegangen wurde, der aus gleichartigen Transportern besteht, soll in diesem Abschnitt betrachtet werden, wie sich IPDSP-Szenarien mit unterschiedlichen Transportern modellieren lassen. Es sind also transporterabhängige Fahrtzeiten  $t_{ij}^k$ , Fahrtkosten  $c_{ij}^k$ , Transporterfixkosten  $C_k$  sowie Transporterkapazitäten  $Q_k$  gegeben. Dieser Heterogenität soll im Rahmen einer Modellierung Rechnung getragen werden. Dazu wird im Folgenden betrachtet, inwiefern sich das Basis-Modell in Hinsicht auf diese Verallgemeinerung anpassen lässt.

### Verallgemeinerung des Basis-Modells hinsichtlich eines heterogenen Fuhrparks

Die Berücksichtigung transporterabhängiger Fahrtzeiten ist dabei leicht möglich, indem die Nebenbedingungen

$$\tau_i + t_{ij} \leq \tau_j + M_{17} \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i \in N^+, j \in N^-, \quad (4.1.13)$$

durch die Nebenbedingungen

$$\tau_i + \sum_{k \in K} \left( z_{ik}^d t_{ij}^k \right) \leq \tau_j + M_{24} \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i \in N^+, j \in N^-, \quad (4.8.1)$$

ersetzt werden.

Auch die Modellierung unterschiedlicher Kapazitäten der Transporter lässt sich leicht mit dem Ersetzen der Nebenbedingungen

$$\sum_{i \in N} z_{ik}^d \cdot q_i \leq Q \quad \forall k \in K \quad (4.1.14)$$

durch

$$\sum_{i \in N} z_{ik}^d \cdot q_i \leq Q_k \quad \forall k \in K \quad (4.8.2)$$

realisieren.

Die Berücksichtigung von transporterabhängigen Fahrtkosten in der Zielfunktion kann hingegen nicht derart leicht erfolgen. Dies ist dadurch begründet, dass die zur Ermittlung dieser Fahrtkosten notwendigen Informationen nicht mehr allein durch die Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  gegeben sind. Es muss neben der Information, ob ein Transporter von einem Ort  $i$  zu einem Ort  $j$  fährt, ebenfalls die Information, welcher Transporter diese Fahrt absolviert, berücksichtigt werden. Diese Information findet sich aber in den Entscheidungsvariablen  $z_{ik}^d$  bzw.  $z_{jk}^d$ . Dementsprechend ließen sich die Fahrtkosten z. B. mittels

$$\sum_{k \in K, i \in N^+, j \in N^-} c_{ij}^k \cdot x_{ij} \cdot z_{ik}$$

berechnen. Dieser Term ist nicht linear, weswegen er angesichts der Zielsetzung, ein lineares Modell zu entwickeln, in der Formalisierung keine Verwendung finden soll. Stattdessen geht man zur Berücksichtigung von transporterabhängigen Fahrtkosten folgendermaßen vor.

Es seien mit

$$c_{ij}^{\min} = \min_{k \in K} c_{ij}^k$$

die minimalen Fahrtkosten bei Fahrt von Ort  $i \in N^+$  zu Ort  $j \in N^-$  definiert. Für die Differenz zu den tatsächlich bei Fahrt zum Ort  $j$  angefallenen Fahrtkosten seien nichtnegative Hilfsvariablen

$\xi_j \hat{=}$  die zusätzlich zu den minimalen Fahrtkosten zu Ort  $j$  angefallenen Fahrtkosten

für alle Orte  $j \in N^-$  definiert. Die korrekte Belegung dieser Hilfsvariablen wird durch die Nebenbedingungen

$$\xi_j \geq \left( c_{ij}^k - c_{ij}^{\min} \right) \left( x_{ij} + z_{jk}^d - 1 \right) \quad \forall i \in N^+, j \in N^-, k \in K \quad (4.8.3)$$

sichergestellt. Durch diese Nebenbedingungen (4.8.3) wird eine Hilfsvariable  $\xi_j$  mindestens auf die Differenz  $c_{ij}^k - c_{ij}^{\min}$  gesetzt, falls Transporter  $k$  von Ort  $i$  zu Ort  $j$  fährt, also sowohl  $z_{jk}^d = 1$  als auch  $x_{ij} = 1$  gilt. Die Variablen  $\xi_j$  werden durch keine weiteren Nebenbedingungen beschränkt. Deren Minimierung in der folgenden Zielfunktion führt dazu, dass diese Hilfsvariablen jeweils auch genau die Differenz  $c_{ij}^k - c_{ij}^{\min}$  annehmen, falls Transporter  $k$  von Ort  $i$  zu Ort  $j$  fährt.

In der Zielfunktion sind die vorstehend beschriebenen Fahrtkosten statt der transporterunabhängigen Fahrtkosten zu berücksichtigen. Außerdem sind die transporterabhängigen Fixkosten  $C_k$  in die Zielfunktion mit einzubeziehen. Damit ist die Zielfunktion des Basis-Modells zu

$$\min \sum_{i \in N} (1 - I_i) \cdot e_i + \sum_{i \in N^+, j \in N^-} c_{ij}^{\min} x_{ij} + \sum_{j \in N^-} \xi_j + \sum_{k \in K} u_k \cdot C_k$$

anzupassen. Weiterhin ist die Nichtnegativität der Hilfsvariablen  $\xi_j$  mittels

$$\xi_j \geq 0 \quad \forall j \in N^-$$

zu fordern.

Auch bei der Modellierung dieses IPDSP-Szenarios können die in Abschnitt 4.1 propagierten Nebenbedingungen des Basis-Modells

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in N, t_{0i} + \max(t_{ij}, a_j - b_i) > B \quad (4.1.21)$$

$$x_{ij} + x_{jl} \leq 1 \quad \forall i, j, l \in N, t_{0i} + \max(\max(t_{ij}, a_j - b_i) + \max(t_{jl}, a_l - b_j), a_l - b_i) > B \quad (4.1.22)$$

entsprechend angepasst werden. Bei IPDSP-Szenarien mit heterogenem Fuhrpark sind sie als

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in N, \min_{k \in K} t_{0i}^k + \max(\min_{k \in K} t_{ij}^k, a_j - b_i) > B \text{ und} \quad (4.8.4)$$

$$x_{ij} + x_{jl} \leq 1 \quad \forall i, j, l \in N, \min_{k \in K} t_{0i}^k + \max(\max(\min_{k \in K} t_{ij}^k, a_j - b_i) + \max(\min_{k \in K} t_{jl}^k, a_l - b_j), a_l - b_i) > B \quad (4.8.5)$$

zu formulieren. In der dabei berechneten minimalen Reisezeit ist jeweils die Fahrtzeit des schnellsten Transporters zu berücksichtigen.

#### 4.8.1 Verallgemeinerung von IPDSP-Modellen mit heterogenem Fuhrpark

Die vorgestellten Anpassungen des Basis-Modells in Hinsicht auf unterschiedliche Transporter steht mit einem Großteil der bisher vorgestellten Anpassungen des Basis-Modells nicht in Konflikt. Eine Ausnahme stellt die Modellierung von IPDSP-Szenarien mit mehreren Produktionsstandorten dar.

##### Verallgemeinerung des IPDSP-Modells mit heterogenem Fuhrpark in Hinsicht auf mehrere Produktionsstandorte

Grundsätzlich erfolgt die Verallgemeinerung des IPDSP-Modells mit heterogenem Fuhrpark hinsichtlich mehrerer Produktionsstandorte analog zur Verallgemeinerung des Basis-Modells hinsichtlich mehrerer Produktionsstandorte (vgl. Abschnitt 4.7) durch Modifikation der Fahrtzeiten  $t_{ij}$  und Fahrtkosten  $c_{ij}$  sowie durch Ergänzen der Nebenbedingungen (4.7.1). Allerdings sind hier transporterabhängige Fahrtzeiten  $t_{ij}^k$  bzw. Fahrtkosten  $c_{ij}^k$  zu berücksichtigen.

Für die Fahrtzeit  $t_{n+k,j}^k$  vom künstlichen Startdepot  $n+k$  von Transporter  $k \in K_v$  zu einem Zielort einer Bestellung  $j \in N$  muss also

$$t_{n+k,j}^k = t_{vj}^k$$

und für die Fahrtzeit von einem Zielort einer Bestellung  $i \in N$  zum künstlichen Enddepot  $n+m+k$  von Transporter  $k \in K_v$  entsprechend

$$t_{i,n+m+k}^k = t_{iv}^k$$

gelten. Für die Fahrtkosten  $c_{n+k,j}^k$  und  $c_{i,n+m+k}^k$  gelten analog

$$c_{n+k,j}^k = c_{vj}^k$$

und

$$c_{i,n+m+k}^k = c_{iv}^k.$$

Für die Fahrtzeiten und Fahrtkosten zwischen den fiktiven Depots kann

$$t_{ij}^k = 0 \quad \forall i, j \in \bar{N} \setminus N, k \in K$$

sowie

$$c_{ij}^k = 0 \quad \forall i, j \in \bar{N} \setminus N, k \in K$$

gelten, wie in Abschnitt 4.7 bereits erläutert wurde. Analog zur in dem Abschnitt vorgestellten Modellierung muss bei der hier vorgestellten Verallgemeinerung ebenfalls mit den Nebenbedingungen

$$\sum_{k \in \Omega_v} z_{ik}^p = \sum_{k' \in K_v} z_{ik'}^d \quad \forall i \in N, v \in W \quad (4.7.1)$$

sichergestellt werden, dass eine Bestellung, welche einer Maschine an Produktionsstandort  $v$  zugeordnet wird, auch einem Transporter am selben Produktionsstandort zugeordnet wird.

## 4.9 IPDSP-Szenarien mit mehreren möglichen Belieferungszeitfenstern je Bestellung

In diesem Abschnitt soll die formale Behandlung von IPDSP-Szenarien vorgenommen werden, in denen zu einer Bestellung  $i$  nicht ein einzelnes Belieferungszeitfenster  $[a_i, b_i]$  vorgegeben ist, sondern  $\lambda_i$  Zeitfenster  $[a_i^1, b_i^1], \dots, [a_i^{\lambda_i}, b_i^{\lambda_i}]$  zur Verfügung stehen, von denen das produzierende Unternehmen eines zur Belieferung auswählen kann.

### Verallgemeinerung des Basis-Szenarios hinsichtlich mehrerer Belieferungszeitfenster je Bestellung

Zur Modellierung dieser Verallgemeinerung im Basis-Modell werden zusätzliche binäre Entscheidungsvariablen

$$z_{il}^{tw} = \begin{cases} 1, & \text{falls Bestellung } i \text{ den Zielort im Zeitfenster } [a_i^l, b_i^l] \text{ erreicht} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Bestellungen  $i \in N$  und  $l = 1, \dots, \lambda_i$  eingeführt.<sup>5</sup>

Wird Bestellung  $i$  angenommen, so muss auch genau eines der angebotenen Zeitfenster ausgewählt werden, dies wird durch die Nebenbedingungen

$$\sum_{l=1}^{\lambda_i} z_{il}^{tw} = I_i \quad \forall i \in N \quad (4.9.1)$$

sichergestellt. Für die Einhaltung des ausgewählten Zeitfensters wiederum sorgen die Nebenbedingungen

$$\sum_{l=1}^{\lambda_i} z_{il}^{tw} a_i^l \leq \tau_i \quad \forall i \in N \quad (4.9.2)$$

und

$$\tau_i \leq \sum_{l=1}^{\lambda_i} z_{il}^{tw} b_i^l \quad \forall i \in N. \quad (4.9.3)$$

In diesen Nebenbedingungen gilt ausschließlich für die zum gewählten Zeitfenster  $[a_i^{\hat{l}}, b_i^{\hat{l}}]$  gehörige Entscheidungsvariable  $z_{i\hat{l}}^{tw} = 1$ . Somit nimmt die jeweilige Summe den Wert  $a_i^{\hat{l}}$  beziehungsweise  $b_i^{\hat{l}}$  an. Diese beiden Typen von Nebenbedingungen (4.9.2) und (4.9.3) ersetzen die Nebenbedingungen (4.1.11) und (4.1.12) im Basis-Modell.

Es bleibt, die Binarität der Entscheidungsvariablen durch die Nebenbedingungen

$$z_{il}^{tw} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N, l = 1, \dots, \lambda_i$$

zu fordern.

Diese zur Verallgemeinerung des Basis-Modells in Hinsicht auf mehrere Belieferungszeitfenster je Bestellung vorgenommenen Veränderungen können unabhängig von den in den vorhergehenden Abschnitten vorgestellten Modifizierungen des Basis-Modells durchgeführt werden.

## 4.10 IPDSP-Szenarien mit mehreren Touren pro Transporter

Bei den bisher betrachteten Szenarien wurde angenommen, dass es einem Transporter nicht erlaubt ist, nach einer Auslieferungstour zum Depot zurückzukehren, in der Zwischenzeit produzierte Bestellungen einzuladen und eine weitere Auslieferungstour zu starten. In diesem Abschnitt soll nun untersucht werden, wie die Modellierung derartiger Situationen vorgenommen werden kann.

Abbildung 4.7 zeigt die Auswirkungen, wenn Transporter mehrere Touren fahren dürfen. Transporter 1 verfüge über die Kapazität  $Q_1 = 4$ , Transporter 2 über die Kapazität  $Q_2 = 10$ . Die Menge der in den Bestellungen 2, 3, 5 und 6 bestellten Güter beträgt  $q_2 + q_3 + q_5 + q_6 = 15$  und übersteigt somit die Summe der Transporterkapazitäten  $Q_1 + Q_2 = 14$ . Nur durch das mehrfache Fahren von einem der Transporter ist es möglich, alle Bestellungen auszuliefern.

<sup>5</sup>Der hochgestellte Index  $tw$  der Entscheidungsvariablen  $z_{il}^{tw}$  ist als Hinweis zu verstehen, dass es sich um Zuordnungen bezüglich von Zeitfenstern (engl. time windows) handelt.

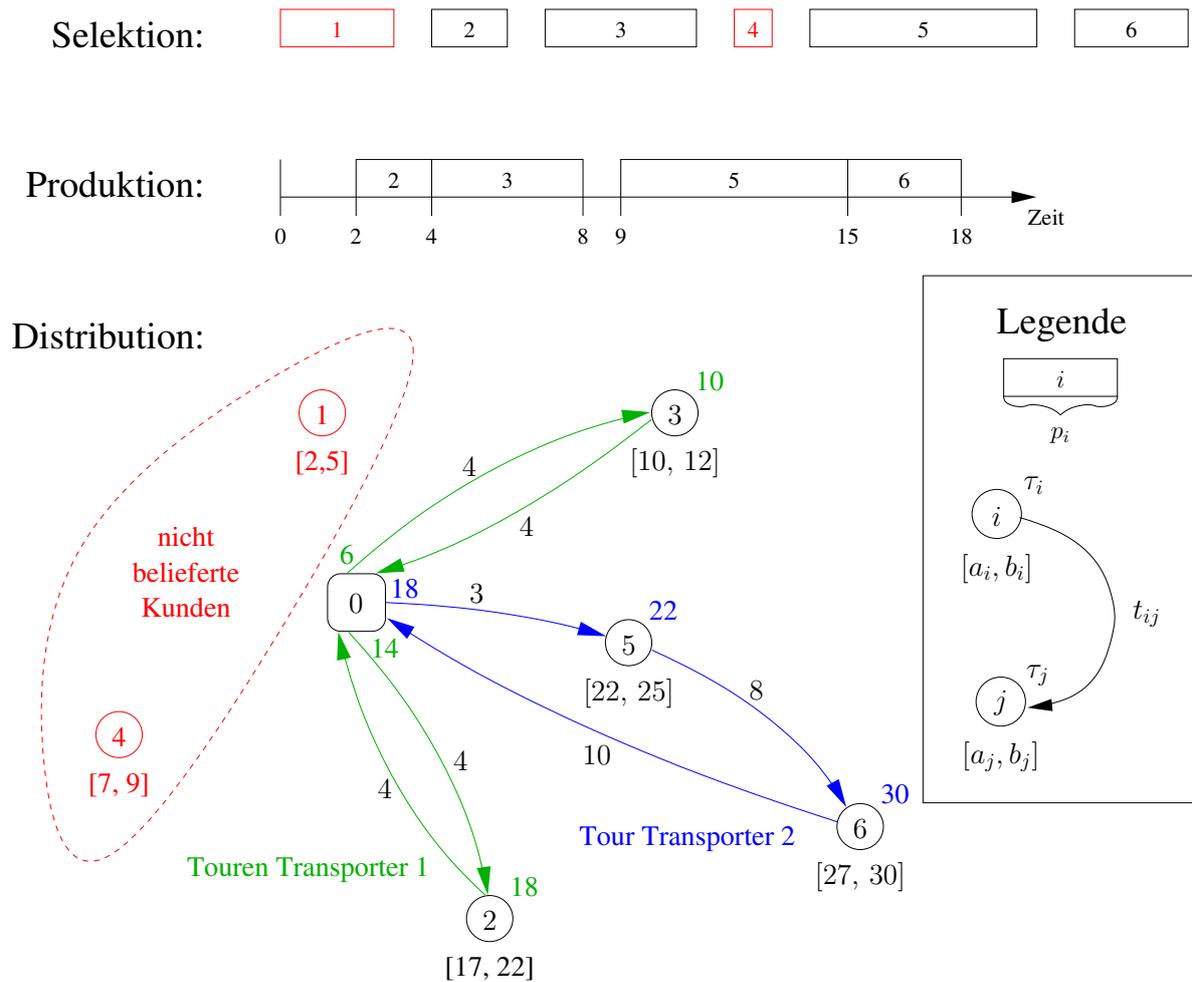


Abbildung 4.7: Beispiel für die Lösung einer Instanz eines Szenarios des IPDSP mit mehreren Touren pro Transporter

### Vorgehen bei der Modellierung

Bisherige Modelle für das beschriebene Szenario beruhen darauf, dass für jede einzelne Tour Entscheidungsvariablen zur Modellierung der jeweiligen Tour definiert wurden. So benutzt Viergutz [Vie11] eine Formulierung mit 3 Indizes und Entscheidungsvariablen  $Y_{ij}^r$ , die angeben, ob Kunde  $j$  direkter Nachfolger von Kunde  $i$  in Tour  $r$  ist. Ullrich [Ull13] führt in einer 4-Index-Formulierung Entscheidungsvariablen  $z_{ijvt}$  ein, welche angeben, ob Kunde  $i$  direkt vor Kunde  $j$  in der  $t$ -ten Tour von Transporter  $v$  beliefert wird. Lee et al. [LKJL14] entwickeln zwar ein Modell mit Routingvariablen  $x_{ij}$ , benötigen aber für Zuordnungen von Bestellungen  $i$  zu Produktionsläufen  $p$  auf Maschine  $k$  binäre Variablen  $z_{ipk}$  und für die Zuordnung von Kunden  $i$  zur  $h$ -ten Tour von Transporter  $v$  binäre Variablen  $y_{ivh}$ . Kang et al. [KPCL15] verwenden binäre Variablen  $X_{ijl}$ , die angeben, ob in Route  $l$  von Fabrik  $i$  zu Fabrik  $j$  gefahren wird. Damit wächst die Anzahl der Variablen in diesen Modellen kubisch beziehungsweise biquadratisch, sodass bei wachsender Größe von Probleminstanzen sehr rasch der Punkt erreicht ist, bei dem diese Modelle nicht mehr hilfreich bei der Bestimmung optimaler Lösungen sind.

In diesem Abschnitt wird nun eine eine Formulierung für das Szenario mit mehreren Touren pro Transporter entwickelt, bei der sich die Anzahl der binären Variablen im Vergleich zum Szenario mit einmaligem Fahren von Transportern nicht wesentlich erhöht. Es wird also ein Modellierungsvorgehen vorgestellt, bei dem jede Variable über höchstens zwei Indizes verfügt, womit die Anzahl der Variablen höchstens quadratisch mit der Problemgröße wächst.<sup>6</sup> Dies ist sinnvoll, da insbesondere die Anzahl von binären bzw. ganzzahligen Variablen maßgeblichen Einfluss auf die Dauer eines Lösungsverfahrens zur Lösung von gemischt-ganzzahligen linearen Programmen hat.

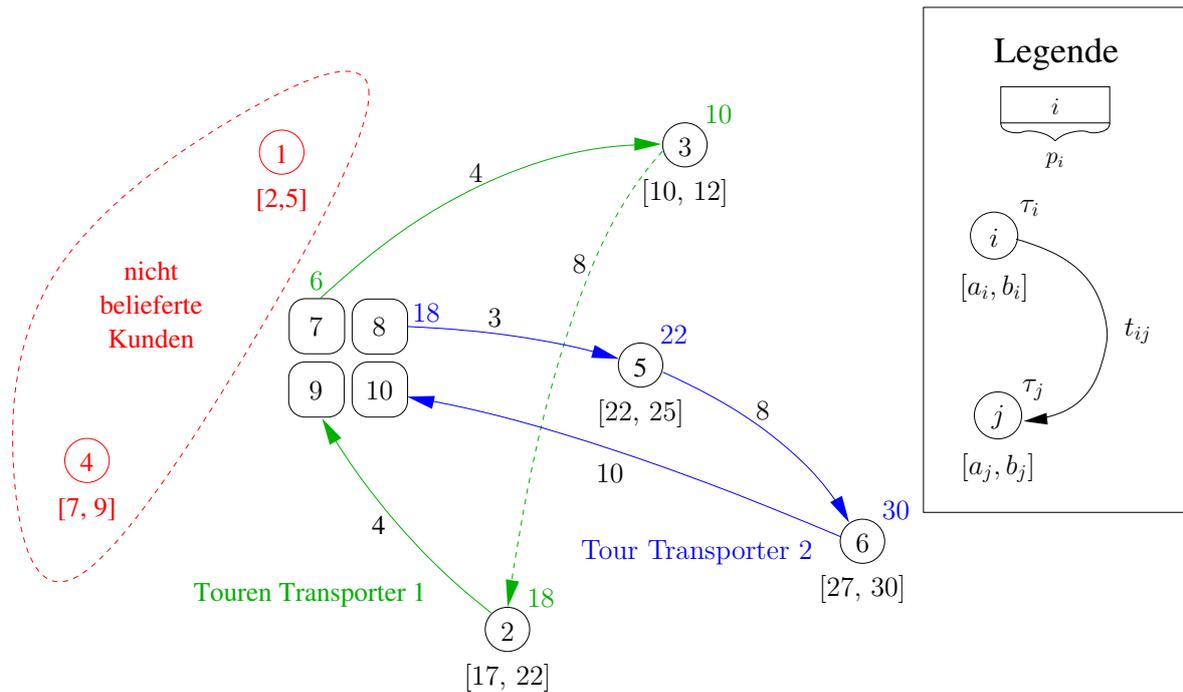


Abbildung 4.8: Beispiel für die Modellierung der Distribution einer Lösung einer Instanz eines Szenarios des IPDSP mit mehreren Touren pro Transporter

Dabei soll die Formulierung dieser Erweiterung des Basis-Szenarios des IPDSP ähnlich der im Rahmen dieser Arbeit präsentierten Modellierung des VRPTWM (siehe Abschnitt 2.6) erfolgen. Es sei also eine zwischenzeitliche Depotrückkehr, wie sie in Abbildung 4.7 bei Transporter 1 zwischen der Auslieferung von Bestellung 3 und Bestellung 2 stattfindet, nicht durch das Setzen von Entscheidungsvariablen  $x_{3,0} = x_{0,2} = 1$  bzw.  $x_{3,9} = x_{7,2} = 1$  abgebildet. Stattdessen erfolgt dies durch das Setzen einer zusätzlichen Entscheidungsvariablen  $\hat{x}_{3,2} = 1$ , welche angibt, dass Bestellung 2 zwar auf Bestellung 3 folgend ausgeliefert wird, aber erst nach einer zwischenzeitlichen Depotrückkehr. In Abbildung 4.8 wird dies illustriert. Dabei wird die zwischenzeitliche Rückkehr von Transporter 1 zwischen der Auslieferung von Bestellung 3 und 2 durch einen gestrichelten Pfeil von Ort 3 zu Ort 2 dargestellt, statt sie explizit durch einen Pfeil von Ort 3 zum Depot und vom Depot zu Ort 2 abzubilden. Auch werden in Abbildung 4.8 die zur Modellierung eingeführten künstlichen Depots wiedergegeben.

<sup>6</sup>Dabei soll selbstredend die Anzahl der Indizes nicht künstlich durch Indextransformation verringert werden.

Entsprechend diesen Ausführungen ändert sich die Bedeutung der binären Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  des Basismodells zu

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls Ort } j \text{ direkt nach Ort } i \text{ oder nach Rückkehr zum Depot besucht wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Orte  $i \in N^+$  und  $j \in N^-$ . Mittels binärer Entscheidungsvariablen

$$\hat{x}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls zwischen der Auslieferung von Bestellung } i \text{ und Bestellung } j \text{ eine} \\ & \text{zusätzliche Depotanfahrt stattfindet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Bestellungen  $i \in N$  und  $j \in N$  wird die Möglichkeit abgebildet, dass ein Transporter zwischenzeitlich zum Depot zurückkehren darf.

Die durch die binären Entscheidungsvariablen  $\hat{x}_{ij}$  ausgedrückte zwischenzeitliche Depotrückkehr schlägt sich in höheren Fahrtkosten und Fahrtzeiten nieder, dementsprechend muss die Zielfunktion des Basismodells von

$$\min \sum_{i \in N} (1 - I_i) \cdot e_i + \sum_{i \in N^+, j \in N^-} c_{ij} x_{ij} + \sum_{k \in K} u_k \cdot C$$

für dieses Szenario in

$$\min \sum_{i \in N} (1 - I_i) \cdot e_i + \sum_{i \in N^+, j \in N^-} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i, j \in N} (c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}) \hat{x}_{ij} + \sum_{k \in K} u_k \cdot C$$

geändert werden, ebenso wie die Nebenbedingungen

$$\tau_i + t_{ij} \leq \tau_j + M_{17} \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i \in N^+, j \in N^- \quad (4.1.13)$$

des Basismodells hier jetzt durch die zwei Typen von Nebenbedingungen

$$\tau_i + t_{ij} \leq \tau_j + M_{25} \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall (i, j) \in (N^+ \times N^-) \setminus (N \times N) \quad (4.10.1)$$

und

$$\tau_i + t_{ij} + (t_{i0} + t_{0j} - t_{ij}) \hat{x}_{ij} \leq \tau_j + M_{26} \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j \in N \quad (4.10.2)$$

ersetzt werden müssen. Bei einer Fahrt von oder zu einem künstlichen Depots kann keine zusätzliche Depotanfahrt stattfinden, weshalb die Nebenbedingungen (4.10.1) getrennt von den Nebenbedingungen (4.10.2) formuliert werden müssen. In den Nebenbedingungen (4.10.2) muss, falls zwischen der Auslieferung von Bestellung  $i$  und  $j$  eine Depotrückkehr erfolgt ( $\hat{x}_{ij} = 1$ ), die Auslieferung von Bestellung  $j$  nicht  $t_{ij}$ , sondern  $t_{i0} + t_{0j}$  Zeiteinheiten später als die Auslieferung von Bestellung  $i$  stattfinden, was durch den Term  $(t_{i0} + t_{0j} - t_{ij}) \hat{x}_{ij}$  berücksichtigt wird.

Die im Basismodell enthaltenen Nebenbedingungen

$$\sum_{i \in N} z_{ik}^d \cdot q_i \leq Q \quad \forall k \in K \quad (4.1.14)$$

beschreiben das jetzt betrachtete Szenario nicht korrekt, da in dieser Erweiterung nicht die Gesamtmenge aller von einem Transporter ausgelieferten Bedarfe, sondern nur die in genau einer Tour ausgelieferte Menge die Transporterkapazität nicht überschreiten darf. Daher sollen

für die Einhaltung der Transporterkapazität, ähnlich wie in der Modellierung des VRPTWM (siehe Abschnitt 2.6), nichtnegative Hilfsvariablen

$\gamma_i \hat{=}$  die auf der jeweiligen Tour vor der Auslieferung von Bestellung  $i$  noch auszuliefernde Menge

für alle Bestellungen  $i \in N$  eingeführt werden. Für diese Hilfsvariablen ergeben sich einige Bedingungen. So gilt insbesondere für die letzte Bestellung auf einer Auslieferungstour, aber auch für jede Bestellung  $i$  die Nebenbedingung

$$\gamma_i \geq q_i I_i \quad \forall i \in N, \quad (4.10.3)$$

da ja zumindest die Auslieferung von Bestellung  $i$  noch aussteht. Sofern nun eine Bestellung  $i$  direkt vor einer Bestellung  $j$  ausgeliefert wird, ohne dass zwischenzeitlich das Depot angefahren wird, so muss die noch auszuliefernde Menge vor der Auslieferung von Bestellung  $i$  um  $q_i$  Einheiten größer sein als diejenige vor der Auslieferung von Bestellung  $j$ . Dies wird erreicht, indem

$$\gamma_i \geq \gamma_j + q_i - M_{27} (1 - x_{ij} + \hat{x}_{ij}) \quad \forall i, j \in N. \quad (4.10.4)$$

gefordert wird. Die noch auszuliefernde Menge darf vor der Auslieferung einer Bestellung  $i$  nicht größer sein als die Kapazität eines Transporters, was mit den Nebenbedingungen

$$\gamma_i \leq Q \quad \forall i \in N. \quad (4.10.5)$$

erreicht wird.

Im Basismodell des IPDSP wurde durch die Nebenbedingungen

$$s_i + p_i \leq \tau_{n+k} + M_{18} \cdot (1 - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.1.16)$$

sichergestellt, dass ein Transporter das Depot erst dann verlässt, wenn alle von ihm auf seiner nächsten Tour auszuliefernden Bestellungen produziert worden sind. Diese Formulierung kann bei mehreren Touren pro Transportern nicht gewählt werden. Dies ist darin begründet, dass sich bei einer zwischenzeitlichen Depotrückkehr der Zeitpunkt der Depotabfahrt nicht ohne weiteres durch  $\tau_{n+k}$  ermitteln und in Beziehung zu den nach der Abfahrt ausgelieferten Bestellungen bringen lässt. Daher müssen Überlegungen angestellt werden, wie dieser Abfahrtszeitpunkt in Beziehung zu den nach der Abfahrt ausgelieferten Bestellungen gebracht werden kann.

Dazu sei  $s_i + p_i$  der Fertigstellungszeitpunkt einer Bestellung  $i$  und  $\tau'$  der Abfahrtszeitpunkt des Bestellungen  $i$  ausliefernden Transporters auf derjenigen Tour, auf der Bestellung  $i$  ausgeliefert wird. Es muss dementsprechend

$$s_i + p_i \leq \tau'$$

gelten. Um dies im Modell sicherzustellen, sollen nichtnegative Hilfsvariablen

$d_i \hat{=}$  Zeitpunkt, an dem diejenige Tour startet, auf der Bestellung  $i$  ausgeliefert wird

definiert werden, welche jeweils die Rolle von  $\tau'$  annehmen.

Die korrekte Belegung der entsprechenden Hilfsvariablen  $d_i$  muss für angenommene Bestellungen durch einige Nebenbedingungen sichergestellt werden. In der Produktion muss entsprechend den Vorüberlegungen

$$s_i + p_i \leq d_i + M_{28} \cdot (1 - I_i) \quad \forall i \in N \quad (4.10.6)$$

gefordert werden. Auf Distributionsseite müssen diese Entscheidungsvariablen  $d_i$  immer einen Wert annehmen, der nicht größer ist als der Abfahrtszeitpunkt der Auslieferungstour, auf welcher Bestellung  $i$  ausgeliefert wird. Dazu muss

$$d_i \leq \tau_i - t_{0i} + M_{29} \cdot (1 - I_i) \quad \forall i \in N \quad (4.10.7)$$

insbesondere für die erste ausgelieferte Bestellung gelten. Für eine später ausgelieferte Bestellung  $j$  kann die Nebenbedingung  $d_j \leq \tau_j - t_{0j}$  aber ohne Einschränkung ebenfalls gelten, da aufgrund der Gültigkeit der Dreiecksungleichung die Tour zur Auslieferung von Bestellung  $j$  nicht später als  $t_{0j}$  Zeiteinheiten vor dem Zeitpunkt  $\tau_j$  des Erreichens von Zielort  $j$  starten kann.

Wenn nach Bestellung  $i$  die Bestellung  $j$  ausgeliefert wird und dazwischen keine zusätzliche Depotanfahrt erfolgt, so muss  $d_j = d_i$  gelten, da beide Bestellungen in der selben Auslieferungstour ausgeliefert werden. Dazu genügt es,  $d_j \leq d_i$  zu fordern, dies wird durch die Nebenbedingung

$$d_j \leq d_i + M_{30} (1 - x_{ij} + \hat{x}_{ij}) \quad \forall i, j \in N \quad (4.10.8)$$

erreicht.

Die für das Basis-Modell zusätzlich propagierten Nebenbedingungen

$$x_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in N, t_{0i} + \max(t_{ij}, a_j - b_i) > B \quad (4.1.21)$$

$$x_{ij} + x_{jl} \leq 1 \quad \forall i, j, l \in N, t_{0i} + \max(\max(t_{ij}, a_j - b_i) + \max(t_{jl}, a_l - b_j), a_l - b_i) > B \quad (4.1.22)$$

bedürfen in dem hier betrachteten Szenario ebenfalls einer Überarbeitung. Ihre Gültigkeit wurde über die seit dem Verlassen des Depots vergangene Fahrtzeit des Transporters begründet, bei einer zwischenzeitlichen Depotrückkehr ist diese Argumentation aber hinfällig. Die Nebenbedingungen (4.1.21) beschrieben die Situation nur dann korrekt, wenn der jeweilige Transporter zwischen der Auslieferung von Bestellung  $i$  und Bestellung  $j$  nicht zum Depot zurückkehrt, also  $\hat{x}_{ij} = 0$  gilt. Falls jedoch  $\hat{x}_{ij} = 1$  gilt, so muss auch  $x_{ij} = 1$  gelten. Demzufolge müssen die Nebenbedingungen (4.1.21) zu

$$x_{ij} = \hat{x}_{ij} \quad \forall i, j \in N, t_{0i} + \max(t_{ij}, a_j - b_i) > B \quad (4.10.9)$$

modifiziert werden. Der zweite Typ von Nebenbedingungen (4.1.22) ist bei einer zwischenzeitlichen Depotrückkehr ( $\hat{x}_{ij} = 1$  oder  $\hat{x}_{jl} = 1$ ) nicht korrekt. Diese Nebenbedingungen müssen dementsprechend in

$$x_{ij} + x_{jl} \leq 1 + \hat{x}_{ij} + \hat{x}_{jl} \quad \forall i, j, l \in N, t_{0i} + \max(\max(t_{ij}, a_j - b_i) + \max(t_{jl}, a_l - b_j), a_l - b_i) > B \quad (4.10.10)$$

abgeändert werden. Falls  $\hat{x}_{ij}$  (oder  $\hat{x}_{jl}$ ) den Wert 1 annimmt, wird die Nebenbedingung aufgrund der Binarität der Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  und  $x_{jl}$  für alle Belegungen dieser Entscheidungsvariablen eingehalten.

#### 4.10.1 Verallgemeinerung von IPDSP-Modellen mit mehreren Touren pro Transporter

Zur Berücksichtigung von mehreren Touren pro Transporter ist das Basis-Modell in wesentlichen Teilen geändert worden. Dementsprechend stellt sich die Frage, inwiefern die bisher vorgestellten

Modellierungen von Erweiterungen des Basis-Modells mit diesem geänderten Modell verträglich sind.

Analog zu den Anpassungen beim Basis-Modell kann die Modellierung der jeweiligen Erweiterung des Basis-Modells in Bezug auf

- Bestellungen mit Erfüllungszusage,
- Bestellungsriorisierung,
- gebündelte Bestellungen und
- Distribution mit mehreren möglichen Belieferungszeitfenstern

auch für das soeben hinsichtlich mehrerer Touren pro Transporter erweiterte Modell erfolgen. Für die Modellierung von Szenarien mit

- unterschiedlichen Höchstaltem der bestellten Güter,
- Produktion auf mehreren Maschinen unterschiedlichen Typs mit Rüstzeiten,
- Produktion und Distribution von mehreren Produktionsstandorten aus und
- Distribution mit einem heterogenen Fuhrpark

gilt dies jedoch nicht. Dies wird insbesondere durch die folgenden Überlegungen, wie sich das Modell für das um die Möglichkeit des mehrfachen Fahrens von Transportern erweiterte Basis-Szenario des IPDSP hinsichtlich dieser Punkte erweitern lässt, deutlich.

### Berücksichtigung von unterschiedlichen Höchstaltem der bestellten Güter

Sollen neben mehreren Touren pro Transporter auch unterschiedliche Höchstalter der bestellten Güter berücksichtigt werden, so schlägt sich dies im Modell zum einen wie gehabt dadurch nieder, dass die Nebenbedingungen

$$\tau_i \leq s_i + p_i + B \quad \forall i \in N \quad (4.1.17)$$

durch

$$\tau_i \leq s_i + p_i + B_i \quad \forall i \in N \quad (4.5.1)$$

zu ersetzen sind.

Weiterhin müssen aber auch die zusätzlich propagierten Nebenbedingungen des Grundmodells

$$x_{ij} = \hat{x}_{ij} \quad \forall i, j \in N, t_{0i} + \max(t_{ij}, a_j - b_i) > B \quad (4.10.9)$$

$$x_{ij} + x_{jl} \leq 1 + \hat{x}_{ij} + \hat{x}_{jl} \quad \forall i, j, l \in N, t_{0i} + \max(\max(t_{ij}, a_j - b_i) + \max(t_{jl}, a_l - b_j), a_l - b_i) > B \quad (4.10.10)$$

an das jeweilige bestellungsabhängige Höchstalter angepasst werden. Dies erfolgt, indem sie durch die Nebenbedingungen

$$x_{ij} = \hat{x}_{ij} \quad \forall i, j \in N, t_{0i} + \max(t_{ij}, a_j - b_i) > B_j \quad (4.10.11)$$

$$x_{ij} + x_{jl} \leq 1 + \hat{x}_{ij} + \hat{x}_{jl} \quad \forall i, j, l \in N, t_{0i} + \max(\max(t_{ij}, a_j - b_i) + \max(t_{jl}, a_l - b_j), a_l - b_i) > B_l \quad (4.10.12)$$

ersetzt werden. Dieses Vorgehen ist offenbar analog zu den in Abschnitt 4.5 vorgestellten Modifikationen der Nebenbedingungen (4.1.21) und (4.1.22).

### Berücksichtigung von mehreren Maschinen unterschiedlichen Typs und von Rüstzeiten in der Produktion

Die Erweiterung des um mehrere Touren pro Transporter erweiterten Basis-Modells des IPDSP um die Produktion auf mehreren Maschinen unterschiedlichen Typs und Rüstzeiten kann im Wesentlichen wie in Abschnitt 4.6 erfolgen, einzig die Nebenbedingungen

$$s_i + p_i \leq \tau_{n+k} + M_{18} \cdot (1 - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.1.16)$$

sind nicht wie in Abschnitt 4.6 zu modifizieren, stattdessen müssen die Nebenbedingungen

$$s_i + p_i \leq d_i \quad \forall i \in N \quad (4.10.6)$$

durch

$$s_i + \sum_{k \in \Omega} z_{ik}^p p_i^k \leq d_i \quad \forall i \in N \quad (4.10.13)$$

ersetzt werden. Der Term  $\sum_{k \in \Omega} z_{ik}^p p_i^k$  nimmt hierbei den Wert der Bearbeitungszeit von Bestellung  $i$  auf der zugehörigen Maschine an und somit entspricht  $s_i + \sum_{k \in \Omega} z_{ik}^p p_i^k$  dem Beendigungszeitpunkt der Produktion von Bestellung  $i$ .

### Berücksichtigung von mehreren Produktionsstandorten

Eine Modellierung von Produktion und Distribution mit mehreren Produktionsstandorten bedingt, dass auch die Verallgemeinerung des Basis-Modells auf mehrere Maschinen erfolgt, da an jedem Produktionsstandort mindestens eine Maschine vorhanden sein muss. Die im Folgenden vorgestellte Modellierung kann grundsätzlich der Idee folgen, die Fahrtkosten  $c_{ij}$  und Fahrtzeiten  $t_{ij}$  für künstliche Depots  $i \in N^+ \setminus N$  beziehungsweise  $j \in N^- \setminus N$  an die durch die Zuordnung von Transportern zu Produktionsstandorten gegebenen Fahrtkosten und Fahrtzeiten anzupassen, wie es in Abschnitt 4.7 für alle Produktionsstandorte  $v \in W$  und Transporter  $k \in K_v$  mittels

$$\begin{aligned} t_{n+k,j} &= t_{vj} \quad \forall j \in N, \\ t_{i,n+m+k} &= t_{iv} \quad \forall i \in N, \\ t_{n+k,n+m+k'} &= 0 \quad \forall k' \in K, \\ c_{n+k,j} &= c_{vj} \quad \forall j \in N, \\ c_{i,n+m+k} &= c_{iv} \quad \forall i \in N \text{ und} \\ c_{n+k,n+m+k'} &= 0 \quad \forall k, k' \in K \end{aligned}$$

vorgenommen wurde.

Allerdings ist bei einer zwischenzeitlichen Depotrückkehr ebenfalls zu berücksichtigen, dass es vom jeweiligen Transporter abhängt, welches Depot angefahren werden muss. Die Fahrt eines

Transporters  $k$  von Ort  $i$  zu Ort  $j$  bei zwischenzeitlicher Depotrückkehr dauert demzufolge nicht mehr  $t_{i0} + t_{0j} - t_{ij}$  Zeiteinheiten, sondern  $t_{iv} + t_{vj} - t_{ij}$  Zeiteinheiten, abhängig vom Depot  $v \in W$ , an welchem der entsprechende Transporter  $k \in K_v$  stationiert ist. Dies lässt sich berücksichtigen, indem die Nebenbedingungen

$$\tau_i + t_{ij} + (t_{i0} + t_{0j} - t_{ij}) \hat{x}_{ij} \leq \tau_j + M_{24} \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i \in N, j \in N \quad (4.10.2)$$

durch die zwei Typen von Nebenbedingungen

$$\tau_i + t_{ij} \leq \tau_j + M_{31} \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i \in N, j \in N \quad (4.10.14)$$

und

$$\tau_i + \sum_{k \in M} z_{ik}^d (t_{i,n+m+k} + t_{n+k,j}) \leq \tau_j + M_{32} \cdot (1 - \hat{x}_{ij}) \quad \forall i \in N, j \in N \quad (4.10.15)$$

ersetzt werden. Durch die erste Art von Nebenbedingungen (4.10.14) ist der Auslieferungszeitpunkt  $\tau_j$  von Bestellung  $j$  im Vergleich zum Auslieferungszeitpunkt  $\tau_i$  von Bestellung  $i$  um mindestens  $t_{ij}$  Zeiteinheiten später, wenn ein Transporter sie aufeinanderfolgend ausliefert (und gegebenenfalls zwischenzeitlich zum Depot zurückkehrt). Die zweite Art von Nebenbedingungen (4.10.15) stellt sicher, dass der Auslieferungszeitpunkt  $\tau_j$  von Bestellung  $j$  im Vergleich zum Auslieferungszeitpunkt  $\tau_i$  von Bestellung  $i$  um die Fahrzeit  $t_{i,n+m+k}$  von Ort  $i$  zum Depot, an dem derjenige Transporter  $k$ , welcher Ort  $i$  beliefert, stationiert ist, und um die Fahrzeit  $t_{n+m+k,j}$  von diesem Depot zu Ort  $j$  später ist, falls eine zwischenzeitliche Depotrückkehr erfolgt.

Die Berücksichtigung der Fahrtkosten einer zwischenzeitlichen Depotrückkehr, welche davon abhängen, an welchem Produktionsstandort der jeweilige Transporter stationiert ist, soll ähnlich wie in Abschnitt 4.8 erfolgen. Es werden also nichtnegative Hilfsvariablen

$\xi_j \hat{=}$  die zusätzlich zu den direkten Fahrtkosten zu Ort  $j$  angefallenen Fahrtkosten

für alle Orte  $j \in N$  definiert. Eine dem Szenario entsprechende Belegung wird durch die Nebenbedingungen

$$\xi_j \geq (c_{i,n+m+k} + c_{n+k,j} - c_{ij}) (\hat{x}_{ij} + z_{ik}^d - 1) \quad \forall i, j \in N, k \in K \quad (4.10.16)$$

sichergestellt. Wie in Abschnitt 4.8 müssen diese Hilfsvariablen statt der bisher die Kosten für zwischenzeitliche Depotanfahrten repräsentierenden Terme in die Zielfunktion aufgenommen werden, wodurch sich diese von

$$\min \sum_{i \in N} (1 - I_i) \cdot e_i + \sum_{i \in N^+, j \in N^-} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i, j \in N} (c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}) \hat{x}_{ij} + \sum_{k \in K} u_k \cdot C$$

in

$$\min \sum_{i \in N} (1 - I_i) \cdot e_i + \sum_{i \in N^+, j \in N^-} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N} \xi_j + \sum_{k \in K} u_k \cdot C$$

ändert.

### Berücksichtigung eines heterogenen Fuhrparks in der Distribution

Bei der Modellierung der Distribution mit einem heterogenen Fuhrpark sind transporterabhängige Fahrtkosten, Fahrtzeiten, Fixkosten und Kapazitäten zu berücksichtigen.

Die Modellierung transporterabhängiger Fahrtkosten soll über nichtnegative Hilfsvariablen

$\xi_j \hat{=}$  die bei der Fahrt zu Ort  $j$  anfallenden Fahrtkosten

für alle Orte  $j \in N^-$  erfolgen. Damit und aufgrund der transporterabhängigen Fixkosten  $C_k$  ändert sich die Zielfunktion von

$$\min \sum_{i \in N} (1 - I_i) \cdot e_i - \sum_{i \in N^+, j \in N^-} c_{ij} x_{ij} - \sum_{i, j \in N} (c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}) \hat{x}_{ij} - \sum_{k \in K} u_k \cdot C$$

in

$$\min \sum_{i \in N} (1 - I_i) \cdot e_i - \sum_{j \in N^-} \xi_j - \sum_{k \in K} u_k \cdot C_k.$$

Durch die Nebenbedingungen

$$\xi_j \geq c_{ij}^k (x_{ij} + z_{jk}^d - 1) \quad \forall i \in N^+, j \in N^-, k \in K \quad (4.10.17)$$

werden die Fahrtkosten zu einem Ort  $j$  entsprechend der Transporterzuordnung des Ortes  $j$  gesetzt, bei zwischenzeitlicher Depotanfahrt durch die Nebenbedingungen

$$\xi_j \geq (c_{i, n+m+k}^k + c_{n+k, j}^k) (\hat{x}_{ij} + z_{jk}^d - 1) \quad \forall i, j \in N, k \in K. \quad (4.10.18)$$

Transporterabhängige Fahrtzeiten lassen sich berücksichtigen, indem statt der zwei aus dem Basis-Modell bekannten Arten von Nebenbedingungen

$$\tau_i + t_{ij} \leq \tau_j + M_{23} \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall (i, j) \in (N^+ \times N^-) \setminus (N \times N) \quad (4.10.1)$$

und

$$\tau_i + t_{ij} + (t_{i0} + t_{0j} - t_{ij}) \hat{x}_{ij} \leq \tau_j + M_{24} \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j \in N \quad (4.10.2)$$

die zwei Arten von Nebenbedingungen

$$\tau_i + \sum_{k \in K} z_{ik}^d t_{ij}^k \leq \tau_j + M_{33} \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i \in N^+, j \in N^- \quad (4.10.19)$$

und

$$\tau_i + \sum_{k \in K} z_{ik}^d (t_{i, n+m+k}^k + t_{n+k, j}^k) \leq \tau_j + M_{34} \cdot (1 - \hat{x}_{ij}) \quad \forall i, j \in N \quad (4.10.20)$$

die Abhängigkeiten der Besuchszeitpunkte abbilden. Die Nebenbedingungen (4.10.20) können nicht ähnlich den Nebenbedingungen (4.10.2) formuliert werden, da die entsprechende Fahrtzeit erst mittels  $\sum_{k \in K} z_{ik}^d (t_{i, n+m+k}^k + t_{n+k, j}^k)$  ermittelt werden muss. Aufgründdessen sind die Nebenbedingungen (4.10.19) ebenfalls für  $i, j \in N$  zu formulieren, was in den Nebenbedingungen (4.10.1) nicht der Fall war.

Als letztes bleibt, die unterschiedlichen Transporterkapazitäten zu berücksichtigen. Dies kann geschehen, indem die Nebenbedingungen

$$\gamma_i \leq Q \quad \forall i \in N. \quad (4.10.5)$$

in

$$\gamma_i \leq \sum_{k \in K} z_{ik}^d Q_k \quad \forall i \in N. \quad (4.10.21)$$

abgeändert werden. Durch den Termn  $\sum_{k \in K} z_{ik}^d Q_k$  wird die Kapazität desjenigen Transporters ermittelt, welcher Bestellung  $i$  ausliefert.

Die Modellierung eines IPDSP-Szenarios, bei dem neben den bereits betrachteten Verallgemeinerungen von mehreren Touren pro Transporter und einem heterogenen Fuhrpark auch mehrere Produktionsstandorte betrachtet werden, kann wie in Abschnitt 4.8.1 durch geeignete Festlegung der Parameter  $t_{ij}^k$  und  $c_{ij}^k$  erfolgen.

## 4.11 IPDSP-Szenarien mit Belieferungsaufteilung

Im Basis-Szenario des IPDSP wird angenommen, dass ein Aufteilen von Bestellungen auf mehrere Transporter nicht erlaubt ist. Da es in der Praxis durchaus relevant sein kann, derartige Belieferungsaufteilungen zu berücksichtigen, soll in diesem Abschnitt untersucht werden, wie sich ein entsprechendes Szenario modellieren lässt, in dem also eine Bestellung auf mehrere Transporter verteilt werden kann. Abbildung 4.9 zeigt beispielhaft eine optimale Lösung einer Instanz eines derartigen Szenarios mit 3 Transportern mit jeweiliger Kapazität  $Q = 8$ . Es liegen 6 Bestellungen mit jeweiligem Bedarf von  $q_1 = 3$ ,  $q_2 = 6$ ,  $q_3 = 6$ ,  $q_4 = 1$ ,  $q_5 = 6$  bzw.  $q_6 = 6$  vor. Es sollen keine Nichtbelieferungsstrafen anfallen und für die Einnahmen gelte  $p_i = q_i$ . Auf eine Darstellung aller Entfernungen sei aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Für die Fahrtkosten gelte  $c_{ij} = t_{ij}/100$  und die Transporterfixkosten betragen  $C = 4$ . Die Fahrtrouten der einzelnen Transporter lassen sich anhand der farbig dargestellten Kanten in Abbildung 4.9 erkennen. An den Knoten sind pro Fahrzeug, das die zugehörige Bestellung ausliefert, zwei Werte notiert: ohne Klammern der Belieferungszeitpunkt und in Klammern die jeweils vom Transporter an diesen Zielort gelieferte Menge. Es lässt sich erkennen, dass ohne die Möglichkeit der Belieferungsaufteilung höchstens 19 Einheiten ausgeliefert werden könnten (jeweils 6 in Form der Bestellungen 2,3,5 und 6 sowie 1 Einheit bei Bestellung 4). Im Vergleich zeigt sich, dass durch die Möglichkeit zur Belieferungsaufteilung in diesem Beispiel die Auslieferung von 24 Einheiten erfolgen kann.

### Vorgehen bei der Modellierung

Zur Modellierung von IPDSP-Szenarien mit Belieferungsaufteilung soll auf die im Rahmen dieser Arbeit neu entwickelte Formulierung des SDVRP zurückgegriffen werden. Damit dies möglich ist, ist zunächst die folgende Aussage zu beweisen.

**Satz 4.1** Es existiert eine optimale Lösung des IPDSP mit Belieferungsaufteilung, in welcher die Routen der Transporter keinen  $k$ -Teilkreis enthalten.

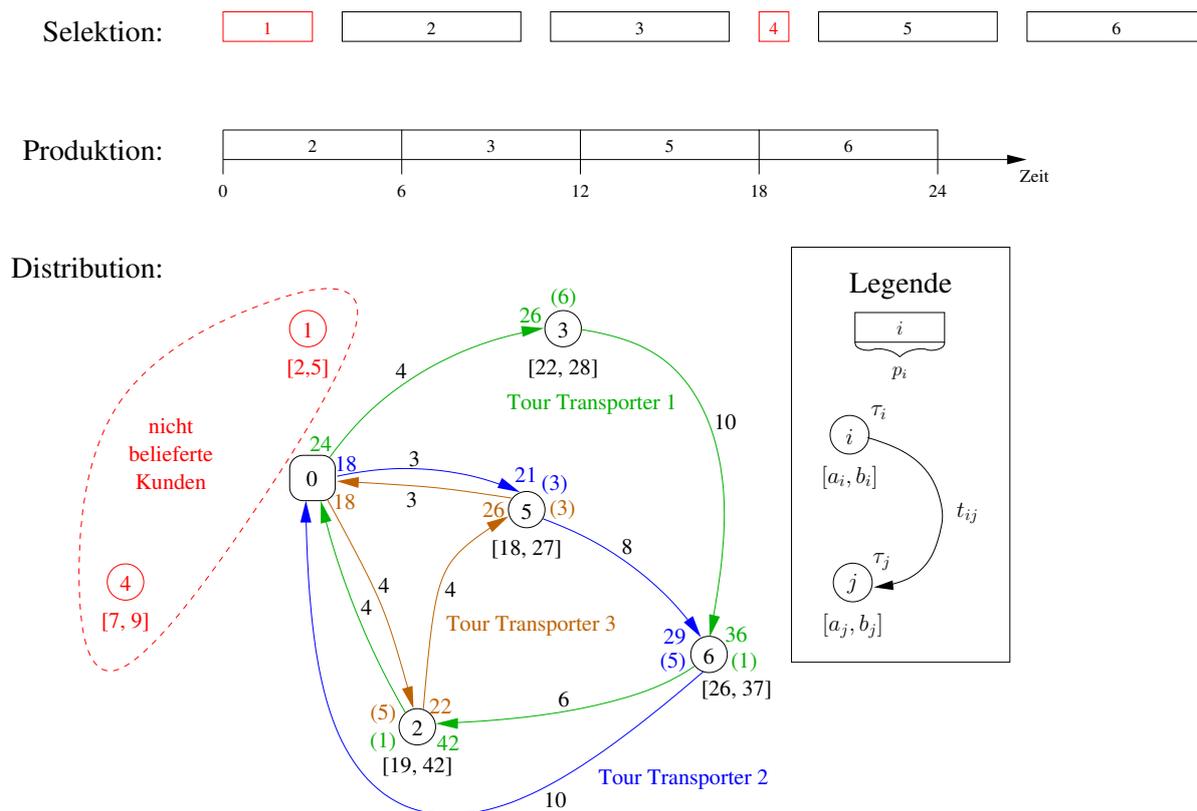


Abbildung 4.9: Beispiel für eine optimale Lösung einer Instanz eines Szenarios des IPDSP mit Belieferungsaufteilung

*Beweis (analog zum Beweis von Satz 2.2 aus [DT90]):* Annahme: Es existiert keine optimale Lösung ohne  $k$ -Teilkreis. Dann existiert eine optimale Lösung mit minimaler Anzahl an  $k$ -Teilkreisen, die nun untersucht werden soll. Einer dieser  $k$ -Teilkreise sei  $\{i_1, \dots, i_k\}$ . An Zielort  $i_j$  seien von Transporter  $j$  dabei  $\alpha_{i_j, j}$  Einheiten und von Transporter  $j - 1$  entsprechend  $\alpha_{i_j, j-1}$  Einheiten geliefert (dabei entspreche Transporter 0 Transporter  $k$ ). Es gelte ohne Einschränkung

$$\alpha_{i_1, 1} = \min \{ \alpha_{i_1, 1}, \alpha_{i_2, 2}, \dots, \alpha_{i_k, k}, \alpha_{i_1, k}, \alpha_{i_2, 1}, \dots, \alpha_{i_k, k-1} \}.$$

Dann lassen sich die transportierten Mengen entsprechend umverteilen, sodass sich Mengen

$$\begin{aligned} \alpha'_{i_1, 1} &= \alpha_{i_1, 1} - \alpha_{i_1, 1} = 0 \\ \alpha'_{i_1, k} &= \alpha_{i_1, k} + \alpha_{i_1, 1} \\ \alpha'_{i_k, k} &= \alpha_{i_k, k} - \alpha_{i_1, 1} \\ \alpha'_{i_k, k-1} &= \alpha_{i_k, k-1} + \alpha_{i_1, 1} \\ &\vdots \\ \alpha'_{i_2, 2} &= \alpha_{i_2, 2} - \alpha_{i_1, 1} \\ \alpha'_{i_2, 1} &= \alpha_{i_2, 1} + \alpha_{i_1, 1} \end{aligned}$$

ergeben. Die Auslieferung von Bestellung  $i_1$  durch Transporter 1 kann also entfallen, wodurch sich zum einen die von Transporter 1 zurückgelegte Strecke wegen der Gültigkeit der Dreiecksungleichung nicht verlängert und die übrige Lösung nicht ändert. Zum anderen reduziert sich

aber in dieser Lösung mit den Liefermengen  $\alpha'$  die Anzahl der  $k$ -Teilkreise um einen, was im Widerspruch zur Minimalität ebendieser Anzahl in der ursprünglichen Lösung steht und die Annahme, dass keine optimale Lösung ohne  $k$ -Teilkreis existiert, zum Widerspruch führt.  $\square$

Distribution:

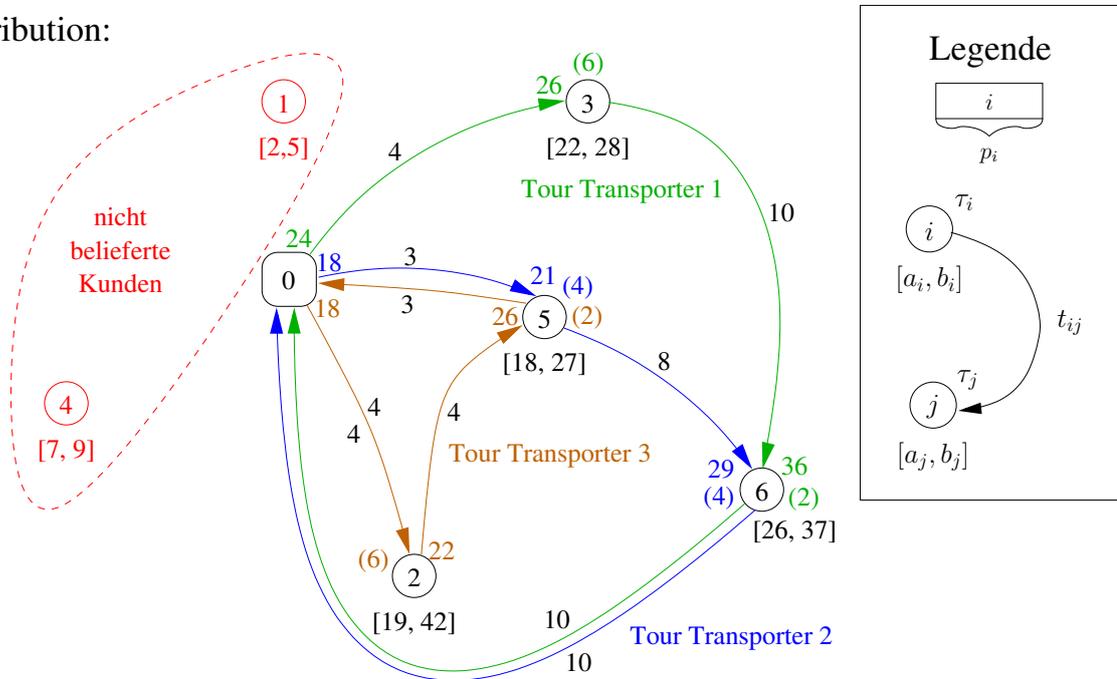


Abbildung 4.10: Beispiel für die Distribution in einer optimalen Lösung einer Instanz eines Szenarios des IPDSP mit Belieferungsaufteilung ohne  $k$ -Teilkreis

Die im Beweis beschriebene Umverteilung soll mit Abbildung 4.10 illustriert werden. Dort wurde die Distribution der in Abbildung 4.9 vorgestellten Lösung des IPDSP modifiziert. Dabei wurde auf dem 3-Teilkreis, welcher aus den Zielorten 2, 5 und 6 besteht, die geringste von einem Transporter an einen Zielort ausgelieferte Menge bestimmt. Das ist die von Transporter 1 an Zielort 2 gelieferte eine Einheit. Diese wird nun auf Null reduziert, wodurch Zielort 2 eine Einheit zu wenig erhält. Deshalb erhält er dann eine weitere Einheit von dem ihn ebenfalls beliefernden Transporter 3. Dadurch liefert Transporter 3 aber wiederum 9 Einheiten aus, wodurch seine Kapazität überschritten wird. Deshalb muss die von diesem Transporter auf dem 3-Teilkreis an Zielort 5 gelieferten Menge um eine Einheit verringert werden. Dadurch wird jedoch diese Bestellung wiederum nicht vollständig ausgeliefert. Dies wird durch die Erhöhung der von Transporter 2 an Zielort 5 gelieferten Menge um eine Einheit kompensiert werden, wodurch wiederum die Kapazität dieses Transporters überschritten wird. Aufgrunddessen muss die von Transporter 2 an Zielort 6 (dieser befindet sich ebenfalls auf dem 3-Teilkreis) gelieferte Menge ebenfalls um eine Einheit verringert werden, weshalb aber Transporter 1 an diesen Zielort 6 eine Einheit mehr liefern muss. Da Transporter 1 zuvor bereits eine Einheit weniger an Zielort 2 geliefert hat, ist dies ohne Probleme möglich.

Es kann also eine Umverteilung auf einem  $k$ -Teilkreis erfolgen, wodurch sich die Liefermenge eines Transporters an einen Zielort auf Null reduziert, weswegen der Besuch dieses Zielorts für diesen Transporter entfallen kann. Damit wird dieser  $k$ -Teilkreis ohne Erhöhung der Kosten der Lösung eliminiert.

Entsprechend der in Abschnitt 2.5 getroffenen Überlegungen lässt sich also eine Permutation  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$  der Bestellungen finden, sodass von keinem Transporter eine Bestellung  $\pi_i$  nach einer Bestellung  $\pi_j$  mit  $i < j$  ausgeliefert wird. Dementsprechend erfolgt hier die Modellierung der Distribution analog zu der alternativen Modellierung des SDVRP in Abschnitt 2.5, im Gegensatz zu dem für das Basis-Szenario des IPDSP vorgestellten Modell, in dem für die Modellierung der Distribution auf Ideen von Dantzig, Fulkerson und Johnson [DFJ59] zurückgegriffen wurde. Die Modellierung der Distribution beruht also ebenfalls auf dem klassischen Maschinenschedulingmodell von Manne [Man60] in der von Balakrishnan, Kanet und Sridharan [BKS99] bzw. Zu und Heady [ZH00] verallgemeinerten Form. Die Modellierung auf Produktionsseite hingegen bleibt unverändert.

Genau wie bei dem Basis-Modell sei für jeden Transporter  $k \in K$  ein künstliches Start- bzw. Enddepot  $n + k$  bzw.  $n + m + k$  gegeben, sodass sich analog die Ortsmengen  $N^+$ ,  $N^-$  und  $\bar{N}$  ergeben.

Die Selektion erfolgt wie im Basis-Modell durch binäre Entscheidungsvariablen

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Bestellung } i \text{ angenommen wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Bestellungen  $i \in N$ . Auch die Produktionsplanung wird wie im vorhergehenden Modell mittels binärer Entscheidungsvariablen

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls die Produktion von Bestellung } i \text{ (irgendwann) vor der Produktion} \\ & \text{von Bestellung } j \text{ stattfindet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Bestellungen  $i, j \in N$  mit  $i < j$  und mittels nichtnegativer Entscheidungsvariablen

$$s_i \hat{=} \text{Produktionsstartzeit von Bestellung } i$$

für alle Bestellungen  $i \in N$  abgebildet. Wird eine Bestellung  $i$  nicht angenommen, so ist die Belegung der Entscheidungsvariablen  $y_{ij}$  für  $i < j$  bzw.  $y_{ji}$  für  $j < i$  sowie die Belegung von  $s_i$  ohne Bedeutung.

Für die Transporterzuordnung in der Distributionsplanung seien binäre Entscheidungsvariablen

$$z_{ik}^d = \begin{cases} 1, & \text{wenn Ort } i \text{ von Transporter } k \text{ besucht wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Orte  $i \in \bar{N}$  und Transporter  $k \in K$  definiert. Ebenso werden für die Aufteilung der Belieferung nichtnegative Entscheidungsvariablen

$$\alpha_{ik} \hat{=} \text{die von Transporter } k \text{ an Zielort } i \text{ gelieferte Menge}$$

für alle Bestellungen  $i \in N$  und Transporter  $k \in K$  definiert.

Ob ein Transporter benutzt wird oder nicht, wird durch die binären Entscheidungsvariablen

$$u_k = \begin{cases} 1, & \text{wenn Transporter } k \text{ benutzt wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Transporter  $k \in K$  modelliert.

Im Unterschied zum vorherigen Modell seien für die Reihenfolge der Orte innerhalb einer Tour binäre Entscheidungsvariablen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn Ort } i \text{ (irgendwann) vor Ort } j \text{ vom selben} \\ & \text{Transporter angefahren wird} \\ 0, & \text{wenn Ort } j \text{ (irgendwann) vor Ort } i \text{ vom selben} \\ & \text{Transporter angefahren wird} \\ 0 \text{ oder } 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Orte  $i \in N$  und  $j \in \bar{N}$  mit  $i < j$  gegeben. Falls Ort  $i$  und Ort  $j$  nicht vom selben Transporter beliefert werden (also kein  $k \in K$  existiert, für das  $z_{ik}^d = z_{jk}^d = 1$  gilt), sei die Belegung der Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  beliebig und ohne Einfluss.

Dadurch, dass aus der Belegung der Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  nicht ohne weiteres bekannt ist, ob eine Bestellung  $j$  direkt nach einer Bestellung  $i$  ausgeliefert wird, ist es nicht wie beim Basis-Modell möglich, die Fahrtkosten direkt in der Zielfunktion zu summieren. Stattdessen sollen mit Hilfe von nichtnegative Hilfsvariablen

$$\varphi_{ik} \hat{=} \text{die von Transporter } k \text{ bis zur Ankunft bei Ort } i \text{ angefallenen Fahrtkosten}$$

für alle Transporter  $k \in K$  und Orte  $i \in \bar{N}$  die Fahrtkosten berechnet werden. Die Gesamtfahrtkosten eines Transporters  $k$  liefert dann die Fahrtkostenvariable  $\varphi_{n+m+k,k}$  des zugehörigen Enddepots.

Die Besuchszeitpunkte von Transportern bei Orten seien durch nichtnegative Entscheidungsvariablen

$$\tau_{ik} \hat{=} \text{Besuchszeitpunkt von Transporter } k \text{ bei Ort } i$$

für alle Transporter  $k \in K$  und Orte  $i \in \bar{N}$  gegeben.

In dem mit diesen Variablen formulierten Modell seien dabei die folgenden Entscheidungsschranken und Nebenbedingungen zu berücksichtigen.

Wenn Bestellung  $i$  und  $j$  angenommen werden ( $I_i = I_j = 1$ ), so muss Bestellung  $i$  entweder vor oder nach Bestellung  $j$  produziert werden.

$$s_i + p_i \leq s_j + M_{34} \cdot (1 - y_{ij}) + M_{34} \cdot (2 - I_i - I_j) \quad \forall i, j \in N, i < j \quad (4.11.1)$$

$$s_j + p_j \leq s_i + M_{35} \cdot y_{ij} + M_{35} \cdot (2 - I_i - I_j) \quad \forall i, j \in N, i < j \quad (4.11.2)$$

Eine angenommene Bestellung muss von mindestens einem Transporter ausgeliefert werden.

$$\sum_{k \in K} z_{ik}^d \geq I_i \quad \forall i \in N \quad (4.11.3)$$

Kein künstliches Startdepot kann nach einem Zielort angefahren werden.

$$x_{i,n+k} = 0 \quad \forall k \in K, i \in N \quad (4.11.4)$$

Kein künstliches Enddepot kann vor einem Zielort angefahren werden.

$$x_{i,n+m+k} = 1 \quad \forall k \in K, i \in N \quad (4.11.5)$$

Die Transporter müssen genau ihrem jeweiligen künstlichen Start-/Enddepot zugeordnet sein.

$$z_{n+k,k}^d = z_{n+m+k,k}^d = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.11.6)$$

$$z_{n+k,k'}^d = z_{n+m+k,k'}^d = 0 \quad \forall k, k' \in K, k \neq k' \quad (4.11.7)$$

Jede angenommene Bestellung muss vollständig ausgeliefert werden.

$$\sum_{k \in K} \alpha_{ik} = I_i q_i \quad \forall i \in N \quad (4.11.8)$$

Nur die einem Transporter zugeordneten Zielorte können von diesem eine positive Menge erhalten.

$$\alpha_{ik} \leq z_{ik}^d q_i \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.11.9)$$

Die Auslieferung jeder angenommenen Bestellung  $i$  muss in ihrem Belieferungszeitfenster  $[a_i, b_i]$  erfolgen.

$$a_i \leq \tau_{ik} + M_{36} \cdot (1 - I_i) \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.11.10)$$

$$\tau_{ik} \leq b_i \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.11.11)$$

Wird ein Ort  $j$  nach Ort  $i$  vom gleichen Transporter  $k$  besucht, so muss sein Besuchszeitpunkt um mindestens  $t_{ij}$  Zeiteinheiten später sein als derjenige von Ort  $i$ . Falls ein Ort  $i$  nach einem Ort  $j$  vom gleichen Transporter  $k$  beliefert wird, gilt Analoges. Da die Variablen  $x_{ij}$  nur für  $i < j$  definiert wird, sind beide Fälle zu betrachten.

$$\tau_{ik} + t_{ij} \leq \tau_{jk} + M_{37} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.11.12)$$

$$\tau_{jk} + t_{ji} \leq \tau_{ik} + M_{37} \cdot (3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.11.13)$$

Wird ein Ort  $j$  nach einem Ort  $i$  vom selben Transporter  $k$  beliefert, so müssen die gesammelten Fahrtkosten von Ort  $i$  zu Ort  $j$  um mindestens  $c_{ij}$  steigen. Wird ein Ort  $i$  nach einem Ort  $j$  vom gleichen Transporter  $k$  beliefert, gilt Ähnliches.

$$\varphi_{ik} + c_{ij} \leq \varphi_{jk} + M_{38} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.11.14)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji} \leq \varphi_{ik} + M_{38} \cdot (3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.11.15)$$

Die Transporterkapazität darf nicht überschritten werden.

$$\sum_{i \in N} \alpha_{ik} \leq Q \quad \forall k \in K \quad (4.11.16)$$

Ein Transporter  $k$  darf erst nach Beendigung der Produktion aller von ihm auszuliefernden Bestellungen sein Startdepot  $n + k$  verlassen.

$$s_i + p_i \leq \tau_{n+k,k} + M_{39} \cdot (1 - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.11.17)$$

Das Höchstalter darf bei der Auslieferung nicht überschritten sein.

$$\tau_{ik} \leq s_i + p_i + B \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.11.18)$$

Ein Transporter wird dann benutzt, wenn mindestens eine Bestellung von ihm ausliefert wird.

$$u_k \geq z_{ik}^d \quad \forall k \in K, i \in N \quad (4.11.19)$$

Zusammen mit der Zielfunktion, mit welcher der Verlust minimiert wird, ergibt sich das folgende Modell.

$$\min \sum_{i \in N} (1 - I_i) \cdot e_i + \sum_{k \in K} \varphi_{n+m+k,k} + \sum_{k \in K} u_k \cdot C \quad (4.11.20)$$

$$\text{u.d.N. } s_i + p_i \leq s_j + M_{34} \cdot (1 - y_{ij}) + M_{34} \cdot (2 - I_i - I_j) \quad \forall i, j \in N, i < j \quad (4.11.1)$$

$$s_j + p_j \leq s_i + M_{35} \cdot y_{ij} + M_{35} \cdot (2 - I_i - I_j) \quad \forall i, j \in N, i < j \quad (4.11.2)$$

$$x_{i,n+k} = 0 \quad \forall k \in K, i \in N \quad (4.11.4)$$

$$x_{i,n+m+k} = 1 \quad \forall k \in K, i \in N \quad (4.11.5)$$

$$z_{n+k,k}^d = z_{n+m+k,k}^d = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.11.6)$$

$$z_{n+k,k'}^d = z_{n+m+k,k'}^d = 0 \quad \forall k, k' \in K, k \neq k' \quad (4.11.7)$$

$$\sum_{k \in K} \alpha_{ik} = I_i q_i \quad \forall i \in N \quad (4.11.8)$$

$$\alpha_{ik} \leq z_{ik}^d q_i \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.11.9)$$

$$a_i \leq \tau_{ik} + M_{36} \cdot (1 - I_i) \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.11.10)$$

$$\tau_{ik} \leq b_i \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.11.11)$$

$$\tau_{ik} + t_{ij} \leq \tau_{jk} + M_{37} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.11.12)$$

$$\tau_{jk} + t_{ji} \leq \tau_{ik} + M_{37} \cdot (3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.11.13)$$

$$\varphi_{ik} + c_{ij} \leq \varphi_{jk} + M_{38} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.11.14)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji} \leq \varphi_{ik} + M_{38} \cdot (3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.11.15)$$

$$\sum_{i \in N} \alpha_{ik} \leq Q \quad \forall k \in K \quad (4.11.16)$$

$$s_i + p_i \leq \tau_{n+k,k} + M_{39} \cdot (1 - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.11.17)$$

$$\tau_{ik} \leq s_i + p_i + B \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.11.18)$$

$$u_k \geq z_{ik}^d \quad \forall k \in K, i \in N \quad (4.11.19)$$

$$I_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N, i < j$$

$$s_i \geq 0 \quad \forall i \in N$$

$$z_{ik}^d \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \bar{N}, k \in K$$

$$\alpha_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in N, k \in K$$

$$u_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j$$

$$\varphi_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in \bar{N}, k \in K$$

$$\tau_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in \bar{N}, k \in K$$

Bei dieser Problemformulierung ist zu beachten, dass die Nebenbedingungen (4.11.12) bis (4.11.15) nur deswegen in dieser Art korrekt formuliert werden können, weil die Fahrtzeiten  $t_{ij}$  und die Fahrtkosten  $c_{ij}$  die Dreiecksungleichung

$$t_{ij} + t_{jl} \geq t_{il}$$

beziehungsweise

$$c_{ij} + c_{jl} \geq c_{il}$$

einhalten.

#### 4.11.1 Verallgemeinerung von IPDSP-Modellen mit Belieferungsaufteilung

Da das zuvor entwickelte Modell, welches Belieferungsaufteilung berücksichtigt, auf einem anderen Modellierungskonzept als das Basis-Modell beruht, soll in diesem Unterabschnitt untersucht werden, inwiefern sich die Modellierungsideen der bisherigen Erweiterungen des Basis-Modells auf das IPDSP-Modell mit Belieferungsaufteilung übertragen lassen.

Einige der zuvor präsentierten Modellierungen von Erweiterungen des Basis-Szenarios lassen sich dabei ohne Änderungen für das Modell mit Belieferungsaufteilung übernehmen, darunter fällt das Vorgehen bei der Modellierung von

- Bestellungen mit Erfüllungszusage,
- Bestellungsriorisierung,
- gebündelte Bestellungen,
- Produktion auf mehreren Maschinen unterschiedlichen Typs mit Rüstzeiten und
- Produktion und Distribution von mehreren Produktionsstandorten aus.

Auf der anderen Seite gibt es Erweiterungen, deren Modellierungsvorgehen sich beim Modell mit Belieferungsaufteilung nicht analog zur Vorgehen beim Basis-Modell vornehmen lässt. Dies betrifft die Modellierung von

- unterschiedlichen Höchstaltern der bestellten Güter,
- Distribution mit einem heterogenen Fuhrpark,
- Distribution mit mehreren möglichen Belieferungszeitfenstern je Bestellung und
- Distribution mit mehreren Touren pro Transporter.

Auf die Modellierung der letztgenannten Erweiterungen soll an dieser Stelle näher eingegangen werden.

#### Berücksichtigung von unterschiedlichen Höchstaltern der bestellten Güter

Als erste Erweiterung sollen Szenarien behandelt werden, in denen nicht ein für alle Bestellungen einheitliches Höchstalter  $B$ , sondern von der jeweiligen Bestellung  $i$  abhängige Höchstalter  $B_i$  gegeben sind.

Diese Szenarien lassen sich leicht durch Anpassung der Nebenbedingung der Verknüpfung von Produktion und Distribution

$$\tau_{ik} \leq s_i + p_i + B \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.11.18)$$

zu

$$\tau_{ik} \leq s_i + p_i + B_i \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.11.21)$$

modellieren. Dabei beschränkt sich die Änderung im Vergleich zur Modellierung von unterschiedlichen Höchstaltern der bestellten Güter im Basis-Modell des IPDSP darauf, dass hier nicht nur ein Besuchszeitpunkt  $\tau_i$ , sondern für jeden Transporter  $k$  ein Besuchszeitpunkt  $\tau_{ik}$  betrachtet wird.

Sind zudem mehrere Maschinen mit unterschiedlichen Bearbeitungszeiten  $p_i^k$  gegeben, so sind die Nebenbedingungen (4.11.18) analog zum Vorgehen aus Abschnitt 4.6 stattdessen in

$$\tau_{ik} \leq s_i + \sum_{k' \in \Omega} z_{ik'}^p p_i^{k'} + B_i \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.11.22)$$

abzuändern.

### Berücksichtigung eines heterogenen Fuhrparks in der Distribution

Als nächstes soll ein heterogener Fuhrpark in der Distribution im Modell mit Belieferungsaufteilung berücksichtigt werden. Bei einem heterogenen Fuhrpark sind transporterabhängige Fahrtzeiten  $t_{ij}^k$ , transporterabhängige Fahrtkosten  $c_{ij}^k$  sowie je nach Transporter unterschiedliche Kapazitäten  $Q_k$  nebst Fixkosten  $C_k$  gegeben.

Im Vergleich zur Modellierung von Distribution mit einem heterogenen Fuhrpark im Modell des IPDSP ist die Modellierung im Modell des IPDSP mit Belieferungsaufteilung mit weniger Änderungen verbunden. Diese beschränken sich darauf, in den Nebenbedingungen den Parameter  $t_{ij}$  durch  $t_{ij}^k$ ,  $c_{ij}$  durch  $c_{ij}^k$  sowie  $Q$  durch  $Q_k$  zu ersetzen. Genauer:

Die Nebenbedingungen

$$\tau_{ik} + t_{ij} \leq \tau_{jk} + M_{34} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.11.12)$$

$$\tau_{jk} + t_{ji} \leq \tau_{ik} + M_{34} \cdot (3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.11.13)$$

müssen somit durch

$$\tau_{ik} + t_{ij}^k \leq \tau_{jk} + M_{40} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.11.23)$$

$$\tau_{jk} + t_{ji}^k \leq \tau_{ik} + M_{40} \cdot (3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.11.24)$$

ersetzt werden, die Nebenbedingungen

$$\varphi_{ik} + c_{ij} \leq \varphi_{jk} + M_{35} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.11.14)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji} \leq \varphi_{ik} + M_{35} \cdot (3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.11.15)$$

durch

$$\varphi_{ik} + c_{ij}^k \leq \varphi_{jk} + M_{41} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.11.25)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji}^k \leq \varphi_{ik} + M_{41} \cdot (3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.11.26)$$

und die Nebenbedingungen

$$\sum_{i \in N} \alpha_{ik} \leq Q \quad \forall k \in K \quad (4.11.16)$$

durch

$$\sum_{i \in N} \alpha_{ik} \leq Q_k \quad \forall k \in K. \quad (4.11.27)$$

Sind weiterhin mehrere Produktionsstandorte vorhanden, so sind die Parameter  $t_{ij}^k$  und  $c_{ij}^k$  derart zu modifizieren, wie es in Abschnitt 4.8.1 beschrieben wurde.

### Berücksichtigung von mehreren möglichen Belieferungszeitfenstern je Bestellung in der Distribution

Eine weitere Verallgemeinerung des Modells von IPDSP-Szenarien mit Belieferungsaufteilung stellt die Berücksichtigung von mehreren möglichen Belieferungszeitfenstern je Bestellung dar. Hierbei soll angenommen werden, dass ein Kunde es zwar akzeptiert, seine Bestellung in mehreren Teilen zu erhalten, jedoch fordert, dass diese nur in genau einem seiner offerierten Zeitfenster angeliefert werden. Eine zeitlich stark ausgedehnte Belieferung ist für einen Abnehmer aufgrund des damit verbundenen Aufwands nicht wünschenswert. Zumeist ist es hingegen sogar zu bevorzugen, wenn eine aufgeteilte Bestellung einen Zielort gleichzeitig erreicht. Dies ließe sich abbilden, indem statt der Entscheidungsvariablen  $\tau_{ik}$  für alle Transporter identische nichtnegative Entscheidungsvariablen  $\tau_i$ , die dem für alle Transporter identischen Auslieferungszeitpunkt von Bestellung  $i$  entsprechen, eingeführt werden (in den entsprechenden Nebenbedingungen ist dann  $\tau_{ik}$  durch  $\tau_i$  zu ersetzen). Diese Einschränkung soll an dieser Stelle jedoch nicht berücksichtigt werden.

Die hier zu betrachtende Erweiterung des Modells des IPDSP mit Belieferungsaufteilung um mehrere Belieferungszeitfenster lässt sich modellieren, indem zusätzliche binäre Entscheidungsvariablen

$$z_{il}^{tw} = \begin{cases} 1, & \text{wenn Bestellung } i \text{ im Zeitfenster } [a_i^l, b_i^l] \text{ ausgeliefert} \\ & \text{wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Bestellungen  $i \in N$  und Zeitfenster  $[a_i^l, b_i^l] = [a_i^1, b_i^1], \dots, [a_i^{\lambda_i}, b_i^{\lambda_i}]$  eingeführt werden. Da in dem Fall, dass eine Bestellung angenommen wird, genau eins der Zeitfenster ausgewählt werden muss, müssen noch die Nebenbedingungen

$$\sum_{l=1}^{\lambda_i} z_{il}^{tw} = I_i \quad \forall i \in N \quad (4.11.28)$$

eingeführt werden. Weiterhin müssen die Nebenbedingungen

$$a_i \leq \tau_{ik} + M_{33} \cdot (1 - I_i) \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.11.10)$$

$$\tau_{ik} \leq b_i \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.11.11)$$

durch

$$\sum_{l=1}^{\lambda_i} z_{il}^{tw} a_i^l \leq \tau_{ik} \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.11.29)$$

$$\tau_{ik} \leq \sum_{l=1}^{\lambda_i} z_{il}^{tw} b_i^l \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.11.30)$$

ersetzt werden. Damit wird der Wertebereich der jeweiligen Entscheidungsvariablen  $\tau_{ik}$  auf das mit Hilfe der Entscheidungsvariablen  $z_{il}^{tw}$  gewählte Zeitfenster beschränkt. Falls eine Bestellung  $i$  abgelehnt wird, gilt  $I_i = 0$  und somit  $z_{il}^{tw} = 0$  für alle  $l = 1, \dots, \lambda_i$ . Somit folgt in diesem Fall  $\tau_{ik} = 0$  für alle  $k \in M$ .

### Modellierung der Distribution mit mehreren Touren pro Transporter

Die Verallgemeinerungen des Basis-Modells des IPDSP bezüglich Distribution mit mehreren Touren pro Transporter und bezüglich Distribution mit Belieferungsaufteilung sind, wie die vorhergehenden Abschnitte gezeigt haben, unter allen Verallgemeinerungen diejenigen, deren Modellierung des größten Aufwands bedurfte. Wesentlich komplexer noch ist allerdings die Modellierung der Kombination beider Erweiterungen, weshalb diese im folgenden Abschnitt 4.12 erfolgen soll.

## 4.12 IPDSP-Szenarien mit mehreren Touren pro Transporter und Belieferungsaufteilung

Nachdem in den beiden vorherigen Abschnitten jeweils entwickelt worden ist, wie Szenarien mit mehreren Touren pro Transporter beziehungsweise mit Belieferungsaufteilung modelliert werden kann, soll in diesem Abschnitt die Kombination dieser beiden Verallgemeinerungen modelliert werden.

Dabei soll vereinfachend angenommen werden, dass kein Transporter mehr als einen Teil einer Bestellung ausliefert. In vielen Fällen kann dies ohnehin ausgeschlossen werden. Dies ist der Fall, wenn die Belieferungszeitfenster derart eng sind, dass es für einen Transporter nicht möglich ist, innerhalb des Zeitfensters zum Depot zurückzukehren und einen weiteren Teil der Bestellung innerhalb des Zeitfenster auszuliefern. Auch in dem Fall, dass von Kunden gewünscht wird, die (aufgeteilte) Bestellung nicht zeitlich verstreut, sondern die Teile der Bestellung gleichzeitig zu erhalten, ist es für einen Transporter nicht möglich, mehr als einen Teil einer Bestellung auszuliefern. In diesem Fall muss im folgenden Modell für jede Bestellung ein einheitlicher statt mehrerer transporterabhängiger Auslieferungszeitpunkte formuliert werden.

### Vorgehen bei der Modellierung

Die Modellierung von Szenarien, in denen sowohl mehrere Touren pro Transporter als auch Belieferungsaufteilung Berücksichtigung finden, folgt einem ähnlichen Vorgehen wie die Modellierung von Szenarien, in denen ausschließlich Belieferungsaufteilung berücksichtigt wird. Dementsprechend sei für jeden Transporter  $k \in K$  ein künstliches Start- bzw. Enddepot  $n+k$  bzw.  $n+m+k$  gegeben, sodass sich analog die Ortsmengen  $N^+$ ,  $N^-$  und  $\bar{N}$  ergeben.

Die Bestellungenselektion wird wiederum durch binäre Entscheidungsvariablen

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Bestellung } i \text{ angenommen wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Bestellungen  $i \in N$  abgebildet. Auch die Produktionsplanung wird mittels binärer Entscheidungsvariablen

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls Bestellung } i \text{ (irgendwann) vor Bestellung } j \text{ produziert wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Bestellungen  $i, j \in N$  mit  $i < j$  und mittels nichtnegativer Entscheidungsvariablen

$$s_i \hat{=} \text{Produktionsstartzeit von Bestellung } i$$

für alle Bestellungen  $i \in N$  abgebildet.

Für die Transporterzuordnung in der Distributionsplanung seien binäre Entscheidungsvariablen

$$z_{ik}^d = \begin{cases} 1, & \text{wenn Ort } i \text{ von Transporter } k \text{ besucht wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Orte  $i \in \bar{N}$  und Transporter  $k \in K$  definiert. Ebenso werden für die Aufteilung der Belieferung nichtnegative Entscheidungsvariablen

$$\alpha_{ik} \hat{=} \text{die von Bestellung } i \text{ von Transporter } k \text{ ausgelieferte Menge}$$

für alle Bestellungen  $i \in N$  und Transporter  $k \in K$  definiert.

Ob ein Transporter benutzt wird, wird durch die binären Entscheidungsvariablen

$$u_k = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k \text{ benutzt wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Transporter  $k \in K$  modelliert.

Für die Reihenfolge der Orte innerhalb einer Route seien binäre Entscheidungsvariablen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn Ort } i \text{ (irgendwann) vor Ort } j \text{ vom selben} \\ & \text{Transporter angefahren wird} \\ 0, & \text{wenn Ort } j \text{ (irgendwann) vor Ort } i \text{ vom selben} \\ & \text{Transporter angefahren wird} \\ 0 \text{ oder } 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Orte  $i \in N$  und  $j \in \bar{N}$  mit  $i < j$  gegeben. Falls Ort  $i$  und Ort  $j$  nicht vom selben Transporter beliefert werden (also kein  $k \in K$  existiert, für das  $z_{ik}^d = z_{jk}^d = 1$  gilt), sei die Belegung der Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  beliebig 0 oder 1 und ohne Einfluss.

Mit Hilfe von nichtnegative Hilfsvariablen

$$\varphi_{ik} \hat{=} \text{die von Transporter } k \text{ bis zur Ankunft bei Ort } i \text{ angefallenen Fahrtkosten}$$

sollen für alle Transporter  $k \in K$  und Orte  $i \in \bar{N}$  die Fahrtkosten berechnet werden. Die Gesamtfahrtkosten eines Transporters  $k$  liefert dann die Fahrtkostenvariable  $\varphi_{n+m+k,k}$  des zugehörigen Enddepots.

Die Besuchszeitpunkte von Transportern bei Orten seien durch nichtnegative Entscheidungsvariablen

$$\tau_{ik} \hat{=} \text{Besuchszeitpunkt von Transporter } k \text{ an Ort } i$$

für alle Transporter  $k \in K$  und Orte  $i \in \bar{N}$  gegeben. Handelt es sich bei Ort  $i$  um den Zielort einer Bestellung, so kann  $\tau_{ik}$  als Auslieferungszeitpunkt eines Teils von Bestellung  $i$  aufgefasst werden.

Das bis hierhin vorgestellte Modellierungsvorgehen soll mit der in Abschnitt 4.10 entwickelten Idee verknüpft werden, die Abfahrtszeit desjenigen Transporters, welcher Bestellung  $i$  ausliefert, auf die jeweils auf Bestellung  $i$  direkt folgend ausgelieferte Bestellung zu übertragen. Hierzu werden nun nichtnegative Entscheidungsvariablen

$d_{ik} \hat{=}$  Depotabfahrtszeit von Transporter  $k$  bei der Tour, auf der Bestellung  $i$  ausgeliefert wird für alle Transporter  $k \in K$  und Bestellungen  $i \in N$  definiert.

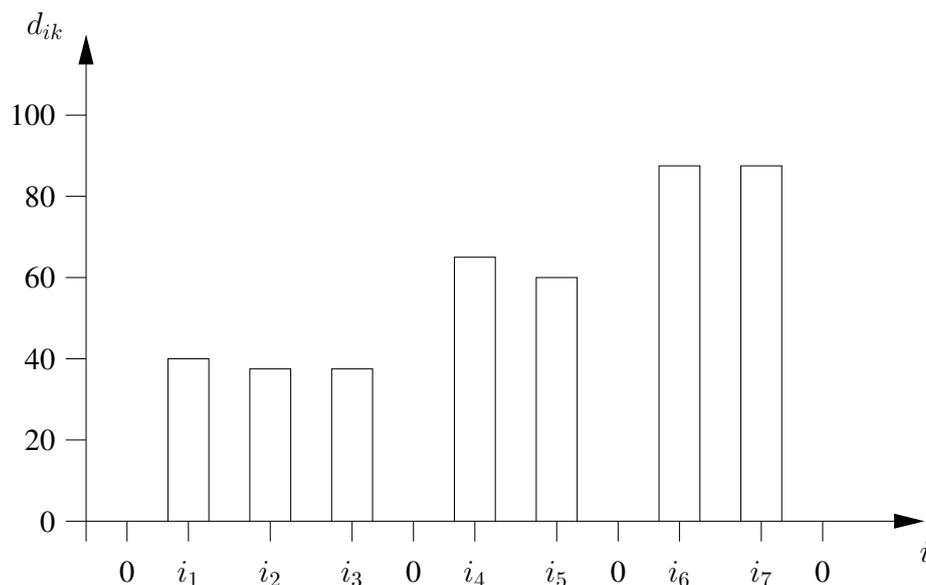


Abbildung 4.11: Die Werte  $d_{ik}$  im Verlauf einer Auslieferungsreihenfolge

Abbildung 4.11 zeigt für eine Auslieferungsreihenfolge  $(0, i_1, i_2, i_3, 0, i_4, i_5, 0, i_6, i_7, 0)$  eines Transporter  $k$  die jeweiligen Werte  $d_{ik}$ . Da diese Auslieferungsreihenfolge aus den Touren  $(i_1, i_2, i_3)$ ,  $(i_4, i_5)$  und  $(i_6, i_7)$  besteht, sind die Werte  $d_{ik}$  gemäß der in Abschnitt 4.10 vorgestellten Modellierung innerhalb dieser Touren nicht-steigend. Zwischen zwei Touren ist dies jedoch im Allgemeinen nicht der Fall. Dies stellt bei einer Modellierung der Distribution mittels der eingangs vorgestellten binären Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  allerdings ein Problem dar. So wird in der Auslieferungsreihenfolge  $(0, i_1, i_2, i_3, 0, i_4, i_5, 0, i_6, i_7, 0)$  Bestellung  $i_5$  indirekt nach Bestellung  $i_2$  ausgeliefert, allerdings lässt sich in einem Modell mit ebendiesen binären Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  nicht ohne Weiteres (wie bei der Modellierung von Szenarien des IPDSP mit mehreren Touren pro Transporter) feststellen, ob Bestellung  $i_5$  in der selben Tour wie Bestellung  $i_2$  ausgeliefert wird und dementsprechend  $d_{i_5 k} = d_{i_2 k}$  zu fordern oder nicht.

Um dies zu ermöglichen, sollen nichtnegative Hilfsvariablen

$\varepsilon_{ik} \hat{=}$  in der wievielten Tour von Transporter  $k$  Bestellung  $i$  ausgeliefert wird

für alle Bestellungen  $i \in \bar{N}$  und Transporter  $k \in K$  eingeführt werden. Mit Hilfe der Belegung dieser Hilfsvariablen lässt sich also feststellen, ob ein Transporter zwei Bestellungen  $i$  und  $j$  in der gleichen Tour ausliefert. In diesem Fall gilt  $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{jk}$ .

Zur Einhaltung der Transporterkapazitäten werden nichtnegative Hilfsvariablen

$\gamma_{ik} \hat{=}$  die auf der jeweiligen Tour vor Auslieferung eines Teils von  
Bestellung  $i$  von Transporter  $k$  noch auszuliefernde Menge

für alle Transporter  $k \in K$  und Bestellungen  $i \in N$  definiert. Hier ergibt sich eine ähnliche Problematik wie bei den Hilfsvariablen  $d_{ik}$ , da die noch auszuliefernde Menge im Verlauf einer Auslieferungsreihenfolge nicht durchgehend fallend ist, sondern nur innerhalb der einzelnen Touren. Die eingeführten Hilfsvariablen  $\varepsilon_{ik}$  tragen auch hier dazu bei, dass die Einhaltung der Transporterkapazität mittels derartiger Hilfsvariablen  $\gamma_{ik}$  dennoch möglich ist.

Die Modellierung von zwischenzeitlichen Depotanfahrten kann nicht wie in Abschnitt 4.10 erfolgen. Dort wurden binäre Entscheidungsvariablen  $\hat{x}_{ij}$  eingeführt, die angeben, ob der jeweilige Transporter zwischen der Auslieferung von Bestellung  $i$  und  $j$  zum Depot zurückkehrt. In den hier betrachteten Szenarien ist jedoch aus den Entscheidungsvariablen nicht leicht ersichtlich, ob eine Bestellung  $j$  überhaupt *direkt* nach einer Bestellung  $i$  ausgeliefert wird. Deswegen werden stattdessen an dieser Stelle binäre Entscheidungsvariablen

$$\mu_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{wenn Transporter } k \text{ unmittelbar vor der Auslieferung} \\ & \text{eines Teils von Bestellung } i \text{ zum Depot zurückkehrt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Transporter  $k \in K$  und Bestellungen  $i \in N$  formuliert. Mit diesen Variablen ist es nun möglich, die folgenden Entscheidungsschranken und Nebenbedingungen zu formulieren.

Wenn Bestellung  $i$  und  $j$  angenommen werden ( $I_i = I_j = 1$ ), so muss Bestellung  $i$  vollständig vor oder vollständig nach Bestellung  $j$  produziert werden.

$$s_i + p_i \leq s_j + M_{41} \cdot (1 - y_{ij}) + M_{41} \cdot (2 - I_i - I_j) \quad \forall i, j \in N, i < j \quad (4.12.1)$$

$$s_j + p_j \leq s_i + M_{41} \cdot y_{ij} + M_{41} \cdot (2 - I_i - I_j) \quad \forall i, j \in N, i < j \quad (4.12.2)$$

Eine angenommene Bestellung muss von mindestens einem Transporter ausgeliefert werden.

$$\sum_{k \in K} z_{ik}^d \geq I_i \quad \forall i \in N \quad (4.12.3)$$

Kein Startdepot kann nach einem Zielort einer Bestellung angefahren werden.

$$x_{i,n+k} = 0 \quad \forall k \in K, i \in N \quad (4.12.4)$$

Kein Enddepot kann vor einem Zielort einer Bestellung angefahren werden.

$$x_{i,n+m+k} = 1 \quad \forall k \in K, i \in N \quad (4.12.5)$$

Die Transporter müssen genau ihren jeweiligen (fiktiven) Depots zugeordnet sein.

$$z_{n+k,k}^d = z_{n+m+k,k}^d = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.12.6)$$

$$z_{n+k,k'}^d = z_{n+m+k,k'}^d = 0 \quad \forall k, k' \in K, k \neq k' \quad (4.12.7)$$

Jede angenommene Bestellung muss vollständig ausgeliefert werden.

$$\sum_{k \in K} \alpha_{ik} = I_i q_i \quad \forall i \in N \quad (4.12.8)$$

Nur Bestellungen, die einem Transporter zugeordnet sind, können von diesem (teilweise) ausgeliefert werden.

$$\alpha_{ik} \leq z_{ik}^d q_i \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.9)$$

Die Auslieferung einer angenommenen Bestellung  $i$  erfolgt in ihrem Belieferungszeitfenster  $[a_i, b_i]$ .

$$a_i \leq \tau_{ik} + M_{42} \cdot (1 - I_i) \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.10)$$

$$\tau_{ik} \leq b_i \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.11)$$

Wird ein Teil einer Bestellung  $j$  nach einem Teil einer Bestellung  $i$  vom gleichen Transporter  $k$  ausgeliefert, so muss ihr Auslieferungszeitpunkt um mindestens  $t_{ij}$  Zeiteinheiten später sein als derjenige von Bestellung  $i$ . Falls ein Teil einer Bestellung  $i$  nach einem Teil einer Bestellung  $j$  vom gleichen Transporter  $k$  ausgeliefert wird, gilt Analoges. Da die Entscheidungsvariablen  $x_{ij}$  nur für  $i < j$  definiert wird, sind beide Fälle zu betrachten.

$$\tau_{ik} + t_{ij} \leq \tau_{jk} + M_{43} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in N^-, i < j, k \in K \quad (4.12.12)$$

$$\tau_{jk} + t_{ji} \leq \tau_{ik} + M_{43} \cdot (3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, j \in N^+, i < j, k \in K \quad (4.12.13)$$

Falls es sich sowohl bei Ort  $i$  als auch bei Ort  $j$  nicht um ein (fiktives) Depot, sondern um den Zielort einer Bestellung handelt, so muss außerdem eventuell noch die durch die zwischenzeitliche Depotanfahrt verstrichene Zeit  $(t_{i,n+m+k} + t_{n+k,j} - t_{ij})$  berücksichtigt werden. Dazu werden für diese  $i, j \in N$  die Nebenbedingungen

$$\tau_{ik} + t_{ij} + (t_{i,n+m+k} + t_{n+k,j} - t_{ij}) \mu_{jk} \leq \tau_{jk} + M_{44} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.14)$$

$$\tau_{jk} + t_{ji} + (t_{j,n+m+k} + t_{n+k,i} - t_{ji}) \mu_{ik} \leq \tau_{ik} + M_{44} \cdot (3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.15)$$

formuliert.

Wird ein Ort  $j$  nach einem Ort  $i$  vom selben Transporter  $k$  besucht, so müssen die insgesamt von diesem Transporter bis zu Ort  $i$  verursachten Fahrtkosten die bis zu Ort  $j$  verursachten Fahrtkosten um mindestens  $c_{ij}$  übersteigen. Wird ein Ort  $i$  nach einem Ort  $j$  vom gleichen Transporter  $k$  besucht, gilt Ähnliches. Die Einhaltung dieser Forderung wird durch die Nebenbedingungen

$$\varphi_{ik} + c_{ij} \leq \varphi_{jk} + M_{45} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in N^-, i < j, k \in K \quad (4.12.16)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji} \leq \varphi_{ik} + M_{45} \cdot (3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, j \in N^+, i < j, k \in K \quad (4.12.17)$$

sichergestellt. In diesen werden allerdings nicht die Kosten für eine zwischenzeitliche Depotrückkehr berücksichtigt. Deshalb sollen für Zielorte von Bestellungen  $i, j \in N$  zusätzlich die Nebenbedingungen

$$\varphi_{ik} + c_{ij} + (c_{i,n+m+k} + c_{n+k,j} - c_{ij}) \mu_{jk} \leq \varphi_{jk} + M_{46} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.18)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji} + (c_{j,n+m+k} + c_{n+k,i} - c_{ji}) \mu_{ik} \leq \varphi_{ik} + M_{46} \cdot \left( 3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d \right) \\ \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.19)$$

formuliert werden.

Eine zusätzliche Depotanfahrt darf nur dann stattfinden, falls die betreffende Bestellung auch vom entsprechenden Transporter besucht wird, wie die Nebenbedingungen

$$\mu_{ik} \leq z_{ik}^d \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.20)$$

sicherstellen.

Mittels der folgenden Nebenbedingungen soll die korrekte Belegung der Hilfsvariablen  $\varepsilon_{ik}$  erreicht werden. Mit dem Verlassen des zugehörigen künstlichen Depots beginnt immer die erste Tour eines Transporters, dementsprechend müssen die Nebenbedingungen

$$\varepsilon_{n+k,k} = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.12.21)$$

aufgestellt werden. Wird ein Teil einer Bestellung  $j$  nach einem Teil einer anderen Bestellung  $i$  beliefert, so gilt  $\varepsilon_{ik} \leq \varepsilon_{jk}$ . Findet unmittelbar vor der Auslieferung eines Teils von Bestellung  $j$  eine zusätzliche Depotanfahrt statt, so wird er in einer späteren Tour als ein Teil von Bestellung  $i$  ausliefert und es gilt sogar  $\varepsilon_{ik} + 1 \leq \varepsilon_{jk}$ . Dieser (und der symmetrische Fall) lassen sich durch die Nebenbedingungen

$$\varepsilon_{jk} + \mu_{ik} \leq \varepsilon_{ik} \quad \forall i \in N, j \in N^+ \setminus N, i < j, k \in K \quad (4.12.22)$$

$$\varepsilon_{ik} + \mu_{jk} \leq \varepsilon_{jk} + M_{47} (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.23)$$

$$\varepsilon_{jk} + \mu_{ik} \leq \varepsilon_{ik} + M_{48} x_{ij} \quad \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.24)$$

$$\varepsilon_{ik} \leq \varepsilon_{jk} \quad \forall i \in N, j \in N^- \setminus N, i < j, k \in K \quad (4.12.25)$$

abbilden. Die Nebenbedingungen (4.12.22) sorgen dafür, dass die Nummer derjenigen Tour, auf welcher Transporter  $k$  einen Teil von Bestellung  $i$  ausliefert, mindestens der Nummer derjenigen Tour, auf welcher das künstliche Startdepot verlassen wird, entspricht. Bei einer zusätzlichen Depotanfahrt von Transporter  $k$  vor der Auslieferung eines Teils von Bestellung  $i$ , also  $\mu_{ik} = 1$ , muss die Nummer der Tour sogar um mindestens 1 höher sein. Mittels der Nebenbedingungen (4.12.23) und (4.12.24) wird dafür Sorge getragen, dass die Nummer derjenigen Tour, auf welcher ein Transporter einen Teil einer Bestellung ausliefert, mindestens der Nummer der Tour eines früher ausgelieferten Teils einer Bestellung entspricht. Falls vor der Auslieferung des später ausgelieferten Teils einer Bestellung eine zusätzliche Depotanfahrt stattfindet ( $\mu_{jk} = 1$  bzw.  $\mu_{ik} = 1$ ), so ist diese Nummer sogar um mindestens 1 höher als die des früher ausgelieferten Teils einer Bestellung. Die Nebenbedingungen (4.12.25) tragen dafür Sorge, dass die Nummer derjenigen Tour, auf welcher ein künstliches Enddepot besucht wird, mindestens der Nummer der Tour entspricht, auf der ein Teil einer Bestellung zuvor vom entsprechenden Transporter beliefert wurde. Die Nebenbedingungen (4.12.22) bis (4.12.25) bewirken also ein „Hochzählen“ der Tourennummern im Verlauf der jeweiligen Auslieferungsreihenfolge. Dabei werden auch an nicht vom jeweiligen Transporter ausgelieferte Bestellungen Tourennummern vergeben. Dies ist im Folgenden allerdings unproblematisch, da durch Beachtung der Transporterzuordnung durch die Entscheidungsvariablen  $z_{ik}^d$  diese Tourennummern keine Beachtung finden.

Die Anzahl der Touren, welche ein Transporter zurücklegt, erhöht sich mit jeder zwischenzeitlichen Depotanfahrt um 1, dementsprechend ist für das künstliche Enddepot eines Transporters

$$\varepsilon_{n+m+k,k} = 1 + \sum_{i \in N} \mu_{ik} \quad \forall k \in K \quad (4.12.26)$$

zu fordern. Mit Hilfe dieser Nebenbedingung werden die entsprechenden  $\varepsilon_{ik}$  nach oben beschränkt, sodass mit den Nebenbedingungen (4.12.22) bis (4.12.25) die Variablen  $\varepsilon_{ik}$  genau der Tournummer entsprechen.

Die auf diese Art korrekt belegten Variablen  $\varepsilon_{ik}$  erlauben es, die korrekte Belegung der Hilfsvariablen  $d_{ik}$  sicherzustellen. Der Zeitpunkt, an welchem ein Transporter zur Auslieferung eines Teils einer Bestellung beim Depot startet, ist nach oben durch die Differenz des Auslieferungszeitpunkts dieses Teils der Bestellung vom Transporter und der Fahrtzeit vom Depot zu deren Zielort beschränkt. Diese Entscheidungsschranke bilden die Nebenbedingungen

$$d_{jk} \leq \tau_{jk} - t_{n+k,j} + M_{49} \left(1 - z_{ik}^d\right) \quad \forall j \in N, k \in K \quad (4.12.27)$$

ab.

Werden auf derselben Tour zwei Teile von Bestellungen (nicht notwendigerweise direkt) hintereinander ausgeliefert, so ist für den später ausgelieferten Teil einer Bestellung der Auslieferungszeitpunkt des ihn besuchenden Transporters nicht größer als derjenige des früher ausgelieferten Teils. Die Nebenbedingungen

$$d_{ik} \geq d_{jk} - M_{50} \left(3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d\right) - M_{51} (\varepsilon_{jk} - \varepsilon_{ik}) \quad \forall i, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.28)$$

$$d_{jk} \geq d_{ik} - M_{50} \left(2 + x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d\right) - M_{51} (\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{jk}) \quad \forall i, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.29)$$

stellen dies sicher. Der Parameter  $M_{50}$  sei wesentlich größer als  $M_{51}$  gewählt. Dadurch wird erreicht, dass in dem Fall, dass der entsprechende Faktor  $3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d$  bzw.  $2 + x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d$  mindestens eins ist, also die Bestellungen  $i$  und  $j$  nicht vom jeweils betrachteten Transporter  $k$  ausgeliefert werden, die Nebenbedingung für alle Belegungen der Entscheidungsvariablen eingehalten werden. Dies begründet sich darin, dass mit  $M_{50}$  ein Parameter auf der rechten Seite subtrahiert wird, der stärker als der positive Term  $-M_{51} (\varepsilon_{jk} - \varepsilon_{ik})$  bzw.  $-M_{51} (\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{jk})$  ins Gewicht fällt. Ebenso wird eine dieser Nebenbedingungen für alle Belegungen der Entscheidungsvariablen eingehalten, wenn zwar z. B.  $x_{ij} = z_{ik}^d = z_{jk}^d = 1$  gilt, aber gleichzeitig  $\varepsilon_{jk} > \varepsilon_{ik}$  gilt und somit Bestellung  $j$  in einer späteren Tour ausgeliefert wird als Bestellung  $i$ .

Diese Abfahrtszeitpunkte  $d_{ik}$  stellen, falls ein Teil von Bestellung  $i$  von Transporter  $k$  ausgeliefert wird, auch späteste Beendigungszeitpunkt für die Produktion von Bestellungen  $i$  dar, sodass die Nebenbedingungen

$$s_i + p_i \leq d_{ik} + M_{52} \left(1 - z_{ik}^d\right) \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.30)$$

eingehalten werden müssen.

Die Einhaltung der Transporterkapazität wird ähnlich wie in Abschnitt 4.10 sichergestellt: Die von einem Transporter  $k$  vor der Auslieferung eines Teils von Bestellung  $i$  noch auszuliefernde Menge  $\gamma_i$  entspricht mindestens dem von ebendiesem Transporter auszuliefernden Teil der Bestellung, was durch die Nebenbedingungen

$$\gamma_{ik} \geq \alpha_{ik} \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.31)$$

bewirkt wird. Auf der anderen Seite ist diese noch auszuliefernde Menge durch die Transporterkapazität beschränkt. Dieser Umstand lässt sich durch die Nebenbedingungen

$$\gamma_{ik} \leq Q \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.32)$$

sicherstellen. Falls ein Transporter  $k$  Teile von Bestellung  $i$  und  $j$  direkt aufeinanderfolgend beliefert, ohne zwischenzeitlich zum Depot zurückzukehren, so muss die vor der Auslieferung des Teils von Bestellung  $i$  von Transporter  $k$  noch auszuliefernde Menge  $\gamma_{ik}$  um mindestens  $\alpha_{ik}$  Einheiten größer sein als die vor der Auslieferung eines Teils von Bestellung  $j$  noch auszuliefernde Menge  $\gamma_{jk}$ . Dies soll mit Hilfe der Nebenbedingungen

$$\gamma_{ik} \geq \gamma_{jk} + \alpha_{ik} - M_{53} \left( 3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d \right) - M_{54} (\varepsilon_{jk} - \varepsilon_{ik}) \quad \forall i, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.33)$$

$$\gamma_{jk} \geq \gamma_{ik} + \alpha_{jk} - M_{53} \left( 2 + x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d \right) - M_{54} (\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{jk}) \quad \forall i, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.34)$$

gefordert werden. Auch bei dieser Art von Nebenbedingungen sei ähnlich wie bei den Nebenbedingungen (4.12.28) und (4.12.28) der Parameter  $M_{53}$  wesentlich größer als  $M_{54}$  gewählt.

Weiterhin wird durch die Nebenbedingungen

$$\tau_{ik} \leq s_i + p_i + B + M_{55} \left( 1 - z_{ik}^d \right) \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.35)$$

dafür Sorge getragen, dass keine einem Transporter zugeordnete Bestellung von diesem Transporter erst nach Überschreiten des Höchstalters ausgeliefert wird.

Ein Transporter fährt dann eine Tour, wenn ihm mindestens eine Bestellung zugeordnet ist. Demzufolge wird

$$u_k \geq z_{ik}^d \quad \forall k \in K, i \in N \quad (4.12.36)$$

gefordert.

Zusammen mit der Zielfunktion, in welcher der Verlust minimiert wird, und den Nebenbedingungen, welche die Definitionsbereiche der Variablen beschreiben, ergibt sich somit zusammengefasst das folgende Modell.

$$\min \sum_{i \in N} (1 - I_i) \cdot e_i + \sum_{k \in K} \varphi_{n+m+k, k} + \sum_{k \in K} u_k \cdot C$$

$$\text{u.d.N. } s_i + p_i \leq s_j + M_{41} \cdot (1 - y_{ij}) + M_{41} \cdot (2 - I_i - I_j) \quad \forall i, j \in N, i < j \quad (4.12.1)$$

$$s_j + p_j \leq s_i + M_{41} \cdot y_{ij} + M_{41} \cdot (2 - I_i - I_j) \quad \forall i, j \in N, i < j \quad (4.12.2)$$

$$\sum_{k \in K} z_{ik}^d \geq I_i \quad \forall i \in N \quad (4.12.3)$$

$$x_{i, n+k} = 0 \quad \forall k \in K, i \in N \quad (4.12.4)$$

$$x_{i, n+m+k} = 1 \quad \forall k \in K, i \in N \quad (4.12.5)$$

$$z_{n+k, k}^d = z_{n+m+k, k}^d = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.12.6)$$

$$z_{n+k, k'}^d = z_{n+m+k, k'}^d = 0 \quad \forall k, k' \in K, k \neq k' \quad (4.12.7)$$

$$\sum_{k \in K} \alpha_{ik} = I_i q_i \quad \forall i \in N \quad (4.12.8)$$

$$\alpha_{ik} \leq z_{ik}^d q_i \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.9)$$

$$a_i \leq \tau_{ik} + M_{42} \cdot (1 - I_i) \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.10)$$

$$\tau_{ik} \leq b_i \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.11)$$

$$\tau_{ik} + t_{ij} \leq \tau_{jk} + M_{43} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in N^-, i < j, k \in K \quad (4.12.12)$$

$$\tau_{jk} + t_{ji} \leq \tau_{ik} + M_{43} \cdot (3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, j \in N^+, i < j, k \in K \quad (4.12.13)$$

$$\tau_{ik} + t_{ij} + (t_{i,n+m+k} + t_{n+k,j} - t_{ij}) \mu_{jk} \leq \tau_{jk} + M_{44} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.14)$$

$$\tau_{jk} + t_{ji} + (t_{j,n+m+k} + t_{n+k,i} - t_{ji}) \mu_{ik} \leq \tau_{ik} + M_{44} \cdot (3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.15)$$

$$\varphi_{ik} + c_{ij} \leq \varphi_{jk} + M_{45} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in N^-, i < j, k \in K \quad (4.12.16)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji} \leq \varphi_{ik} + M_{45} \cdot (3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, j \in N^+, i < j, k \in K \quad (4.12.17)$$

$$\varphi_{ik} + c_{ij} + (c_{i,n+m+k} + c_{n+k,j} - c_{ij}) \mu_{jk} \leq \varphi_{jk} + M_{46} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.18)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji} + (c_{j,n+m+k} + c_{n+k,i} - c_{ji}) \mu_{ik} \leq \varphi_{ik} + M_{46} \cdot (3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.19)$$

$$\mu_{ik} \leq z_{ik}^d \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.20)$$

$$\varepsilon_{n+k,k} = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.12.21)$$

$$\varepsilon_{jk} + \mu_{ik} \leq \varepsilon_{ik} \quad \forall i \in N, j \in N^+ \setminus N, i < j, k \in K \quad (4.12.22)$$

$$\varepsilon_{ik} + \mu_{jk} \leq \varepsilon_{jk} + M_{47} (1 - x_{ij}) \quad \forall i, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.23)$$

$$\varepsilon_{jk} + \mu_{ik} \leq \varepsilon_{ik} + M_{48} x_{ij} \quad \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.24)$$

$$\varepsilon_{ik} \leq \varepsilon_{jk} \quad \forall i \in N, j \in N^- \setminus N, i < j, k \in K \quad (4.12.25)$$

$$\varepsilon_{n+m+k,k} = 1 + \sum_{i \in N} \mu_{ik} \quad \forall k \in K \quad (4.12.26)$$

$$d_{jk} \leq \tau_{jk} - t_{n+k,j} + M_{49} (1 - z_{ik}^d) \quad \forall j \in N, k \in K \quad (4.12.27)$$

$$d_{ik} \geq d_{jk} - M_{50} (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) - M_{51} (\varepsilon_{jk} - \varepsilon_{ik}) \quad \forall i, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.28)$$

$$d_{jk} \geq d_{ik} - M_{50} (2 + x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) - M_{51} (\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{jk}) \quad \forall i, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.29)$$

$$s_i + p_i \leq d_{ik} + M_{52} (1 - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.30)$$

$$\gamma_{ik} \geq \alpha_{ik} \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.31)$$

$$\gamma_{ik} \leq Q \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.32)$$

$$\gamma_{ik} \geq \gamma_{jk} + \alpha_{ik} - M_{53} (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) - M_{54} (\varepsilon_{jk} - \varepsilon_{ik}) \quad \forall i, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.33)$$

$$\gamma_{jk} \geq \gamma_{ik} + \alpha_{jk} - M_{53} (2 + x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) - M_{54} (\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{jk}) \quad \forall i, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.34)$$

$$\tau_{ik} \leq s_i + p_i + B + M_{55} (1 - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.35)$$

$$u_k \geq z_{ik}^d \quad \forall k \in K, i \in N \quad (4.12.36)$$

$$I_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N \text{ mit } i < j$$

$$s_i \geq 0 \quad \forall i \in N$$

$$z_{ik}^d \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \bar{N}, k \in K$$

$$\alpha_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in N, k \in K$$

$$u_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N, j \in \bar{N} \text{ mit } i < j$$

$$\varphi_{ik} \geq 0 \quad \forall k \in K, i \in \bar{N}$$

$$\tau_{ik} \geq 0 \quad \forall k \in K, i \in \bar{N}$$

$$d_{ik} \geq 0 \quad \forall k \in K, i \in N$$

$$\varepsilon_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in N, k \in K$$

$$\gamma_{ik} \geq 0 \quad \forall k \in K, i \in N$$

$$\mu_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K, i \in N$$

#### 4.12.1 Verallgemeinerung von IPDSP-Modellen mit mehreren Touren pro Transporter und Belieferungsaufteilung

Nach der Modellierung des um die Möglichkeit von mehreren Touren pro Transporter und um die Möglichkeit der Belieferungsaufteilung verallgemeinerten Basis-Szenarios des IPDSP soll in diesem Unterabschnitt untersucht werden, wie sich wiederum Verallgemeinerungen dieses Szenarios modellieren lassen.

Das vorgestellte IPDSP-Modell mit mehreren Touren pro Transporter und Belieferungsaufteilung lässt sich bezüglich

- Bestellungen mit Erfüllungszusage,
- Bestellungspriorisierung,
- gebündelten Bestellungen und
- Produktion und Distribution von mehreren Produktionsstandorten aus

derart erweitern, wie es in den entsprechenden Abschnitten 4.2, 4.3, 4.4 bzw. 4.7 dieses Kapitels vorgestellt wurde.

Die Integration einer

- Distribution mit mehreren möglichen Belieferungszeitfenstern

lässt sich wie in Unterabschnitt 4.11.1 vorgestellt vornehmen.

Zur Berücksichtigung von

- unterschiedlichen Höchstaltern der bestellten Güter,
- Produktion auf mehreren Maschinen unterschiedlichen Typs mit Rüstzeiten und
- Distribution mit einem heterogenen Fuhrpark

bedarf es jedoch jeweils eines neuen oder leicht geänderten Vorgehens, welches im Folgenden vorgestellt wird.

### Berücksichtigung unterschiedlicher Höchstalter der bestellten Güter

Unterschiedliche Höchstalter der bestellten Güter  $B_i$  können berücksichtigt werden, indem die Nebenbedingungen

$$\tau_{ik} \leq s_i + p_i + B \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.35)$$

durch die Nebenbedingungen

$$\tau_{ik} \leq s_i + p_i + B_i \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.37)$$

ersetzt werden.

### Berücksichtigung von mehreren Maschinen unterschiedlichen Typs und von Rüstzeiten in der Produktion

Für die Modellierung der Produktion auf mehreren Maschinen unterschiedlichen Typs mit Rüstzeiten sind, wie in Abschnitt 4.6 beschrieben wird, binäre Entscheidungsvariablen

$$z_{ik}^p = \begin{cases} 1, & \text{falls Bestellung } i \text{ auf Maschine } k \text{ produziert wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle Bestellungen  $i \in N$  und Maschinen  $k \in \Omega$  einzuführen.

Für die Planung der Produktionsreihenfolge werden ebenfalls wie in Abschnitt 4.6 binäre binären Entscheidungsvariablen  $y_{ij}$  mit

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn Bestellung } i \text{ (irgendwann) vor Bestellung } j \text{ auf der selben Maschine} \\ & \text{produziert wird} \\ 0, & \text{wenn Bestellung } j \text{ (irgendwann) vor Bestellung } i \text{ auf der selben Maschine} \\ & \text{produziert wird} \\ 0 \text{ oder } 1, & \text{wenn die Bestellungen auf unterschiedlichen Maschinen produziert werden} \end{cases}$$

für alle Bestellungen  $i, j \in N$  mit  $i < j$  verwendet.

Die Nebenbedingungen

$$s_i + p_i \leq s_j + M_{55} \cdot (1 - y_{ij}) + M_{55} \cdot (2 - I_i - I_j) \quad \forall i, j \in N, i < j \quad (4.12.1)$$

$$s_j + p_j \leq s_i + M_{56} \cdot y_{ij} + M_{56} \cdot (2 - I_i - I_j) \quad \forall i, j \in N, i < j \quad (4.12.2)$$

in der Produktionsplanung sind durch die Nebenbedingungen

$$\sum_{k \in \Omega} z_{ik}^p = I_i \quad \forall i \in N, \quad (4.12.38)$$

$$s_i + p_i^k + \vartheta_{ij}^k \leq s_j + M_{57} \cdot (1 - y_{ij}) + M_{57} \cdot (2 - z_{ik}^p - z_{jk}^p) \quad \forall i, j \in N, i < j, k \in \Omega, \quad (4.12.39)$$

$$s_j + p_j^k + \vartheta_{ji}^k \leq s_i + M_{57} \cdot y_{ij} + M_{57} \cdot (2 - z_{ik}^p - z_{jk}^p) \quad \forall i, j \in N, i < j, k \in \Omega \quad (4.12.40)$$

zu ersetzen. Wie in Abschnitt 4.6 beschrieben, stellen die Nebenbedingungen (4.12.38) sicher, dass jede angenommene Bestellung genau einer Maschine zugeordnet wird. Durch die Nebenbedingungen (4.12.39) und die Nebenbedingungen (4.12.40) wird sichergestellt, dass in dem Fall, dass zwei Bestellungen  $i$  und  $j$  auf der selben Maschine  $k$  produziert werden (also  $z_{ik}^p = z_{jk}^p = 1$  gilt), entweder Bestellung  $j$  nach Beendigung der Produktion von Bestellung  $i$  und entsprechender Rüstzeit  $\vartheta_{ij}^k$  produziert wird, oder Bestellung  $i$  nach Beendigung der Produktion von Bestellung  $j$  und entsprechender Rüstzeit  $\vartheta_{ji}^k$ .

Aufgrund der maschinenabhängigen Bearbeitungszeiten  $p_i^k$  sind die Nebenbedingungen

$$s_i + p_i \leq d_{ik} \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.30)$$

$$(4.12.41)$$

in

$$s_i + \sum_{k' \in \Omega} z_{ik'}^p p_i^{k'} \leq d_{ik} \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.30)$$

abzuändern, indem die Bearbeitungszeiten  $p_i$  durch den Term  $\sum_{k \in \Omega} z_{ik}^p p_i^k$  ersetzt werden. Dieser Term nimmt den Wert der Bearbeitungszeit  $p_i^{\tilde{k}}$  von Bestellung  $i$  auf derjenigen Maschine  $\tilde{k}$  an, welcher Bestellung  $i$  durch  $z_{i\tilde{k}}^p = 1$  zugeordnet ist. Analog müssen die Nebenbedingungen

$$\tau_{ik} \leq s_i + p_i + B \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.35)$$

in

$$\tau_{ik} \leq s_i + \sum_{k \in \Omega} z_{ik}^p p_i^k + B \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.42)$$

geändert werden. Sind weiterhin unterschiedliche Höchstalter der bestellten Güter zu berücksichtigen, sind die Nebenbedingungen (4.12.35) durch die Nebenbedingungen

$$\tau_{ik} \leq s_i + \sum_{k \in \Omega} z_{ik}^p p_i^k + B_i \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.43)$$

zu ersetzen.

### Berücksichtigung eines heterogenen Fuhrparks in der Distribution

Das in diesem Abschnitt vorgestellte Modell lässt sich auch dahingehend modifizieren, dass in ihm auch ein heterogener Fuhrpark Berücksichtigung findet. Dazu sind entsprechende transporterabhängige Transporterfixkosten  $C_k$ , Transporterkapazitäten  $Q_k$ , Fahrtkosten  $c_{ij}^k$  sowie Fahrtzeiten  $t_{ij}^k$  statt der jeweiligen transporterunabhängigen Parameter  $C$ ,  $Q$ ,  $c_{ij}$  und  $t_{ij}$  im Modell zu verwenden.

Transporterabhängige Transporterfixkosten können durch Modifikation der Zielfunktion von

$$\min \sum_{i \in N} (1 - I_i) \cdot e_i + \sum_{k \in K} \varphi_{n+m+k,k} + \sum_{k \in K} u_k \cdot C$$

in

$$\min \sum_{i \in N} (1 - I_i) \cdot e_i + \sum_{k \in K} \varphi_{n+m+k,k} + \sum_{k \in K} u_k \cdot C_k$$

berücksichtigt werden.

Die Nebenbedingungen

$$\gamma_{ik} \leq Q \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.32)$$

müssen in

$$\gamma_{ik} \leq Q_k \quad \forall i \in N, k \in K \quad (4.12.44)$$

abgeändert werden, um transporterabhängigen Transporterkapazitäten Rechnung zu tragen.

Transporterabhängige Fahrtzeiten und Fahrtkosten finden Berücksichtigung, indem die Nebenbedingungen

$$\tau_{ik} + t_{ij} \leq \tau_{jk} + M_{43} \cdot \left( 3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d \right) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.12.12)$$

$$\tau_{jk} + t_{ji} \leq \tau_{ik} + M_{43} \cdot \left( 3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d \right) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.12.13)$$

$$\tau_{ik} + t_{ij} + (t_{i,n+m+k} + t_{n+k,j} - t_{ij}) \mu_{jk} \leq \tau_{jk} + M_{44} \cdot \left( 3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d \right) \\ \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.14)$$

$$\tau_{jk} + t_{ji} + (t_{j,n+m+k} + t_{n+k,i} - t_{ji}) \mu_{ik} \leq \tau_{ik} + M_{44} \cdot \left( 3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d \right) \\ \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.15)$$

$$\varphi_{ik} + c_{ij} \leq \varphi_{jk} + M_{45} \cdot \left( 3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d \right) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.12.16)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji} \leq \varphi_{ik} + M_{45} \cdot \left( 3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d \right) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.12.17)$$

$$\varphi_{ik} + c_{ij} + (c_{i,n+m+k} + c_{n+k,j} - c_{ij}) \mu_{jk} \leq \varphi_{jk} + M_{46} \cdot \left( 3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d \right) \\ \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.18)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji} + (c_{j,n+m+k} + c_{n+k,i} - c_{ji}) \mu_{ik} \leq \varphi_{ik} + M_{46} \cdot \left( 3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d \right) \\ \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.19)$$

durch die Nebenbedingungen

$$\tau_{ik} + t_{ij}^k \leq \tau_{jk} + M_{58} \cdot \left( 3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d \right) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.12.45)$$

$$\tau_{jk} + t_{ji}^k \leq \tau_{ik} + M_{58} \cdot \left( 3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d \right) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.12.46)$$

$$\tau_{ik} + t_{ij}^k + \left( t_{i,n+m+k}^k + t_{n+k,j}^k - t_{ij}^k \right) \mu_{jk} \leq \tau_{jk} + M_{59} \cdot \left( 3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d \right) \\ \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.47)$$

$$\tau_{jk} + t_{ji}^k + \left( t_{j,n+m+k}^k + t_{n+k,i}^k - t_{ji}^k \right) \mu_{ik} \leq \tau_{ik} + M_{59} \cdot \left( 3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d \right) \\ \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.48)$$

$$\varphi_{ik} + c_{ij}^k \leq \varphi_{jk} + M_{60} \cdot \left( 3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d \right) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.12.49)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji}^k \leq \varphi_{ik} + M_{60} \cdot \left( 3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d \right) \quad \forall i \in N, j \in \bar{N}, i < j, k \in K \quad (4.12.50)$$

$$\varphi_{ik} + c_{ij}^k + \left( c_{i,n+m+k}^k + c_{n+k,j}^k - c_{ij}^k \right) \mu_{jk} \leq \varphi_{jk} + M_{61} \cdot \left( 3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d \right) \quad \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.51)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji}^k + \left( c_{j,n+m+k}^k + c_{n+k,i}^k - c_{ji}^k \right) \mu_{ik} \leq \varphi_{ik} + M_{61} \cdot \left( 3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d \right) \quad \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.52)$$

ersetzt werden.

Sollen zudem noch mehrere Produktionsstandorte berücksichtigt werden, so sind die Parameter  $t_{ij}^k$  und  $c_{ij}^k$  entsprechend der Produktionsstandortzugehörigkeit der Transporter festzulegen, wie in Abschnitt 4.8.1 beschrieben wurde.

### 4.13 IPDSP-Szenarien mit Fahrtkosten, die vom Ladungsge- wicht abhängen

Die letzte in der vorliegenden Arbeit untersuchte Art von IPDSP-Szenarien stellt diejenige dar, in welcher Fahrtkosten berücksichtigt werden, welche vom Gewicht der Ladung abhängen. Dazu ist es notwendig, dass diejenige Menge, welche ein Transporter von einem Ort  $i$  zu einem Ort  $j$  transportiert, bekannt ist.

Dies ist beim Basis-Modell und darauf aufbauenden Modellen nicht der Fall. Bei der Betrachtung von mehreren Touren pro Transporter war es in der gewählten Modellierung jedoch nötig, für die Einhaltung der Transporterkapazität ebendiese Menge, welche ein Transporter vor der Auslieferung eine Bestellung geladen hat, durch entsprechende Hilfsvariablen  $\gamma_i$  beziehungsweise  $\gamma_{ik}$  darzustellen. Dementsprechend soll zur Berücksichtigung von vom Gewicht der Ladung abhängigen Fahrtkosten nicht auf das Modell des Basis-Szenarios des IPDSP aufgebaut werden, sondern auf ein Modell, in welchem Transportern gestattet ist, mehrere Touren zu fahren. Je nachdem, ob neben vom Gewicht der Ladung abhängige Fahrtkosten auch die Möglichkeit der Belieferungsaufteilung berücksichtigt werden soll, ist dies entweder das in Abschnitt 4.10 oder das in Abschnitt 4.12 vorgestellte Modell. Es soll folglich für diese Szenarien im Folgenden dargestellt werden, wie sich jeweils vom Gewicht der Ladung abhängige Fahrtkosten in das jeweilige Modell integrieren lassen. Begonnen wird mit der Betrachtung von einheitlichen Transportern, dementsprechend liegen diese Fahrtkosten in Form von Kosten  $\hat{c}_{ij}$  pro Mengeneinheit, die von Ort  $i$  zu Ort  $j$  transportiert werden, vor.

Für Modellierungszwecke sollen die vom Gewicht der Ladung abhängigen Fahrtkosten auf die künstlichen Depots erweitert werden. Dies erfolgt analog zum 4.1 vorgestellten Vorgehen für die Fahrtzeiten  $t_{ij}$  und Fahrtkosten  $c_{ij}$ , indem für die künstlichen Depots die vom Gewicht der Ladung abhängigen Fahrtkosten

$$\begin{aligned} \hat{c}_{i,j} &= \hat{c}_{i,0} & \forall i \in N, j \in N^- \setminus N \\ \hat{c}_{i,j} &= \hat{c}_{0,j} & \forall i \in N^+ \setminus N, j \in N \\ \hat{c}_{i,j} &= \hat{c}_{0,0} & \forall i \in N^+ \setminus N, j \in N^- \setminus N \end{aligned}$$

gesetzt werden, die den realen Fahrtkosten von bzw. zum Standort 0 entsprechen.

Wie bereits angesprochen, erfolgt die Modellierung unter Rückgriff auf die in Abschnitt 4.10 bzw. 4.12 entwickelten Modelle zu IPDSP-Szenarien mit mehreren Touren pro Transporter. Sind mehrere Touren pro Transporter nicht erwünscht, so kann dies durch das Setzen von

$$\hat{x}_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in N$$

beziehungsweise

$$\mu_{ik} = 0 \quad \forall i \in N, k \in K$$

verhindert werden. Mittels  $\hat{x}_{ij} = 0$  wird festgelegt, dass zwischen der Auslieferung von Bestellung  $i$  und Bestellung  $j$  keine zwischenzeitliche Depotanfahrt stattfindet und mit  $\mu_{ik} = 0$  bewirkt, dass Transporter  $k$  vor der Auslieferung von Bestellung  $i$  keine zusätzliche Depotanfahrt durchführt.

#### 4.13.1 Berücksichtigung von Ladungsgewichtsabhängigen Fahrtkosten im IPDSP-Modell mit mehreren Touren pro Transportern

Zur Modellierung von vom Ladungsgewicht abhängigen Fahrtkosten im in Abschnitt 4.10 vorgestellten Modell sollen nichtnegative Hilfsvariablen

$\hat{\xi}_j \triangleq$  die durch das Ladungsgewicht auf dem Weg zwischen dem vorherigen Ort und Ort  $j$  angefallenen Fahrtkosten

für alle Zielorte  $j \in N$  definiert werden.

Wenn ein Transporter  $\gamma_j$  Mengeneinheiten von einem Zielort  $i$  zu einem Zielort  $j$  transportiert, so wird durch die Nebenbedingungen

$$\hat{\xi}_j \geq \gamma_j \hat{c}_{ij} - M_{62} (1 - x_{ij} + \hat{x}_{ij}) \quad \forall i \in N, j \in N \quad (4.13.1)$$

sichergestellt, dass die Hilfsvariable  $\hat{\xi}_j$  den Wert der entsprechenden Kosten  $\gamma_j \hat{c}_{ij}$  annimmt. Fährt ein Transporter von einem künstlichen Startdepot  $n+k$  zu einem Zielort  $j$ , so sichern die Nebenbedingungen

$$\hat{\xi}_j \geq \gamma_j \hat{c}_{0,j} - M_{63} (1 - x_{n+k,j}) \quad \forall n+k \in N^+ \setminus N, j \in N \quad (4.13.2)$$

die Belegung der Hilfsvariablen  $\hat{\xi}_j$  mit den Kosten  $\gamma_j \hat{c}_{0,j}$ . Fährt hingegen ein Transporter nicht direkt, sondern mit zwischenzeitlicher Depotrückkehr von einem Ort  $i$  zu einem Ort  $j$ , so werden der jeweiligen Hilfsvariablen  $\hat{\xi}_j$  mittels

$$\hat{\xi}_j \geq \gamma_j \hat{c}_{0,j} - M_{64} (1 - \hat{x}_{ij}) \quad \forall i \in N, j \in N \quad (4.13.3)$$

die Kosten  $\gamma_j \hat{c}_{0,j}$  zuzuweisen.

Dementsprechend ist in der zu minimierenden Zielfunktion der Term

$$\sum_{j \in N} \hat{\xi}_j$$

zu ergänzen, wodurch sich die Zielfunktion in

$$\min \sum_{i \in N} (1 - I_i) \cdot e_i + \sum_{i \in N^+, j \in N^-} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i, j \in N} (c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}) \hat{x}_{ij} + \sum_{k \in K} u_k \cdot C + \sum_{j \in N} \hat{\xi}_j$$

ändert. Bei Berücksichtigung weiterer Verallgemeinerungen des Basis-Szenarios des IPDSP ist analog der Term  $\sum_{j \in N} \hat{\xi}_j$  zu der jeweiligen Zielfunktion zu ergänzen.

### Berücksichtigung weiterer Verallgemeinerungen des IPDSP-Szenarios

Da sich bei der Berücksichtigung von vom Ladungsgewicht abhängigen Fahrtkosten der Lösungsraum des Modells nicht ändert, sondern ausschließlich die Zielfunktion, stellt die Modellierung neben anderen Verallgemeinerungen in den meisten Fällen kein Problem dar. Zur Modellierung weiterer Verallgemeinerungen sei dementsprechend generell auf Unterabschnitt 4.10.1 verwiesen. Es sind jedoch bei drei Spezialfällen Anpassungen vorzunehmen.

Zur Berücksichtigung mehrerer Produktionsstandorte sind die vom Ladungsgewicht abhängigen Fahrtkosten eines Transporters  $k \in K_v$  von beziehungsweise zu einem zugehörigen künstlichen Depot

$$\begin{aligned}\hat{c}_{n+k,j} &= \hat{c}_{vj} \quad \forall j \in N, \\ \hat{c}_{i,n+m+k} &= \hat{c}_{iv} \quad \forall i \in N \text{ und} \\ \hat{c}_{n+k,n+m+k'} &= 0 \quad \forall k, k' \in K\end{aligned}$$

festzulegen. Diese sind dann in den entsprechenden Nebenbedingungen zu berücksichtigen, indem die Nebenbedingungen

$$\hat{\xi}_j \geq \gamma_j \hat{c}_{0,j} - M_{63} (1 - x_{n+k,j}) \quad \forall n+k \in N^+ \setminus N, j \in N \quad (4.13.2)$$

$$\hat{\xi}_j \geq \gamma_j \hat{c}_{0,j} - M_{64} (1 - \hat{x}_{ij}) \quad \forall i \in N, j \in N \quad (4.13.3)$$

in

$$\hat{\xi}_j \geq \gamma_j \hat{c}_{n+k,j} - M_{65} (1 - x_{n+k,j}) \quad \forall n+k \in N^+ \setminus N, j \in N \quad (4.13.4)$$

$$\hat{\xi}_j \geq \gamma_j \hat{c}_{n+k,j} - M_{66} (2 - \hat{x}_{ij} - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in N \quad (4.13.5)$$

abzuändern sind.

Erfolgt die Distribution mit einem heterogenen Fuhrpark, so sind zum einen statt der Nebenbedingungen (4.13.1) bis (4.13.3) die Nebenbedingungen

$$\hat{\xi}_j \geq \gamma_j \hat{c}_{ij}^k - M_{67} (2 - x_{ij} - z_{jk}^d + \hat{x}_{ij}) \quad \forall i \in N, j \in N \quad (4.13.6)$$

$$\hat{\xi}_j \geq \gamma_j \hat{c}_{n+k,j}^k - M_{68} (2 - x_{n+k,j} - z_{jk}^d) \quad \forall n+k \in N^+ \setminus N, j \in N \quad (4.13.7)$$

$$\hat{\xi}_j \geq \gamma_j \hat{c}_{n+k,j}^k - M_{69} (2 - \hat{x}_{ij} - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, j \in N \quad (4.13.8)$$

zu formulieren. Dabei gelte  $c_{n+k,j}^k := c_{0,j}^k$  für alle Transporter  $k \in K$  und Orte  $j \in N$ . Zum anderen muss das Modell analog zum in Abschnitt 4.10.1 beschriebenen Vorgehen hinsichtlich der Berücksichtigung einer heterogenen Transporterflotte verändert werden.

Sind sowohl mehrere Produktionsstandorte als auch eine heterogene Fahrzeugflotte gegeben, so sind die vom Ladungsgewicht abhängigen Fahrtkosten eines Transporters  $k \in K_v$  von beziehungsweise zu einem zugehörigen künstlichen Depot durch

$$\begin{aligned}\hat{c}_{n+k,j}^k &= \hat{c}_{vj}^k \quad \forall j \in N, \\ \hat{c}_{i,n+m+k}^k &= \hat{c}_{iv}^k \quad \forall i \in N \text{ und} \\ \hat{c}_{n+k,n+m+k'}^k &= 0 \quad \forall k, k' \in K\end{aligned}$$

festzulegen. Weiterhin sind neben den Änderungen bezüglich Fahrtkosten und Fahrtzeiten, welche in Unterabschnitt 4.10.1 vorgestellt wurden, statt der Nebenbedingungen (4.13.1) bis (4.13.3) die Nebenbedingungen (4.13.6) bis (4.13.8) zu formulieren.

### 4.13.2 Berücksichtigung von Ladungsgewichtsabhängigen Fahrtkosten im IPDSP-Modell mit mehreren Touren pro Transportern und Belieferungsaufteilung

Da im Modell des Szenarios mit mehreren Touren pro Transporter und Belieferungsaufteilung in Abschnitt 4.12 die Fahrtkosten über das Ungleichungssystem (4.12.16) bis (4.12.19) ermittelt werden, sollen die vom jeweiligen Ladungsgewicht verursachten Kosten innerhalb dieses Ungleichungssystems ergänzt werden.

Dazu werden die Nebenbedingungen

$$\varphi_{ik} + c_{ij} \leq \varphi_{jk} + M_{45} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in N^-, i < j, k \in K \quad (4.12.16)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji} \leq \varphi_{ik} + M_{45} \cdot (3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, j \in N^+, i < j, k \in K \quad (4.12.17)$$

gegen die Nebenbedingungen

$$\varphi_{ik} + c_{ij} \leq \varphi_{jk} + M_{70} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in N^- \setminus N, i < j, k \in K \quad (4.13.9)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji} + \hat{c}_{ji}\gamma_{ik} \leq \varphi_{ik} + M_{70} \cdot (3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, j \in N^+ \setminus N, i < j, k \in K \quad (4.13.10)$$

$$\varphi_{ik} + c_{ij} + \hat{c}_{ij}\gamma_{jk} \leq \varphi_{jk} + M_{71} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) + M_{72}(\varepsilon_{jk} - \varepsilon_{ik}) \quad \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.13.11)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji} + \hat{c}_{ji}\gamma_{ik} \leq \varphi_{ik} + M_{71} \cdot (3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d) + M_{72}(\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{jk}) \quad \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.13.12)$$

ausgetauscht. In den Nebenbedingungen (4.13.9) wird die Rückkehr zu einem Depot abgebildet, bei welcher ein Transporter keine Ladung geladen hat und demzufolge keine vom Ladungsgewicht abhängigen Fahrtkosten zu berücksichtigen sind. Mit den Nebenbedingungen (4.13.10) werden die Fahrtkosten vom Depot zu einem Zielort einer Bestellung bestimmt, demzufolge sind hier vom Ladungsgewicht abhängige Fahrtkosten zu berücksichtigen. Die Nebenbedingungen (4.13.11) stellen sicher, dass die aufsummierten Fahrtkosten  $\varphi_{jk}$  von Transporter  $k$  bis zu Ort  $j$  mindestens um die Kosten  $c_{ij} + \hat{c}_{ij}\gamma_j$  höher sind als die aufsummierten Fahrtkosten  $\varphi_{ik}$  von Transporter  $k$  bis zu Ort  $i$ , falls Bestellung  $j$  nach Bestellung  $i$  von Transporter  $k$  in derselben Tour ausgeliefert wird. Ebenfalls wie in den in Abschnitt 4.12 vorgestellten Nebenbedingungen, in denen die Hilfsvariablen  $\varepsilon_{ik}$  berücksichtigt werden, soll in diesen Nebenbedingungen der Parameter  $M_{71}$  wesentlich größer als  $M_{72}$  sein. Die Nebenbedingungen (4.13.12) behandeln analog den Fall, dass Bestellung  $i$  nach Bestellung  $j$  von Transporter  $k$  in derselben Tour ausgeliefert wird.

Weiterhin sind die Nebenbedingungen

$$\varphi_{ik} + c_{ij} + (c_{i,n+m+k} + c_{n+k,j} - c_{ij}) \mu_{jk} \leq \varphi_{jk} + M_{46} \cdot (3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d) \quad \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.18)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji} + (c_{j,n+m+k} + c_{n+k,i} - c_{ji}) \mu_{ik} \leq \varphi_{ik} + M_{46} \cdot (3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d) \quad \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.12.19)$$

durch

$$\varphi_{ik} + c_{i,n+m+k} + c_{n+k,j} + \hat{c}_{n+k,j}\gamma_j \leq \varphi_{jk} + M_{73} \cdot \left(4 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d - \mu_{jk}\right) \\ \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.13.13)$$

$$\varphi_{jk} + c_{j,n+m+k} + c_{n+k,i} + \hat{c}_{n+k,i}\gamma_i \leq \varphi_{ik} + M_{73} \cdot \left(4 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d - \mu_{ik}\right) \\ \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.13.14)$$

zu ersetzen. In den Nebenbedingungen (4.13.13) und (4.13.14) wird der Fall behandelt, dass zwei Bestellungen  $i$  und  $j$  vom selben Transporter  $k$  ausgeliefert werden und vor dem Erreichen des Zielorts der später ausgelieferten Bestellung eine zwischenzeitliche Depotrückkehr stattfindet. Dabei ist davon auszugehen, dass der Transporter bei Rückkehr zum Depot leer ist und nur auf dem Weg zur Auslieferung der später auszuliefernden Bestellungen beladen ist. Nur hierfür fallen dementsprechend vom Ladungsgewicht abhängige Fahrtkosten an.

### Berücksichtigung weiterer Verallgemeinerungen des IPDSP-Szenarios

Auch die Erweiterung des für das Szenario mit mehreren Touren pro Transporter und Belieferungsaufteilung entwickelte Modell hinsichtlich vom Ladungsgewicht abhängiger Fahrtkosten führt nicht zu einer Änderung des Lösungsraums, sondern ausschließlich zu einer anderen Zielfunktion. Folglich lassen sich weitere Verallgemeinerungen in den meisten Fällen derart modellieren, wie es in Unterabschnitt 4.12.1 vorgestellt wurde. In drei Fällen gilt dies nicht, diese sollen dementsprechend an dieser Stelle präsentiert werden.

Bei mehreren Produktionsstandorten sind die vom Ladungsgewicht abhängigen Fahrtkosten eines bei Standort  $v$  stationierten Transporters  $k \in K_v$  von beziehungsweise zu einem zugehörigen künstlichen Depot

$$\hat{c}_{n+k,j} = \hat{c}_{vj} \quad \forall j \in N, \\ \hat{c}_{i,n+m+k} = \hat{c}_{iv} \quad \forall i \in N \text{ und} \\ \hat{c}_{n+k,n+m+k'} = 0 \quad \forall k, k' \in K$$

festzulegen, wie es bereits bei der Erweiterung von Szenarien mit vom Ladungsgewicht abhängigen Fahrtkosten und mehreren Touren pro Transporter hinsichtlich mehrerer Produktionsstandorte in Unterabschnitt 4.13.1 geschehen ist.

Bei der Berücksichtigung eines heterogenen Fuhrparks sind neben den in Abschnitt 4.12.1 vorgestellten Änderungen zur Berücksichtigung transporterabhängiger Parameter  $t_{ij}^k$ ,  $Q_k$  und  $C_k$  die Nebenbedingungen

$$\varphi_{ik} + c_{ij} \leq \varphi_{jk} + M_{70} \cdot \left(3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d\right) \\ \forall i \in N, j \in N^- \setminus N, i < j, k \in K \quad (4.13.9)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji} + \hat{c}_{ji}\gamma_i \leq \varphi_{ik} + M_{70} \cdot \left(3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d\right) \\ \forall i \in N, j \in N^+ \setminus N, i < j, k \in K \quad (4.13.10)$$

$$\varphi_{ik} + c_{i,n+m+k} + c_{n+k,j} + \hat{c}_{n+k,j}\gamma_j \leq \varphi_{jk} + M_{73} \cdot \left(4 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d - \mu_{jk}\right) \\ \forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.13.13)$$

$$\varphi_{jk} + c_{j,n+m+k} + c_{n+k,i} + \hat{c}_{n+k,i}\gamma_i \leq \varphi_{ik} + M_{73} \cdot \left(4 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d - \mu_{ik}\right)$$

$$\forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.13.14)$$

$$\varphi_{ik} + c_{ij} + \hat{c}_{ij}\gamma_j \leq \varphi_{jk} + M_{71} \cdot \left(3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d\right) + M_{72} (\varepsilon_{jk} - \varepsilon_{ik})$$

$$\forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.13.11)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji} + \hat{c}_{ji}\gamma_i \leq \varphi_{ik} + M_{71} \cdot \left(3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d\right) + M_{72} (\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{jk})$$

$$\forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.13.12)$$

zu

$$\varphi_{ik} + c_{ij}^k \leq \varphi_{jk} + M_{74} \cdot \left(3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d\right)$$

$$\forall i \in N, j \in N^- \setminus N, i < j, k \in K \quad (4.13.15)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji}^k + \hat{c}_{ji}^k\gamma_i \leq \varphi_{ik} + M_{74} \cdot \left(3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d\right)$$

$$\forall i \in N, j \in N^+ \setminus N, i < j, k \in K \quad (4.13.16)$$

$$\varphi_{ik} + c_{i,n+m+k}^k + c_{n+k,j}^k + \hat{c}_{n+k,j}^k\gamma_j \leq \varphi_{jk} + M_{75} \cdot \left(4 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d - \mu_{jk}\right)$$

$$\forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.13.17)$$

$$\varphi_{jk} + c_{j,n+m+k}^k + c_{n+k,i}^k + \hat{c}_{n+k,i}^k\gamma_i \leq \varphi_{ik} + M_{75} \cdot \left(4 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d - \mu_{ik}\right)$$

$$\forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.13.18)$$

$$\varphi_{ik} + c_{ij}^k + \hat{c}_{ij}^k\gamma_j \leq \varphi_{jk} + M_{76} \cdot \left(3 - x_{ij} - z_{ik}^d - z_{jk}^d\right) + M_{77} (\varepsilon_{jk} - \varepsilon_{ik})$$

$$\forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.13.19)$$

$$\varphi_{jk} + c_{ji}^k + \hat{c}_{ji}^k\gamma_i \leq \varphi_{ik} + M_{76} \cdot \left(3 - (1 - x_{ij}) - z_{jk}^d - z_{ik}^d\right) + M_{77} (\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{jk})$$

$$\forall i \in N, j \in N, i < j, k \in K \quad (4.13.20)$$

anzupassen. Auch hier gilt, dass der Parameter  $M_{76}$  wesentlich größer als der Parameter  $M_{77}$  zu setzen ist.

Falls sowohl mehrere Produktionsstandorte als auch ein heterogener Fuhrpark gegeben sind, so lassen sich die vom Ladungsgewicht abhängigen Fahrtkosten eines Transporters  $k \in K_v$  von (beziehungsweise zu) einem zugehörigen künstlichen Depot durch

$$\begin{aligned} \hat{c}_{n+k,j}^k &= \hat{c}_{vj}^k \quad \forall j \in N, \\ \hat{c}_{i,n+m+k}^k &= \hat{c}_{iv}^k \quad \forall i \in N \text{ und} \\ \hat{c}_{n+k,n+m+k'}^k &= 0 \quad \forall k, k' \in K \end{aligned}$$

festlegen. Nachfolgend sind die in Unterabschnitt (4.12.1) vorgestellten Änderungen bezüglich transporterabhängiger Parameter  $t_{ij}^k$ ,  $Q_k$  und  $C_k$  vorzunehmen. Zur Berücksichtigung der transporterabhängigen Fahrtkosten sind weiterhin die Nebenbedingungen (4.12.16) bis (4.12.19) statt durch die Nebenbedingungen (4.13.9) bis (4.13.14) durch die Nebenbedingungen (4.13.15) bis (4.13.20) zu ersetzen.

## Kapitel 5

# Ein Branch&Bound-Verfahren zur Lösung des Basis-Szenarios der integrierten Produktions- und Distributionsplanung

Ein Branch&Bound-Verfahren ist ein allgemeines exaktes Verfahren zur Lösung von Optimierungsproblemen, welches von Land und Doig [LD60] entworfen wurde. Bei einem solchen Verfahren wird der Lösungsraum des gegebenen Problems, d. h. die Menge aller zulässigen Lösungen des Problems, sukzessive in Teilmengen zerlegt und untersucht. Durch im Verlauf des Verfahrens gefundene zulässige Lösungen und Schranken können gegebenenfalls Lösungsraumteilmengen von der Untersuchung ausgeschlossen werden. Ein Verfahren dieses Typs soll nun in diesem Kapitel zur Lösung des Basis-Szenarios des IPDSP entworfen werden. Ziel dabei ist, eine Alternative zur Lösung des Basis-Modells mit Hilfe eines MIP-Solvers zu entwickeln, um derartige Problemstellungen ohne Rückgriff auf kommerzielle Software lösen zu können.

Die in Kapitel 3 vorgestellte Darstellung von Lösungen des allgemeinen IPDSP-Szenarios ist für das in diesem Kapitel behandelte Basis-Szenario anzupassen. Eine Lösung des Basis-Szenarios des IPDSP sei (zunächst) ein Quadrupel  $(\sigma, \tau, s, I)$ , bestehend aus:

- Einer Auswahl  $I \subseteq N$  von angenommenen Bestellungen.
- Einem unterbrechungsfreien Produktionsplan  $s$  für die angenommenen Bestellungen  $I$ , gegeben durch einen Produktionsstartzeitpunkt  $s_i \geq 0$  für jede Bestellung  $i \in I$ .
- Einem Distributionsplan, bestehend aus Belieferungszeitpunkten  $\tau_i$  für alle  $i \in I$  und aus einem Auslieferungsplan  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ , welcher wiederum aus Auslieferungsreihenfolgen  $\sigma_k = (\sigma_{k,1}, \sigma_{k,2}, \dots, \sigma_{k,n_k^d})$  nebst  $n_k^d \in \mathbb{N}_0$  mit  $\sigma_{k,j} \in I$  für jeden Transporter  $k \in K$  besteht.

Da jede Auslieferung im (einzelnen) Depot startet und endet, soll eine Auslieferungsreihenfolge  $\sigma_k$  ausschließlich aus der Reihenfolge der jeweils ausgelieferten Bestellungen bestehen. Im Kontrast zur Darstellung in Kapitel 3, in der mehrere Standorte gegeben sind und somit  $\sigma_{k,j} \in IUW$  gilt, gilt hier nun  $\sigma_{k,j} \in I$ . Weiterhin ist aus dem Auslieferungsplan  $\sigma$  auch die Menge  $I$  der angenommenen Bestellungen ersichtlich, sodass eine **Lösung des Basis-Szenarios des IPDSP**

im Folgenden durch ein **Tripel**  $(\sigma, \tau, s)$  repräsentiert wird. Die **Menge der angenommenen Bestellungen in einer Lösung**  $(\sigma, \tau, s)$  sei mit  $I_\sigma$  bezeichnet (da  $\tau$  und  $s$  für diese Menge nicht maßgeblich sind).

Zur Darstellung des Branch&Bound-Verfahrens für das Basis-Szenarios des IPDSP wird im ersten Abschnitt dieses Kapitels ein allgemeines Branch&Bound-Verfahren beschrieben. Der zweite Abschnitt widmet sich der groben Strukturierung der betrachteten Problemstellung zur Formulierung eines speziellen Branch&Bound-Verfahrens, bevor in den nachfolgenden Abschnitten darauf eingegangen wird, wie die allgemein formulierten Elemente des allgemeinen Branch&Bound-Verfahrens hinsichtlich eines Branch&Bound-Verfahrens zur Lösung des Basis-Szenarios des IPDSP zu konkretisieren sind. Abschließend erfolgt im letzten Abschnitt eine zusammenfassende Darstellung des Branch&Bound-Verfahrens für das Basis-Szenarios des IPDSP.

## 5.1 Ein allgemeines Branch&Bound-Verfahren

Bevor für das IPDSP ein spezielles Branch&Bound-Verfahren entwickelt wird, soll an dieser Stelle ein allgemeines Branch&Bound-Verfahren formuliert werden. Es seien für ein Minimierungsproblem, das es zu lösen gilt, folgende Elemente gegeben:

- Ein Lösungsraum  $L$  und eine Zielfunktion  $\chi$ .
- Eine Lösung  $l' \in L'$  für jede im Verfahren untersuchte Teilmenge  $L' \subset L$ , falls  $L' \neq \emptyset$  gilt.<sup>1</sup>
- Eine untere Schrankenfunktion  $\bar{\chi}(L')$ , definiert auf allen im Verfahren untersuchten Teilmengen  $L'$  mit

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(L') &\leq \chi(\tilde{l}) \quad \forall \tilde{l} \in L', & \text{falls } L' \neq \emptyset, \text{ und} \\ \bar{\chi}(L') &= -\infty, & \text{falls } L' = \emptyset. \end{aligned}$$

Im Verfahren soll mit  $l^*$  die bisher beste gefundene Lösung bezeichnet werde. Ist noch keine gefunden, so gelte  $\chi(l^*) := \infty$ . Mit  $\mathcal{L}$  ist die Menge aller noch zu untersuchenden Lösungsraumteilmengen bezeichnet. Der Ablauf eines allgemeinen Branch&Bound-Verfahrens stellt sich wie in Algorithmus 1 beschrieben dar.

Beim Branch&Bound-Verfahren werden beginnend mit dem Lösungsraum  $L$  Lösungsraumteilmengen  $L'$  nebst zugehöriger Lösung  $l'$  untersucht, wobei die noch zu untersuchenden Lösungsraumteilmengen in der Menge  $\mathcal{L}$  vorgehalten werden. In Zeile 5 wird die zu  $L'$  gehörige Lösung  $l'$  dahingehend überprüft, ob sie besser als  $l^*$  ist, und in dem Fall als neue beste Lösung gespeichert. Daraufhin wird in Zeile 8 mittels der oberen Schrankenfunktion überprüft, ob die in Zeile 3 gewählte Lösungsraumteilmenge  $L'$  eine bessere als die beste bisher gefundene Lösung  $l^*$  enthalten kann. Ist dies nicht der Fall, so muss diese Lösungsraumteilmenge nicht weiter untersucht werden (dieser Schritt wird auch als „Bounding“ bezeichnet). Kann  $L'$  eine bessere als die bisher beste gefundene Lösung enthalten und enthält  $L'$  neben  $l'$  mindestens eine weitere Lösung, so wird  $L'$  vollständig disjunkt in Teilmengen zerlegt, welche zur weiteren Untersuchung in Zeile 10 der Menge  $\mathcal{L}$  hinzugefügt werden (diese Zerlegung wird zusammen mit der Wahl von  $L'$  auch als „Branching“ bezeichnet). Existieren in Zeile 2 keine zu untersuchenden Lösungsraumteilmengen mehr, so terminiert der Algorithmus mit der Rückgabe der optimalen Lösung  $l^*$  in Zeile 13.

<sup>1</sup>Dies schränkt die Problemstellungen ein, auf die dieses allgemeine Branch&Bound-Verfahren anwendbar ist, da im Allgemeinen nicht ohne Weiteres eine derartige Lösung  $l' \in L'$  bekannt ist. Hier ist allerdings eine solche Problemstellung gegeben.

**Algorithmus 1** Allgemeines Branch&Bound-Verfahren

- 1: Setze  $\mathcal{L} := \{L\}$ .
- 2: **while**  $\mathcal{L} \neq \emptyset$  **do**
- 3: Wähle eine Lösungsraumteilmenge  $L' \in \mathcal{L}$  mit zugehöriger Lösung  $l' \in L'$ .
- 4: Setze  $\mathcal{L} := \mathcal{L} \setminus \{L'\}$ .
- 5: **if**  $\chi(l') < \chi(l^*)$  **then**
- 6: Setze  $l^* := l'$ .
- 7: **end if**
- 8: **if**  $\bar{\chi}(L') < \chi(l^*)$  **and**  $|L'| > 1$  **then**
- 9: Zerlege  $L'$  vollständig in disjunkte Teilmengen mit  $L' = L'_1 \cup \dots \cup L'_{n'}$ .
- 10: Setze  $\mathcal{L} := \mathcal{L} \cup \{L'_1, \dots, L'_{n'}\}$
- 11: **end if**
- 12: **end while**
- 13: Gebe  $l^*$  als optimale Lösung mit Zielfunktionswert  $\chi(l^*)$  zurück.

Der Ablauf lässt sich mit Hilfe eines Branch&Bound-Baumes wie in Abbildung 5.1 verdeutlichen. In diesem Baum entsprechen die Knoten einem Quadrupel  $(L', \bar{\chi}(L'), l', \chi(l'))$ , bestehend aus einer Teilmenge  $L' \subseteq L$ , der unteren Schranke  $\bar{\chi}(L')$ , der bei  $L \neq \emptyset$  existierenden zu  $L'$  gehörigen Lösung  $l'$  und deren Zielfunktionswert  $\chi(l')$ .

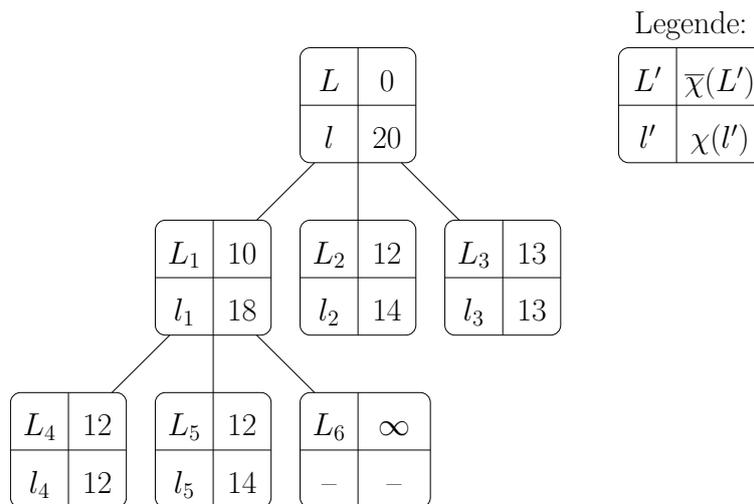


Abbildung 5.1: Beispiel für einen Branch&Bound-Baum

Zuerst wird  $L' = L$  gewählt und untersucht, damit einhergehend wird wegen  $20 = \chi(l) < \chi(l^*) = \infty$  die bisher beste gefundene Lösung  $l^* := l$  gesetzt. Nachfolgend wird  $L$  disjunkt mittels  $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$  zerlegt und  $L_1, L_2$  und  $L_3$  zur weiteren Untersuchung in  $\mathcal{L}$  bereitgehalten.

Im nächsten Schritt soll nun  $L' = L_1$  gewählt werden. Es gilt  $18 = \chi(l_1) < \chi(l^*) = 20$ , somit wird  $l^* := l_1$  als neue beste gefundene Lösung gesetzt. Daraufhin wird in diesem Schritt  $L_1$  disjunkt mittels  $L_1 = L_4 \cup L_5 \cup L_6$  zerlegt. Es gelte  $L_6 = \emptyset$ . Dies kann bei einem konkreten Verfahren bei der Verzweigung dadurch entstehen, dass die Lösungsraumteilmengen implizit durch Eigenschaften beschrieben werden. Diese Eigenschaften wiederum können die jeweilige Lösungsraumteilmenge so sehr beschränken, dass keine Lösung allen Eigenschaften genügt und demzufolge die Lösungsraumteilmenge leer ist.

Die nächste zu untersuchende Lösungsraumteilmenge sei  $L' = L_4$ . Wegen  $12 = \chi(l_4) < \chi(l^*) = 18$  wird  $l^* := l_4$  als neue beste gefundene Lösung notiert. Da für die untere Schrankenfunktion  $\bar{\chi}(L_4) = 12 = \chi(l^*)$  gilt, wird  $L_4$  nicht weiter untersucht.

Aus dem gleichen Grund werden auch  $L_5$ ,  $L_2$  und  $L_3$  aus  $\mathcal{L}$  entfernt und nicht weiter untersucht. Nach dem Entfernen dieser Lösungsraumteilmengen gilt  $\mathcal{L} = \emptyset$  und somit ist  $l^* = l_4$  eine optimale Lösung des Problems.

Um nun das allgemeine Branch&Bound-Verfahren für das hier vorliegende spezielle Problem anzupassen, müssen einige Größen spezifiziert werden. Bekannt sind für das IPDSP

- der Lösungsraum  $L = \{(\sigma, \tau, s) \mid (\sigma, \tau, s) \text{ ist zulässige Lösung des IPDSP}\}$  sowie
- die Zielfunktion  $\chi(\sigma, \tau, s)$ .<sup>2</sup>

Offen bleiben allerdings folgende Fragen:

- Welche Struktur haben die im Verfahren untersuchten Lösungsraumteilmengen  $L' \subset L$ ?
- Wie soll in Algorithmus 1 in Zeile 9 die Zerlegung einer Lösungsraumteilmenge  $L'$  erfolgen?
- Wie lässt sich untersuchen, ob  $L' \neq \emptyset$  gilt, wenn  $L'$  nicht explizit bekannt ist, sondern nur durch einige Eigenschaften der enthaltenen Lösungen beschrieben wird?
- Wie ist für eine Lösungsraumteilmenge  $L'$  eine zugehörige Lösung  $l'$  definiert?
- Wie ist die untere Schrankenfunktion  $\bar{\chi}$  definiert?
- Wie soll in Algorithmus 1 in Zeile 3 die Wahl der nächsten zu untersuchenden Lösungsraumteilmenge  $L' \in \mathcal{L}$  erfolgen?

Um das allgemein beschriebene Branch&Bound-Verfahren auf das IPDSP anzuwenden, gilt es nun, das Verfahren in Bezug auf diese offenen Fragen zu konkretisieren. Dabei soll zunächst der Lösungsraum des IPDSP betrachtet und Vorüberlegungen zu dessen systematischer Untersuchung getroffen werden.

## 5.2 Idee des Branch&Bound-Verfahrens zur Lösung des Problems

Zur Bestimmung einer optimalen Lösung des Basis-Szenarios ist es naheliegend, die Entscheidungen auf den unterschiedlichen Stufen der integrierten Problemstellung nacheinander zu bestimmen. Dabei kann es durchaus vorkommen, dass sich mit den getroffenen Entscheidungen einer Stufe keine zulässigen Entscheidungen in anderen Stufen treffen lassen. Diese Schwierigkeit gilt es demzufolge in einem Lösungsverfahren zu berücksichtigen.

Im IPDSP sind Entscheidungen in den beiden Stufen Produktion und Distribution zu treffen (die Selektionsentscheidung wird jeweils implizit getroffen). Es stellt sich die Frage, für welche Stufe nun die Entscheidungen zuerst getroffen werden sollen. In dieser Arbeit wird zuerst der Auslieferungsplan  $\sigma$  geplant, denn dieses Vorgehen hat die folgenden Vorteile:

<sup>2</sup>Da der Zielfunktionswert einer Lösung  $(\sigma, \tau, s)$  bereits durch  $\sigma$  bestimmt ist, kann die Zielfunktion auch als  $\chi(\sigma)$  bezeichnet werden.

- Durch einen gegebenen Auslieferungsplan ist der Zielfunktionswert der Lösung des IPDSP bekannt. Deswegen ist bei der Suche nach „passenden“ Belieferungszeitpunkten und Produktionsstartzeitpunkten kein Optimierungsproblem, sondern ein Entscheidungsproblem gegeben.
- In dem nachfolgend beschriebenen Lösungsverfahren kann oftmals sogar auf die Lösung dieser Entscheidungsprobleme verzichtet werden. Die ist der Fall, wenn mit den im Auslieferungsplan getroffenen Entscheidungen ein schlechterer Zielfunktionswert als derjenige der bisher besten gefundenen Lösung einhergeht.
- Müssen diese Entscheidungsprobleme jedoch gelöst werden, so sind sie zumeist „gut“ lösbar. In vielen Fällen kann bereits durch eine Heuristik eine Lösung gefunden werden.<sup>3</sup>

Zur Untersuchung der Auslieferungspläne soll nun eine Systematik entwickelt werden. Ebenso wie in bekannten Branch&Bound-Algorithmen wird in jedem Schritt eine Entscheidung festgelegt. In vielen Branch&Bound-Algorithmen erfolgt die Fixierung einer binären Variablen zu 0 oder 1. Diesem Ansatz wollen wir hier nicht folgen. Stattdessen sollen die Entscheidungen sukzessive die Auslieferungsreihenfolgen festlegen, indem sie diese um eine noch nicht angenommene Bestellung verlängern. Begonnen werden soll dabei mit dem leeren Auslieferungsplan  $\sigma = ((), \dots, ())$ .

Es soll also in jedem Schritt genau eine Auslieferungsreihenfolge um eine noch nicht eingeplante (und an der Stelle einplanbare) Bestellung verlängert werden. Betrachtet werden müssen in einem Verfahren alle Möglichkeiten der Verlängerung dieser Auslieferungsreihenfolge. Dementsprechend ergibt sich für jede Bestellung, mit der die gewählte Auslieferungsreihenfolge verlängert werden kann, ein neuer Auslieferungsplan. Weiterhin soll dabei auch möglich sein, im Entscheidungsprozess zu beschließen, statt des Verlängerns einer Auslieferungsreihenfolge diese im Folgenden nicht mehr zu verlängern. In diesem Fall soll eine Auslieferungsreihenfolge „geschlossen“ genannt werden, andernfalls „offen“. Eine offene Auslieferungsreihenfolge ist in den nachfolgenden Abbildungen durch ihre Endung „...“ gekennzeichnet.

Die Wahl, welche der offenen Auslieferungsreihenfolgen zur Verlängerung ausgewählt wird, kann durch eine Auswahlregel wie zum Beispiel „wähle diejenige offene Auslieferungsreihenfolge  $\sigma_k$  mit dem kleinsten Index  $k$ “ oder „fülle die Auslieferungsreihenfolgen möglichst reihum“ festgelegt werden. Auf die in dieser Arbeit betrachteten Regeln zur Auswahl der zu verlängernden Auslieferungsreihenfolge wird später in Unterabschnitt 5.9 noch genauer eingegangen. Wichtig ist bei der Verlängerung, dass immer nur eine der Auslieferungsreihenfolgen verlängert wird. Andernfalls kann es dazu kommen, dass unterschiedliche Reihenfolgen von Entscheidungen nach deren Verlängerung zu gleichem Auslieferungsplan führen, wie man in Abbildung 5.2 erkennt.

Sowohl, wenn man zuerst Auslieferungsreihenfolge 1 um Bestellung 1 verlängert und danach Auslieferungsreihenfolge 2 um Bestellung 2, als auch, wenn man umgekehrt zuerst Auslieferungsreihenfolge 2 um Bestellung 2 verlängert und danach Auslieferungsreihenfolge 1 um Bestellung 1, entsteht der gleiche Auslieferungsplan  $\sigma = ((1, \dots), (2, \dots))$ . Dies zu vermeiden ist sinnvoll, da es ansonsten dazu kommen kann, dass Auslieferungspläne mehrfach untersucht werden, wenn versucht wird, systematisch mit der Idee des Verlängerns von Auslieferungsplänen eine optimale Lösung zu finden.

Zu der so beschriebenen Idee des Verlängerns von Auslieferungsplänen findet sich in Abbildung 5.3 für ein Problem mit 2 Transportern und 3 Bestellungen ein Ausschnitt eines Entscheidungsbaums. Die gestrichelten Linien deuten an, dass an dieser Stelle der Entscheidungsbaum

<sup>3</sup>Derartige Entscheidungsprobleme sind trotz der in der Praxis „guten“ Lösbarkeit  $\mathcal{NP}$ -schwer.

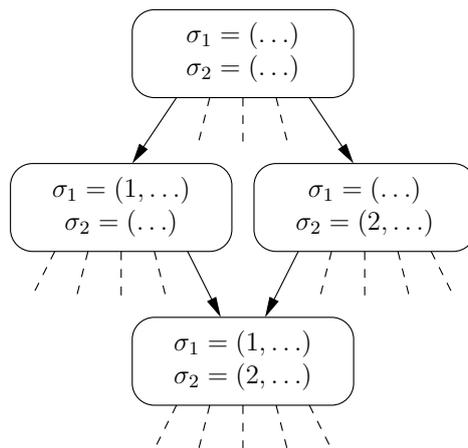


Abbildung 5.2: Beispiel für gleichen Auslieferungsplan bei unterschiedlichem Entscheidungsweg

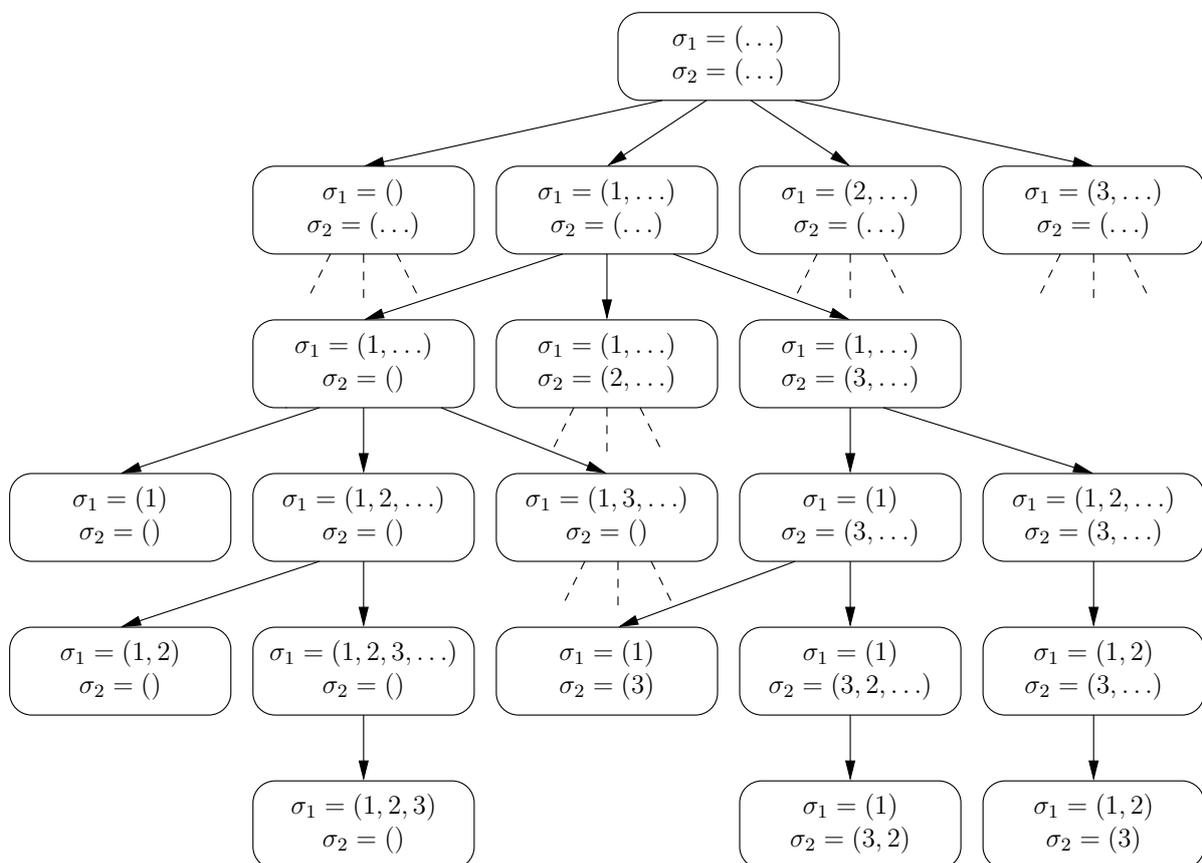


Abbildung 5.3: Beispiel eines Entscheidungsprozesses

nicht vollständig dargestellt wird. Die zu verlängernde Auslieferungsreihenfolge wurde dabei „reihum“ gewählt. Ein Knoten im Entscheidungsbaum steht entsprechend den vorstehenden Ausführungen für den jeweiligen Auslieferungsplan sowie den Zustand seiner Auslieferungsreihenfolgen „offen“ oder „geschlossen“.

Zu Beginn des Entscheidungsprozesses sind alle Auslieferungsreihenfolgen offen und leer. Im ersten Schritt kann entweder die erste Auslieferungsreihenfolge geschlossen oder um Bestellung 1, 2 oder 3 verlängert werden. Wird nun die erste Auslieferungsreihenfolge  $\sigma_1$  um Bestellung 1 verlängert, so wird als nächstes Auslieferungsreihenfolge  $\sigma_2$  betrachtet, die entweder geschlossen werden oder um Bestellung 2 oder 3 verlängert werden kann.

Wird Auslieferungsreihenfolge  $\sigma_2$  jetzt geschlossen, so lässt sich in Abbildung 5.3 erkennen, dass nachfolgend ausschließlich  $\sigma_1$  verlängert wird, bis auch  $\sigma_1$  geschlossen ist. Betrachtet man stattdessen den Fall  $\sigma = ((1, \dots), (3, \dots))$ , so sieht man, dass ausgehend hiervon im Entscheidungsprozess nur untersucht wird, ob Bestellung 2 an eine Auslieferungsreihenfolge „angehängt“ wird und wenn ja, an welche.

Diese so beschriebene Idee, die Lösungen eines IPDSP strukturiert zu untersuchen, indem Auslieferungspläne sowie deren Verlängerung betrachtet werden, die jeweils auch untersucht werden, ob zu diesen zulässige Belieferungs- und Produktionsstartzeitpunkte existieren, soll nun im Folgenden auf ein Branch&Bound-Verfahren übertragen werden.

### 5.3 Die untersuchten Lösungsraumteilmengen

Zunächst soll die Idee des Verlängerns von Auslieferungsplänen aufgegriffen werden, um die zu untersuchenden Lösungsraumteilmengen festzulegen. Es lässt sich zu einem Auslieferungsplan  $\sigma$  eine Teilmenge von Lösungen  $L_\sigma$  bestimmen, deren Auslieferungsplan mit dem Auslieferungsplan  $\sigma$  „anfängt“. Diese Teilmenge von Lösungen soll nun formal eingeführt werden. Dafür werde zunächst der Begriff der Fortsetzung eines Auslieferungsplans

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m) = ((\sigma_{1,1}, \dots, \sigma_{1,n_1}), \dots, (\sigma_{m,1}, \dots, \sigma_{m,n_m}))$$

eingeführt. In diesem Rahmen soll ebenfalls das Konzept der „offenen“ und „geschlossenen“ Auslieferungsreihenfolgen aufgegriffen und formalisiert werden. Hierzu seien durch die Menge  $J$  die Indizes der offenen Auslieferungsreihenfolgen gegeben.

**Definitionen 5.1** Sei mit

$$F_\sigma := \left\{ \sigma' = \left( (\sigma'_{1,1}, \sigma'_{1,2}, \dots, \sigma'_{1,n'_1}), \dots, (\sigma'_{m,1}, \sigma'_{m,2}, \dots, \sigma'_{m,n'_m}) \right) \mid \begin{aligned} &n'_k \geq n_k \forall k \in K, \\ &\sigma'_{k,i} = \sigma_{k,i} \forall k \in K, i = 1, \dots, n_k, \\ &\sigma'_{k,j} \in N, \sigma'_{k,i} \neq \sigma'_{k',i'} \forall k, k' \in K, i, i' = 1, \dots, n'_k, i \neq i' \text{ oder } k \neq k' \end{aligned} \right\}$$

die Menge aller Fortsetzungen von  $\sigma$  und mit

$$F_\sigma(J) := \left\{ \sigma' = \left( (\sigma'_{1,1}, \sigma'_{1,2}, \dots, \sigma'_{1,n'_1}), \dots, (\sigma'_{m,1}, \sigma'_{m,2}, \dots, \sigma'_{m,n'_m}) \right) \in F_\sigma \mid \begin{aligned} &n'_k \geq n_k \forall k \in J, \\ &n'_k = n_k \forall k \in K \setminus J, \sigma'_{k,i} = \sigma_{k,i} \forall k \in K, i = 1, \dots, n_k \end{aligned} \right\}, J \subseteq K$$

die Menge aller  $J$ -Fortsetzungen von  $\sigma$  bezeichnet. Auslieferungspläne  $\sigma' \in F_\sigma$  seien eine Fortsetzung von  $\sigma$  und Auslieferungspläne  $\sigma' \in F_\sigma(J)$  seien eine  $J$ -Fortsetzung von  $\sigma$ .

Die Menge aller Fortsetzungen von  $\sigma$  enthält also alle Auslieferungspläne, die durch eventuelles „Verlängern“ des Auslieferungsplans  $\sigma$  entstehen. Die Menge aller  $J$ -Fortsetzungen von  $\sigma$  enthält alle Auslieferungspläne, die aus  $\sigma$  durch eventuelles „Verlängern“ eines oder mehrerer

offener Auslieferungsreihenfolgen  $\sigma_k$  mit  $k \in J$  entstehen. Abbildung 5.4 zeigt für einen Auslieferungsplan  $\sigma$  beispielhaft einige ( $J$ -)Fortsetzungen von  $\sigma$  beziehungsweise Auslieferungspläne, die keine ( $J$ -)Fortsetzung von  $\sigma$  sind. Mit dem Begriff der Fortsetzung können auch zugehörige Lösungsmengen eingeführt werden.

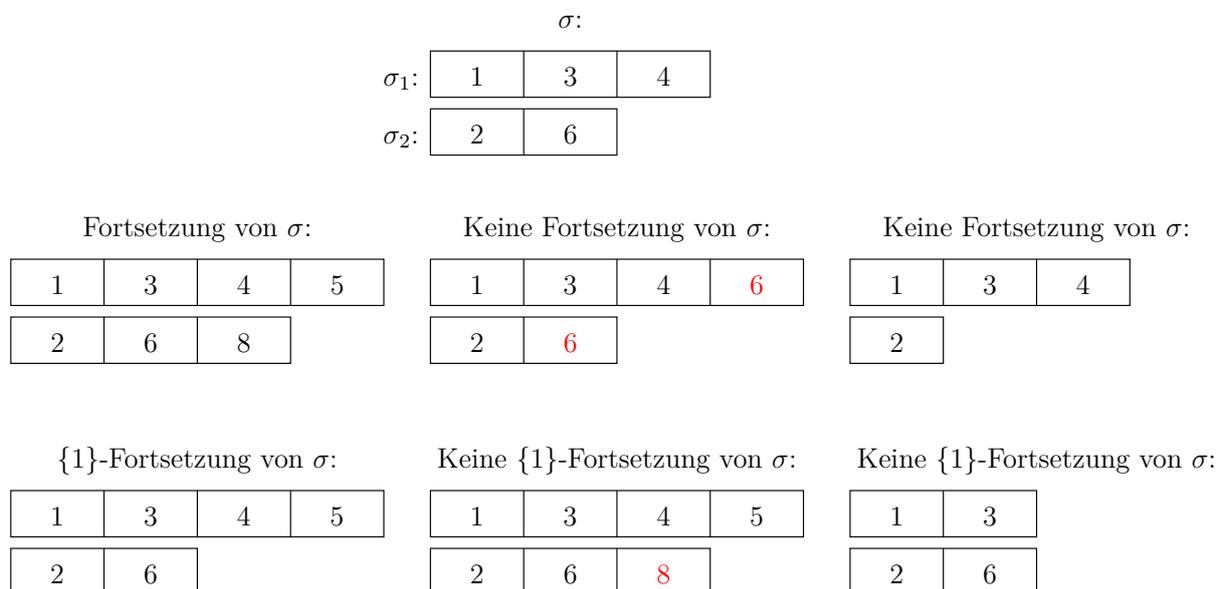


Abbildung 5.4: ( $J$ -)Fortsetzungen von  $\sigma$

**Definition 5.2** Mit

$$L_\sigma := \{(\sigma', \tau', s') \mid \sigma' \in F_\sigma, (\sigma', \tau', s') \text{ ist zulässige Lösung des IPDSP}\}$$

sei die Menge aller  $\sigma$ -Lösungen und mit

$$L_\sigma(J) := \{(\sigma', \tau', s') \mid \sigma' \in F_\sigma(J), (\sigma', \tau', s') \text{ ist zulässige Lösung des IPDSP}\}$$

sei die Menge aller  $J$ -fortsetzenden  $\sigma$ -Lösungen bezeichnet.

Die im Branch&Bound-Verfahren untersuchten Lösungsraumteilmengen sollen jetzt ebendiese Mengen aller  $J$ -fortsetzenden  $\sigma$ -Lösungen  $L_\sigma(J)$  sein. Dabei ist der Lösungsraum durch  $L = L_{((), \dots, ())}(K)$  gegeben.

## 5.4 Die Zerlegung einer Lösungsraumteilmenge

Um eine so beschriebene Lösungsraumteilmenge  $L_\sigma(J)$  mit der Idee des „Verlängerns von Auslieferungsplänen“ zu zerlegen, soll an dieser Stelle ein Operator zur „Verlängerung von Auslieferungsplänen“ eingeführt werden.

**Definition 5.3** Es sei

$$\sigma^{i \rightarrow k} := ((\sigma_{1,1}, \dots, \sigma_{1,n_1}), \dots, (\sigma_{k,1}, \dots, \sigma_{k,n_k}, i), \dots, (\sigma_{m,1}, \dots, \sigma_{m,n_m}))$$

der **Verlängerungsoperator** für den Auslieferungsplan

$$\sigma = ((\sigma_{1,1}, \dots, \sigma_{1,n_1}), \dots, (\sigma_{k,1}, \dots, \sigma_{k,n_k}), \dots, (\sigma_{m,1}, \dots, \sigma_{m,n_m})).$$

Der Verlängerungsoperator  $\sigma^{i \rightarrow k}$  fügt also an die  $k$ -te Auslieferungsreihenfolge des Auslieferungsplans  $\sigma$  Bestellung  $i$  als letzte an.

Mit Hilfe dieses Verlängerungsoperators lässt sich die **vollständige Zerlegung einer Lösungsraumteilmenge  $L_\sigma(J)$  in disjunkte Teilmengen** durch

$$L_\sigma(J) = L_\sigma(J \setminus \{k\}) \cup \bigcup_{i \in N \setminus I_\sigma} L_{\sigma^{i \rightarrow k}}(J)$$

ausdrücken, wobei  $k \in J$  gelten muss.

**Definition 5.4 ( $k$ -Zerlegung)** Eine Zerlegung einer Lösungsraumteilmenge  $L_\sigma(J)$

$$L_\sigma(J) = L_\sigma(J \setminus \{k\}) \cup \bigcup_{i \in N \setminus I_\sigma} L_{\sigma^{i \rightarrow k}}(J), \quad (5.4.1)$$

wobei  $k \in J$  gilt, werde als  **$k$ -Zerlegung von  $L_\sigma(J)$**  bezeichnet.

Die Menge  $L_\sigma(J)$  aller  $J$ -fortsetzenden  $\sigma$ -Lösungen besteht also aus allen Lösungen  $(\sigma', \tau', s')$ , deren Auslieferungsplan  $\sigma'$  „zu Beginn“ mit  $\sigma$  übereinstimmt, und bei denen dann in der Auslieferungsreihenfolge  $\sigma_k$  entweder keine weitere Bestellung hinzugefügt wird (Teilmenge  $L_\sigma(J \setminus \{k\})$ ) oder eine fest gewählte, noch nicht eingeplante Bestellung  $i \in N \setminus I_\sigma$  als nächste ausgeliefert wird (Teilmenge  $L_{\sigma^{i \rightarrow k}}(J)$ ).

Es lässt sich erkennen, dass eine solche Zerlegung prinzipiell für jedes  $k \in J$  durchführbar ist. Wie schon in Unterabschnitt 5.2 beschrieben wurde, sind mehrere Auswahlstrategien denkbar. Da unter diesen Auswahlstrategien auch solche sind, die weitere Informationen aus der oberen Schrankenfunktion verwenden, sollen diese an späterer Stelle in Unterabschnitt 5.9 diskutiert werden.

## 5.5 Wann eine Lösungsraumteilmenge nichtleer ist

Da nun die Struktur einer Lösungsraumteilmenge beschrieben wurde, stellt sich jetzt die Frage, wann  $L_\sigma(J) = \emptyset$  gilt. Diese Frage wiederum ist eng verbunden mit der Frage, ob zu einem gegebenen Auslieferungsplan  $\sigma$  Belieferungszeiten  $\tau$  und Produktionsstartzeiten  $s$  existieren, sodass  $(\sigma, \tau, s)$  eine zulässige Lösung des IPDSP ist (was im Folgenden auch als „der Auslieferungsplan  $\sigma$  ist zulässig“ formuliert wird). Den Zusammenhang zwischen der Zulässigkeit eines Auslieferungsplans und der Existenz von Lösungen in einer Lösungsraumteilmenge stellt der folgende Satz her.

**Satz 5.5** Eine Lösungsraumteilmenge  $L_\sigma(J)$  ist genau dann nichtleer, wenn der Auslieferungsplan  $\sigma$  zulässig ist.

*Beweis:* „ $\Rightarrow$ “: Existieren zum Auslieferungsplan  $\sigma$  zulässige Belieferungszeiten  $\tau$  und Produktionsstartzeiten  $s$ , so gilt  $(\sigma, \tau, s) \in L_\sigma(J)$ , also ist die Lösungsraumteilmenge nichtleer.

“ $\Leftarrow$ “: Gilt  $L_\sigma(J) \neq \emptyset$ , so existiert ein  $(\sigma', \tau', s') \in L_\sigma(J)$ . Es gilt  $\sigma' \in F_\sigma$ ,  $\sigma'$  ist also eine Fortsetzung von  $\sigma$  und somit gilt auch  $I_{\sigma'} \supseteq I_\sigma$ . Wählt man jetzt  $\tau_i = \tau'_i$  und  $s_i = s'_i$  für alle  $i \in I_\sigma$ , so ist auch  $(\sigma, \tau, s)$  eine zulässige Lösung.  $\square$

Es gilt also zu untersuchen, ob der Auslieferungsplan  $\sigma$  zulässig ist, was im übernächsten Abschnitt noch erläutert werden wird. Zuvor soll jedoch auf die zu einer Lösungsraumteilmenge  $L'$  gehörige Lösung  $l'$  eingegangen werden.

## 5.6 Eine zu einer Lösungsraumteilmenge gehörige Lösung

Wenn eine Lösungsraumteilmenge  $L_\sigma(J)$  nichtleer ist, so lassen sich nach Satz 5.5 zum gegebenen Auslieferungsplan  $\sigma$  auch zulässige Belieferungszeiten  $\tau$  und Produktionsstartzeiten  $s$  finden und man erhält zur Lösungsraumteilmenge  $L_\sigma(J)$  eine zugehörige Lösung  $(\sigma, \tau, s)$ .

Bei der im nachfolgenden Abschnitt vorgenommene Untersuchung eines Auslieferungsplan  $\sigma$  auf Zulässigkeit soll dementsprechend im Falle  $L_\sigma(J) \neq \emptyset$  auch eine zu  $L_\sigma(J)$  gehörige Lösung  $(\sigma, \tau, s)$  bestimmt werden. Diese Lösung ist nicht notwendigerweise eindeutig, da zum Auslieferungsplan  $\sigma$  gegebenenfalls auch unterschiedliche zulässige Belieferungs-/Produktionsstartzeiten existieren (allerdings ist der Zielfunktionswert  $\chi(\sigma, \tau, s) = \chi(\sigma)$  dieser Lösungen identisch).

## 5.7 Zulässigkeit eines Auslieferungsplans

Nach den Ausführungen in den vorigen Abschnitten ist die Frage, ob ein Auslieferungsplan  $\sigma$  zulässig ist, von zentraler Wichtigkeit für das Branch&Bound-Verfahren. Zur Klärung dieser Frage für einen gegebenen Auslieferungsplan  $\sigma$  gibt es mehrere Möglichkeiten.

- Man kann versuchen, mit Hilfe eines exakten Verfahrens zu  $\sigma$  auch  $\tau$  und  $s$  zu finden, sodass  $(\sigma, \tau, s)$  eine zulässige Lösung des IPDSP ist, oder festzustellen, dass keine solchen Größen existieren.
- Man kann versuchen herzuleiten, dass zu  $\sigma$  keine  $\tau$  und  $s$  mit der Eigenschaft existieren, dass  $(\sigma, \tau, s)$  eine zulässige Lösung des IPDSP ist.
- Man kann versuchen, mittels einer Heuristik zu  $\sigma$  auch  $\tau$  und  $s$  zu finden, sodass  $(\sigma, \tau, s)$  eine zulässige Lösung des IPDSP ist.

Wie diese Möglichkeiten umgesetzt werden können und warum die beiden letztgenannten überhaupt sinnvoll sind (es genügt ja theoretisch, wenn ein exaktes Verfahren zur Bestimmung von  $\tau$  und  $s$  zu  $\sigma$  existiert), soll im Folgenden betrachtet werden.

### 5.7.1 Überprüfung der Zulässigkeit eines Auslieferungsplans mittels eines MIP

Von den drei genannten Möglichkeiten soll jetzt als erstes die Option betrachtet werden, über ein exaktes Verfahren, nämlich das Lösen der als MIP formulierten Problemstellung, zu einem Transportplan  $\sigma$  zulässige Werte  $\tau$  und  $s$  zu bestimmen oder festzustellen, dass keine solchen existieren. Das dazu im Folgenden aufgestellte MIP sei mit  $MIP_\sigma^{feas}$  bezeichnet. In ihm wird für jede Bestellung  $i \in I_\sigma$ , die also im Auslieferungsplan  $\sigma$  geplant ist, ein Auslieferungszeitpunkt  $\tau_i$  und ein Produktionsstartzeitpunkt  $s_i$  gesucht. Mit  $v(i) := \sigma_{k,1}$ , wobei  $i \in \sigma_k$  gilt, sei für alle  $i \in I_\sigma$  die erste Bestellung in derjenigen Transportreihenfolge  $\sigma_k$  gegeben, in welcher Bestellung  $i$  ausgeliefert wird, und deren Belieferungszeitpunkt  $\tau_{v(i)}$  somit maßgeblich für den jeweiligen Abfahrtszeitpunkt ist.

Gesucht sind also Auslieferungszeitpunkte  $\tau_i \geq 0$  und Produktionsstartzeitpunkte  $s_i \geq 0$  für alle  $i \in I_\sigma$  unter folgenden Entscheidungsschranken bzw. Nebenbedingungen:

- Das Belieferungszeitfenster  $[a_i, b_i]$  wird eingehalten:

$$a_i \leq \tau_i \leq b_i \quad \forall i \in I_\sigma$$

- Die Reisezeit zwischen zwei in einer Transportreihenfolge aufeinander folgenden Bestellungen wird berücksichtigt:

$$\tau_{\sigma_{k,i}} + t_{\sigma_{k,i}, \sigma_{k,i+1}} \leq \tau_{\sigma_{k,i+1}} \quad \forall i = 1, \dots, n_k - 1, k \in K$$

- Der früheste Produktionsstartzeitpunkt  $r_i$  ist durch das Höchstalter gegeben:

$$r_i = \tau_i - B - p_i \quad \forall i \in I_\sigma$$

- Der späteste Produktionsendzeitpunkt  $d_i$  ist durch den Abfahrtszeitpunkt gegeben:

$$d_i = \tau_{v(i)} - t_{0,v(i)} \quad \forall i \in I_\sigma$$

- Die Produktion erfolgt im im Zeitfenster  $[r_i, d_i]$ :

$$\begin{aligned} r_i &\leq s_i && \forall i \in I_\sigma \\ s_i + p_i &\leq d_i && \forall i \in I_\sigma \end{aligned}$$

- Die Produktion erfolgt überschneidungsfrei:

$$\begin{aligned} s_i + p_i &\leq s_j + M_{ij} \cdot (1 - y_{ij}) && \forall i < j, i, j \in I_\sigma \\ s_j + p_j &\leq s_i + M_{ji} \cdot y_{ij} && \forall i < j, i, j \in I_\sigma \end{aligned}$$

Dabei sind  $y_{ij} \in \{0, 1\}$  mit  $i < j$ ,  $i, j \in I_\sigma$  Hilfsvariablen, für die gilt, dass  $y_{ij}$  genau dann 1 ist, wenn die Produktion von Bestellung  $i$  (irgendwann) vor der Produktion von Bestellung  $j$  stattfindet und  $M_{ij}$  sind ausreichend groß gewählte Parameter (vgl. [Man60]).

Der Vorteil der Klärung der Frage, ob der Auslieferungsplan  $\sigma$  zulässig ist, durch Lösung von  $MIP_\sigma^{feas}$  liegt zum einen darin, dass ein exaktes Verfahren diese Frage für jede Problem Instanz zuverlässig beantworten kann. Zum anderen werden bei Lösbarkeit von  $MIP_\sigma^{feas}$  auch direkt  $\tau$  und  $s$  bestimmt, sodass man eine zulässige Lösung  $(\sigma, \tau, s)$  erhält.

Der gravierende Nachteil ist allerdings, dass die Lösung dieses MIP  $\mathcal{NP}$ -schwer ist. Deswegen empfiehlt es sich, zunächst entweder zu überprüfen, ob gewisse notwendige Bedingungen für die Existenz von zulässigen  $\tau$  und  $s$  nicht erfüllt sind, oder heuristisch zu versuchen, zulässige  $\tau$  und  $s$  zu finden, was jeweils – wie im Folgenden ersichtlich wird – in polynomieller Laufzeit geschehen kann. Erst falls keine dieser beiden Vorgehensweisen erfolgreich war, soll die Zulässigkeit eines Auslieferungsplans mittels eines MIP überprüft werden.

### 5.7.2 Notwendige Bedingungen für die Zulässigkeit eines Auslieferungsplans

In diesem Abschnitt erfolgt die Entwicklung notwendiger Bedingungen dafür, dass ein gegebener Auslieferungsplan  $\sigma$  zulässig ist, d. h. dass zum Auslieferungsplan  $\sigma$  zulässige Belieferungszeitpunkte  $\tau_i$  und Produktionsstartzeiten  $s_i$  für alle  $i \in I_\sigma$  existieren. Dafür ist zum einen notwendig, dass der Transport auch in der durch  $\sigma$  festgelegten Reihenfolge durchgeführt werden kann, also insbesondere die Zeitfenster eingehalten werden können. Zum anderen muss es aber auch möglich sein, die Produktionsplanung überschneidungsfrei vorzunehmen, welche durch den Auslieferungsplan und das Höchstalter der bestellten Güterzeitlichen Restriktionen unterworfen ist.

Als erstes sollen nun notwendige Bedingungen bezüglich des Distributionsplans formuliert werden. Hierfür werden zunächst einige Hilfsgrößen definiert. Bei gegebenem Auslieferungsplan lässt sich der früheste Auslieferungszeitpunkt einer Bestellung  $\sigma_{k,i}$  mittels

$$\tau_{\sigma_{k,i}} := \begin{cases} a_{\sigma_{k,i}} & , \text{ falls } i = 1 \\ \max(a_{\sigma_{k,i}}, \tau_{\sigma_{k,i-1}} + t_{\sigma_{k,i-1}, \sigma_{k,i}}) & , \text{ falls } i > 1 \end{cases} \quad (5.7.1)$$

bestimmen. Weiterhin lässt sich die kumulierte Wartezeit bei frühestmöglicher Auslieferung in der Auslieferung bis zu Bestellung  $\sigma_{k,i}$  mittels

$$w_{\sigma_{k,i}}^c := \begin{cases} 0 & , \text{ falls } i = 1 \\ w_{\sigma_{k,i-1}}^c + \max(0, a_{\sigma_{k,i}} - (\tau_{\sigma_{k,i-1}} + t_{\sigma_{k,i-1}, \sigma_{k,i}})) & , \text{ falls } i > 1 \end{cases} \quad (5.7.2)$$

bestimmen. Für jeden Transporter  $k$  lässt sich jetzt mittels

$$\delta_k := \min_{i=1}^{n_k} \left\{ w_{\sigma_{k,i}}^c + (b_{\sigma_{k,i}} - \tau_{\sigma_{k,i}}) \right\} \quad (5.7.3)$$

berechnen, um wie viele Zeiteinheiten später er höchstens nach dem Zeitpunkt  $a_{\sigma_{k,1}} - t_{0, \sigma_{k,1}}$ , welcher der Abfahrtzeit bei frühestmöglicher Auslieferung aller Bestellungen entspricht, das Depot verlassen kann, ohne eine Bestellung verspätet auszuliefern. Von besonderem Vorteil ist bei dieser Berechnungsmethode ihr rekursiver Aufbau. Dieser ermöglicht es, dass beim „Verlängern“ einer Auslieferungsreihenfolge nur der letzte Wert neu berechnet werden muss.<sup>4</sup>

Nach Berechnung dieser Werte kann in den folgenden Fällen bereits konstatiert werden, dass der Auslieferungsplan  $\sigma$  unzulässig ist:

---

<sup>4</sup>Ähnliche Überlegungen zum „delivery time slack“ finden sich in [AGL08, Vie11].

- Wenn die Kapazität eines Transporters überschritten ist.<sup>5</sup>
- Wenn  $\tau_{\sigma_{k,i}} > b_{\sigma_{k,i}}$  für ein  $\sigma_{k,i}$  gilt, also der frühestmögliche Belieferungszeitpunkt nach dem Zeitfensterende ist (vgl. [AGL08]).
- Wenn  $\tau_{\sigma_{k,i}} - (\tau_{\sigma_{k,1}} - t_{0,\sigma_{k,1}} + \min(\delta_k, w_{\sigma_{k,i}}^c)) > B$  für ein  $\sigma_{k,i}$  gilt, also die Mindestzeitspanne von Verlassen des Depots bis zur Auslieferung der Bestellung größer als das Höchstalter der bestellten Güter ist. Diese Mindestzeitspanne berechnet sich aus der Differenz des frühesten Auslieferungszeitpunkts  $\tau_{\sigma_{k,i}}$  von Bestellung  $\sigma_{k,i}$  und dem spätesten Abfahrtszeitpunkt, der sich wiederum aus dem frühesten Abfahrtszeitpunkt vor der Auslieferung der ersten Bestellung  $\sigma_{k,1}$  ohne Wartezeit  $\tau_{\sigma_{k,1}} - t_{0,\sigma_{k,1}}$  und der möglichen Verzögerung, ohne dass sich  $\tau_{\sigma_{k,i}}$  ändert,  $\min(\delta_k, w_{\sigma_{k,i}}^c)$ , zusammensetzt (vgl. [AGL08]).

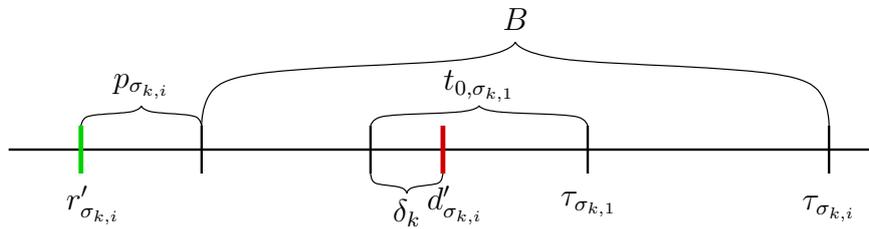


Abbildung 5.5: Relaxiertes Produktionszeitfenster

Neben diesen notwendigen Bedingungen an Kapazität und früheste Belieferungszeitpunkte lassen sich auch notwendige Bedingungen für die Existenz eines zulässigen Produktionsplans finden. In Abbildung 5.5 lässt sich für eine Bestellung  $\sigma_{k,i}$ , die frühestmöglich zum Zeitpunkt  $\tau_{\sigma_{k,i}}$  ausgeliefert werden kann, feststellen, dass ihre Produktion frühestens zum Zeitpunkt

$$r'_{\sigma_{k,i}} := \max \{0, \tau_{\sigma_{k,i}} - B - p_{\sigma_{k,i}}\}$$

begonnen werden kann. Auf der anderen Seite muss die Produktion der Bestellung spätestens dann beendet sein, wenn der Transporter das Depot verlässt. Dies muss spätestens zum Zeitpunkt

$$d'_{\sigma_{k,i}} := \tau_{\sigma_{k,1}} + \delta_k - t_{0,\sigma_{k,1}}$$

der Fall sein.

Betrachten wir ein (allgemeines) Zeitfenster  $[\vartheta_r, \vartheta_d]$ , so stellen wir fest, dass in diesem Zeitfenster jede angenommene Bestellung  $i$  mit  $\vartheta_i \leq r'_i$  und  $d'_i \leq \vartheta_d$  produziert werden muss, wobei die Produktion einer solchen Bestellung  $p_i$  Zeiteinheiten benötigt. Die Menge dieser Bestellungen sei mit

$$I_\sigma^{[\vartheta_r, \vartheta_d]} := \{i \in I_\sigma \text{ mit } \vartheta_r \leq r'_i \text{ und } d'_i \leq \vartheta_d\}$$

bezeichnet. Es muss dementsprechend

$$\sum_{i \in I_\sigma^{[\vartheta_r, \vartheta_d]}} p_i \leq \vartheta_d - \vartheta_r \quad (5.7.4)$$

für jedes Zeitfenster  $[\vartheta_r, \vartheta_d]$  gelten, damit eine zulässige Lösung  $(\sigma, \tau, s)$  existiert.

<sup>5</sup>Dies ist separat zu berechnen, stellt aber keine Schwierigkeit dar.

Die Untersuchung lässt sich auf wenige Zeitfenster einschränken, nämlich auf alle Zeitfenster  $[\vartheta_r, \vartheta_d]$ , für deren Inneres

$$] \vartheta_r, \vartheta_d [ = \bigcup_{i \in I_\sigma^{[\vartheta_r, \vartheta_d]}} ] r'_i, d'_i [ \quad (5.7.5)$$

gilt (für die übrigen Zeitfenster genügt es, jeweils die einzelnen Gebiete der Menge  $\bigcup_{i \in I_\sigma^{[\vartheta_r, \vartheta_d]}} ] r'_i, d'_i [$  zu untersuchen). Da dies  $\mathcal{O}(|I_\sigma|^2)$  viele sind, lässt sich die Überprüfung von Bedingung (5.7.4) für alle Zeitfenster, auf die Bedingung (5.7.5) zutrifft, in polynomieller Laufzeit durchführen. Sollte für ein Zeitfenster  $[\vartheta_r, \vartheta_d]$  Bedingung (5.7.4) nicht gelten, so ist  $\sigma$  unzulässig.

### 5.7.3 Heuristische Bestimmung zulässiger Produktionsstartzeitpunkte und Auslieferungszeitpunkte

Werden die wie zuvor bestimmten frühesten Belieferungszeitpunkten  $\tau_{\sigma_{k,i}}$  als tatsächliche Belieferungszeitpunkte angenommen, so lassen sich mit diesen für alle Bestellungen  $\sigma_{k,i} \in I_\sigma$  früheste Produktionsstartzeitpunkte

$$r_{\sigma_{k,i}} = \max \left\{ 0, \tau_{\sigma_{k,i}} - B - p_{\sigma_{k,i}} \right\}$$

sowie späteste Produktionsendzeitpunkte

$$d_{\sigma_{k,i}} = \tau_{\sigma_{k,1}} - t_{0,\sigma_{k,1}}$$

ermitteln.

Mit Hilfe der frühesten Produktionsstart- und spätesten Produktionsendzeitpunkte  $r_i$  beziehungsweise  $d_i$  nebst der Produktionsdauern  $p_i$  für alle  $i \in I_\sigma$  lässt sich die Produktion als 1-Maschinen-Reihenfolgeproblem formulieren. Gesucht sind Produktionsstartzeiten  $s_i$  für alle  $i \in I_\sigma$ , sodass die Produktion überschneidungsfrei stattfindet und  $s_i \in [r_i, d_i - p_i]$  gilt.

Ein solches Reihenfolgeproblem ist im Allgemeinen  $\mathcal{NP}$ -schwierig, weshalb wir uns auf heuristische Lösungsversuche beschränken wollen – andernfalls könnte auch direkt eine exakte Lösung für  $MIP_\sigma^{feas}$  gesucht werden. Dafür sollen mehrere Lösungsansätze verfolgt werden.

Mit der *frühester-Produktionsstartzeitpunkt-Regel* („Earliest Release Date first rule“, vgl. [Pin12]) wird dabei die Produktion der angenommenen Bestellungen aufsteigend nach dem frühesten Produktionsstartzeitpunkt geplant. Seien die angenommenen Bestellungen als  $i_1, \dots, i_{|I_\sigma|}$  gegeben, welche nicht-absteigend nach  $r_{i_j}$  sortiert seien. Es gilt also  $r_{i_j} \leq r_{i_l}$ , falls  $j < l$  gilt. Es werden nun die Produktionsstartzeiten  $s_i$  wie folgt rekursiv festgelegt.

- $s_{i_1} := r_{i_1}$
- $s_{i_j} := \max \left( r_{i_j}, s_{i_{j-1}} + p_{i_{j-1}} \right)$  für  $j = 2, \dots, |I_\sigma|$ .

Gilt nun  $s_i + p_i \leq d_i$  für alle Bestellungen  $i \in I_\sigma$ , so ist ein zulässiger Produktionsplan  $s$  gefunden und  $(\sigma, \tau, s)$  ist eine zulässige Lösung. Gilt wiederum  $s_i + p_i > d_i$ , so konnte mit diesem Ansatz kein zulässiger Produktionsplan gefunden werden. In diesem Fall kann der nachfolgenden Ansatz verfolgt werden.

Analog zur frühesten-Produktionsstartzeitpunkt-Regel lässt sich die *spätester-Produktionsendzeitpunkt-Regel* formulieren. Bei dieser wird die Produktion der angenommenen Bestellungen beginnend mit der Bestellung mit dem spätesten Produktionsendzeitpunkt geplant. Dafür seien die angenommenen Bestellungen als  $i_1, \dots, i_{|I_\sigma|}$  gegeben, welche nicht-aufsteigend nach  $d_{i_j}$  sortiert seien. Es gilt also  $d_{i_j} \geq d_{i_l}$ , falls  $j < l$  gilt. Die Produktionsstartzeiten werden entsprechend dem Nachfolgenden festgelegt.

- $s_{i_1} := d_{i_1} - p_{i_1}$
- $s_{i_j} := \max(d_{i_j} - p_{i_j}, s_{i_{j-1}} - p_{i_j})$  für  $j = 2, \dots, |I_\sigma|$ .

Wenn mit den so festgelegten Produktionsstartzeiten  $s_i \geq r_i$  für alle Bestellungen  $i \in I_\sigma$  gilt, so ist ein zulässiger Produktionsplan  $s$  gefunden und  $(\sigma, \tau, s)$  ist eine zulässige Lösung.

Falls mit diesen Regeln kein zulässiger Produktionsplan gefunden werden konnte, so werden beide Regeln mit *spätesten Belieferungszeitpunkten* erneut angewendet. Diese spätesten Belieferungszeiten berechnen sich mittels

$$\tau_{\sigma_k, i} := \begin{cases} a_{\sigma_k, i} + \delta_k & , \text{ falls } i = 1 \\ \max(a_{\sigma_k, i}, \tau_{\sigma_k, i-1} + t_{\sigma_k, i-1, \sigma_k, i}) & , \text{ falls } i > 1. \end{cases} \quad (5.7.6)$$

Dabei ist  $\delta_k$  der bei der Berechnung der frühesten Belieferungszeitpunkte bestimmte Zeitraumen, um den die Abfahrt von Transporter  $k$  maximal verzögert werden kann, ohne eine Bestellung verspätet auszuliefern.

Lassen sich weder mit der frühesten-Produktionsstartzeitpunkt-Regel noch mit der spätesten-Produktionsendzeitpunkt-Regel zulässige Produktionsstartzeitpunkte finden, wird als letzte Heuristik das als „erweiterte Jackson-Regel“ [HS92] oder „Schrage-Algorithmus“ [Car82] bekannte Verfahren mit spätesten Belieferungszeitpunkten angewendet. Bei diesem werden die Bestellungen sukzessive in der späteren Produktionsreihenfolge eingeplant. Der Ablauf des Schrage-Algorithmus wird in Algorithmus 2 dargestellt. Die Grundidee des Verfahrens lässt sich als „Beginne zu jedem Entscheidungszeitpunkt mit der Produktion derjenigen verfügbaren Bestellung, welche als erste beendet sein muss.“ beschreiben (siehe Algorithmus 2, Zeile 7).

---

#### Algorithmus 2 Schrage-Algorithmus

---

- 1: Setze  $I' := I_\sigma$ .
  - 2: Setze  $t := \min_{i \in I_\sigma} r_i$ .
  - 3: **while**  $I' \neq \emptyset$  **do**
  - 4:   **if**  $\min_{i \in I'} r_i < t$  **then**
  - 5:     Setze  $t := \min_{i \in I'} r_i$ .
  - 6:   **end if**
  - 7:   Bestimme  $i := \arg \min_{\substack{i \in I': r_i \leq t}} d_i$
  - 8:   Setze  $s_i := t$ ,  $I' := I' \setminus \{i\}$ ,  $t = s_i + p_i$
  - 9: **end while**
- 

Der Vorteil der vorgestellten Algorithmen besteht darin, dass ihre Laufzeit mit  $\mathcal{O}(|I_\sigma| \cdot \log |I_\sigma|)$ , die durch das Sortieren der Bestellungen (bzw. beim Schrage-Algorithmus auch durch die Verwendung des Min-Heaps, der für die Bestimmung der jeweils einzuplanenden Bestellung  $i$  mit minimalem  $r_i$  notwendig ist) bestimmt ist, sehr gering ist.

### 5.8 Die untere Schrankenfunktion

Die untere Schrankenfunktion  $\bar{\chi}(L_\sigma(J))$  für eine Lösungsraumteilmenge  $L_\sigma(J)$  soll eine Antwort auf die Frage liefern, wie klein der Zielfunktionswert einer  $J$ -fortsetzenden  $\sigma$ -Lösung höchstens werden kann. Dazu soll im Folgenden ein („einfach“ zu lösendes) Problem  $\mathcal{P}(L_\sigma(J))$  konstruiert werden, mit dessen optimalem Zielfunktionswert eine untere Schranke  $\bar{\chi}(L_\sigma(J))$  für die Zielfunktionswerte  $\chi(\sigma')$  aller Lösungen  $(\sigma', \tau', s')$  in der Lösungsraumteilmenge  $L_\sigma(J)$  berechnet werden kann.

Die Idee hinter der Konstruktion dieses Problems  $\mathcal{P}(L_\sigma(J))$  ist es, diejenigen Wege zu betrachten, die ein Transporter  $k$  nach Auslieferung der jeweils letzten Bestellung  $\sigma_{k,n_k}$  in  $\sigma_k$  noch bis zur Rückkehr ins Depot zurücklegen kann. Auf diesen Wegen kann er gegebenenfalls weitere Bestellungen ausliefern, wodurch sich unter Umständen die Kosten im Vergleich zum Auslieferungsplan  $\sigma$  verringern. Allerdings wird die Möglichkeit der Auslieferung weiterer Bestellungen auch durch zu berücksichtigende Aspekte wie die begrenzte Transporterkapazität, die begrenzte Produktionskapazität, das Höchstalter der bestellten Güter und die einzuhaltenden Belieferungszeitfenster eingeschränkt.

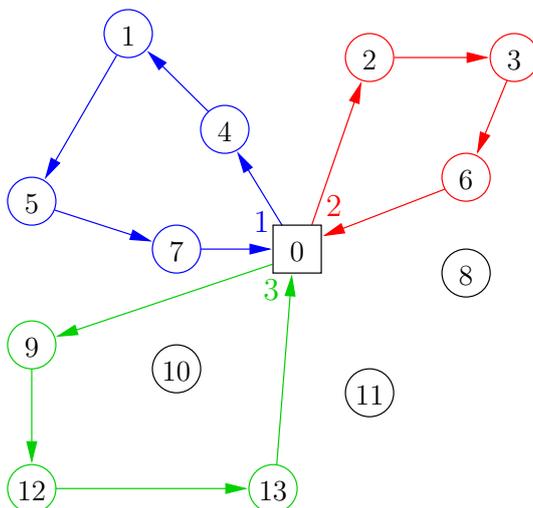


Abbildung 5.6: Beispiel eines zulässigen Auslieferungsplans

Abbildung 5.6 zeigt für ein Problem mit 13 Bestellungen und 3 Transportern einen zulässigen Auslieferungsplan  $\sigma$  mit  $\sigma_1 = (4, 1, 5, 7)$ ,  $\sigma_2 = (2, 3, 6)$  und  $\sigma_3 = (9, 12, 13)$ . Der Zielfunktionswert einer zu  $\sigma$  gehörigen Lösung lässt sich gegebenenfalls durch Annahme von Bestellungen 8, 10 oder 11 verbessern. Dafür soll untersucht werden, ob sich nach der jeweils letzten Bestellung (7, 6 bzw. 13) einer Auslieferungsreihenfolge noch weitere Bestellungen einfügen lassen, sodass dies zu einer Lösung mit besserem Zielfunktionswert führt.

Dies lässt sich in speziellen *Fortsetzungsgraphen*, wie sie in Abbildung 5.7 dargestellt sind, untersuchen. Der Fortsetzungsgraph der unterschiedlichen Transporters wird dabei in der jeweiligen Farbe dargestellt. Die Möglichkeiten, wie von der jeweils letzten Bestellung in der jeweiligen Auslieferungsreihenfolge (dick umrandet) noch weitere Bestellungen ausliefert werden können, lassen sich in diesen Graphen als Wege im jeweiligen Graphen von der jeweils letzten Bestellung der Auslieferungsreihenfolge  $\sigma_k$  zum Depot 0 zu finden. Dabei enthalten diese Graphen häufig nur wenige Kanten, da aufgrund von Zeitfenstern, der Transporterkapazität etc. nicht notwen-

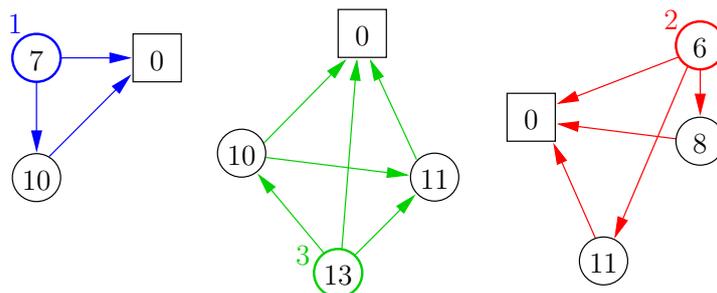


Abbildung 5.7: Beispiel der Fortsetzungsgraphen eines zulässigen Auslieferungsplans

digerweise jede Bestellung nach jeder anderen ausgeliefert werden kann. Außerdem wird durch weitere Entscheidungsschranken, die im Folgenden noch erläutert werden, die Wahl von Wegen in diesen Graphen weiter eingeschränkt.

Mittels der Idee, in solchen Fortsetzungsgraphen unter weiteren Nebenbedingungen „günstige“ Wege von der jeweils letzten Bestellung zum Depot zu suchen, soll nun  $\mathcal{P}(L_\sigma(J))$  konstruiert werden. Dabei soll  $\mathcal{P}(L_\sigma(J))$  nur dann konstruiert werden, wenn jede Auslieferungsreihenfolge entweder geschlossen ist oder mindestens eine Bestellung enthält, da ansonsten mit der folgenden Idee keine untere Schranke berechnet werden kann. Es soll also im Falle  $\sigma_k = ()$  für ein  $k \in J$  die untere Schrankenfunktion  $\bar{\chi}(L_\sigma(J)) := -\infty$  gesetzt werden.<sup>6</sup>

Bevor für eine spezielle Lösungsraumteilmenge  $L_\sigma(J)$  weitere Überlegungen angestellt werden, soll an dieser Stelle entwickelt werden, welche Bestellungen allgemein in einer Auslieferungsreihenfolge aufeinander folgen können. Diese Information sei durch

$$E = \{(i, j) \mid i, j \in N, i \neq j, a_i + t_{ij} \leq b_j, t_{0,i} + \max(t_{ij}, a_j - b_i) \leq B, q_i + q_j \leq Q\}$$

gegeben, d. h. gilt  $(i, j) \in E$ , so ist Bestellung  $j$  ein potentieller Nachfolger von Bestellung  $i$  in einer zulässigen Auslieferungsreihenfolge. Dazu muss Bestellung  $j$  bezüglich der Zeitfenster nach Bestellung  $i$  ausgeliefert werden können, es muss das Höchstalter der bestellten Güter beachtet werden können und die Kapazität eines Transporters muss ausreichen, um beide Bestellungen mit dem gleichen Transporter auszuliefern. Die Menge  $E$  ist dabei unabhängig von einem Auslieferungsplan und kann demzufolge in einem Verfahren a priori bestimmt werden.

Die im Anschluss an Auslieferungsreihenfolge  $\sigma_k$  potentiell noch auslieferbaren Bestellungen lassen sich durch

$$N_\sigma^{(k)} := \left\{ i \in N \setminus I_\sigma \mid (\sigma_{k,l}, i) \in E \forall l = 1, \dots, n_k, q_i \leq Q - \sum_{l=1}^{n_k} q_{\sigma_{k,l}} \right\}$$

beschreiben, diese müssen also potentieller Nachfolger jeder Bestellung in  $\sigma_k$  sein und durch ihre Hinzunahme darf die Transporterkapazität nicht überschritten werden.

<sup>6</sup>Demzufolge sollte in dem Verfahren möglichst schnell erreicht werden, dass  $\sigma_k \neq ()$  für alle  $k \in J$  bei jeder noch zu untersuchenden Lösungsraumteilmenge  $L_\sigma(J)$  gilt und somit sinnvolle untere Schranken berechnet werden können. Näheres dazu folgt in Abschnitt 5.9.

Die sich an  $\sigma_k$  anschließende Belieferung kann als Weg vom letzten Zielort  $\sigma_{k,n_k}$  zum Depot 0 verstanden werden. Welche Bestellungen bzw. Zielorte auf einem solchen Weg aufeinander folgen können, sei mittels

$$E_\sigma^{(k)} := \left\{ (i, j) \in E \mid i, j \in N_\sigma^{(k)}, q_i + q_j \leq Q - \sum_{l=1}^{n_k} q_{\sigma_{k,l}} \right\} \\ \cup \left\{ (\sigma_{k,n_k}, j) \mid j \in N_\sigma^{(k)} \cup \{0\} \right\} \cup \left\{ (i, 0) \mid i \in N_\sigma^{(k)} \right\}$$

beschrieben. Diese Bestellungen müssen also aufeinander folgend auslieferbar sein, im Anschluss an die Auslieferungsreihenfolge  $\sigma_k$  belieferbar sein und dürfen gemeinsam nicht die verbleibende Transporterkapazität überschreiten. Dazu kommt, dass alle Bestellungen aus  $N_\sigma^{(k)}$  und das Depot auf die letzte Bestellung in der Auslieferungsreihenfolge folgen können, sowie dass das Depot auf jede Bestellung aus  $N_\sigma^{(k)}$  folgen kann. Der Weg kann dabei als „Knoten“ Elemente der Menge

$$V_\sigma^{(k)} := N_\sigma^{(k)} \cup \{\sigma_{k,n_k}, 0\}$$

enthalten.

Für jedes  $k \in J$  ist nun also ein Weg von Knoten  $\sigma_{k,n_k}$  zum Knoten 0 im Fortsetzungsgraphen  $(V_\sigma^{(k)}, E_\sigma^{(k)})$  gesucht. Für alle geschlossenen Auslieferungsreihenfolgen  $k \in K \setminus J$  seien zur Vereinheitlichung der folgenden Überlegungen  $(V_\sigma^{(k)}, E_\sigma^{(k)}) = (\emptyset, \emptyset)$  sowie  $N_\sigma^{(k)} = \emptyset$  gesetzt. Dies ist bei der Betrachtung der Produktionskapazitäten für mehrere Transporter relevant.

Notwendig<sup>7</sup> dafür, dass die gesuchten Wege von Knoten  $\sigma_{k,n_k}$  zum Knoten 0 auch einer zulässigen Fortsetzung entsprechen, ist, dass gewisse „Restressourcen“ nicht überschritten werden:

1. Die Menge der zusätzlich transportierten Güter darf die verbleibende Kapazität des Transporters nicht überschreiten. Dabei ist die verbleibende Kapazität des Transporters durch

$$Q - \sum_{i=1}^{n_k} q_{\sigma_{k,i}}$$

gegeben.

2. Die Fahrzeit bis zum letzten Zielort in der Fortsetzung darf nicht länger sein als die durch das Höchstalter beschränkte verbleibende Auslieferungszeit nach Auslieferung von Bestellung  $\sigma_{k,n_k}$ . Abbildung 5.8 illustriert dies. Die Produktion der letzten Bestellung, die

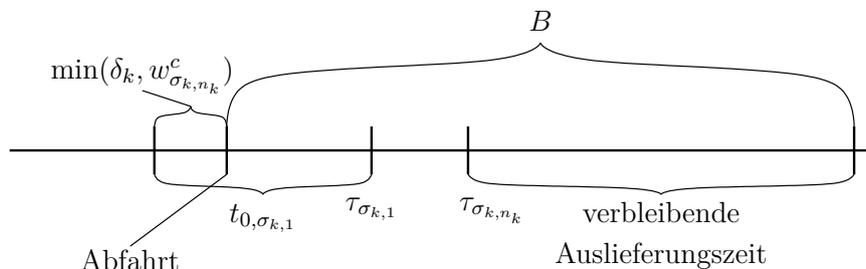


Abbildung 5.8: Verbleibende Auslieferungszeit

<sup>7</sup>aber nicht hinreichend

von Transporter  $k$  ausgeliefert werden soll, muss spätestens zum Zeitpunkt der Abfahrt des Transporters beim Depot beendet sein. Diese findet frühestmöglich zum Zeitpunkt  $\tau_{\sigma_{k,1}} - t_{0,\sigma_{k,1}}$  statt, kann aber um maximal  $\min(\delta_k, w_{\sigma_{k,n_k}}^c)$  Zeiteinheiten verzögert werden, ohne dass sich die Auslieferung von Bestellung  $\sigma_{k,n_k}$  verzögert. Insgesamt vergehen von der Abfahrt beim Depot bis zum Ausliefern der Bestellung  $\sigma_{k,n_k}$  somit mindestens  $\tau_{\sigma_{k,n_k}} - (\tau_{\sigma_{k,1}} - t_{0,\sigma_{k,1}} + \min(\delta_k, w_{\sigma_{k,n_k}}^c))$  Zeiteinheiten, also verbleiben noch

$$B - \left( \tau_{\sigma_{k,n_k}} - \left( \tau_{\sigma_{k,1}} - t_{0,\sigma_{k,1}} + \min(\delta_k, w_{\sigma_{k,n_k}}^c) \right) \right)$$

Zeiteinheiten, in denen nach der Auslieferung von Bestellung  $\sigma_{k,n_k}$  weitere Bestellungen ausgeliefert werden können.

- Die zusätzlich zu produzierenden Güter dürfen die Produktionskapazität nicht überschreiten. Bei Betrachtung eines einzelnen Transporters  $k$  ergibt sich, dass das Höchstalter der Güter einer von diesem Transporter auszuliefernden Bestellung nicht vor dem Auslieferungszeitpunkt abgelaufen sein darf. Wie in Abbildung 5.9 dargestellt wird, vergehen  $t_{0,\sigma_{k,1}}$

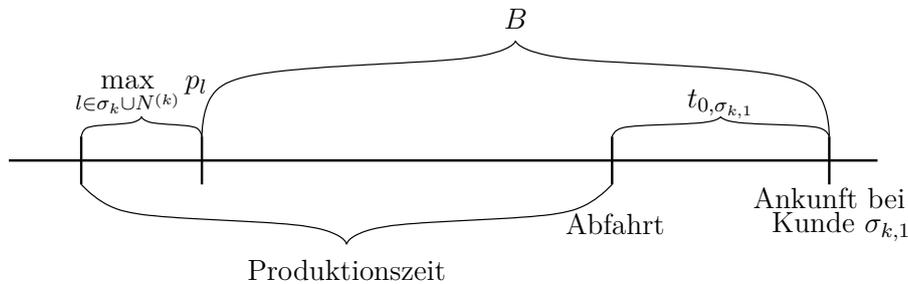


Abbildung 5.9: Produktionszeit für einen einzelnen Transporter

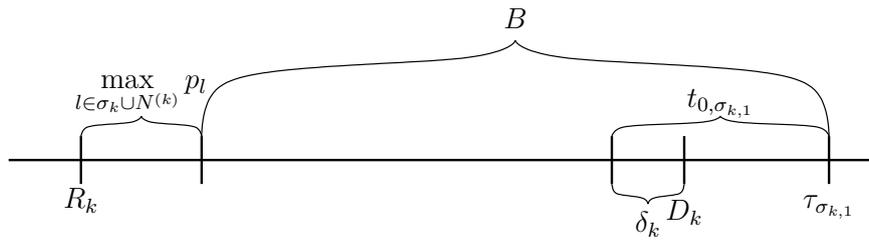
Zeiteinheiten zwischen der Abfahrt des Transporters  $k$  beim Depot und der Auslieferung der ersten Bestellung  $\sigma_{k,1}$ . Das heißt, dass frühestens  $B - t_{0,\sigma_{k,1}}$  Zeiteinheiten vor der Abfahrt des Transporters beim Depot die Produktion der ersten von Transporter  $k$  auszuliefernden Bestellung beendet sein muss. Als diese erste Bestellung kommen alle Bestellungen aus  $\sigma_k$  sowie aus  $N^{(k)}$  potentiell in Frage, also kann mit der Produktion der ersten Bestellung frühestens  $B - t_{0,\sigma_{k,1}} + \max_{l \in \sigma_k \cup N^{(k)}} p_l$  Zeiteinheiten vor der Abfahrt begonnen werden.

Der Zeitpunkt der Abfahrt wiederum stellt den spätestmöglichen Fertigstellungszeitpunkt für eine von Transporter  $k$  auszuliefernde Bestellung dar, sodass maximal

$$B - t_{0,\sigma_{k,1}} + \max_{l \in \sigma_k \cup N^{(k)}} p_l$$

Zeiteinheiten für die Produktion der von Transporter  $k$  auszuliefernden Bestellungen zur Verfügung stehen.

Bei Betrachtung der Produktionskapazität lassen sich aber auch analog zu den Überlegungen für einzelne Bestellungen in Abschnitt 5.7.2 für jeden Transporter  $k$  relaxierte Produktionszeitfenster  $[R_k, D_k]$  bestimmen. Der spätestmögliche Abfahrtszeitpunkt entspricht einem spätesten Beendigungszeitpunkt für die Produktion einer von Transporter  $k$  auszuliefernden Bestellung. Wie in Abbildung 5.10 ersichtlich wird, lässt sich dieser späteste Beendigungszeitpunkt der Produktion einer von Transporter  $k$  auszuliefernden Bestellung aus dem frühestmöglichen Auslieferungszeitpunkt  $\tau_{\sigma_{k,1}}$  der ersten von Transporter  $k$


 Abbildung 5.10: Relaxiertes Produktionszeitfenster für die Bestellungen von Transporter  $k$ 

auszuliefernden Bestellung, der Fahrtzeit  $t_{0,\sigma_{k,1}}$  zu deren Zielort und der maximalen Abfahrtszeitverzögerung  $\delta_k$  mittels

$$D_k := \tau_{\sigma_{k,1}} - t_{0,\sigma_{k,1}} + \delta_k$$

berechnen. Analog zu den kurz zuvor angestellten Überlegungen zur Produktionszeit ist auch ein frühester Produktionsstartzeitpunkt  $B + \max_{l \in \sigma_k \cup N^{(k)}} p_l$  Zeiteinheiten vor der frühestmöglichen Belieferung der ersten von Transporter  $k$  auszuliefernden Bestellung. Außerdem kann die Produktion frühestens zum Zeitpunkt 0 gestartet werden. Es ergibt sich also

$$R_k := \max \left\{ 0, \tau_{\sigma_{k,1}} - B - \max_{l \in \sigma_k \cup N^{(k)}} p_l \right\}.$$

Betrachtet man eine nichtleere Teilmenge  $K' \subseteq K$  der Transporter, so können analog zu den Überlegungen aus Abschnitt 5.7.2 für die Vereinigung von Zeitfenstern

$$\bigcup_{k \in K'} [R_k, D_k] \subseteq \left[ \min_{k \in K'} R_k, \max_{k \in K'} D_k \right]$$

weitere Beschränkungen an die Produktion der von den Transportern aus  $K'$  auszuliefernden Bestellungen gefolgert werden. Die Produktion muss im Zeitfenster  $\left[ \min_{k \in K'} R_k, \max_{k \in K'} D_k \right]$  stattfinden, also ist die Produktionszeit für ebendiese Bestellungen durch

$$\max_{k \in K'} D_k - \min_{k \in K'} R_k$$

beschränkt. Dies führt, je nachdem, wie groß die Überschneidung der Zeitfenster  $[R_k, D_k]$  der Transporter  $k \in K'$  ist, gegebenenfalls zu stärkeren Beschränkungen als die Betrachtung einzelner Transporter. Eine genauere Formulierung dieser Entscheidungsschranke folgt an späterer Stelle.

Es stellt sich jetzt die Frage, wie der „Verbrauch“ dieser Restressourcen von Transporterkapazität, Fahrtzeit und Produktionszeit vonstatten geht. Wenn eine Kante  $(i, j) \in E_\sigma^{(k)}$  in einem Weg enthalten ist, entspricht dies dem Fahren von Ort  $i$  zu Ort  $j$ . Hierfür kann angegeben werden, wie viele der jeweiligen Restkapazitäten durch diese Fahrt verbraucht werden:

1. Verbrauch an Transporterkapazität:

$$\zeta_{ij}^q := \mathbb{1}_{j \neq 0} q_j$$

Der Besuch des Orts  $j$  (wenn  $j$  nicht dem Depot 0 entspricht) verbraucht die entsprechende Größe  $q_j$  der Bestellung an Transporterkapazität.

2. Verbrauch an Fahrtzeit (nebst Mindestwartezeit), während der bestellte Güter altern:

$$\zeta_{ijk}^t := \mathbb{1}_{j \neq 0}(t_{ij} + \max(0, (a_j - b_i) - t_{ij}))$$

Bei der abschließenden Fahrt zum Depot wird das Höchstalter keiner Bestellung überschritten, deswegen wird bei derartigen Fahrten keine Fahrtzeit verbraucht. Ansonsten erfolgt ein Verbrauch von Fahrtzeit in Höhe der Fahrtzeit  $t_{ij}$  von Zielort  $i$  zu Zielort  $j$  sowie der eventuell zusätzlichen Wartezeit  $(a_j - b_i) - t_{ij}$ , falls der Abstand der Belieferungszeitfenster größer ist als die Fahrtzeit  $t_{ij}$ .

3. Verbrauch an Produktionskapazität:

$$\zeta_{ij}^p := \mathbb{1}_{j \neq 0} p_j$$

Jede weitere eingeplante Bestellung  $j$  (wenn  $j$  nicht dem Depot entspricht) muss auch produziert werden, dies verbraucht  $p_j$  Einheiten der Produktionszeit.

Falls die Kante  $(i, j)$  im Fortsetzungsgraphen  $(V_\sigma^{(k)}, E_\sigma^{(k)})$  auf dem Weg von Knoten  $\sigma_{k, n_k}$  zum Knoten 0 gewählt wird, verbessert sich der Zielfunktionswert im Vergleich zu  $\chi(\sigma)$  dabei um

$$\bar{c}_{ijk} := \mathbb{1}_{j \neq 0}(\hat{e}_j + f_j) - c_{ij} + \mathbb{1}_{i = \sigma_{k, n_k}} c_{i, 0}$$

durch die Verkaufserlöse nebst wegfallender Strafen, die anfallenden Fahrtkosten und die gegebenenfalls wegfallende direkte Rückkehr von Zielort  $\sigma_{k, n_k}$  zum Depot, wenn  $\sigma_{k, n_k}$  ein Nachfolger zugeordnet wird.<sup>8</sup>

Die Wahl dieser Wege in Graphen  $(V_\sigma^{(k)}, E_\sigma^{(k)})$  soll dabei nicht für jedes  $k \in J$  einzeln vorgenommen werden, da sonst ein Knoten  $i \neq 0$  eventuell in mehreren Wegen vorkommen könnte. Gesucht wird also in den Graphen  $(V_\sigma^{(k)}, E_\sigma^{(k)})$  mit  $k \in J$  jeweils ein Weg, sodass der Zielfunktionswert insgesamt maximal vergrößert wird, wobei diese Wege paarweise knotendisjunkt<sup>9</sup> sein müssen (und weitere Nebenbedingungen beachtet werden müssen). Diese Zielsetzung, unter gewissen Entscheidungsschranken die Verbesserung des Zielfunktionswerts zu maximieren, lässt sich wie folgt als gemischt-ganzzahliges lineares Programm formulieren.

Als Entscheidungsvariablen seien

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{falls Ort } j \text{ direkt nach Ort } i \text{ von Transporter } k \text{ besucht wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für  $k \in J$ ,  $(i, j) \in E_\sigma^{(k)}$  gegeben.

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{k \in J} \sum_{(i, j) \in E_\sigma^{(k)}} \bar{c}_{ijk} \cdot x_{ijk} \\ \text{u.d.N.} & \sum_{(\sigma_{k, n_k}, j) \in E_\sigma^{(k)}} x_{\sigma_{k, n_k}, j, k} = 1 \quad \forall k \in J \end{array} \quad (5.8.1)$$

$$\sum_{(i, j) \in E_\sigma^{(k)}} x_{ijk} = \sum_{(j, l) \in E_\sigma^{(k)}} x_{jlk} \quad \forall k \in J, j \in N_\sigma^{(k)} \quad (5.8.2)$$

<sup>8</sup>Falls dieser Nachfolger wiederum das Depot 0 ist, so ergibt sich  $\bar{c}_{\sigma_{k, n_k}, 0} = 0$ , was angesichts der Tatsache, dass in diesem Fall die Auslieferungsreihenfolge  $\sigma_k$  nicht verlängert wird, plausibel ist.

<sup>9</sup>abgesehen vom letzten Knoten, der dem Depot entspricht

$$\sum_{\substack{(i,j) \in E_\sigma^{(k)} \\ i,j \in S}} x_{ijk} \leq |S| - 1 \quad \forall k \in J, S \subset N^{(k)}, S \neq \emptyset \quad (5.8.3)$$

$$\sum_{k \in J} \sum_{(i,j) \in E_\sigma^{(k)}} x_{ijk} \leq 1 \quad \forall j \in \bigcup_{k \in J} N^{(k)} \quad (5.8.4)$$

$$\sum_{l \in \sigma_k} q_l + \sum_{(i,j) \in E_\sigma^{(k)}} x_{ijk} \cdot \zeta_{ij}^q \leq Q \quad \forall k \in J \quad (5.8.5)$$

$$\sum_{(i,j) \in E_\sigma^{(k)}} x_{ijk} \cdot \zeta_{ijk}^t \leq B - \left( \tau_{\sigma_k, n_k} - \left( \tau_{\sigma_k, 1} - t_{0, \sigma_k, 1} + \min \left( \delta_k, w_{\sigma_k, n_k}^c \right) \right) \right) \quad \forall k \in J \quad (5.8.6)$$

$$\sum_{l \in \sigma_k} p_l + \sum_{(i,j) \in E_\sigma^{(k)}} x_{ijk} \cdot \zeta_{ij}^p \leq B + \max_{l \in \sigma_k \cup N^{(k)}} p_l - t_{0, \sigma_k, 1} \quad \forall k \in J \quad (5.8.7)$$

$$\sum_{k \in K'} \left( \sum_{l \in \sigma_k} p_l + \sum_{(i,j) \in E_\sigma^{(k)}} x_{ijk} \cdot \zeta_{ij}^p \right) \leq \max_{k \in K'} D_k - \min_{k \in K'} R_k \quad \forall K' \subseteq K, K' \neq \emptyset \quad (5.8.8)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in J, (i, j) \in E_\sigma^{(k)} \quad (5.8.9)$$

Dabei entsprechen  $\tau_i$ ,  $w_i^c$  und  $\delta_k$  denjenigen aus (5.7.6), (5.7.2) und (5.7.3).

Nebenbedingung (5.8.1) stellt sicher, dass von jedem Knoten  $\sigma_{k, n_k}$  aus genau ein Weg startet. Nebenbedingung (5.8.2) stellt sicher, dass auf jedem Fortsetzungsgraphen der Eingangsgrad jedes Zwischenknotens gleich seinem Ausgangsgrad ist. Durch Nebenbedingung (5.8.3) werden Subtouren vermieden (vgl. [DFJ54]). Dass jeder Knoten in maximal einem Weg enthalten ist (also die Wege knotendisjunkt sind), wird durch Nebenbedingung (5.8.4) sichergestellt. Nebenbedingung (5.8.5) stellt die Einhaltung der Transporterkapazitätsrestriktion sicher. Dass die verbleibende Fahrtzeit eines Transporters  $k \in J$  nicht überschritten wird, wird durch Nebenbedingung (5.8.6) bewirkt. Nebenbedingung (5.8.7) stellt die Einhaltung einer maximalen Produktionszeit für einen einzelnen Transporter  $k \in J$  sicher. Durch (5.8.8) wird für eine Teilmenge  $K \subseteq M$  der Transporter verhindert, dass für die von diesen Transportern auszuliefernden Bestellungen mehr Produktionszeit benötigt wird, als zur Verfügung steht. Als letztes wird mit (5.8.9) die Binarität der Entscheidungsvariablen gefordert.

Zu jedem zulässigen Auslieferungsplan  $\sigma' \in F_\sigma(J)$  lässt sich eine entsprechende Lösung dieses MIP bestimmen, indem die  $x_{ijk}$  entsprechend dem gesetzt werden, wie  $\sigma$  durch  $\sigma'$  fortgesetzt wird. Die zur Konstruktion dieses Modells bemühten Entscheidungsschranken müssen auch von jedem zulässigen Auslieferungsplan  $\sigma' \in F_\sigma(J)$  eingehalten werden, somit ist die Lösungsmenge dieses MIP eine Obermenge der Menge aller zulässigen Lösungen, die einem Auslieferungsplan  $\sigma' \in F_\sigma(J)$  entsprechen. Deswegen liefert eine optimale Lösung dieses MIP eine obere Schranke für die Verbesserung des Zielfunktionswertes  $\chi(\sigma)$  von  $\sigma$ .

Zwar lässt sich dieses MIP aufgrund der Subtoureliminationsbedingungen (5.8.3) und der Binaritätsbedingungen (5.8.9) nur schwierig exakt lösen, eine exakte Lösung des MIP ist allerdings auch nicht notwendig, da das Ziel in diesem Abschnitt ist, eine untere Schrankenfunktion für die Zielfunktionswerte der Lösungen in  $L_\sigma(J)$  zu bestimmen. Deswegen soll das vorgestellte MIP relaxiert werden, indem die Nebenbedingungen (5.8.3) auf  $S$  mit  $|S| = 2$  beschränkt werden und die Binaritätsbedingungen (5.8.9) zu  $x_{ijk} \in [0, 1]$  relaxiert werden. Des Weiteren lassen sich die Nebenbedingungen (5.8.8) so beschränken, dass nur diejenigen Transporterteilmengen  $K'$

betrachtet werden, die nicht von anderen Transporterteilmengen dominiert werden. Eine Transporterteilmenge  $\hat{K}$  werde von Transporterteilmenge  $K'$  dominiert, falls

$$K' \subsetneq K$$

und

$$\left[ \min_{\hat{k} \in \hat{K}} R_{\hat{k}}, \max_{\hat{k} \in \hat{K}} D_{\hat{k}} \right] = \left[ \min_{k' \in K'} R_{k'}, \max_{k' \in K'} D_{k'} \right]$$

gelten, also falls  $\hat{K}$  bei gleichem relaxierten Produktionszeitfenster nur eine echte Teilmenge der Transporter von  $K'$  enthält. Es genügt also, alle Zeitfenster  $[R_{k'}, D_{\tilde{k}}]$  mit  $k', \tilde{k} \in K$  und  $R_{k'} < D_{\tilde{k}}$  zu betrachten, also maximal  $\mathcal{O}(m^2)$  Zeitfenster (diese Anzahl lässt sich durch weitere Überlegungen auch weiter verringern).

Durch die Relaxationen der Nebenbedingungen (5.8.3) und (5.8.9) sowie durch die Überlegungen zu Nebenbedingung (5.8.8) entsteht das Problem  $\mathcal{P}(L_\sigma(J))$ , ein lineares Programm mit polynomineller Anzahl an Nebenbedingungen und Entscheidungsvariablen, welches relativ einfach mittels Standardsoftware gelöst werden kann.

Ist  $x_{ijk}^*$  die optimale Lösung des Problems  $\mathcal{P}(L_\sigma(J))$ , so lässt sich die untere Schrankenfunktion als

$$\bar{\chi}(L_\sigma(J)) := \chi(\sigma) - \sum_{k \in J} \sum_{(i,j) \in E_\sigma^{(k)}} \bar{c}_{ijk} \cdot x_{ijk}^*$$

definieren.

## 5.9 Die Wahl der zu verlängernden Auslieferungsreihenfolge

Wie schon in den vorherigen Abschnitten angedeutet wurde, gibt es unterschiedliche Ansätze, diejenige Auslieferungsreihenfolge  $\sigma_k$  mit  $k \in J$  zu wählen, welche mit dem Verlängerungsoperator  $\sigma^{i \rightarrow k}$  verlängert werden soll. Diese sollen an dieser Stelle jetzt vorgestellt werden.

Da die im vorigen Abschnitt entwickelte untere Schrankenfunktion nur dann Werte  $\bar{\chi}(L_\sigma(J)) > -\infty$  annimmt, wenn  $\sigma_k \neq () \forall k \in J$  gilt, soll zuerst jeder Auslieferungsreihenfolge eine Bestellung  $i \in N$  hinzugefügt werden oder die jeweilige Auslieferungsreihenfolge geschlossen werden.

Falls ein  $k \in J$  mit  $\sigma_k = ()$  existiert, ist also

$$k = \min \{ k' \in J \mid \sigma_{k'} = () \}$$

zu wählen. Falls dies nicht der Fall ist, gibt es mehrere Möglichkeiten, mit welcher Regel die nächste zu verlängernde Auslieferungsreihenfolge gewählt wird.

Als erste Möglichkeit bietet es sich an, die jeweils erste offene Auslieferungsreihenfolge zu wählen:

$$k = \min \{ k' \in J \}. \quad (5.9.1)$$

Bei dieser Wahlregel wird also erst die erste Auslieferungsreihenfolge solange verlängert, bis sie geschlossen wird, dann die zweite usw. Dieses Vorgehen stellt einen sehr einfachen Ansatz dar.

Die zweite Möglichkeit besteht darin, die Auslieferungsreihenfolge „reihum“ zu wählen. Gelte  $\sigma = \sigma^{j \rightarrow \hat{k}}$  für ein  $j \in N$ , sei also der Auslieferungsplan  $\sigma$  aus dem Verlängern der Auslieferungsreihenfolge  $\sigma'_{\hat{k}}$  von  $\sigma'$  um  $j$  entstanden, so sei

$$k = \begin{cases} \min_{k' \in J, k' > \hat{k}} k', & \text{falls ein } k' > \hat{k} \text{ in } J \text{ existiert,} \\ \min_{k' \in J} k', & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.9.2)$$

Es wird also die offene Auslieferungsreihenfolge mit dem nach  $\hat{k}$  nächstgrößeren Index  $k'$  verlängert, bzw. falls  $\hat{k}$  der größte Index einer offenen Auslieferungsreihenfolge war, diejenige offene Auslieferungsreihenfolge mit dem kleinsten Index. Die Idee hinter der Verwendung dieser Auswahlregel ist, dass so die Auslieferungsreihenfolgen relativ „gleichmäßig“ gefüllt werden, was „gute“ untere Schranken induziert.

Der Vorteil dieser beiden Möglichkeiten ist, dass die Bestimmung von  $k$  relativ einfach ist und sich auch leicht algorithmisch umsetzen lässt. Durch den Verzicht auf weitere Informationen wird allerdings die Gelegenheit verpasst, den Branchingprozess so zu steuern, dass sich die untere Schrankenfunktion der Lösungsraumteilmengen der Verlängerungen von  $\sigma$  möglichst stark vergrößert und so gegebenenfalls Lösungsraumteilmengen früh von der weiteren Untersuchung ausgeschlossen werden können. Deshalb sollen drei weitere Wahlregeln vorgestellt werden, welche die bei der Berechnung von  $\bar{\chi}(L_\sigma(J))$  bestimmten optimalen Entscheidungsvariablen  $x_{ijk}$  nutzen.

Die Idee ist, dass es bei  $x_{\sigma_{k,n_k},j,k} = 1$  nicht sinnvoll ist, nach  $k$  zu verzweigen, da in dem Fall vermutlich  $\bar{\chi}(L_{\sigma_{j \rightarrow k}}(J)) \approx \bar{\chi}(L_\sigma(J))$  gilt (da das lineare Programm zur Bestimmung von  $\bar{\chi}(L_{\sigma_{j \rightarrow k}}(J))$  dem linearen Programm zur Bestimmung von  $\bar{\chi}(L_\sigma(J))$  mit fixiertem  $x_{\sigma_{k,n_k},j,k} = 1$  ähnelt) und sich der Wert der unteren Schrankenfunktion somit nicht wesentlich vergrößert. Deswegen sollte nach einem  $k$  verzweigt werden, dass möglichst viele, möglichst „gleichmäßige“  $x_{\sigma_{k,n_k},j,k}$  besitzt.

Dazu wird für jedes  $k \in J$  die Menge aller im Fortsetzungsgraphen  $(V_\sigma^{(k)}, E_\sigma^{(k)})$  von  $\sigma_{k,n_k}$  abgehenden Kanten

$$\bar{E}_\sigma^{(k)} := \{(\sigma_{k,n_k}, j) \mid j \in N_\sigma^{(k)} \cup \{0\}\}$$

bestimmt. Mit Hilfe dieser Kantenmengen und der optimalen Lösung  $x_{ijk}$  des relaxierten linearen Programms  $LP$  bezüglich  $\sigma$  für die Bestimmung von  $\bar{\chi}(L_\sigma(J))$  lässt sich der Index  $k$  der zu verlängernden Auslieferungsreihenfolge  $\sigma_k$  auf unterschiedliche Arten wählen, als

1. diejenige Auslieferungsreihenfolge mit den meisten fraktionalen Nachfolgern von  $\sigma_{k,n_k}$ :

$$k = \arg \max_{k' \in J} \sum_{(\sigma_{k,n_k}, j) \in \bar{E}_\sigma^{(k)}} \mathbb{1}_{x_{\sigma_{k,n_k},j,k} \in (0,1)} \quad (5.9.3)$$

2. diejenige Auslieferungsreihenfolge, bei der die Summe der quadrierten  $x_{\sigma_{k,n_k},j,k}$  am kleinsten ist:

$$k = \arg \min_{k' \in J} \sum_{(\sigma_{k,n_k}, j) \in \bar{E}_\sigma^{(k)}} x_{\sigma_{k,n_k},j,k}^2 \quad (5.9.4)$$

3. diejenige Auslieferungsreihenfolge mit der kleinsten Varianz der Werte  $x_{\sigma_{k,n_k},j,k}$ :

$$k = \arg \min_{k' \in J} \frac{1}{|\bar{E}_\sigma^{(k)}|} \sum_{(\sigma_{k,n_k}, j) \in \bar{E}_\sigma^{(k)}} x_{\sigma_{k,n_k},j,k}^2 - \left( \frac{1}{|\bar{E}_\sigma^{(k)}|} \sum_{(\sigma_{k,n_k}, j) \in \bar{E}_\sigma^{(k)}} x_{\sigma_{k,n_k},j,k} \right)^2 \quad (5.9.5)$$

Jede dieser drei Wahlregeln folgt dem Ziel, dasjenige  $k$  zu wählen, welches möglichst viele, möglichst „gleichmäßige“  $x_{\sigma_{k,n_k},j,k}$  besitzt. Allerdings wird dies unterschiedlich interpretiert. Die erste dieser Wahlregeln berücksichtigt nicht die konkreten Werte der Entscheidungsvariablen  $x_{\sigma_{k,n_k},j,k}$ , sondern nur die Anzahl der fraktionalen Entscheidungsvariablen dieses Typs. Dabei kann auch der Fall auftreten, dass eine dieser fraktionalen Entscheidungsvariablen nahe 1 liegt und die anderen nahe 0.

Dies motiviert die Verwendung der zweiten Wahlregel, bei der vor allem gefordert wird, dass die Quadratsumme der Entscheidungsvariablen  $x_{\sigma_{k,n_k},j,k}$  des gewählten  $k$  möglichst klein ist. Allerdings spielt hierbei auch die Größe von  $\overline{E}_\sigma^{(k)}$  eine Rolle, denn bei  $x_{\sigma_{k,n_k},j,k} \approx 1/|\overline{E}_\sigma^{(k)}|$  wird dasjenige  $k$  mit größtem  $|\overline{E}_\sigma^{(k)}|$  gewählt, auch wenn für ein anderes  $k$  die Werte unter Umständen „gleichmäßiger“ sind.

Dieses Phänomen tritt bei der dritten Wahlregel nicht auf, welche die Varianz der Werte  $x_{\sigma_{k,n_k},j,k}$  betrachtet. Zwar ist diese Wahlregel am komplexesten, da der Aufwand zur Durchführung dieser Wahlregel im Vergleich mit dem Aufwand für die übrigen Elemente des Branch&Bound-Verfahrens allerdings nicht wesentlich ist, soll diese Wahlregel Verwendung finden.

## 5.10 Die Wahl der nächsten zu untersuchenden Lösungsraumteilmenge

Die Wahl der nächsten zu untersuchenden Lösungsraumteilmenge soll gemäß der Best-Bound-Regel (vgl. [Dak65]) erfolgen. Es soll also diejenige Lösungsraumteilmenge

$$L_\sigma(J) \text{ mit } \overline{\chi}(L_\sigma(J)) \leq \overline{\chi}(L_{\sigma'}(J')) \quad \forall L_{\sigma'}(J') \in \mathcal{L}$$

gewählt werden.

Dazu sollen die Lösungsraumteilmengen in  $\mathcal{L}$  in einem Heap gespeichert werden. Ein Heap ist eine Speicherstruktur, in der effizient das Minimum einer Menge vorgehalten werden kann (vgl. [Flo64, Wil64]). Bei dieser Speicherstruktur kann jede Operation wie zum Beispiel das Hinzufügen eines Elements oder das Ermitteln bzw. Entfernen des Elements mit der kleinsten Bewertung in einer Laufzeit von  $\mathcal{O}(\log |\mathcal{L}|)$  oder  $\mathcal{O}(1)$  vorgenommen werden.

Bei steigender Anzahl von zu untersuchenden Lösungsraumteilmengen  $|\mathcal{L}|$  steigt aber auch diese Laufzeit an, weshalb ab einer gewissen Größe die Lösungsraumteilmengen nicht mehr in Form eines Heaps, sondern in sogenannten „Buckets“ gespeichert werden sollen. Dazu wird das Intervall

$$[\min \{ \overline{\chi}(L_\sigma(J)) \mid L_\sigma(J) \in \mathcal{L} \}, \quad \chi(\sigma^*, \tau^*, s^*)],$$

welches mit der kleinsten unteren Schranke einer Lösungsraumteilmenge und dem Zielfunktionswert der jeweils besten gefundenen Lösung  $(\sigma^*, \tau^*, s^*)$  bestimmt wird, äquidistant in eine gewisse Anzahl Teilintervalle zerlegt. Jedem dieser Teilintervalle wird nun eine Menge („Bucket“, vgl. [IS56]) von Lösungen  $L_\sigma(J) \in \mathcal{L}$  zugeordnet, deren untere Schrankenfunktion  $\overline{\chi}(L_\sigma(J))$  einen Wert innerhalb dieses Intervalls annimmt. Diese Intervalle werden zu einem festen Zeitpunkt im Lösungsprozess einmalig festgelegt und seien entsprechend der in ihnen enthaltenen Werte aufsteigend geordnet.

Im weiteren Verlauf des Verfahrens werden weitere (durch Branching entstandene) Lösungsraumteilmengen entsprechend ihrer unteren Schranke einsortiert. Es wird nicht notwendigerweise eine Lösungsraumteilmenge mit einer geringsten unteren Schranke gewählt, sondern eine mit

einer unteren Schranke in dem kleinsten nichtleeren Bucket. Dadurch wird der Vorteil der Best-Bound-Regel, möglichst wenig Lösungsraumteilmengen im Verfahren zu betrachten, geringfügig abgeschwächt.

Um in der praktischen Umsetzung des Algorithmus zu verhindern, dass die Anzahl der gespeicherten Lösungsraumteilmengen  $|\mathcal{L}|$  so groß wird, dass der Arbeitsspeicher des jeweiligen Rechners nicht ausreicht, soll ab einer gewissen Anzahl dazu übergegangen werden, die jeweils aktuelle Lösungsraumteilmenge mittels Tiefensuche (s. [Dak65]) zu untersuchen.

## 5.11 Das konkrete Branch&Bound-Verfahren

In den vorhergehenden Abschnitten ist vorgestellt worden, wie das im ersten Abschnitt dieses Kapitels vorgestellte allgemeine Branch&Bound-Verfahren zur Lösung des Basis-Szenarios des IPDSP präzisiert werden kann. Die dabei entwickelten Ideen sollen in diesem Abschnitt nun zusammengeführt werden, um mit ihnen als Algorithmus 3 ein konkretes Branch&Bound-Verfahren zur Lösung des Basis-Szenarios des IPDSP vorzustellen. Dabei soll auf die im vorhergehenden Abschnitt vorgestellten Feinheiten nicht weiter eingegangen werden, stattdessen wird zur Vereinfachung davon ausgegangen, dass durchweg eine Sortierung mit „Buckets“ stattfindet.

---

**Algorithmus 3** Konkretes Branch&Bound-Verfahren zur Lösung des Basis-Szenarios des IPDSP

---

```

1: Setze  $\sigma^* := ((), \dots, ())$ .
2: Setze  $\mathcal{L} = \{L_{\sigma^*}(M)\}$ .
3: while  $\mathcal{L} \neq \emptyset$  do
4:   Wähle ein  $L_\sigma(J) \in \mathcal{L}$  mit „kleinem“  $\bar{\chi}(L_\sigma(J))$  gemäß Abschnitt 5.10.
5:   Setze  $\mathcal{L} := \mathcal{L} \setminus \{L_\sigma(J)\}$ .
6:   if  $\chi(\sigma) < \chi(\sigma^*)$  then
7:     if es existieren zu  $\sigma$  zulässige  $\tau$  und  $s$  (vgl. Unterabschnitt 5.7.3 und 5.7.1) then
8:       Setze  $\sigma^* := \sigma$ .
9:       Setze  $\mathcal{L} := \mathcal{L} \setminus \{L_\sigma(J) \in \mathcal{L} \mid \bar{\chi}(L_\sigma(J)) \geq \chi(\sigma)\}$ .
10:    else
11:      continue
12:    end if
13:  end if
14:  Wähle ein  $k \in J$  gemäß Abschnitt 5.9.
15:  for  $i \in N \setminus I_\sigma$  do
16:    if  $\sigma^{i \rightarrow k}$  ist nicht nach 5.7.2 unzulässig and  $\bar{\chi}(L_{\sigma^{i \rightarrow k}}(J)) < \chi(\sigma^*)$  then
17:      Setze  $\mathcal{L} := \mathcal{L} \cup \{L_{\sigma^{i \rightarrow k}}(J)\}$ 
18:    end if
19:  end for
20:  if  $|J| > 1$  and  $\bar{\chi}(L_\sigma(J \setminus \{k\})) < \chi(\sigma^*)$  then
21:    Setze  $\mathcal{L} := \mathcal{L} \cup \{L_\sigma(J \setminus \{k\})\}$ .
22:  end if
23: end while
24: Gebe  $\sigma^*$  nebst der in Schritt 7 bestimmten  $\tau^*$  und  $s^*$  als optimale Lösung  $(\sigma^*, \tau^*, s^*)$  mit Zielfunktionswert  $\chi(\sigma^*, \tau^*, s^*)$  zurück.

```

---

Im Vergleich mit dem vorgestellten allgemeinen Branch&Bound-Verfahren fällt bei der Betrachtung von Algorithmus 3 auf, dass die Technik zur Untersuchung auf Zulässigkeit hier eine andere ist. Insbesondere werden Auslieferungspläne in Zeile 16 nur dahingehend untersucht, ob notwendige Bedingungen dafür, dass sie zulässig sind, nicht eingehalten werden. Gegebenenfalls werden nachfolgend in Zeile 17 unzulässige Auslieferungspläne verlängert. Allerdings wird dadurch vermieden, an dieser Stelle bereits die Zulässigkeit mittels eines MIPs zu überprüfen, was großen Aufwand erfordern würde. Die Zulässigkeit von Auslieferungsplänen wird in Zeile 7 ausschließlich in den Fällen überprüft, in denen ein Auslieferungsplan zu einer besseren als der bisher besten gefundenen Lösung gehört, falls er zulässig ist. Dabei wird zuerst versucht, mit den in Unterabschnitt 5.7.3 vorgestellten heuristischen Verfahren zulässige Belieferungszeitpunkte  $\tau$  und Produktionsstartzeitpunkte  $s$  zu finden. Erst wenn dies keinen Erfolg hat, wird versucht, ebendiese Werte durch das Lösen des in Unterabschnitt 5.7.1 vorgestellten MIPs zu bestimmen. Falls dies keinen Erfolg hat, so wird an dieser Stelle auch das Verzweigen übersprungen, indem in Zeile 11 zur nächsten Iteration der while-Schleife übergegangen wird, in welcher die nächste Lösungsraumteilmenge  $L_\sigma(J)$  gewählt und untersucht wird.

Der Prozess des „Bounding“ findet bei diesem konkreten Branch&Bound-Verfahren an anderer Stelle statt als beim allgemeinen Branch&Bound-Konzept. Bereits beim Verlängern des jeweils betrachteten Auslieferungsplans in Zeile 16 werden Lösungsraumteilmengen aufgrund ihrer unteren Schranke ausgeschlossen. Es werden aber auch bei jeder Verbesserung der bisher besten gefundenen Lösung in Zeile 9 des Algorithmus Lösungsraumteilmengen, die keine bessere als die bisher beste gefundene Lösung enthalten können, entfernt, da bei Verwendung der Best-Bound-Regel (siehe Abschnitt 5.10) die Menge  $\mathcal{L}$  der noch zu untersuchenden Lösungsraumteilmengen sehr stark anwächst, und so zwischenzeitlich reduziert werden kann. Würde dies nicht geschehen, würden aufgrund der Auswahl in Zeile 4 Lösungsraumteilmengen ohne Verbesserungspotential erst am Ende des Verfahrens nacheinander aus  $\mathcal{L}$  entfernt werden. Bei der in Algorithmus 3 in Zeile 9 durchgeführten Entfernung dieser Lösungsraumteilmengen ist die Verwendung von Buckets vorteilhaft, da mit ihnen eine Speicherstruktur gegeben ist, in der sich die Suche nach ebendiesen Lösungsraumteilmengen einfach gestaltet.

Anzumerken ist noch, dass in einer Implementation dieses Algorithmus selbstredend in  $\mathcal{L}$  keine explizite Speicherung von Lösungsraumteilmengen  $L_\sigma(J)$  erfolgt. Stattdessen genügt es, jeweils die Parameter  $\sigma$  und  $J$  zu speichern, welche eine Lösungsraumteilmenge  $L_\sigma(J)$  induzieren.

Die Implementierung des vorgestellten Verfahrens wurde mit der Programmiersprache C++ vorgenommen. Zur Lösung des linearen Programms zur Bestimmung von unteren Schranken sowie zur Lösung von  $MIP_\sigma^{feas}$  wurde der MIP/LP-Solver `lp_solve`<sup>10</sup> eingebunden. Dies ist zum einen darin begründet, dass keine kommerzielle Software Verwendung finden sollte. Zum anderen findet sich zu `lp_solve` aber auch eine ausführliche Darstellung der Schnittstellen, was die Verwendung innerhalb des entwickelten C++-Programms vereinfacht.

---

<sup>10</sup><http://lpsolve.sourceforge.net/>

## Kapitel 6

# Performanceanalyse der Lösungsmethoden

In diesem Kapitel erfolgt eine Bewertung der Lösungsmethoden hinsichtlich ihrer praktischen Anwendbarkeit. Dazu wird im ersten Abschnitt vorgestellt, wie die zum Zweck der Evaluierung der Lösungsmethoden verwendeten Testinstanzen generiert werden sollen. Die Testinstanzengenerierung erfolgt dabei unter Rückgriff auf vielfältige Parameter, sodass eine weitreichende Variationsmöglichkeit gewährleistet ist. Diese Möglichkeit zur Variation soll insbesondere bei der Evaluierung der Modelle der integrierten Produktions und Distributionsplanung voll ausgeschöpft werden.

Eine Evaluation der Modelle von Tourenplanungsproblemen, welche im zweiten Kapitel dieser Arbeit eingeführt wurden, wird im zweiten Abschnitt dieses Kapitels vorgestellt. Die Untersuchung geschieht hierbei unter Rückgriff auf Testinstanzen, die mit Hilfe der Überlegungen aus dem ersten Abschnitts erzeugt wurden.

Im dritten Abschnitt dieses Kapitels erfolgt dann eine systematische Untersuchung der Lösungsverfahren für unterschiedliche Szenarien des IPDSP. Diese beginnt mit dem Auswerten des Lösens von Testinstanzen des Basis-Szenarios mit Hilfe des Basis-Modells und Cplex. Sie wird einer Evaluation des Lösens von Testinstanzen von allgemeinen IPDSP-Szenarien mit entsprechenden IPDSP-Modellen und Cplex fortgesetzt. Abschließend erfolgt die Analyse des Lösens von Testinstanzen des Basis-Szenarios mit dem vorgestellten Branch&Bound-Verfahren.

### 6.1 Generierung von Testinstanzen

Zunächst soll auf die Generierung von Testinstanzen eingegangen werden. Die Schritte, in denen diese Generierung von Testinstanzen erfolgt, werden nachfolgend dargelegt. In diesem Rahmen erfolgt auch die Beschreibung der Parameter, mit denen die Erstellung von Testinstanzen beeinflusst werden kann. Die hier vorgestellte Generierung von Testinstanzen hat Anleihen bei der Testinstanzgenerierung aus [AGL08] und dem darauf aufbauenden [Vie11], ist aber wesentlich umfangreicher, was der allgemeineren Entscheidungssituation geschuldet ist. Die Generierung einer Testinstanz erfolgt dabei in den folgenden Schritten.

Schritt 1: Bestimmung von Koordinaten für alle Produktionsstandorte und alle Zielorte von Bestellungen.

Schritt 2: Ermittlung der ausschließlich von den Bestellungen abhängenden Parameter.

Schritt 3: Festlegung der maschinenabhängigen Parameter und Zuordnung der Maschinen zu Produktionsstandorten.

Schritt 4: Erzeugen der transporterabhängigen Parameter und Zuordnung der Transporter zu Produktionsstandorten.

### Schritt 1: Bestimmung der Koordinaten aller Produktionsstandorte und aller Zielorte von Bestellungen

Wesentlich für die Testdatengenerierung ist, wie Fahrtzeiten und Fahrtkosten ermittelt werden. Hierzu seien den Produktionsstandorten und den Zielorten der Bestellungen Koordinaten in der euklidischen Ebene zugeordnet, aus deren euklidischer Entfernung zueinander sich ebendiese Fahrtzeiten und Fahrtkosten ableiten lassen. Diese Koordinaten seien im Folgenden wie in [AGL08, Vie11] aus dem Quadrat  $\{0, 1, \dots, 100\} \times \{0, 1, \dots, 100\}$ . Bei der Generierung der Koordinaten soll es ermöglicht werden, dass die Koordinaten der Zielorte der Bestellungen mit Clustering generiert werden, was in der Testinstanzgenerierung in [AGL08, Vie11] keine Berücksichtigung findet. Clustering bedeutet, dass die Zielorte der Bestellungen sich nicht uniform zufällig verteilt auf einer Karte befinden, sondern gehäuft auftreten. Abbildung 6.1 zeigt auf der linken Seite die Koordinaten der Zielorte der Bestellungen in einer Testinstanz ohne Clustering und auf der rechten Seite in einer Testinstanz mit Clustering. Während auf der linken Seite kein Muster erkennbar ist, lässt sich auf der rechten Seite erkennen, dass es mehrere Ballungsgebiete von Zielorten gibt.

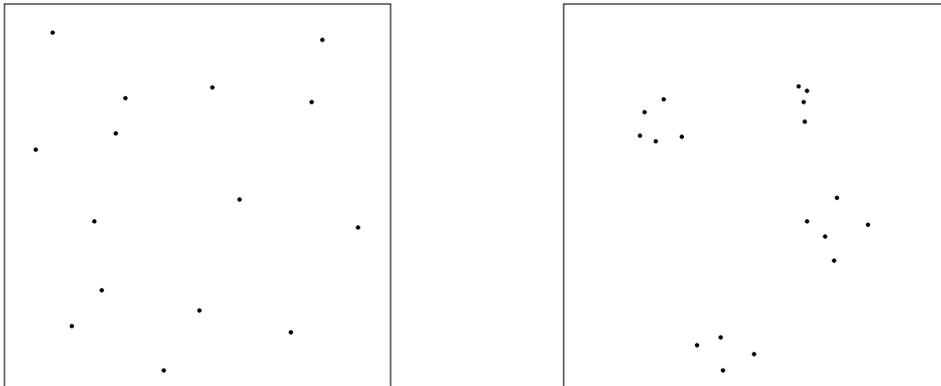


Abbildung 6.1: Zielortskordinaten bei Testinstanzen ohne und mit Clustering

Technisch wird die Erzeugung von geclusterten Koordinaten ermöglicht, indem für ihre Generierung eine Matrix  $\hat{P} \in \mathbb{N}_0^{101 \times 101}$  gegeben ist. Die Einträge dieser Matrix sollen Häufigkeiten darstellen, sodass für jede Koordinate  $(x, y) \in \{0, 1, \dots, 100\} \times \{0, 1, \dots, 100\}$  eine Häufigkeit

$\hat{P}_{x,y}$  gegeben ist. Initial soll  $\hat{P}_{x,y} = 1$  für alle Koordinaten  $(x, y)$  gelten, die Häufigkeit also für jede Koordinate gleich sein. Aus diesen Häufigkeiten lassen sich dann Wahrscheinlichkeiten

$$P(x, y) = \frac{\hat{P}_{x,y}}{\sum_{x'=0}^{100} \sum_{y'=0}^{100} \hat{P}_{x',y'}}$$

interpretieren. Mit ebendieser Wahrscheinlichkeit  $P(x, y)$  soll nun eine Koordinate  $(x, y)$  in dem folgenden Verfahren gewählt werden.

Zur Festlegung der Koordinaten müssen folgende Parameter gegeben sein. Diese müssen in den angegebenen Wertebereichen gewählt werden. Des Weiteren wird zu jedem der im Folgenden vorgestellten Parameter eine Standardbelegung angegeben, die gewählt wird, sofern keine andere Wahl des jeweiligen Parameters explizit getroffen wird.

Parameter  $n$ : Anzahl Bestellungen ( $n \in \mathbb{N}$ , Std. 30)

Parameter  $w$ : Anzahl Produktionsstandorte ( $w \in \mathbb{N}$ , Std. 1)

Das Setzen eines der folgenden Flags bewirkt ein Clustering der Zielorte der Bestellungen. Sollte keins der beiden Flags gesetzt sein, so werden Zielorte der Bestellungen zufällig gleichverteilt generiert.

Flag  $c$ : mittleres Clustering der Zielorte

Flag  $cc$ : starkes Clustering der Zielorte

Zunächst werden die Koordinaten der Orte  $v = 0, \dots, -(w - 1)$  bestimmt, die Produktionsstandorten entsprechen. Dazu wird sukzessive eine Koordinate  $(x_v, y_v)$  entsprechend den Wahrscheinlichkeiten  $P(x, y)$  gewählt und nach jeder Wahl die Häufigkeit ebendieser Koordinate auf  $\hat{P}_{x_v, y_v} = 0$  gesetzt. Dies stellt sicher, dass sich an einer Koordinate niemals mehrere Produktionsstandorte oder Zielorte von Bestellungen befinden. Des Weiteren werden die Koordinaten der Produktionsstandorte auf diese Weise uniform zufällig gewählt.

Danach werden die Koordinaten der Zielorte der Bestellungen  $i = 1, \dots, n$  bestimmt. Dazu wird ebenfalls sukzessive eine Koordinate  $(x_i, y_i)$  entsprechend den Wahrscheinlichkeiten  $P(x, y)$  gewählt. Nach jeder Wahl einer Koordinate werden die Häufigkeiten  $\hat{P}$  angepasst. Im Unterschied zur Generierung der Koordinaten der Produktionsstandorte erfolgt diese Anpassung derart, dass sie die Wahl von Koordinaten in der „Nähe“ der gewählten Koordinate begünstigt. Dies bewirkt dann ein Clustering der Zielorte der Bestellungen.

Diese Anpassung der Häufigkeiten geht folgendermaßen vonstatten:

- Bestimme Parameter  $CR$  (Clustering Radius) und  $CI$  (Clustering Intensity). Je nach Art des Clusterings sind die Parameter wie folgt:
  - kein Clustering der Zielorte der Bestellungen (Standard):  $CR = CI = 0$
  - mittleres Clustering der Zielorte der Bestellungen (Flag  $c$ ):  $CR = 5, CI = 10$
  - starkes Clustering der Zielorte der Bestellungen (Flag  $cc$ ):  $CR = 10, CI = 20$

Die so gewählten Parameter  $CR$  und  $CI$  zur Erzeugung von Clustering haben in Tests zu dem jeweils gewünschten Bild der Verteilung von Zielorten geführt.

- Setze die Häufigkeit der gewählten Koordinate  $(x_i, y_i)$  auf  $\hat{P}_{x_i, y_i} = 0$
- Erhöhe die Häufigkeit aller Koordinaten  $(x, y)$ , für die  $\hat{P}(x, y) > 0$  gilt, in einem Radius von  $CR$  um die Koordinate  $(x_i, y_i)$  mittels

$$\hat{P}_{x,y} := \min \left( CI, \left[ \hat{P}_{x,y} + CI \cdot \frac{CR + 1 - \|(x, y) - (x_i, y_i)\|_2}{CR} \right] \right)$$

Für jede unmittelbar neben der gewählten Koordinate  $(x_i, y_i)$  befindliche Koordinate  $(x, y)$  gilt  $\|(x, y) - (x_i, y_i)\|_2 = 1$ , die Erhöhung der Häufigkeit  $\hat{P}_{x,y}$  bei einer solchen Koordinate erfolgt um den maximalen maximalen Wert  $CI$ . Diese Erhöhung fällt linear, bis sie bei einer Koordinate  $(x, y)$ , die sich unmittelbar außerhalb des Radius  $CR$  befindet, genau 0 beträgt. Für eine solche Koordinate gilt  $\|(x, y) - (x_i, y_i)\|_2 = CR + 1$ . Die Häufigkeit einer Koordinate ist dabei durch  $CI$  begrenzt, um einen Selbstverstärkungseffekt der Erhöhung der Häufigkeiten in einem Cluster zu begrenzen.

Abbildung 6.2 zeigt exemplarisch in einem kleineren Quadrat die Anpassung der Häufigkeiten mit  $CI = 4$  und  $CR = 2$  nach der Wahl von Koordinate  $(2, 3)$ . Im linken Teil sind die Häufigkeiten vor der Anpassung und im rechten Teil die Häufigkeiten nach der Anpassung zu sehen. Zunächst wird  $\hat{P}_{2,3} = 0$  gesetzt. Die Koordinaten  $(1, 3)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(2, 4)$  und  $(3, 3)$  haben einen Abstand von 1 zur Koordinate  $(2, 3)$ , dementsprechend wird ihr Wert um  $CI = 4$  erhöht. Da allerdings diese Erhöhung die maximale Häufigkeit von  $CI = 4$  überschreiten würde, wird die Häufigkeit an diesen Koordinaten auf diese obere Schranke von 4 gesetzt. Die Koordinaten  $(1, 2)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(3, 2)$  und  $(3, 4)$  befinden sich im euklidischen Abstand von  $\sqrt{2}$  von der Koordinate  $(2, 3)$ , somit wird ihre Häufigkeit um  $\lfloor 6 - 2 \cdot \sqrt{2} \rfloor = \lfloor 3,17157 \rfloor = 3$  auf 4 erhöht. Die Koordinaten  $(2, 1)$ ,  $(2, 5)$  und  $(4, 3)$  befinden sich in einem Abstand von 2 zur Koordinaten  $(2, 3)$ , wobei die Häufigkeit  $\hat{P}_{2,1}$  der Koordinaten  $(2, 1)$  gilt, dass sie 0 ist, weshalb sie nicht erhöht wird. Die Häufigkeit der anderen beiden Koordinaten ist hingegen um  $\lfloor 6 - 2 \cdot 2 \rfloor = 2$  auf 3 zu erhöhen. Relative Häufigkeiten an anderen Koordinaten ändern sich nicht.

	1	2	3	4	5	6			1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	4	1	1
2	0	1	1	1	1	1	1	2	0	4	0	4	3	1
3	1	1	1	1	1	1	1	3	1	4	4	4	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	4	1	1	3	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	6	1	1	1	1	1	1

Abbildung 6.2: Anpassung der Häufigkeiten in  $\hat{P}_{x,y}$ .

Es lässt sich erkennen, dass für die acht Koordinaten, die sich entweder direkt neben der Koordinate  $(2, 3)$  oder diagonal neben dieser befinden, die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Schritt gewählt zu werden, jeweils  $4/56 = 1/14$  beträgt. Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit der Auswahl einer dieser Koordinaten im nächsten Schritt  $32/56 = 4/7$  und ein Clustering in diesem Bereich ist wahrscheinlich.

## Schritt 2: Ermittlung der ausschließlich von den Bestellungen abhängenden Parameter

Die Ermittlung der ausschließlich von den Bestellungen abhängenden Parameter lässt sich über folgende Parameter steuern:

- Parameter *dv*: relative Abweichung der Bedarfe ( $0 \leq dv \leq 0,4$ , Std. 0,2)
- Parameter *rv*: relativer Erwartungswert und relative Abweichung der Strafen ( $0 \leq rv \leq 1$ , Std. 0,2)
- Parameter *rpl*: mittleres Höchstalter der Güter einer Bestellung in Relation zur Länge einer 2-opt-Tour durch alle Orte ( $0 \leq rpl \leq 0,7$ , Std. 0,6)
- Parameter *prio*: Anzahl von Klassen unterschiedlicher Bestellprioritäten ( $prio \in \{1, \dots, n\}$ , Std. 1)
- Parameter *rtw*: mittlere Größe eines Zeitfenster in Relation zur Länge einer 2-opt-Tour durch alle Orte ( $0,05 \leq rtw \leq 0,4$ , Std. 0,1)
- Parameter *rpt*: mittlere Dauer der Produktion von 1000 Einheiten in Relation zur Länge einer 2-opt-Tour durch alle Orte ( $0,03 \leq rpt \leq 0,2$ , Std. 0,06)
- Parameter *twp*: Parameter zur geometrischen Verteilung der Anzahl von Zeitfenstern ( $0,1 \leq twp \leq 1$ , Std. 1)
- Parameter *obl*: Anteil von Bestellungen mit Erfüllungszusage ( $0 \leq obl \leq 1$ , Std. 0)
- Parameter *ass*: Anteil von Bestellungen, die mit anderen gebündelt sind ( $0 \leq ass \leq 1$ , Std. 0)

Des Weiteren ist die Länge  $L^{2\text{opt}}$  einer 2-opt-Tour (vgl. [Cro58]) durch alle Orte in der Menge aller Zielorte der Bestellungen und Produktionsstandorte  $N \cup W$  von Bedeutung<sup>1</sup>, die vor der Generierung der ausschließlich von Bestellungen abhängenden Parametern als Hilfsgröße zu berechnen ist.<sup>2</sup> Diese dient im Folgenden als Bezugsgröße zur Bestimmung weiterer zeitlicher Parameter wie den Höchstaltern, den Zeitfenstern oder den Bearbeitungszeiten.

Die Festlegung der ausschließlich von der jeweiligen Bestellung  $i$  abhängenden Parametern erfolgt folgendermaßen:

- Generieren von Bestellungsgrößen  $q_i$  und Einnahmen  $\hat{e}_i$  für  $i = 1, \dots, n$ :

Sei  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  die Normalverteilung mit Erwartungswert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$ . Dann werde  $q_i$  jeweils durch Auswertung einer  $\mathcal{N}(50, (50 \cdot dv)^2)$ -verteilten Zufallsvariable bestimmt. Die Einnahmen werden durch  $\hat{e}_i = q_i$  bestimmt und sind somit von der Größe der jeweiligen Bestellung abhängig.

<sup>1</sup>Die Entfernung von einem Ort  $i$  zu einem Ort  $j$  entspricht dabei der euklidischen Entfernung  $\|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\|_2$ . Als Ausgangslösung für das 2-opt-Verfahren dient diejenige Tour, in welcher alle Orte in aufsteigender Reihenfolge ihres Indexes besucht werden.

<sup>2</sup>In [AGL08, Vie11] findet stattdessen die Gesamtlänge von Pendeltouren zwischen dem Depot und den Zielorten der Bestellungen Verwendung.

- Generieren von Nichtbelieferungsstrafen  $f_i$  für  $i = 1, \dots, n$ :

Dafür sei zunächst mit  $\rho_i$  die Auswertung einer  $\mathcal{N}(rv, rv^2)$ -verteilten Zufallsvariable gegeben. Die Nichtbelieferungsstrafen werden dann durch

$$f_i = q_i \cdot \max(0, \rho_i)$$

ermittelt.

- Generieren von Höchstaltern  $B_i$  für  $i = 1, \dots, n$

Sei  $\rho_i$  die Auswertung einer  $\mathcal{N}(1, lv^2)$  verteilten Zufallsvariable, dann werde

$$B_i := \max\left(rpl \cdot L^{2\text{opt}} \cdot \rho_i, 0\right)$$

gesetzt.

- Generieren von Prioritätsbewertungen  $g_i$  für  $i = 1, \dots, n$ :

Die Prioritätsbewertung  $g_i$  von Kunde  $i$  werde gleichverteilt aus der Menge  $\{0, prio - 1\}$  gewählt.

- Generieren von Belieferungszeitfenstern  $[a_i^1, b_i^1], \dots, [a_i^{\lambda_i}, b_i^{\lambda_i}]$  für  $i = 1, \dots, n$ :

Zuerst wird die Anzahl  $\lambda_i \in \mathbb{N}$  der Zeitfenster entsprechend einer geometrisch verteilten Zufallsvariable mit Parameter  $twp$  ermittelt.<sup>3</sup> Danach wird jedes Belieferungszeitfenster  $[a_i^l, b_i^l]$  für  $l = 1, \dots, \lambda_i$  wie folgt bestimmt:

- Wähle die Zeitfenstermitte  $\frac{a_i^l + b_i^l}{2}$  zufällig gemäß einer Gleichverteilung aus dem Intervall

$$\left[ \frac{rpt}{1000} \cdot L^{2\text{opt}} \cdot \sum_{i=1}^n q_i, \quad \frac{rpt}{1000} \cdot L^{2\text{opt}} \cdot \sum_{i=1}^n q_i + L^{2\text{opt}} \right].$$

Dabei ist durch  $\frac{rpt}{1000} \cdot L^{2\text{opt}} \cdot \sum_{i=1}^n q_i$  die Zeitspanne gegeben, die erwartungsgemäß zur Produktion aller Bestellungen benötigt wird.

- Bestimme die Zeitfensterbreite durch

$$b_i - a_i := rwtw \cdot L^{2\text{opt}}.$$

- Erzeugen der Menge  $I^0$  von Bestellungen mit Erfüllungszusage:

Für jede Bestellung  $i = 1, \dots, n$  wird ein Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $ass$  durchgeführt. Bei Erfolg besteht für Bestellung  $i$  eine Erfüllungszusage, es gilt also  $i \in I^0$ . Andernfalls gilt  $i \notin I^0$ .

- Bestimmung der Mengen  $I^1, \dots, I^\nu$  von gebündelten Bestellungen:

Zunächst wird die Anzahl der Mengen von gebündelten Bestellungen  $\nu$  geometrisch verteilt mit Parameter  $\sqrt{1/(ass \cdot n)}$  bestimmt.<sup>4</sup>

Anschließend wird für jede Menge von gebündelten Bestellungen die geometrisch mit Parameter  $\sqrt{1/(ass \cdot n)}$  verteilte Anzahl an enthaltenen Bestellungen ermittelt. Falls diese

<sup>3</sup>Die Anzahl  $\lambda_i$  entspricht also der Anzahl der Bernoulli-Versuche mit Wahrscheinlichkeit  $twp$ , die notwendig sind, um den ersten Erfolg zu haben.

<sup>4</sup>Damit werden im Erwartungswert  $\sqrt{ass \cdot n}$  Mengen von gebündelten Bestellungen erzeugt, wobei  $ass \cdot n$  der erwarteten Anzahl von Bestellungen in der Vereinigung der Mengen  $I^1, \dots, I^\nu$  entspricht. Es sind also erwartungsgemäß in jeder Teilmenge von gebündelten Bestellungen  $\sqrt{ass \cdot n}$  Bestellungen enthalten.

Anzahl geringer als 2 ist, so wird die Anzahl auf zwei erhöht. Des Weiteren ist sicherzustellen, dass noch entsprechend viele Bestellungen keiner anderen Menge von gebündelten Bestellungen zugeordnet sind. Danach werden aus der Menge von Bestellungen, die noch keiner Menge von gebündelten Bestellungen zugeordnet sind, zufällig gleichverteilt entsprechend viele Bestellungen entnommen und der entsprechenden Menge von gebündelten Bestellungen hinzugefügt.

Damit sind die ausschließlich von den Bestellungen abhängenden Parameter generiert.

### Schritt 3: Festlegung der maschinenabhängigen Parameter und Zuordnung der Maschinen zu Produktionsstandorten

Im nächsten Schritt sind die maschinenabhängigen Parameter zu generieren, also die Bearbeitungszeiten  $p_i^k$  der Bestellungen und die Rüstzeiten  $\vartheta_{ij}^k$ . Anschließend sind die Maschinen den Produktionsstandorten zuzuordnen. Dabei sind neben dem schon erwähnten Parameter  $rpt$  die folgenden Größen von Belang:

Parameter  $\omega$ : Anzahl Maschinen ( $\omega \in \{w, w + 1, \dots\}$ , Std. 1)

Parameter  $prv$ : relative Abweichung der Produktionsgeschwindigkeiten der Maschinen ( $0 \leq prv \leq 1$ , Std. 0,0)

Parameter  $stv$ : relative Dauer der Rüstzeiten ( $0 \leq stv \leq 1$ , Std. 0,0)

Als Hilfsgröße wird die mittlere Produktionsgeschwindigkeit durch

$$\mu^p := rpt \cdot \frac{L^{2\text{opt}} \cdot \omega}{1000}$$

bestimmt. Wenn alle  $\omega$  Maschinen mit ebendieser Produktionsgeschwindigkeit produzieren, benötigt die Produktion von 1000 Einheiten  $rpt \cdot L^{2\text{opt}}$  Zeiteinheiten. Daraus wird für jede Maschine  $k \in \Omega$  als weitere Hilfsgröße deren jeweilige Produktionsgeschwindigkeit

$$ps^k \sim \mathcal{N}(\mu^p, (prv \cdot \mu^p)^2)$$

bestimmt.<sup>5</sup> Die Bearbeitungszeit von Bestellung  $i$  auf Maschine  $k$  berechnet sich entsprechend durch

$$p_i^k = q_i \cdot ps^k.$$

Seien  $\rho_{ijk}$  aus dem Intervall  $[0, 1]$  zufällig gleichverteilt ermittelte Zahlen. Dann wird die Rüstzeit auf Maschine  $k$  zwischen der Produktion von Bestellung  $i$  und Bestellung  $j$  mittels

$$\vartheta_{ijk} = (p_i^k + p_j^k) \cdot stv \cdot \rho_{ijk}$$

ermittelt.

Die Zuordnung der Maschinen zu den Produktionsstandorten erfolgt abschließend, indem jedem Produktionsstandort eine zufällig gewählte Maschine zugewiesen wird und den verbleibenden Maschinen ein zufällig gewählter Produktionsstandort zugewiesen wird. Die (zufällige) Wahl soll dabei jeweils unter der Annahme erfolgen, dass die Wahrscheinlichkeit, gewählt zu werden, für alle Maschinen bzw. Standorte identisch ist.

<sup>5</sup>Sollte eine der so bestimmten Produktionsgeschwindigkeiten weniger als 0,1 betragen, so wird sie auf ebendiesen Wert erhöht.

### Schritt 4: Erzeugen der transporterabhängigen Parameter und Zuordnung der Transporter zu Produktionsstandorten

Maßgeblich bei der Generierung der transporterabhängigen Parameter sind die folgenden Größen:

Parameter  $m$ : Anzahl Transporter ( $m \in \{w, w + 1, \dots\}$ , Std. 3)

Parameter  $rv_c$ : Relative Transportergesamtkapazität ( $0,2 \leq rv_c \leq 1,2$ , Std. 0,7)

Parameter  $vv$ : Relative Abweichung einiger Transporterparameter ( $0 \leq vv \leq 1$ , Std. 0,0)

Parameter  $rvfc$ : Relative Größe der Transporterfixkosten ( $0 \leq rvfc \leq 0,7$ , Std. 0,1)

Parameter  $rvtc$ : Relative Größe der Transporterfahrtskosten ( $0 \leq rvtc \leq 0,3$ , Std. 0,1)

Parameter  $ldtc$ : Anteil der vom Ladungsgewicht abhängigen Fahrtskosten an den Gesamtsfahrtskosten eines vollbeladenen Transporters ( $0 \leq ldtc \leq 1$ , Std. 0,0)

Mit Hilfe dieser Parameter werden zunächst die Transporterkapazitäten

$$Q_k \sim \frac{\sum_{i \in N} q_i}{m} \cdot rv_c \cdot \mathcal{N}(1, vv^2)$$

abhängig von der Gesamtgröße der Bestellungen sowie die Transporterfixkosten

$$C_k \sim \frac{\sum_{i \in N} \hat{e}_i + f_i}{m} \cdot rvfc \cdot \mathcal{N}(1, vv^2)$$

abhängig von den möglichen Einnahmen und Strafen ermittelt.

Nachfolgend wird für jeden Transporter  $k = 1, \dots, m$  als Hilfsgröße seine Geschwindigkeit

$$sf_k \sim (\mathcal{N}(1, vv^2))^{-1}$$

bestimmt.<sup>6</sup> Damit werden die Fahrtszeiten des jeweiligen Transporter  $k$  von Ort  $i$  mit Koordinaten  $(x_i, y_i)$  zu Ort  $j$  mit Koordinaten  $(x_j, y_j)$  durch

$$t_{ij}^k = \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\|_2 \cdot sf_k$$

festgelegt. Als Bezugsgröße für die Fahrtskosten sind die mittlere Kosten pro Entfernungseinheit durch

$$mcpd = \frac{\sum_{i \in N} \hat{e}_i + f_i}{L^{2opt}} \cdot rvtc$$

zu bestimmen, die wiederum zur Ermittlung der fixen Fahrtskosten pro Entfernungseinheit

$$cpd_k \sim mcpd \cdot (1 - ldtc) \cdot \mathcal{N}(1, vv^2)$$

und der lastabhängigen Fahrtskosten pro Mengeneinheit und Entfernungseinheit

$$cplad_k \sim mcpd \cdot ldtc \cdot Q_k^{-1} \cdot \mathcal{N}(1, vv^2)$$

<sup>6</sup>Ist die so bestimmte Geschwindigkeit kleiner als 1/2, so wird sie auf diesen Wert erhöht. Ist sie größer als 2, so wird sie auf diesen Wert verringert.

eines Transporters  $k = 1, \dots, m$  dienen. Zusammen mit der Distanz zwischen je zwei Orten  $i$  und  $j$  berechnen sich damit die fixen Fahrtkosten durch

$$c_{ij}^k = \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\|_2 \cdot cpd_k$$

und die lastabhängigen Fahrtkosten durch

$$\hat{c}_{ij}^k = \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\|_2 \cdot cplad_k.$$

Der letzte Teilschritt der Testinstanzgenerierung besteht in der Zuordnung der Transporter zu den Produktionsstandorten. Dazu wird jedem Produktionsstandort genau ein zufällig gleichverteilt bestimmter Transporter zugeordnet. Die verbleibenden Transporter werden den Produktionsstandorten zufällig zugeordnet, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass einer dieser Transporter einem Produktionsstandort  $v$  zugeordnet wird, durch

$$\frac{|\Omega_v|}{\sum_{v' \in W} |\Omega_{v'}|}$$

gegeben ist. Dies bewirkt, dass an einem Produktionsstandort mit mehreren Maschinen in der Regel auch mehrere Transporter stationiert sind.

## 6.2 Analyse der Modelle von Tourenproblemen

Zunächst soll auf Grundlage der vorstehend erzeugten Testinstanzen die Güte der in Kapitel zwei vorgestellten gemischt-ganzzahligen linearen Programme für das Traveling Salesman Problem und die unterschiedlichen Vehicle Routing Probleme bewertet werden. Zentral ist dabei, inwiefern sie sich mit Hilfe eines Rechners lösen lassen. Dazu wurde die vorgestellten MIPs mittels der mathematischen Beschreibungssprache Zimpl<sup>7</sup> formuliert und von IBM ILOG CPLEX 12.6.0.0 (kurz „Cplex“ genannt) gelöst. Die pro Testinstanz zur Verfügung stehende Rechenzeit war auf 3600 Sekunden beschränkt. Der zur Lösung genutzte Rechner verfügt über einen Intel i7-2600K-Prozessor und 8 Gigabyte Arbeitsspeicher. Für unterschiedliche Größen  $n$  wurden jeweils zehn Probleminstanzen erzeugt (die je nach untersuchtem Problemtyp als Probleminstanzen des TSP, des DVRP etc. interpretiert werden).

Da bei den Rundreiseproblemen andere Parameter zum Tragen kommen als bei den Problemen des IPDSP, wurden die jeweiligen Parameter aus Parametern des IPDSP hergeleitet.

- Fahrtzeiten  $t_{ij}$  und Fahrtkosten  $c_{ij}$  wurden übernommen, ebenso Belieferungszeitfenster  $[a_i, b_i]$ .
- Die jeweilige Transporterkapazität  $Q$  wurde übernommen. Allerdings war es notwendig, zur Existenz einer zulässigen Lösung beim VRPTW, dem CVRP und dem CDVRPTW diese Kapazität mittels  $Q := \max\left(Q, \max_{i \in N} q_i\right)$  anzupassen. Damit wird es ermöglicht, dass auch jede Bestellung von einem Transporter aufgenommen werden kann.
- Die maximale Rundtourlänge  $T$  wurde aus dem Höchstalter  $B$  und den Entfernungen mittels  $T := \max\left(B, \max_{i \in N} (t_{0i} + t_{i0})\right)$  ermittelt. Das Höchstalter  $B$  wurde ebenfalls direkt als Haltbarkeitsdauer für das VRPTWM verwendet.

<sup>7</sup><http://zimpl.zib.de>, [Koc04]

- Die Bedienzeiten, welche beim VRPTWM zum Tragen kommen, wurden als  $s_i = 1$  für alle Orte  $i \in N$  gewählt.

Um die Existenz einer zulässigen Lösung sicherzustellen, wurde die zur Verfügung stehende Anzahl an Transportern beim DVRP, dem VRPTW, dem CVRP, dem CDVRPTW sowie dem SDVRP auf  $m = n$  gesetzt. Beim VRPTWM ist es auch erlaubt, Orte nicht zu besuchen, demzufolge konnte  $m = 3$  gesetzt werden, ohne die Existenz einer zulässigen Lösung zu gefährden.

Sollte nach 3600 Sekunden noch keine optimale Lösung gefunden sein, so wird das jeweilige Lösungsverfahren terminiert.<sup>8</sup> Dabei wird die beste gefundene Lösung sowie die jeweilige Optimalitätslücke ausgegeben. Diese Optimalitätslücke berechnet sich aus dem relativen Abstand des Zielfunktionswerts der besten bisher gefundenen Lösung zur größten unteren Schranke für den optimalen Zielfunktionswert, also mittels

$$\text{Optimalitätslücke} = \frac{\text{Zielfunktionswert der besten gefundenen Lösung} - \text{größte untere Schranke}}{\text{größte untere Schranke}}$$

Die Tabellen zeigen zur jeweiligen Probleminstanzgröße die durchschnittliche Zeit (in Sekunden), die zur Lösung der jeweils zehn Probleminstanzen benötigt wurde, die durchschnittliche gegebenenfalls verbleibende Optimalitätslücke und den durchschnittlichen Zielfunktionswert der jeweils besten gefundenen Lösung. Die Untersuchung wurde jeweils mindestens bis zu einer Problemgröße durchgeführt, bei der erstmals eine Optimalitätslücke von 25% überschritten wurde. Auch wurde die Untersuchung jeweils bei einer Problemgröße abgebrochen, bei der Zimpl aus dem jeweiligen Modell und den konkreten Problemdata aufgrund der Problemgröße kein konkretes lineares Programm erstellen konnte bzw. falls Cplex nicht in der Lage war, eine zulässige Lösung zu ermitteln.

Tabelle 6.1: Vergleich von Modellen für das TSP

$n$	[DFJ59]			[MTZ60]			neues Modell		
	Zeit	Lücke	ZFW	Zeit	Lücke	ZFW	Zeit	Lücke	ZFW
5	0,00	0,00%	238,47	0,04	0,00%	238,47	0,04	0,00%	238,47
10	0,06	0,00%	283,09	0,05	0,00%	283,09	0,02	0,00%	283,09
15	3,21	0,00%	348,69	0,68	0,00%	348,69	0,15	0,00%	348,69
20	—	—	—	0,99	0,00%	396,90	0,93	0,00%	396,90
30	—	—	—	369,17	0,31%	463,35	82,08	0,00%	463,35
50	—	—	—	298,36	0,00%	574,31	3600,01	33,10%	612,22
70	—	—	—	1809,40	1,05%	673,84	—	—	—
100	—	—	—	3253,12	1,38%	798,61	—	—	—
150	—	—	—	3607,08	3,17%	969,48	—	—	—
200	—	—	—	3640,40	6,70%	1140,59	—	—	—

In Tabelle 6.1 wird ersichtlich, dass das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Modell des TSP für Testinstanzen bis zu einer Größe von  $n = 30$  dem Modell von Miller, Tucker und Zemlin ebenbürtig ist. Allerdings gilt dies nicht mehr für Testinstanzen der Größe von  $n \geq 50$ . Es kann vermutet werden, dass es beim neuen Modell für das TSP innerhalb der gesetzten Zeitbeschränkung nicht

<sup>8</sup>Dies kann durchaus einige Zeit benötigen, wodurch teils geringfügig längere Laufzeiten als 3600 Sekunden bedingt sind.

mehr möglich ist, ausreichend viele Variablen zu fixieren, um gute Schranken zu erhalten. Des Weiteren zeigt sich, dass es für Testinstanzen mit  $n \geq 20$  nicht möglich war, die entsprechenden Modelle nach [DFJ59] zu generieren, da die Anzahl der Nebenbedingungen (2.3.3) exponentiell wächst. Daraus sollte allerdings nicht gefolgert werden, dass diese Formulierung wertlos ist. Insbesondere im Rahmen eines Branch&Cut-Verfahrens sind nicht notwendigerweise alle Nebenbedingungen a priori zu formulieren. Stattdessen werden diese erst bei Bedarf erzeugt und somit kann dieses Modell in einem derartigen Rahmen verwendet werden.

Tabelle 6.2: Vergleich von Modellen für das DVRP

$n$	[KB85]			neues Modell		
	Zeit	Lücke	ZFW	Zeit	Lücke	ZFW
5	0,04	0,00%	408,42	0,06	0,00%	408,42
10	0,39	0,00%	557,38	0,28	0,00%	557,38
15	44,93	0,00%	495,03	19,68	0,00%	495,03
20	1177,25	3,52%	519,54	702,65	0,13%	519,54
30	3204,35	8,33%	546,74	3379,56	17,82%	567,73
50	3528,50	7,09%	628,44	3600,13	67,32%	1022,65
70	3600,94	6,59%	717,47	—	—	—
100	3636,72	26,78%	1091,79	—	—	—

Tabelle 6.3: Vergleich von Modellen für das VRPTW

$n$	[DLSS88]			neues Modell		
	Zeit	Lücke	ZFW	Zeit	Lücke	ZFW
5	0,00	0,00%	545,12	0,03	0,00%	545,12
10	0,05	0,00%	671,00	0,18	0,00%	671,00
15	0,36	0,00%	684,64	1109,60	4,27%	684,64
20	0,97	0,00%	808,44	2827,58	23,03%	809,24
30	1,47	0,00%	957,66	3600,10	42,34%	994,70
50	19,92	0,00%	1198,33	3600,18	78,40%	1717,12
70	8,41	0,00%	1451,49	—	—	—
100	175,04	0,00%	1864,05	—	—	—
150	1444,54	0,10%	2233,65	—	—	—
200	3656,43	2,66%	2755,79	—	—	—

Tabelle 6.4: Vergleich von Modellen für das CVRP

$n$	[KB85]			neues Modell		
	Zeit	Lücke	ZFW	Zeit	Lücke	ZFW
5	0,00	0,00%	545,11	0,04	0,00%	545,11
10	1,02	0,00%	670,78	0,18	0,00%	670,78
15	1588,03	5,61%	654,63	747,48	3,53%	654,63
20	3600,35	30,30%	743,21	2780,93	7,81%	742,68
30	3600,49	36,75%	802,54	3600,02	43,17%	847,42
50	3600,61	35,55%	919,56	3600,36	76,65%	1386,03

Tabelle 6.5: Vergleich von Modellen für das CDVRPTW

$n$	[KB85] [DLSS88]			neues Modell		
	Zeit	Lücke	ZFW	Zeit	Lücke	ZFW
5	0,00	0,00%	545,12	0,03	0,00%	545,12
10	0,06	0,00%	746,19	0,24	0,00%	746,19
15	0,23	0,00%	714,33	1165,07	2,57%	714,33
20	1,28	0,00%	808,80	3249,70	35,48%	811,77
30	3,41	0,00%	959,64	3532,77	54,03%	1019,05
50	63,56	0,00%	1198,33	3501,69	75,31%	1676,68
70	12,97	0,00%	1451,49	—	—	—
100	559,57	0,00%	1864,05	—	—	—
150	1931,55	0,54%	2235,04	—	—	—
200	3688,91	4,14%	2799,82	—	—	—

Eine ähnliche Unterlegenheit von den hier neu entwickelten Modellen gegenüber den in der Literatur bekannten Modellen [DLSS88, KB85] für das DVRP, das VRPTW, das CVRP bzw. das CDVRPTW ist den Tabellen 6.2, 6.3, 6.4 sowie 6.5 zu entnehmen. Während die Unterlegenheit des neu entwickelten Modells beim CVRP (s. Tabelle 6.4) eher gering ist, ist sie bei den übrigen angesprochenen Problementypen auffällig.

Tabelle 6.6: Vergleich von Modellen für das SDVRP

$n$	[DT90, AS12]			[DT90, AS12] mit [MTZ60]			neues Modell		
	Zeit	Lücke	ZFW	Zeit	Lücke	ZFW	Zeit	Lücke	ZFW
5	0,74	0,00%	530,31	0,36	0,00%	530,31	0,10	0,00%	530,31
10	3600,25	27,71%	647,69	2654,98	29,43%	647,69	4,36	0,00%	647,69
15	3841,65	60,23%	878,83	3621,74	35,50%	644,75	1019,72	0,00%	636,41
20	—	—	—	3642,71	45,12%	746,36	3520,15	13,95%	736,94
30	—	—	—	—	—	—	3616,62	37,08%	833,82
50	—	—	—	—	—	—	3618,04	78,09%	1505,66

Beim SDVRP hingegen ist es gelungen, ein Modell zu entwickeln, dass sich besser zur Lösung eignet als das in [DT90] bzw. [AS12] vorgestellte Modell des SDVRP und der – auch im Rahmen

dieser Arbeit – vorgestellten Modifikation ebendieses Modells mit Hilfe der Ideen aus [MTZ60]. Dies lässt sich Tabelle 6.6 entnehmen. Vergleicht man den Mittelwert der mit Hilfe des in dieser Arbeit neu entwickelten Modells des SDVRP gewonnenen Lösungen mit dem Mittelwert der mit dem Modell nach [KB85] gewonnenen Lösungen des CVRP aus Tabelle 6.4, so wird deutlich, dass bei kleinen Testinstanzen mit  $n \leq 20$  die Relaxierung der Entscheidungsschranke „höchstens ein Transporter darf eine Bestellung ausliefern“ zu einem besseren Zielfunktionswert führt. Allerdings bewegt sich diese Verbesserung nur in einem Rahmen von 1 bis 3%. Bei größeren Probleminstanzen mit  $n \geq 30$  ist im Mittel keine bessere Lösung erreicht worden als im CVRP. An dieser Stelle sei angemerkt, dass in der Literatur bessere Lösungsverfahren für das SDVRP existieren als die Lösung des in dieser Arbeit vorgestellten gemischt-ganzzahligen linearen Programms (siehe z.B. [ABS11, ABS14]). Allerdings sind diese dem vorgestellten Modell in Hinsicht auf Erweiterbarkeit unterlegen.

Tabelle 6.7: Vergleich von Modellen für das VRPTWM

$n$	[AGP10]			neues Modell		
	Zeit	Lücke	ZFW	Zeit	Lücke	ZFW
5	0,04	0,00%	70,51	0,00	0,00%	70,51
10	2830,61	24,50%	227,15	0,07	0,00%	227,15
15	3577,23	26,51%	294,85	0,44	0,00%	292,89
20	2600,08	54,52%	777,35	3,21	0,00%	525,53
30	3552,40	81,94%	2685,53	48,09	0,00%	760,04
50	3600,14	98,85%	48202,98	3010,22	41,57%	3285,06
70	—	—	—	3600,37	90,33%	14389,08

Einen noch größeren Fortschritt gegenüber bekannten Modellen stellt das neu entwickelte Modell für das VRPTWM dar, wie Tabelle 6.7 zeigt. Während das in [AGP10] präsentierte Modell bereits ab einer Problemgröße von  $n = 20$  eine Optimalitätslücke von mehr als 50% aufweist, können diese mit dem neuen Modell in sehr kurzer Zeit optimal gelöst werden, ebenso wie Instanzen der Größe  $n = 30$ . Weiterhin konnte die Hälfte der Probleminstanzen der Größe  $n = 50$  mit vergleichsweise geringer Optimalitätslücke von weniger als 5% gelöst werden. Allerdings konnte die andere Hälfte der Probleminstanzen nur mit einer sehr großen Optimalitätslücke gelöst werden, wodurch die in Tabelle 6.7 dargestellte Optimalitätslücke von 41,57% bedingt ist. Es ist ersichtlich, dass das neu entwickelte Modell dem in [AGP10] vorgestellten hinsichtlich praktischer Verwendbarkeit überlegen ist.

Insgesamt lässt sich konstatieren, dass eine Modellierung von Rundreiseproblemen basierend auf [BKS99] in wenigen Fällen dazu führt, dass das so entwickelte Modell sich gut zur Lösung eignet. Allerdings kann man als „Faustregel“ festhalten, dass die Reduzierung der Dimension der Indizes von binären Variablen (im Falle des SDVRP von 3 auf 2) die schlechte LP-Relaxation einer alternativen Formulierung mehr als ausgleicht. Auch im Rahmen des VRPTWM ist ein neues Modell entwickelt worden, in welchem die Anzahl binären Entscheidungsvariablen nur quadratisch statt kubisch wächst, woraus ein höherer Nutzen dieses Modells hinsichtlich der Lösung von Problemstellungen resultiert. Das Wachstum der Anzahl binärer Entscheidungsvariablen ist somit als ein wichtiges Kriterium bezüglich des praktischen Nutzens eines Modells zu sehen.

## 6.3 Analyse der unterschiedlichen Lösungsverfahren für das IPDSP

Nachdem im vorherigen Abschnitt die Evaluation von Modellen von Rundreiseproblemen präsentiert worden ist, soll in diesem Abschnitt untersucht werden, inwiefern sich mit unterschiedlichen Parametern generierte Testinstanzen des IPDSP von den vorgestellten Lösungsverfahren für unterschiedliche Szenarien des IPDSP lösen lassen. Dazu werden die einzelnen Parameter der Testinstanzengenerierung *ceteris paribus* variiert und die Auswirkung der Parameterveränderung auf die Lösungsdauer und Lösungsqualität evaluiert. Die Untersuchung erfolgt hierbei analog zur Untersuchung im vorherigen Abschnitt, so wird auch hier nach einer Stunde der Lösungsvorgang der jeweiligen Probleminstanz abgebrochen. Einzig die Anzahl der zum jeweiligen Problemtyp generierten Testinstanzen soll aufgrund des großen Umfangs der Untersuchungen nur fünf betragen.

Sowohl die mittlere Laufzeit des Lösungsverfahrens (in Sekunden angegeben) als auch die gegebenenfalls evaluierte mittlere Optimalitätslücke lassen auf die Komplexität der jeweiligen Probleminstanz schließen. Eine Probleminstanz ist einfacher zu lösen als eine andere, falls sie eine geringere Laufzeit und keine größere Optimalitätslücke oder keine größere Laufzeit und eine geringere Optimalitätslücke aufweist als diese. Aus den empirisch ermittelten Laufzeiten und Optimalitätslücken sollen nun Aussagen über die Komplexität des jeweiligen Typs von Probleminstanz gewonnen werden. Hierzu werden die Mittelwerte der fünf zu jedem Problemtyp generierten Probleminstanzen verglichen.

Theoretisch ist dieser Vergleich mittels dieser Definition von Komplexität problematisch, da kein Vergleich möglich ist, wenn ein Typ von Probleminstanzen eine größere mittlere Optimalitätslücke und eine kleinere mittlere Laufzeit aufweist als ein anderer Typ von Probleminstanzen. In den folgenden Auswertungen ist dies jedoch zumeist unproblematisch, da die Varianz von Laufzeit und Optimalitätslücke innerhalb eines Typs von Probleminstanzen nicht derart groß ist, dass es zu dem beschriebenen Effekt führt. Ausnahmen sind allerdings auch zu beobachten und werden bei Ihrem Auftreten analysiert.

Die aus der Betrachtung von Testdaten gewonnenen Erkenntnisse lassen auch Rückschlüsse auf innerhalb eines betrieblichen Umfelds auftretende Problemstellungen des IPDSP zu. Ebenso, wie mittels der vorgestellten Parameter Probleminstanzen erzeugt werden können, können diese Parameter auch aus im betrieblichen Umfeld gegebenen Probleminstanzen ermittelt werden. Somit ist es *a priori* möglich, mit Hilfe dieser ermittelten Parameter eine (grobe) Aussage darüber zu treffen, wie schwierig die Lösung einer Probleminstanz ist. Ein Instrumentarium hierzu soll allerdings nicht Teil dieser Arbeit sein.

### 6.3.1 Lösen von Probleminstanzen mit dem Basis-Modell

Als erstes soll das Lösen von mit Hilfe des Basis-Modells mathematisch formulierten Probleminstanzen mittels Cplex (im Folgenden kurz: Lösen von Probleminstanzen mit dem Basis-Modell) analysiert werden. Bei der Untersuchung des Einfluss der unterschiedlichen Parameter sind die übrigen, jeweils nicht untersuchten Parameter – sofern nichts anderes erwähnt wird – entsprechend der in Abschnitt 6.1 beschriebenen Standardbelegung gesetzt.

Es ist davon auszugehen, dass insbesondere die Problemgröße in Form von der Anzahl der Bestellungen  $n$  und der Anzahl der Transporter  $m$  für die Komplexität relevant ist. Demzufolge

Tabelle 6.8: Vergleich der Lösungsgüte bei unterschiedlichen Problemgrößen

$n$	$m$	Laufzeit	Lücke
10	2	0	0,00%
	3	0	0,00%
	4	0	0,00%
20	2	48	0,00%
	3	2	0,00%
	4	18	0,00%
30	2	64	0,00%
	3	3002	1,79%
	4	3631	9,79%
40	2	3255	2,55%
	3	3600	8,94%
	4	3637	16,78%
50	2	3600	14,50%
	3	3634	12,00%
	4	3613	19,44%
70	3	3615	22,88%
	4	3600	37,41%
	5	3620	48,52%
100	4	3600	50,37%
	5	3600	48,50%
	6	3600	50,92%

soll untersucht werden, wie gut sich unterschiedlich große Probleminstanzen lösen lassen. In Tabelle 6.8 werden Testinstanzen mit 10 bis 100 Bestellungen und einer Transporteranzahl von 2 bis 6 betrachtet, wobei bei einer kleineren Anzahl von Bestellungen eine kleinere und bei einer größeren Anzahl von Bestellungen eine größere Anzahl von Transportern betrachtet wird. Erwartungsgemäß nimmt die Komplexität mit steigender Anzahl von Bestellungen zu, was sich sowohl an einer steigenden Laufzeit als auch – bei Terminierung des Lösungsprozess nach 3600 Sekunden – an einer steigenden Optimalitätslücke erkennen lässt.

Es zeigt sich weiterhin, dass Instanzen mit  $n = 10$  oder  $n = 20$  Bestellungen schnell optimal gelöst werden können. Instanzen mit  $n = 30$  Bestellungen können teils optimal, teils mit einer geringen Optimalitätslücke gelöst werden. Probleminstanzen mit  $n = 40$  Bestellungen können nur selten<sup>9</sup> optimal gelöst werden, Probleminstanzen mit  $n = 50$  Bestellungen können durchweg nicht innerhalb von einer Stunde optimal gelöst werden. Allerdings ist die Optimalitätslücke bei diesen Testinstanzen kleiner als 20%, was je nach betrieblicher Problemstellung ein akzeptabler Wert sein kann. Bei einer Anzahl von  $n = 70$  oder  $n = 100$  Bestellungen kommt es zu einer weiteren Zunahme der Optimalitätslücke, sodass konstatiert werden muss, dass die Lösung derartiger großer Probleminstanzen mit dem Basis-Modell kein akzeptables Lösungsverfahren darstellt.

<sup>9</sup>Bei  $m = 2$  ist die durchschnittliche Laufzeit kleiner als 3600. Dies zeigt, dass einzelne Testinstanzen optimal gelöst wurden.

Tabelle 6.9: Vergleich der Lösungsgüte bei unterschiedlich stark geclusterten Orten

$n$	$m$	Clustering	Laufzeit	Lücke
20	2	keins	1	0,00%
		schwach ( $c$ )	8	0,00%
		stark ( $cc$ )	15	0,00%
	3	keins	5	0,00%
		schwach ( $c$ )	15	0,00%
		stark ( $cc$ )	27	0,00%
	4	keins	21	0,00%
		schwach ( $c$ )	25	0,00%
		stark ( $cc$ )	22	0,00%
30	2	keins	755	0,48%
		schwach ( $c$ )	1671	1,04%
		stark ( $cc$ )	1456	2,23%
	3	keins	2537	2,46%
		schwach ( $c$ )	1895	1,82%
		stark ( $cc$ )	2086	1,71%
	4	keins	3632	8,17%
		schwach ( $c$ )	3607	5,23%
		stark ( $cc$ )	3498	8,71%
40	2	keins	3255	2,55%
		schwach ( $c$ )	2498	1,04%
		stark ( $cc$ )	995	0,10%
	3	keins	3600	8,94%
		schwach ( $c$ )	3601	10,94%
		stark ( $cc$ )	3601	5,87%
	4	keins	3637	16,78%
		schwach ( $c$ )	3573	19,43%
		stark ( $cc$ )	3646	20,93%

In Tabelle 6.9 wird ausgewertet, wie der Einfluss der räumlichen Verteilung der Zielorte der Bestellungen ist. Dazu wurden für unterschiedliche Problemgrößen Testinstanzen ohne, mit schwachem und mit starkem Clustering erzeugt. Es zeigt sich, dass sich die Komplexität von Testinstanzen, die mit unterschiedlich starkem Clustering erzeugt wurden, nicht signifikant unterscheidet, da sowohl Laufzeit als auch Optimalitätslücke nur von der Anzahl an Bestellungen sowie der Anzahl an Transporter maßgeblich beeinflusst werden.

In den folgenden Untersuchungen wird – soweit nicht anders angegeben – insbesondere  $n = 30$  und  $m = 3$  als Standardbelegung der Parameter bei der Testinstanzgenerierung gewählt, wie bereits zuvor in Abschnitt 6.1 dargelegt wurde. Nach den Ergebnissen aus Tabelle 6.8 ist dies der Bereich, in dem Probleminstanzen zwar schwierig, aber in den meisten Fällen dennoch optimal gelöst werden können. Dies lässt zum einen Raum für eine steigende Komplexität (die sich vorrangig in einer höheren Optimalitätslücke niederschlägt), zum anderen aber auch für eine sinkende Komplexität (die sich in einer geringeren Laufzeit zeigt), wenn nun in den folgenden Untersuchungen Parameter verändert werden. Außerdem werden im Folgenden nur Testinstan-

zen ohne Clustering der Zielorte der Bestellungen untersucht, was mit den aus Tabelle 6.9 gewonnenen Ergebnissen gerechtfertigt ist.

Tabelle 6.10: Vergleich der Lösungsgüte bei unterschiedlich starker Standardabweichung der Nachfragemengen

$dv$	Laufzeit	Lücke
0,0	2184	2,00%
0,1	2275	1,85%
0,2	2919	2,87%
0,4	2415	0,17%

Die Ergebnisse einer Untersuchung des Einfluss der Standardabweichung der Nachfragemengen werden in Tabelle 6.10 vorgestellt. Es lässt sich entnehmen, dass die Komplexität unabhängig von der Wahl des Parameters  $dv$  ist.

Tabelle 6.11: Vergleich der Lösungsgüte bei unterschiedlich großem Höchstalter

$rpl$	Laufzeit	Lücke
0,3	76	0,00%
0,4	166	0,00%
0,5	2137	0,25%
0,6	2704	1,41%
0,7	3606	7,11%

Tabelle 6.11 zeigt, wie die Komplexität vom relativen Höchstalter der bestellten Güter abhängt. Es ist zu sehen, dass bei steigendem Höchstalter die Komplexität zunimmt.

Tabelle 6.12: Vergleich der Lösungsgüte bei unterschiedlich langer relativer Produktionsdauer

$rpt$	Laufzeit	Lücke
0,03	3600	3,36%
0,06	2205	3,66%
0,1	752	0,00%
0,2	592	0,00%

Untersucht man die Komplexität in Abhängigkeit von der relativen Produktionsdauer, so lässt sich konstatieren, dass die Komplexität mit zunehmender Produktionsdauer abnimmt, wie es sich Tabelle 6.12 entnehmen lässt.

Tabelle 6.13: Vergleich der Lösungsgüte bei unterschiedlich verteilten Strafen

$rv$	Laufzeit	Lücke
0,0	2583	1,83%
0,2	2282	0,87%
0,5	1805	1,71%
1,0	1240	0,90%

Aus einer Untersuchung der Komplexität von mit unterschiedlich verteilten Strafen generierten Testinstanzen resultiert Tabelle 6.13. Es zeigt sich, dass mit einer Erhöhung des Parameters  $rv$  eine Verringerung der Komplexität einhergeht.

Tabelle 6.14: Vergleich der Lösungsgüte bei unterschiedlicher Gesamttransporterkapazität

$rv_c$	Laufzeit	Lücke
0,2	7	0,00%
0,3	87	0,00%
0,4	669	0,00%
0,5	1771	1,37%
0,7	2453	1,86%
1,0	2259	5,01%
1,2	2685	2,47%

In Tabelle 6.14 ist dargestellt, wie sich die Komplexität in Abhängigkeit von den Kapazitäten der Transporter verhält. Mit steigender Gesamtkapazität der Transporter nimmt die Komplexität zu, allerdings nur bis zu einem Wert von  $rv_c = 0,7$ . Darüber hinaus bleibt sie konstant.

Tabelle 6.15: Vergleich der Lösungsgüte bei unterschiedlich hohen Transporterfixkosten

$rvfc$	Laufzeit	Lücke
0,05	2039	0,03%
0,1	3117	4,09%
0,15	2357	4,12%
0,2	3515	3,54%
0,3	2604	5,13%
0,4	2963	0,69%
0,5	1532	0,79%
0,6	1557	1,57%
0,7	870	1,69%

Der Einfluss der Transporterfixkosten auf die Komplexität wird mit Hilfe von Tabelle 6.15 analysiert. Dabei zeigt sich, dass im Bereich bis  $rvfc = 0,4$  kein Einfluss der Transporterfixkosten erkennbar ist. Im Bereich von  $rvfc = 0,4$  bis  $rvfc = 0,7$  lässt sich allerdings feststellen, dass mit steigenden Transporterfixkosten die Komplexität abnimmt.

Tabelle 6.16: Vergleich der Lösungsgüte bei unterschiedlich hohen Fahrtkosten

<i>rvtc</i>	Laufzeit	Lücke
0,05	2564	2,26%
0,1	2396	4,44%
0,15	1906	2,38%
0,2	1194	0,01%
0,25	1552	0,23%
0,3	569	0,00%

Tabelle 6.16 zeigt, dass die Komplexität bei steigenden Fahrtkosten abnimmt.

Tabelle 6.17: Vergleich der Lösungsgüte bei unterschiedlich großen Belieferungszeitfenstern

<i>rwtw</i>	Laufzeit	Lücke
0,05	780	0,05%
0,1	2595	1,42%
0,15	3616	10,37%
0,2	3614	15,64%
0,25	3519	22,62%
0,3	3602	23,33%
0,35	3483	27,41%
0,4	3656	30,07%

Inwiefern die Länge der Belieferungszeitfenster Einfluss auf die Komplexität nimmt, stellt Tabelle 6.17 dar. Es zeigt sich, dass die Komplexität bei steigender Belieferungszeitfensterbreite zunimmt.

### 6.3.2 Lösen von Probleminstanzen mit Verallgemeinerungen des Basis-Modells

Nach der Untersuchung von Lösungsinstanzen mit dem Basis-Modell soll in diesem Unterabschnitt auf Verallgemeinerungen ebendieses Modells eingegangen werden. Dazu werde zu jeder in Kapitel 4 vorgestellten Verallgemeinerung untersucht, wie sich die Komplexität bei Variation des für die jeweilige Verallgemeinerung charakteristischen Parameters verändert. Ebenfalls werden die generellen Verallgemeinerungen in Hinsicht auf mehrere Touren pro Transporter und Belieferungsaufteilung untersucht und einem Vergleich mit dem Basis-Szenario unterzogen.

Tabelle 6.18: Analyse von Testinstanzen mit Bestellungen mit Erfüllungszusage

<i>obl</i>	Laufzeit	Lücke	Anzahl unlösbarer Instanzen
0,0	1693	2,27%	0
0,1	2549	2,15%	2
0,2	1910	6,34%	1
0,3	802	0,00%	3
0,5	3600	2,20%	4
0,7	17	0,00%	4
1,0	—	—	5

Tabelle 6.18 zeigt die Komplexität von Testinstanzen mit unterschiedlichem mittleren Anteil *obl* an Bestellungen mit Erfüllungszusage. Es lässt sich keine eindeutige Abhängigkeit der Komplexität vom Parameter *obl* feststellen. Allerdings steigt mit dem mittleren Anteil von Bestellungen mit Erfüllungszusage auch die Anzahl an Testinstanzen, für die keine zulässige Lösung existiert. Somit kann konstatiert werden, dass bereits ein geringer Anteil von Bestellungen mit Erfüllungszusage dazu führen kann, dass eine Probleminstanz unlösbar ist.

Tabelle 6.19: Analyse von Testinstanzen mit einer Prioritätsordnung der Bestellungen

<i>n</i>	<i>prio</i>	Laufzeit	Lücke
30	1	3600	3,47%
	2	722	1,50%
	3	20	0,00%
	4	34	0,00%
	5	22	0,00%
40	1	3602	6,75%
	2	53	0,00%
	3	5	0,00%
	4	1443	1,18%
	5	5	0,00%
50	1	3635	14,16%
	2	1994	1,35%
	3	1675	6,36%
	4	2021	5,86%
	5	821	0,77%

In Tabelle 6.19 wird das Ergebnis der Untersuchung der Komplexität von Testinstanzen mit unterschiedlich vielen Bestellungen und unterschiedlich vielen Prioritätsklassen gezeigt. Mit der Einteilung der Bestellungen in Prioritätsklassen geht eine signifikante Reduktion der Komplexität einher. Insbesondere bei Testinstanzen mit 40 beziehungsweise 50 Bestellungen zeigt sich, dass schon bei einer Einteilung der Bestellungen in zwei Prioritätsklassen statt einer die Komplexität erheblich verringert.

Tabelle 6.20: Analyse von Testinstanzen mit gebündelten Bestellungen

<i>ass</i>	Laufzeit	Lücke
0,0	3600	2,50%
0,1	2083	1,79%
0,2	1311	0,41%
0,3	1400	0,00%
0,5	725	0,50%
0,6	738	0,29%
0,7	1443	0,75%
0,85	1452	1,57%
1,0	2161	1,70%

Sind Bestellungen in mehrere Gruppen zusammengefasst, so wurde abhängig von Anzahl und Größe der Gruppen die Komplexität ermittelt und in Tabelle 6.20 dargestellt. Es zeigt sich, dass Probleminstanzen, bei denen rund die Hälfte der Bestellungen mit anderen zusammen gebündelt sind, sowohl einfacher zu lösen sind als Testinstanzen, bei denen keine gebündelten Bestellungen vorliegen als auch einfacher zu lösen sind als Testinstanzen, bei denen alle Bestellungen mit anderen zusammen gebündelt sind.

Tabelle 6.21: Analyse von Testinstanzen mit unterschiedlichem Höchstalter

<i>lv</i>	Laufzeit	Lücke
0,000	2938	2,95%
0,033	2503	1,38%
0,066	2402	0,57%
0,100	2346	2,44%
0,133	3289	2,58%
0,166	3074	1,55%

Tabelle 6.21 stellt die Ergebnisse beim Lösen von Testinstanzen mit unterschiedlich großer Standardabweichung der Höchstalter der Bestellungen dar. Es zeigt sich, dass die Standardabweichung der Höchstalter ohne Einfluss auf die Komplexität ist.

Tabelle 6.22: Analyse von Testinstanzen mit mehreren unterschiedlichen Maschinen

$\omega$	$prv$	Laufzeit	Lücke
1	0,0	2187	2,18%
2	0,0	2033	0,35%
	0,1	1388	0,73%
	0,2	1126	0,03%
	0,3	1679	0,00%
	0,5	2328	2,09%
	0,7	1262	0,36%
	1,0	1438	0,16%
3	0,0	1773	0,49%
	0,1	1213	0,00%
	0,2	1551	0,00%
	0,3	2240	1,89%
	0,5	1349	0,30%
	0,7	1775	0,80%
	1,0	2187	1,42%
4	0,0	2068	1,43%
	0,1	1498	0,85%
	0,2	1827	0,57%
	0,3	1129	0,00%
	0,5	1819	0,35%
	0,7	2340	0,23%
	1,0	1224	0,00%
5	0,0	1039	0,00%
	0,1	983	0,00%
	0,2	1408	0,12%
	0,3	2861	1,83%
	0,5	1653	0,42%
	0,7	1787	0,64%
	1,0	942	0,00%

Tabelle 6.22 zeigt die Komplexität in Abhängigkeit von der Maschinenanzahl  $\omega$  sowie der mittleren Abweichung der maschinenabhängigen Bearbeitungszeit  $prv$ . Es zeigt sich, dass die Komplexität weder von der Maschinenanzahl noch von der Abweichung der Bearbeitungszeit abhängt.

Tabelle 6.23: Analyse von Testinstanzen mit Rüstzeiten

<i>stv</i>	Laufzeit	Lücke
0,0	2155	1,12%
0,1	2522	2,56%
0,2	1917	1,81%
0,3	2287	0,11%
0,5	2208	0,73%
0,7	1705	0,67%
1,0	2684	3,66%

Ebenfalls ohne Einfluss auf die Komplexität ist die Abweichung der Rüstzeiten, wie Tabelle 6.23 zeigt. Bei dieser Untersuchung wurde die Maschinenanzahl mit  $\omega = 3$  und die relative Abweichung der Produktionsgeschwindigkeiten der Maschinen mit  $prv = 0,2$  festgelegt, statt die Standardbelegung dieser Parameter zu verwenden.

Tabelle 6.24: Analyse von Testinstanzen mit unterschiedlicher Produktionsstandortanzahl bzw. Maschinen-/Transporteranzahl

<i>w</i>	$\omega = m$	Laufzeit	Lücke
1	1	47	0,00%
	2	17	0,00%
	3	2378	0,64%
2	2	762	0,89%
	3	764	0,00%
	4	3292	4,55%
3	3	748	0,00%
	4	3622	8,19%
	5	3657	10,17%

In Tabelle 6.24 wird die Komplexität bei einer unterschiedlichen Anzahl an Produktionsstandorten  $w$  und Maschinen  $\omega$  bzw. Transportern  $m$  abgebildet. Betrachtet man hierbei insbesondere die Testinstanzen mit  $\omega = m = 3$ , so fällt auf, dass sich die Komplexität auf einem ähnlichen Niveau bewegt. Die Zunahme der Komplexität bei steigender Anzahl an Produktionsstandorten ist auf die zunehmende Anzahl betrachteter Transporter zurückzuführen. Aufgrund der Modellierung von mehreren Produktionsstandorten in Unterabschnitt 4.7, die mittels einer speziellen Wahl von Parametern erfolgt ist, war zu erwarten, dass der Einfluss der Anzahl der Standorte auf die Komplexität gering ist.

Tabelle 6.25: Analyse von Testinstanzen mit heterogenem Fuhrpark

$vv$	Laufzeit	Lücke
0,0	2249	0,83%
0,1	1864	1,13%
0,2	2149	4,61%
0,3	2203	7,59%
0,5	2995	8,26%
0,7	2511	9,19%
1,0	1490	13,81%

Die mit Hilfe von Tabelle 6.25 dargestellte Untersuchung des Einfluss der Standardabweichung  $vv$  der Transporterparameter zeigt, dass sich mit einer höheren Standardabweichung der Transporterparameter auch die Probleminstanzen hinsichtlich ihrer Komplexität stark unterscheiden. Dies lässt sich daran erkennen, dass die Laufzeit zwar relativ konstant bleibt, die Optimalitätslücke jedoch mit steigender Abweichung zunimmt. Es gibt also mit steigendem Parameter  $vv$  sowohl viele Probleminstanzen, die nicht optimal gelöst werden können (was eine große Optimalitätslücke bedingt) als auch viele Probleminstanzen, die schnell optimal gelöst werden können (was eine niedrige Laufzeit bedingt).

Tabelle 6.26: Analyse von Testinstanzen mit mehreren Belieferungszeitfenstern

$twp$	$\varnothing$ Anzahl Zeitfenster	Laufzeit	Lücke
1,0	1	2458	1,42%
0,67	1,5	3600	18,33%
0,5	2	3615	28,75%
0,2	5	3616	34,52%
0,125	8	3601	34,69%
0,1	10	3407	33,07%

Der Einfluss der Anzahl der Zeitfenster auf die Komplexität der Probleminstanzen wird in Tabelle 6.26 analysiert. Es zeigt sich, dass Probleminstanzen mit mehreren Zeitfenstern wesentlich schwieriger zu lösen sind als diejenigen mit nur einem Zeitfenster.

Tabelle 6.27: Analyse von Testinstanzen des Basis-Szenarios

$n$	$m$	Laufzeit	Lücke	Zielfunktionswert
20	2	48	0,00%	706,42
	3	2	0,00%	696,86
	4	18	0,00%	684,53
30	2	64	0,00%	1129,36
	3	3002	1,79%	955,71
	4	3631	9,79%	975,45
40	2	3255	2,55%	1477,15
	3	3600	8,94%	1347,28
	4	3637	16,78%	1373,43

In den Tabellen 6.27 bis 6.30 wird dargestellt, welchen Einfluss die Betrachtung von mehreren Touren pro Transporter und/oder Belieferungsaufteilung sowohl auf die Komplexität der Probleminstanzen als auch auf den durchschnittlichen Zielfunktionswert der besten gefundenen Lösung haben. Dabei wurden unterschiedlich große Testinstanzen mit den in den Abschnitten 4.1, 4.10, 4.11 und 4.12 vorgestellten Modellen mathematisch formuliert und gelöst.

Tabelle 6.28: Analyse von Testinstanzen mit mehreren Touren pro Transporter

$n$	$m$	Laufzeit	Lücke	Zielfunktionswert
20	2	31	0,00%	565,61
	3	11	0,00%	521,22
	4	80	0,00%	524,05
30	2	900	0,00%	918,69
	3	1974	3,27%	713,33
	4	2471	10,13%	684,01
40	2	3065	8,18%	1152,56
	3	3601	15,22%	930,44
	4	3600	25,02%	994,72

Es zeigt sich, dass die Ermöglichung von mehreren Touren pro Transporter, wie Tabelle 6.28 dargestellt, nur einen kleinen Einfluss auf die Komplexität der Probleminstanzen hat. Im Vergleich mit den in Tabelle 6.27 dargestellten Werten ergibt sich eine Laufzeit, die sich in der gleichen Größenordnung bewegt und eine Optimalitätslücke, die bei  $n \leq 30$  ähnlich groß und bei  $n = 40$  nur unwesentlich größer ist. Dahingegen sind beim Lösen der Testinstanzen unter Berücksichtigung von mehreren möglichen Touren pro Transporter wesentlich bessere Zielfunktionswerte erreicht worden, was darauf zurückzuführen ist, dass mehr Bestellungen angenommen werden können. Interessanterweise führt die Betrachtung von mehreren Touren pro Transporter zu einem größeren Lösungsraum, der sich aber – wie evaluiert – nicht in einer erhöhten Problemschwierigkeit niederschlägt. Sind mehrere Touren pro Transporter aus betrieblicher Sicht möglich, so ist ihre Berücksichtigung aus den gewonnenen Resultaten anzuraten.

Tabelle 6.29: Analyse von Testinstanzen mit Belieferungsaufteilung

$n$	$m$	Laufzeit	Lücke	Zielfunktionswert
20	2	129	0,00%	702,67
	3	950	1,08%	685,03
	4	2925	4,55%	683,28
30	2	2848	7,07%	1135,79
	3	3601	14,85%	983,30
	4	3601	19,18%	997,46
40	2	3600	30,94%	1562,82
	3	3602	28,72%	1443,52
	4	3446	26,72%	1392,31

Tabelle 6.29 zeigt die Ergebnisse, wenn bei der Lösung der Problem instanzen erlaubt ist, die Auslieferung von Bestellungen auf mehrere Transporter aufzuteilen. In diesem Fall stellt der Lösungsraum dieser IPDSP-Szenarien zwar eine Obermenge des Lösungsraums des Basis-Szenarios dar, es ließen sich aber, wie aus Tabelle 6.29 ersichtlich wird, nur bei  $n = 20$  geringfügig bessere Zielfunktionswerte erreichen. Ansonsten waren diese jeweils schlechter als die bei der Lösung des Basis-Szenarios in Tabelle 6.27. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Komplexität beim Lösen dieser Szenarien höher ist, wie auch aus der bei den jeweiligen Testinstanzen ermittelten Optimalitätslücke deutlich wird. Des Weiteren ist durch die Berücksichtigung von Belieferungsaufteilung keine derart starke Verbesserung des Zielfunktionswerts zu erwarten (vergleiche Untersuchungen des SDVRP in [ASGS08]), dass diese den Anstieg der Komplexität kompensiert. Aus diesem Grund ist von einer Berücksichtigung von Belieferungsaufteilung abzuraten.

Tabelle 6.30: Analyse von Testinstanzen mit mehreren Touren pro Transporter und Belieferungsaufteilung

$n$	$m$	Laufzeit	Lücke	Zielfunktionswert
20	2	1186	4,57%	567,26
	3	3600	27,56%	543,18
	4	3600	50,01%	601,48
30	2	3600	51,57%	1077,98
	3	3600	60,00%	951,22
	4	3600	71,53%	960,95
40	2	3618	69,66%	1509,19
	3	3600	77,92%	1465,92
	4	3586	80,96%	1492,26

Gleiches gilt für die gleichzeitige Berücksichtigung von mehreren Touren pro Transporter und Belieferungsaufteilung. Aus Tabelle 6.30 lässt sich entnehmen, dass bei Problem instanzen mit  $n \geq 30$  ähnliche Zielfunktionswerte wie bei der Berücksichtigung von Belieferungsaufteilung und im Allgemeinen schlechtere als bei der Berücksichtigung von mehreren Touren pro Transporter erreicht wurden. Außerdem ist die Optimalitätslücke mit Ausnahme von den Testinstanzen mit  $n = 20$  und  $m = 2$  in einem Bereich, der keine gute Lösung verspricht.

Tabelle 6.31: Analyse von Testinstanzen mit mehreren Touren pro Transporter und vom Ladungsgewicht abhängigen Fahrtkosten hinsichtlich des Einflusses des ladungsgewichtsabhängigen Anteils der Fahrtkosten

<i>ldtc</i>	Laufzeit	Lücke
0,1	2211	5,16%
0,2	1797	0,23%
0,3	2892	9,09%
0,5	3047	11,25%
0,7	2905	5,66%
0,9	3007	12,97%

Tabelle 6.32: Analyse von Testinstanzen mit mehreren Touren pro Transporter und vom Ladungsgewicht abhängigen Fahrtkosten hinsichtlich des Einflusses des relativen Höhe der Fahrtkosten

<i>rvtc</i>	Laufzeit	Lücke
0,05	3600	20,64%
0,1	3600	12,91%
0,15	3541	5,01%
0,2	3600	7,94%
0,25	3600	8,18%
0,3	3320	8,31%

In den Tabellen 6.31 und 6.32 werden die Ergebnisse einer Untersuchung von Probleminstanzen dargestellt, bei denen vom Ladungsgewicht abhängige Fahrtkosten in einem IPDSP-Szenario mit mehreren Touren pro Transporter berücksichtigt werden. Neben dem jeweils variierten Parameter *ldtc* bzw. *rvtc* wurde der jeweils andere Parameter als  $rvtc = 0,1$  bzw.  $ldtc = 0,5$  gewählt. Tabelle 6.31 zeigt dabei den Einfluss desjenigen Anteils der relativen Transporterfahrtkosten, welche von der Beladung abhängen, und Tabelle 6.32 den Einfluss der Höhe der relativen gesamten Transporterfahrtkosten.

Dabei wird auf der einen Seite deutlich, dass die Höhe des vom Ladungsgewicht abhängigen Anteils der Fahrtkosten und der relativen gesamten Transporterfahrtkosten nur geringen Einfluss auf Laufzeit und Optimalitätslücke hat. Es lässt sich nur ein leichter Anstieg der Komplexität mit steigendem Anteil ladungsgewichtsabhängiger Fahrtkosten erkennen und ein leichter Abfall der Komplexität mit steigender relativen Höhe der Fahrtkosten.

Auf der anderen Seite zeigt sich aber auch, wenn man diese Resultate mit den in Tabelle 6.28 für  $n = 30$  und  $m = 3$  gegebenen Resultaten vergleicht, dass die Berücksichtigung von vom Ladungsgewicht abhängigen Fahrtkosten keinen Einfluss auf die Komplexität der Problemstellung hat. Dies ist nicht unerwartet, da die in Unterabschnitt 4.13.1 entwickelte Modellierung auf dem nur wenig modifizierten Modell für IPDSP-Szenarien mit mehreren Touren pro Transporter aus Abschnitt 4.10 beruht. Eine leichte Abnahme der Komplexität mit fallendem Parameter *rvtc* in Tabelle 6.32 deckt sich mit den Ergebnissen der Untersuchung dieses Parameters ohne Berücksichtigung von mehreren Fahrten von Transportern und ohne vom Ladungsgewicht abhängige Fahrtkosten in Tabelle 6.16.

Tabelle 6.33: Analyse von unterschiedlich großen Testinstanzen mit mehreren Touren pro Transporter, Belieferungsaufteilung und vom Ladungsgewicht abhängigen Fahrtkosten

$n$	$m$	Laufzeit	Lücke
10	2	2	0,00%
	3	457	0,00%
	4	2944	10,15%
20	2	1763	8,46%
	3	3600	31,68%
	4	3600	61,78%

Es soll als nächstes nicht direkt zu einer Untersuchung der Parameter  $ldtc$  und  $rvtc$  für IPDSP-Szenarien mit mehreren Touren pro Transporter, Belieferungsaufteilung und vom Ladungsgewicht abhängigen Fahrtkosten, die in Unterabschnitt 4.13.2 modelliert wurden, übergegangen werden. Stattdessen wird in Tabelle 6.33 analysiert, zur Lösung von Probleminstanzen welcher Größe sich dieses Modell eignet. Da Modelle mit mehreren Touren pro Transporter und Belieferungsaufteilung – wie in Tabelle 6.30 evaluiert worden ist – schwieriger zu lösen sind, soll hier wiederum eine Anzahl an Bestellungen und Transportern gewählt werden, bei der Instanzen optimal innerhalb einer Stunde gelöst werden können, gleichzeitig aber auch Instanzen existieren, welche innerhalb einer Stunde nur mit einer kleinen Optimalitätslücke gelöst werden können. Unter dieser Prämisse wurde die Untersuchung der Parameter  $ldtc$  und  $rvtc$  für Instanzen der Größe  $n = 20$  und  $m = 2$  durchgeführt, für die sich in Tabelle 6.33 zeigt, dass sie die gewünschte Komplexität besitzen. Bei der Untersuchung von Probleminstanzen dieser Größe wurde im Folgenden neben dem jeweils variierten Parameter  $ldtc$  bzw.  $rvtc$  der jeweils andere Parameter als  $rvtc = 0,1$  bzw.  $ldtc = 0,5$  gewählt.

Tabelle 6.34: Analyse von Testinstanzen mit mehreren Touren pro Transporter, Belieferungsaufteilung und vom Ladungsgewicht abhängigen Fahrtkosten hinsichtlich des Einflusses des ladungsgewichtsabhängigen Anteils der Fahrtkosten

$ldtc$	Laufzeit	Lücke
0,1	2926	15,87%
0,2	2320	3,96%
0,3	2441	8,05%
0,5	2434	13,85%
0,7	2434	9,14%
0,9	1605	0,79%

Tabelle 6.35: Analyse von Testinstanzen mit mehreren Touren pro Transporter, Belieferungsaufteilung und vom Ladungsgewicht abhängigen Fahrtkosten hinsichtlich des Einflusses des relativen Höhe der Fahrtkosten

$rvtc$	Laufzeit	Lücke
0,05	1363	9,17%
0,1	1892	4,92%
0,15	3100	20,46%
0,2	2733	15,19%
0,25	3600	24,67%
0,3	3600	25,55%

Tabelle 6.34 und 6.35 zeigen die dabei gewonnenen Daten. Dabei ist die Komplexität nicht wesentlich vom Parameter  $ldtc$  abhängig. Hingegen ist zu bemerken, dass die Komplexität mit steigendem Parameter  $rvtc$  ebenfalls steigt. Letzteres ist bemerkenswert und deckt sich nicht mit den Ergebnissen der Untersuchung des Basis-Modells und des Modells mit mehrfachem Fahren von Transportern und ladungsabhängigen Fahrtkosten.

### 6.3.3 Lösen von Probleminstanzen mit dem Branch&Bound-Verfahren

Zur Analyse des Branch&Bound-Verfahren für das spezielle IPDSP-Szenario wurden die in Tabelle 6.8 bereits untersuchten Probleminstanzen ein weiteres mal gelöst, zum einen mit dem bereits evaluierten Basis-Modell und Cplex, zum anderen mit dem Branch&Bound-Verfahren. Da das Branch&Bound-Verfahren ohne Multiprozessorunterstützung arbeitet, wurde Cplex auch auf die Benutzung eines Kern des Hauptprozessors beschränkt. Wie bei den vorherigen Tests wurde auch bei dieser Untersuchung die Laufzeit auf 3600 Sekunden beschränkt.

Eine erste Beobachtung während der Durchführung der Testläufe war, dass es in fast allen Fällen mit Hilfe von Heuristiken möglich war, zu einem Auslieferungsplan  $\sigma$  zulässige Auslieferungszeitpunkte  $\tau$  sowie einen zulässigen Produktionsplan  $s$  zu bestimmen, falls ein solcher existiert. Nur sehr selten musste auf die Lösung von  $MIP_{\sigma}^{feas}$  zurückgegriffen werden.

Tabelle 6.36 zeigt, dass bei kleinen Probleminstanzen sich das Branch&Bound-Verfahren ebenso gut zur Lösung von Probleminstanzen des Basis-Szenarios eignet wie der Lösungsansatz mittels Cplex. Jedoch steigen Laufzeit und Optimalitätslücke insbesondere ab einer Problemgröße von  $n = 40$  beim Branch&Bound-Verfahren mit steigender Problemgröße wesentlich schneller an als es bei der Lösung mittels MIP und Cplex der Fall war. Insgesamt lässt sich erkennen, dass das entwickelte Branch&Bound-Verfahren dem Lösungsverfahren, bei dem die jeweilige Probleminstanz mittels des in Abschnitt 4.1 vorgestellten MIP und Zimpl formuliert und mittels Cplex gelöst wird, unterlegen ist.

Bei der Analyse von Tabelle 6.37 bestätigt sich dieses Bild. Insbesondere ist die beste vom Branch&Bound-Verfahren gefundene Lösung für  $n \geq 30$  in der Regel wesentlich schlechter als die mittels Cplex bestimmte. Auf der anderen Seite war es aber bei Probleminstanzen mit  $n = 40$  und  $m = 3$  bzw  $m = 4$  möglich, eine größere (und somit bessere) untere Schranke zu ermitteln. Bei größeren Probleminstanzen war dies jedoch nicht möglich.

Die Suche nach den Ursachen für die schlechtere Performance des Branch&Bound-Verfahrens führt dazu, die Laufzeit seiner einzelnen Komponenten zu betrachten. Dabei fällt auf, dass rund

Tabelle 6.36: Vergleich der Lösung mittels Cplex und mittels Branch&amp;Bound-Verfahren

$n$	$m$	Cplex		Branch&Bound-Verfahren	
		Laufzeit	Lücke	Laufzeit	Lücke
10	2	0,1	0,00%	0,2	0,00%
	3	0,1	0,00%	0,0	0,00%
	4	0,0	0,00%	0,4	0,00%
20	2	45,7	0,00%	3,8	0,00%
	3	23,4	0,00%	53,4	0,00%
	4	65,8	0,00%	593,6	0,00%
30	2	124,7	0,00%	145,8	0,00%
	3	3600,0	3,38%	3069,0	14,43%
	4	3440,3	11,01%	3600,0	36,77%
40	2	3600,0	6,19%	3600,0	16,34%
	3	3001,7	11,40%	3600,0	37,48%
	4	3415,5	18,95%	3600,0	53,18%
50	2	3599,9	19,82%	3600,0	36,99%
	3	3599,9	13,53%	3600,0	45,91%
	4	3599,9	21,12%	3600,4	56,56%
70	3	3599,9	29,68%	3600,8	55,04%
	4	3599,9	30,39%	3600,6	56,99%
	5	3599,8	42,41%	3600,2	59,56%
100	4	3599,7	55,23%	3600,0	60,58%
	5	3599,6	53,54%	3600,0	59,91%
	6	3599,6	54,16%	3600,0	60,72%

99% der Laufzeit auf die Ermittlung der unteren Schranken entfallen. In der vorgenommenen Implementierung wurde zur Lösung des linearen Programms, welches die jeweilige untere Schranke liefert, der freie LP-Solver `lp_solve`<sup>10</sup> verwendet. Im Vergleich<sup>11</sup> zeigt sich jedoch, dass dieser kommerziellen LP-Solvern weit unterlegen ist. Allerdings war eine Zielsetzung beim Design des Branch&Bound-Verfahrens die Verwendung freier Software. Bei Verwendung eines besseren (kommerziellen) Programms zur Lösung der linearen Programme im Branch&Bound Verfahren ist eine signifikante Verbesserung des Verfahrens zu erwarten.

Bei der Betrachtung der Laufzeiten der einzelnen Komponenten des Branch&Bound-Verfahrens fällt weiterhin auf, dass die in Abschnitt 5.7 vorgenommenen Überlegungen wichtig für das Verfahren sind. So ist es nur sehr selten nötig, das in Unterabschnitt 5.7.1 vorgestellte  $MIP_{\sigma}^{feas}$  zu lösen. In aller Regel wird die Frage nach der Zulässigkeit eines Auslieferungsplans bereits durch die Überprüfung von notwendigen Bedingungen (siehe Unterabschnitt 5.7.2) oder durch die heuristische Bestimmung zulässiger Produktionsstartzeitpunkte und Auslieferungszeitpunkte (siehe Unterabschnitt 5.7.3) geklärt.

<sup>10</sup><http://lpsolve.sourceforge.net/>

<sup>11</sup>siehe z. B. <http://plato.asu.edu/ftp/lpsimp.html>

Tabelle 6.37: Vergleich der Lösung mittels Cplex und mittels Branch&amp;Bound-Verfahren

$n$	$m$	MIP mit Cplex			Branch&Bound-Verfahren		
		$\varnothing\chi^*$	$\varnothing\bar{\chi}^*$	optimal	$\varnothing\chi^*$	$\varnothing\bar{\chi}^*$	optimal
10	2	381,8	381,8	100,0%	381,8	381,8	100,0%
	3	340,8	340,8	100,0%	340,8	340,8	100,0%
	4	419,6	419,6	100,0%	419,6	419,6	100,0%
20	2	706,4	706,4	100,0%	706,4	706,4	100,0%
	3	696,9	696,9	100,0%	696,9	696,9	100,0%
	4	684,5	684,5	100,0%	684,5	684,5	100,0%
30	2	1129,4	1129,4	100,0%	1129,4	1129,4	100,0%
	3	963,6	931,2	0,0%	1098,4	928,0	20,0%
	4	976,0	708,1	0,0%	1413,3	892,2	0,0%
40	2	1489,0	1398,3	0,0%	1667,3	1389,0	0,0%
	3	1362,1	720,8	0,0%	1939,2	1209,5	0,0%
	4	1402,6	902,4	0,0%	2369,1	1108,6	0,0%
50	2	2052,3	1641,8	0,0%	2629,5	1653,4	0,0%
	3	1708,4	1476,3	0,0%	2635,0	1424,0	0,0%
	4	1785,6	1406,4	0,0%	2969,4	1290,5	0,0%
70	3	2713,7	2084,0	0,0%	4257,6	1914,2	0,0%
	4	2881,0	1996,8	0,0%	4148,0	1784,0	0,0%
	5	3417,1	1944,0	0,0%	4253,6	1720,0	0,0%
100	4	5690,0	2539,0	0,0%	5926,8	2336,7	0,0%
	5	5628,4	2607,1	0,0%	5943,0	2384,1	0,0%
	6	5557,5	2542,5	0,0%	5943,8	2334,2	0,0%

# Kapitel 7

## Ein Programm zur Lösung von praktischen Problemstellungen

In den vorhergehenden Kapiteln wurden Problemstellungen der integrierten Produktions- und Distributionsplanung vorgestellt, modelliert und Lösungsverfahren vorgestellt. Dabei zeigte sich, dass sich insbesondere IPDSP-Szenarien mit mehrfachem Fahren von Transportern dazu eignen, modelliert und mit Cplex optimal gelöst zu werden. Dementsprechend wurde dieser Typ von IPDSP-Szenario ausgewählt, um beispielhaft ein Programm zur Lösung entsprechender Problemstellungen zu entwickeln. Um größeren Praxisbezug herzustellen wurde weiterhin zugelassen, dass die Transporter über unterschiedliche Kapazitäten verfügen.

Zunächst soll nun in diesem Kapitel das entwickelte Programm „IntegratOR“ vorgestellt werden, dann wird auf einige technische Details eingegangen, um abschließend Installationshinweise zu geben.

### 7.1 Das Programm IntegratOR

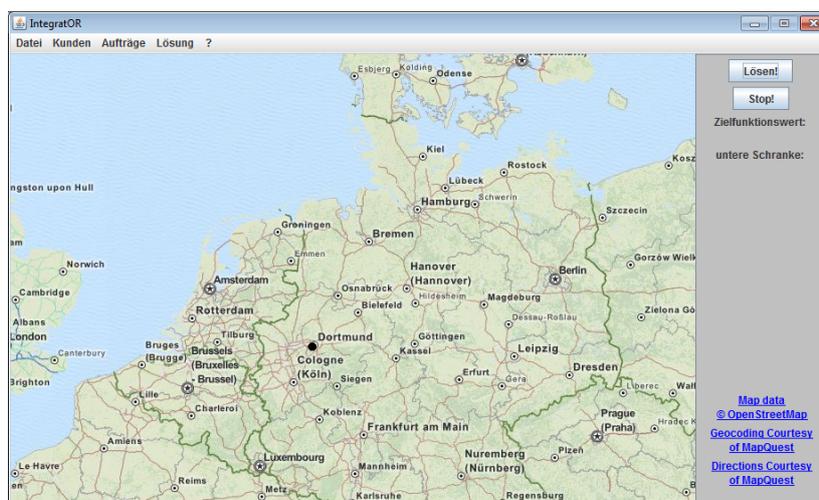


Abbildung 7.1: Hauptfenster des Programms

Abbildung 7.1 zeigt das Hauptfenster des entwickelten Programms. Dabei ist die Menüleiste unterteilt in die folgenden Punkte:

- Datei: Öffnen und Speichern von Probleminstanzen, Unternehmenskonfiguration
- Kunden: Bearbeitung von Kundendaten
- Aufträge: Bearbeitung von Kundenaufträgen
- Lösung: Anzeigen und Verwerfen der gegebenenfalls bestimmten Lösung
- ?: Hilfe<sup>1</sup> und Eingabe des Schlüssels für den Kartendienstleister MapQuest

Außerdem finden sich im Hauptfenster Schaltflächen zum Starten („Lösen!“) und Unterbrechen („Stop!“) eines Lösungsverfahrens sowie Urheberrechtshinweise zu den verwendeten Geodaten und Karten.

Unter dem Menüpunkt „Datei“ findet sich der Eintrag „Unternehmenskonfiguration“, mit dem sich der in Abbildung 7.2 dargestellte Dialog öffnen lässt. Hier lassen sich der Sitz des Unterneh-

Abbildung 7.2: Dialog Unternehmenskonfiguration

mens sowie die Haltbarkeit des (einzigen) vom Unternehmen produzierten Gutes festlegen. Neben den obligatorischen Schaltflächen „Speichern“ und „Schließen“<sup>2</sup> findet sich hier eine Schaltfläche, mit welcher der in Abbildung 7.3 dargestellte Dialog zur Verwaltung der Produktionsstandorte (im Programm als „Werke“ bezeichnet) geöffnet werden kann. Da ausschließlich Probleminstan-

Abbildung 7.3: Dialog Werksverwaltung

zen mit einem Standort betrachtet werden sollen, ist es in der Verwaltung der Produktionsstandorte nicht möglich, weitere Standorte hinzuzufügen oder bereits angelegte zu entfernen. Allerdings kann der bereits angelegte Standort editiert werden, wobei an einen Standort ein Name vergeben werden kann, seine Ortsdaten verändert werden können und die Produktionsrate der (einzigen) am Standort befindlichen Maschine variiert werden kann. Außerdem können die am Standort stationierten Fahrzeuge verwaltet werden. Dabei kann an die Fahrzeuge eine Bezeichnung vergeben werden und die jeweilige Kapazität festgelegt werden.

<sup>1</sup>Die Hilfe verweist auf die Dokumentation des Programms, also die vorliegende Arbeit.

<sup>2</sup>Beim Schließen des Dialogs werden Änderungen *nicht* automatisch übernommen!

Unter dem Menüpunkt „Kunden“ findet sich der Eintrag „Kundenverwaltung“, mit dem sich der in Abbildung 7.4 dargestellte Dialog öffnen lässt. Mit dessen Hilfe lassen sich sowohl die

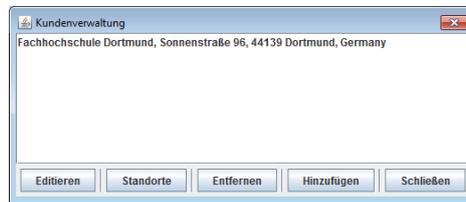


Abbildung 7.4: Dialog Kundenverwaltung

Kunden als auch deren Standorte verwalten.

Nach jeder Änderung von Ortsdaten des produzierenden Unternehmens, dessen Werken, von Kunden oder von deren Standorten wird die dargestellte Karte automatisch so angepasst, dass alle Orte auf ihr dargestellt werden. Ein manuelles Anpassen des Kartenausschnitts durch den Benutzer ist nicht vorgesehen. Abbildung 7.5 zeigt, wie die Karte nach Eingabe der vorgestellten Ortsdaten angepasst wurde.

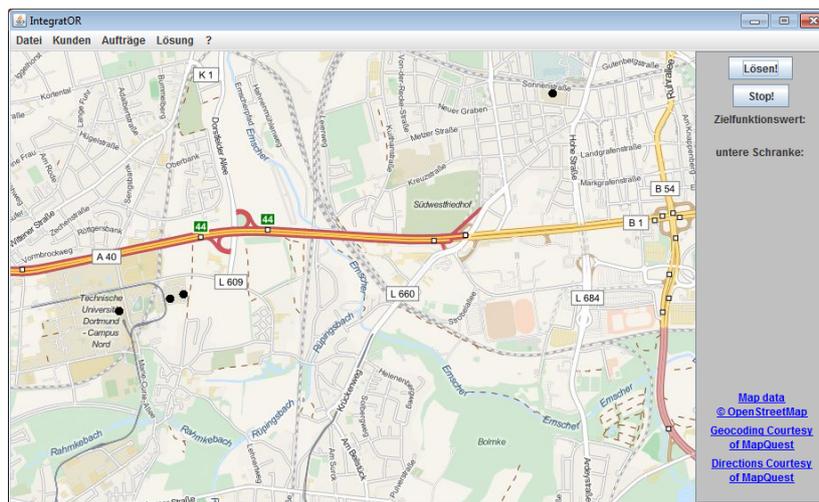


Abbildung 7.5: Hauptfenster nach Eingabe einiger Ortsdaten

Die zuvor eingegebenen Kundeninformationen werden ebenfalls benötigt, um in dem über den Menüpunkt „Aufträge“ nebst dem Menüeintrag „Auftragsverwaltung“ erreichbaren Dialog, den Abbildung 7.6 zeigt, Aufträge anlegen und editieren zu können. Als Kunde und Standort stehen



Abbildung 7.6: Dialog Auftragsverwaltung

beim Editieren eines Auftrags nur die zuvor in der Kundenverwaltung angelegten Kunden und

Kundenstandorte zur Auswahl. Zeitfensterbeginn und Zeitfensterende seien in Minuten ab dem aktuellen Zeitpunkt anzugeben.<sup>3</sup>

Nach Betätigung des Schaltfläche „Lösen!“ wird der Lösungsvorgang gestartet. Technische Details hierzu finden sich im nachfolgenden Abschnitt. Wenn der Lösungsvorgang abgeschlossen ist, erfolgt eine Meldung hierzu und auf der Karte sind Kundenstandorte, deren Bestellung angenommen wurde, grün, und Kundenstandorte, deren Bestellung abgelehnt wurde, rot gekennzeichnet, wie aus Abbildung 7.7 ersichtlich wird. Der Produktionsstandort ist schwarz dargestellt. Außer-

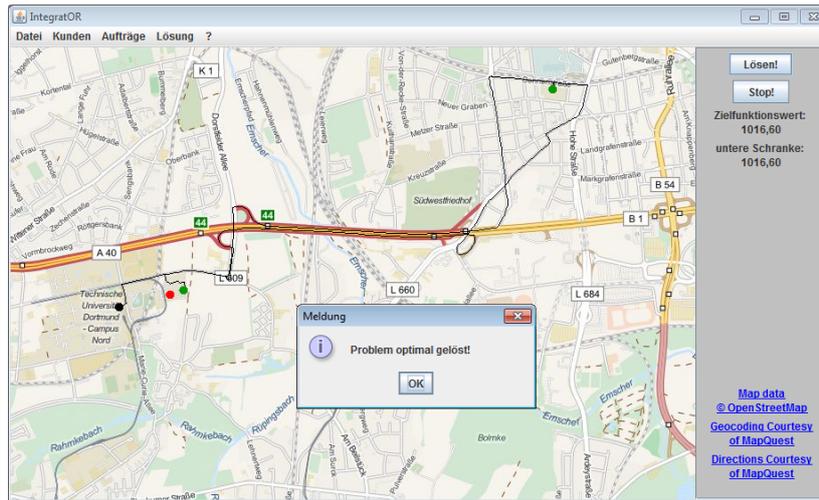


Abbildung 7.7: Hauptfenster nach Lösungsvorgang

dem sind die detaillierten Streckenverläufe der Touren der Fahrzeuge eingezeichnet.

Öffnet man über den Menüpunkt „Lösung“ den Eintrag „Lösungsdetails“, so öffnet sich der in Abbildung 7.8 gezeigte Dialog. In diesem ist initial der Produktionsplan der Lösung vorgestellt.



Abbildung 7.8: Dialog Lösungsdetails des Produktionsplans

Über die in diesem Dialog befindliche Dropdown-Liste lassen sich ebenfalls die detaillierten Fahrtverläufe der Fahrzeuge in der Lösung auswählen und betrachten. In Abbildung 7.9 wird der Fahrtverlauf des Fahrzeugs „Transporter 1“ vorgestellt. Dabei wird der im Fahrtverlauf ausgewählte Ort (in der Abbildung der Fachbereich Architektur der Fachhochschule Dortmund) auf der Karte grün markiert. Nicht ausgewählte Orte, die auf der Route des betreffenden Transporters liegen, werden schwarz markiert. Wählt der Benutzer einen anderen Ort aus, so werden die Markierungen automatisch angepasst. Ein Schließen des Dialogs oder ein Auswahl des Produktionsplans über die Dropdown-Liste stellt die ursprüngliche Kartenansicht wie in Abbildung 7.7 wieder her.

<sup>3</sup>In Hinblick auf eine Verwendung des entwickelten Programms in der Praxis ist insbesondere hier noch ein entsprechender „Kalender“ zur komfortablen Eingabe von Zeiten notwendig.

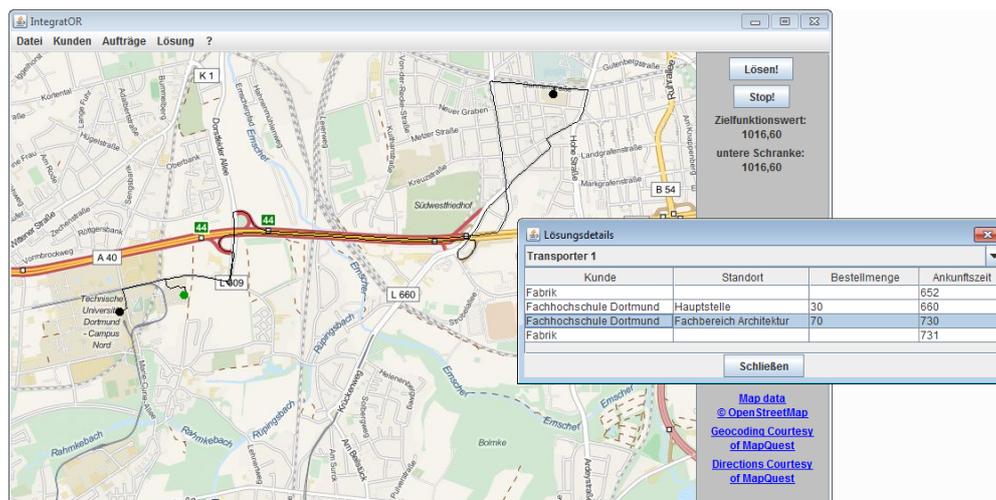


Abbildung 7.9: Hauptfenster mit Dialog Lösungsdetails zum Fahrzeug „Transporter 1“

## 7.2 Technische Details der Implementierung

Nachdem das entwickelte Programm vorgestellt worden ist, soll an dieser Stelle auf technische Details der Implementierung eingegangen werden. Zentral hierbei sind

- die Einbindung von Karten- und Geodatendiensten sowie
- die Einbindung des Lösungsverfahrens.

### Die Einbindung von Karten- und Geodatendiensten

Als Karten- und Geodatendienstleister wurde MapQuest<sup>4</sup> verwendet, der wiederum auf Daten des Projekts OpenStreetMap<sup>5</sup> zurückgreift. Geodaten sind dabei in zwei Arten zu unterscheiden: Ortsdaten und Fahrtdaten. Ortsdaten bestehen aus den Geokoordinaten in Form von Längengrad und Breitengrad eines Ortes. Fahrtdaten bestehen sowohl aus der Dauer der Fahrt von einem gegebenen Ort zu einem anderen als auch aus dem dabei zurückgelegten Weg, der eine Folge von Ortsdaten ist. Beide Daten lassen sich von einem Server von MapQuest in Form eines XML-codierten Dokumentes beziehen, welches im Programm mit Hilfe der Java-Bibliothek JDOM<sup>6</sup> verarbeitet wird.

MapQuest stellt weiterhin Karten in Form von Kacheln der Größe  $256 \times 256$  Pixel für unterschiedliche Geokoordinaten und Zoomstufen zur Verfügung. Das Programm „IntegratOR“ ermittelt aus den Ortsdaten automatisch die entsprechenden Kacheln und sorgt für deren Darstellung im Hauptfenster. Ebenfalls werden aus den Ortsdaten die Punkte ermittelt, an denen z. B. Kundenorte eingezeichnet werden müssen und aus den jeweiligen Fahrtdaten den einzuzeichnenden Fahrtverlauf.

Alternativ wäre technisch auch die Verwendung von Google Maps möglich gewesen. Insbesondere das Ermitteln von Ortsdaten aus einer Anschrift erfolgt bei Google Maps zuverlässiger, so

<sup>4</sup><http://www.mapquest.com>

<sup>5</sup><http://www.openstreetmap.org>

<sup>6</sup><http://www.jdom.org>

ist es MapQuest zum Beispiel nicht möglich gewesen, die Anschrift „Vogelpothsweg 87, 44227 Dortmund“ zu lokalisieren. Ebenfalls scheiterte MapQuest sporadisch am Ermitteln von Wegen zu einer Koordinate, die sich nicht unmittelbar an einer Straße befindet. Leider schließen es die Lizenzbedingungen von Google Maps aus, dass Google Maps außerhalb einer browserbasierten Anwendung verwendet wird.

## Die Einbindung des Lösungsverfahrens

Bei der Einbindung von Cplex in das vorgestellte Java-Programm ist zunächst zu erwähnen, dass Cplex kein Java-Programm ist, sondern über eine Schnittstelle eingebunden wird. Es wurde aus Wartungsgründen davon abgesehen, innerhalb des Java-Programms das zu lösende gemischt-ganzzahlige lineare Programm mittels von Cplex zur Verfügung gestellter Methoden zu generieren. Damit würden Änderungen am Modell dazu führen, dass Änderungen am Quellcode vorgenommen werden müssen, was fehleranfällig ist und größeren Aufwand bedeutet.

Stattdessen wird mit den ermittelten Parametern des Problems eine Datei `temp.txt` erzeugt. Diese wird vom Programm `Zimpl` verwendet, um mit Hilfe des in der Datei `extended_prime.zpl` allgemein formulierten Modells ein gemischt-ganzzahliges lineares Programm in Form der Datei `temp.lp` zu erzeugen. Im Java-Programm wird Cplex jetzt über die Schnittstelle aufgerufen, um eine Lösung ebendieses linearen Programms zu bestimmen. Die so bestimmte Lösung lässt sich direkt in Java über von der Schnittstelle zur Verfügung gestellte Methoden entnehmen und aufbereiten, um sie entsprechend im Programm darzustellen. Ebenfalls werden beste gefundene Lösungen nebst Zielfunktionswert und die aktuelle untere Schranke des Lösungsverfahrens entsprechend dem Lösungsfortschritt über die Schnittstelle entnommen und im Hauptfenster dargestellt.

## 7.3 Installationshinweise

Das Programm `IntegratOR.jar` liegt in Form der Datei `IntegratOR.jar` vor. Um es ausführen zu können, sind (unter Microsoft Windows 7, 64 bit) die folgenden Schritte durchzuführen:

- Installieren von Cplex (64 bit) nach `c:\cplex`.
- Im Zuge dessen auch Installation von MS Visual C++2010 Redistributable in den Standard-Pfad.
- Installation der Java-Laufzeitumgebung (64 bit)<sup>7</sup> in den Standard-Pfad (wenn noch nicht installiert).
- Herunterladen der Windows-Version von `Zimpl`<sup>8</sup> nach `c:\zimpl\zimpl.exe`.
- Kopieren der Datei `extended_prime.zpl` nach `c:\zimpl\extended_prime.zpl`

Danach kann `IntegratOR.jar` mittels Doppelklick gestartet werden. Beim ersten Aufruf ist die Eingabe eines Schlüssels für die Verwendung des Kartendienstleisters MapQuest erforderlich.

---

<sup>7</sup><https://www.java.com/de/download/>

<sup>8</sup><http://zimpl.zib.de/download/> (aktuelle Version: `zimpl-3.3.0.win.x86_64.vc10.normal.opt.exe`)

# Kapitel 8

## Fazit und Ausblick

Die zentrale Zielsetzung dieser Arbeit war, Möglichkeiten zur exakten Lösung von integrierten Produktions- und Distributionsproblemen mit Routingentscheidungen zu schaffen. Zu diesem Zweck wurde dabei zunächst die Modellierung einstufiger Produktions- bzw. Rundreiseprobleme behandelt. In diesem Rahmen ist es gelungen, für zwei spezielle Arten des Vehicle Routing Problems (für das Vehicle Routing Problem mit Belieferungsaufteilung (SDVRP) sowie für das Vehicle Routing Problem mit Zeitfenstern und mehrfachem Fahren der Transporter (VRPT-WM)) Modelle zu entwickeln, die sich besser zur Lösung mittels eines MIP-Solvers eignen als aus der Literatur bisher bekannte.

Im Anschluss erfolgte eine Klassifizierung der unterschiedlichen Typen von integrierten Produktions- und Distributionsproblemen hinsichtlich einer Vielzahl von Eigenschaften. In der Konsequenz waren zur Modellierung dieser Problemklasse ein dementsprechend vielfältiger Modellierungsbaukasten zu entwickeln. Mit diesem Modellierungsbaukasten war es für einen Großteil von Szenarien des IPDSP möglich, ein Modell anzugeben, mit dem es möglich ist, Probleminstanzen mit bis zu 30 Bestellungen und 3 Transportern innerhalb einer Stunde exakt zu lösen. Insbesondere ist die Berücksichtigung von Bestellungen mit Erfüllungszusage, einer Prioritätsordnung der Bestellungen, von gebündelten Bestellungen, von unterschiedlichen Höchstaltem der Bestellungen, von mehreren unterschiedlichen Maschinen, von Rüstzeiten, von mehreren Produktionsstandorten, eines heterogenen Fuhrparks, von mehreren Touren pro Transporter sowie von ladungsgewichtsabhängigen Fahrtkosten unproblematisch. Schwieriger hingegen ist die Bestimmung einer Lösung für Probleminstanzen mit mehreren Belieferungszeitfenstern oder bei denen eine Belieferungsaufteilung möglich sein soll.

Der Modellierung von Belieferungsaufteilung in Rundreiseproblemen und in Modellen für das IPDSP kann in zukünftigen Forschungen Aufmerksamkeit gewidmet werden. Hierbei ist offen, inwiefern sich für derartige Problemstellungen, wie z. B. das SDVRP, Modelle mit Entscheidungsvariablen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls Ort } i \text{ **direkt** vor Ort } j \text{ besucht wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

entwickeln lassen. Insbesondere die Existenz einer optimalen Lösung ohne  $k$ -Teilkreis (vgl. Satz 2.2) lässt hoffen, dass dies möglich ist. Allerdings stellt die Berücksichtigung von Entscheidungsschranken bei einer Modellierung mit solchen Entscheidungsvariablen eine große Schwierigkeit dar. Insbesondere die Zuordnung von Bestellungen zu Transportern ist nicht ohne weiteres analog wie im Basis-Modell des IPDSP mit binären Variablen  $z_{ik}^d$  möglich. Die korrekte Be-

gung dieser Entscheidungsvariablen wurde im Kontext des Basis-Modells des IPDSP durch die Nebenbedingungen

$$z_{ik}^d \leq z_{jk}^d + 1 - x_{ij} \quad \forall i \in N^+, j \in N^-, k \in K \quad (4.1.9)$$

$$z_{jk}^d \leq z_{ik}^d + 1 - x_{ij} \quad \forall i \in N^+, j \in N^-, k \in K \quad (4.1.10)$$

sichergestellt, mit denen aus  $x_{ij} = 1$  die Zuordnungen  $z_{ik}^d = z_{jk}^d$  für alle  $k \in K$  folgen. Bei Modellen mit Belieferungsaufteilung muss dies aber gerade nicht *für alle*, sondern *für ein*  $k \in K$  mit  $z_{ik}^d = 1$  gelten. Es stellt sich also jeweils die Frage, welcher Transporter von Ort  $i$  zu Ort  $j$  fährt, welche nicht innerhalb einer 2-Index-Formulierung modelliert werden kann. Es sind dementsprechend neue Modellierungsansätze zu entwickeln, um nach den in dieser Arbeit erreichten Fortschritten hinsichtlich der Modellierung von Belieferungsaufteilung weitere Verbesserungen zu erreichen.

Ein Anwendungsbezug der entwickelten Modelle wurde mit der Erstellung des Programms IntegratOR hergestellt, welches die konkrete Verwendung eines Modells für ein Szenario mit mehreren Touren pro Transporter und Transportern mit unterschiedlicher Kapazität demonstriert. Dieses Programm ließe sich dahingehend ausbauen, dass mit ihm die große Vielfalt an Szenarien des IPDSP abgebildet wird und je nach Typ von Szenario ein entsprechendes Modell gewählt beziehungsweise aus dem zur Verfügung stehenden Modellierungsbaukasten zusammengesetzt wird, mit dessen Hilfe in der Folge dann eine Lösung bestimmt werden kann.

Des Weiteren wurde für das Basis-Szenario des IPDSP ein Branch&Bound-Verfahren entworfen. Im diesem Rahmen wurde eine Systematik entwickelt, mit der sich Probleme dieses Typs untersuchen lassen. Mit dieser lassen sich ebenfalls heuristische Lösungsverfahren entwickeln. Insbesondere Lösungsverfahren für das VRPTW eignen sich gut dafür, sie zu einem Lösungsverfahren für das Basis-Szenario des IPDSP zu modifizieren, da eine (zulässige) Lösung des VRPTW einem (nicht notwendigerweise zulässigem) Auslieferungsplan entspricht und dieser somit mit dem in Abschnitt 5.7 vorgestellten Instrumentarium dahingehend untersucht werden kann, ob zugehörige Auslieferungszeitpunkte und Produktionsstartzeitpunkte existieren und er somit zu einer Lösung des Basis-Szenarios des IPDSP vervollständigt werden kann. Die Entwicklung und Untersuchung solcher heuristischer Lösungsverfahren kann ebenso Gegenstand weiterer Forschungen sein wie die Verwendung anderer LP-Solver im Branch&Bound-Verfahren.

Ein weiterer Aspekt, der im entwickelten Branch&Bound-Verfahren untersucht werden kann, ist, inwiefern bei der Lösung des jeweiligen linearen Programms zur Bestimmung einer unteren Schranke auf zuvor bestimmte Lösungen derartiger linearer Programme zurückgegriffen werden kann. Eventuell lassen sich Erkenntnisse aus der Bestimmung einer unteren Schranke  $\bar{\chi}(L_\sigma(J))$  nutzen, um eine untere Schranke  $\bar{\chi}(L_{\sigma^{j \rightarrow k}}(J))$  schneller bestimmen zu können. Konkret kann z. B. untersucht werden, ob sich mit der Basis der Lösung von  $\mathcal{P}(L_\sigma(J))$  eine Basislösung von  $\mathcal{P}(L_{\sigma^{j \rightarrow k}}(J))$  bestimmen lässt, die eine gute Startlösung für diese Problem darstellt.

Die in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse zeigen, dass es durchaus sinnvoll ist, auch für  $\mathcal{NP}$ -schwierige Probleme Anstrengungen zu unternehmen, um für diese exakte Lösungsverfahren zu entwickeln. Insbesondere im Bereich der Modellierung ist es möglich, durch die Verwendung möglichst weniger binärer Variablen gemischt-ganzzahlige lineare Modelle zu konzipieren, für die mit gängiger Optimierungssoftware auch für praxisnahe Problemgrößen optimale Lösungen bestimmt werden können.

# Symbolverzeichnis

- $\square^*$  Indikator, dass es sich bei  $\square$  um den Wert in einer optimalen *bzw.* bisher besten gefundenen Lösung handelt
- $a_i$  der Belieferungszeitfensterbeginn (bei genau einem Zeitfenster von Bestellung  $i$ )
- $a_i^l$  der Beginn von Belieferungszeitfenster  $l$  von Bestellung  $i$
- $b_i$  das Belieferungszeitfensterende (bei genau einem Zeitfenster von Bestellung  $i$ )
- $b_i^l$  das Ende von Belieferungszeitfenster  $l$  von Bestellung  $i$
- $B$  (bei gleichem Höchstalter)
- $B_i$  das Höchstalter der in Bestellung  $i$  bestellten Güter
- $\bar{c}_{ijk}$  der Gewinn beim Fahren von Transporter  $k$  von Ort  $i$  zu Ort  $j$  (im Kontext von Fortsetzungsgraphen)
- $\hat{c}_{ij}^k$  die lastabhängigen Fahrtkosten pro Einheit von Transporter  $k$  von Ort  $i$  zu Ort  $j$
- $c_{ij}$  die fixen Fahrtkosten von Ort  $i$  zu Ort  $j$
- $c_{ij}^k$  die fixen Fahrtkosten von Transporter  $k$  von Ort  $i$  zu Ort  $j$
- $C_k$  die Fixkosten von Transporter  $k$
- $\square^d$  ein Indikator, dass die Variable  $\square$  sich auf die Distribution bezieht
- $d_i$  der späteste Beendigungszeitpunkt für die Produktion von Bestellung  $i$
- $d_i'$  das Ende eines relaxierten Produktionszeitfensters für Bestellung  $i$
- $D_k$  das Ende des relaxierten Produktionszeitfensters von Transporter  $k$
- $e_i$  die Einnahmen bei Annahme von Bestellung  $i$
- $\bar{E}_\sigma^{(k)}$  die Menge aller im Fortsetzungsgraphen  $(V_\sigma^{(k)}, E_\sigma^{(k)})$  von  $\sigma_{k,n_k}$  abgehenden Kanten
- $E_\sigma^{(k)}$  die Kantenmenge des Fortsetzungsgraphen von Tour  $k$  mit den Auslieferungsreihenfolgen  $\sigma$
- $\hat{f}_i$  die Strafkosten bei Nicht-Annahme von Bestellung  $i$
- $f_i$  die Gesamtkosten bei Nicht-Annahme von Bestellung  $i$

- $F_\sigma$  die Menge aller Fortsetzungen von  $\sigma$   
 $F_\sigma(V)$  die Menge aller  $V$ -Fortsetzungen von  $\sigma$   
 $g_i$  die Prioritätsbewertung von Bestellung  $i$   
 $h_i$  die Position von Ort  $i$  auf der jeweiligen Tour  
 $i$  der Index eines Ortes / eines Kunden / einer Bestellung  
 $I$  eine Menge von angenommenen Bestellungen  
 $I^0$  eine Menge von verpflichtend anzunehmenden Bestellungen  
 $I^k$  eine Menge von verbundenen Bestellungen (bei  $lk \geq 1$ )  
 $I_\sigma$  die Menge aller Kunden im Auslieferungsplan  $\sigma$   
 $I_i$  die binäre Entscheidungsvariable, welche angibt, ob Bestellung  $i$  angenommen wird  
 $j$  der Index eines Ortes / eines Kunden / einer Bestellung *oder* ein Hilfsindex  
 $J$  eine Teilmenge der Transportermenge  
 $\tilde{k}$  der Index einer Maschine / eines Transporters  
 $k$  der Index einer Maschine / eines Transporters *oder* der Index einer Menge von verbundenen Bestellungen  
 $k'$  der Index einer Maschine / eines Transporters  
 $K$  die Transportermenge  
 $K'$  eine Teilmenge der Transportermenge  
 $\tilde{l}$  eine Lösung im Branch&Bound-Verfahren  
 $l$  der Index eines Zeitfensters *oder* ein Hilfsindex *oder* eine Lösung im Branch&Bound-Verfahren  
 $l'$  eine Lösung im Branch&Bound-Verfahren  
 $l^*$  die bisher beste gefundene Lösung im Branch&Bound-Verfahren  
 $L$  der Lösungsraum  
 $L'$  eine Lösungsraumteilmenge im Branch&Bound-Algorithmus  
 $L_\sigma$  die Menge aller  $\sigma$ -Lösungen  
 $L_\sigma(J)$  die Menge aller  $J$ -fortsetzenden  $\sigma$ -Lösungen  
 $\mathcal{L}$  der Menge der zu untersuchenden Lösungsraumteilmengen im Branch&Bound-Algorithmus  
 $m$  die Anzahl an Transportern  
 $M_\square$  ein im jeweiligen Kontext ausreichend großer Parameter, der bei Multiplikation mit einem Faktor von (mindestens) Eins die jeweilige Nebenbedingung „wegfallen“ lässt

- $n$  die Anzahl an Bestellungen / Kunden / Zielorten  
 $n'$  die Anzahl der Zerlegungen, in welche die Lösungsraumteilmenge  $L'$  vollständig disjunkt zerlegt wird  
 $n_k^d$  die Anzahl von Bestellungen, die von Transporter  $k$  ausgeliefert werden  
 $n_k^p$  die Anzahl von Bestellungen, die auf Maschine  $k$  produziert werden  
 $\bar{N}$  die Menge aller Orte (ggf. inklusive künstlicher Depots)  
 $N^+$  die Menge der Orte, die verlassen werden können  
 $N^-$  die Menge der Orte, die erreicht werden können  
 $N$  die Menge der Bestellungen / Kunden / Zielorte  
 $N_\sigma^{(k)}$  die Menge der Kunden in der Knotenmenge des Fortsetzungsgraphen von Tour  $k$  mit den Auslieferungsreihenfolgen  $\sigma$   
 $\square^p$  ein Indikator, dass die Variable  $\square$  sich auf die Produktion bezieht  
 $p_i$  die Produktionszeit von Bestellung  $i$   
 $p_i^k$  die Produktionszeit von Bestellung  $i$  auf Maschine  $k$   
 $\mathcal{P}(L_\sigma(V))$  ein („einfach“ zu lösendes) Problem, dessen optimaler Zielfunktionswert eine obere Schranke für die Zielfunktionswerte  $\chi(l)$  aller Lösungen  $l \in L_\sigma(V)$  liefert  
 $q_i$  die Bestellmenge von Bestellung  $i$   
 $\hat{Q}_{ij}^k$  die Menge von Gütern, die Transporter  $k$  von Ort  $i$  zu Ort  $j$  befördert  
 $Q$  die Transporterkapazität (bei homogenem Fuhrpark)  
 $Q_k$  die Kapazität von Transporter  $k$   
 $r, \bar{r}$  der Index einer Tour  
 $r_i$  der früheste Produktionsstartzeitpunkt von Bestellung  $i$   
 $r'_i$  der Beginn eines relaxierten Produktionszeitfensters für Bestellung  $i$   
 $R_k$  der Beginn des relaxierten Produktionszeitfensters von Transporter  $k$   
 $s$  eine Folge von Produktionsstartzeitpunkten  $s_i$   
 $s_i$  der Produktionsstartzeitpunkt von Bestellung  $i$  (auch als nichtnegative Entscheidungsvariable)  
 $S, S'$  eine Teilmenge der Orte  
 $t_i^r$  die nichtnegative Entscheidungsvariable, welche den Ankunftszeitpunkt auf Tour  $r$  bei Kunde  $i$  angibt  
 $t_{ij}$  die Fahrtzeit von Ort  $i$  zu Ort  $j$   
 $t_{ij}^k$  die Fahrtzeit von Transporter  $k$  von Ort  $i$  zu Ort  $j$

$T$	die maximale Rundtourlänge
$u_k$	die binäre Entscheidungsvariable, welche angibt, ob Transporter $k$ benutzt wird
$v$	ein Index einer Produktionsstätte
$v(i)$	derjenige Kunde, welcher in derjenigen Auslieferungsreihenfolge, welche Ort $i$ enthält, als erster bedient wird
$V_\sigma^{(k)}$	die Knotenmenge des Fortsetzungsgraphen von Tour $k$ mit den Auslieferungsreihenfolgen $\sigma$
$w$	die Anzahl an Produktionsstätten
$w_i^c$	die kumulierte Wartezeit bis zu Ort $i$ bei frühestmöglicher Auslieferung der Bestellungen
$W$	die Menge der Produktionsstätten
$\hat{x}_{ij}$	die binäre Entscheidungsvariable, welche angibt, ob bei der Fahrt von Ort $i$ zu Ort $j$ eine zusätzliche Depotanfahrt erfolgt
$x_{ijk}$	die (binäre) Entscheidungsvariable, welche angibt, ob Transporter $k$ direkt von Ort $i$ zu Ort $j$ fährt (im Kontext von Fortsetzungsgraphen)
$x_{ij}$	die binäre Entscheidungsvariable, welche angibt, ob eine Fahrt von Ort $i$ zu Ort $j$ stattfindet
$x_{ij}^r$	die binäre Entscheidungsvariable, welche angibt, ob Ort $j$ direkt nach Ort $i$ auf Tour $r$ besucht wird
$y_i^r$	die binäre Entscheidungsvariable, welche angibt, ob Ort $i$ auf Tour $r$ besucht wird
$y_{ij}$	die binäre Entscheidungsvariable, welche angibt, ob Bestellung $i$ vor Bestellung $j$ produziert wird
$z_{ik}^d$	die binäre Entscheidungsvariable, welche angibt, ob Bestellung $i$ von Transporter $k$ ausgeliefert wird
$z_{ik}^p$	die binäre Entscheidungsvariable, welche angibt, ob Bestellung $i$ von Maschine $k$ produziert wird
$z_{il}^{tw}$	die binäre Entscheidungsvariable, welche angibt, ob Bestellung $i$ im Zeitfenster $[a_i^l, b_i^l]$ ausgeliefert wird
$z_{r\bar{r}}$	die binäre Entscheidungsvariable, welche angibt, ob Tour $\bar{r}$ direkt nach Tour $r$ vom selben Transporter gefahren wird
$\alpha_{ik}$	die nichtnegative Entscheidungsvariable, welche angibt, welche Menge von Bestellung $i$ durch Transporter $k$ ausgeliefert wird
$\beta$	der Ladezeitfaktor beim VRPTWM, welcher angibt, welcher Teil der Servicezeit beim Einladen einer Bestellung anfällt
$\gamma_i$	die bis zu Ort $i$ bereits ausgelieferte Menge
$\delta_k$	um diesen Wert kann die Abfahrt von Transporter $k$ im Vergleich zur Abfahrt bei frühestmöglicher Belieferung der Kunden maximal verzögert werden

$\zeta_{ijk}^t$	der Verbrauch an Fahrzeit (inklusive Mindestwartezeit) beim Fahren von Ort $i$ zu Ort $j$ mit Transporter $k$ (im Kontext von Fortsetzungsgraphen)
$\zeta_{ij}^g$	der Verbrauch an Transporterkapazität beim Fahren von Ort $i$ zu Ort $j$ (im Kontext von Fortsetzungsgraphen)
$\zeta_{ij}^p$	der Verbrauch an Produktionskapazität beim Fahren von Ort $i$ zu Ort $j$ (im Kontext von Fortsetzungsgraphen)
$\vartheta_d$	das Ende eines zu untersuchenden Produktionszeitfensters
$\vartheta_r$	der Beginn eines zu untersuchenden Produktionszeitfensters
$\vartheta_{ij}^k$	die Rüstzeit zwischen der Produktion von Bestellung $i$ und Bestellung $j$ auf Maschine $k$
$\lambda_i$	die nichtnegative Entscheidungsvariable, welche die bis zu Ort $i$ zurückgelegte Fahrzeit angibt
$\nu$	die Anzahl von Mengen verbundener Bestellungen
$\xi_i$	die nichtnegative Entscheidungsvariable, welche die bei Depotanfahrt vor Kunde $i$ anfallende Einladezeit angibt <i>oder</i> welche die zusätzlichen Reistekosten angibt, die unmittelbar vor dem Erreichen von Kunde $i$ anfallen (z. B. durch eine zusätzliche Depotanfahrt)
$\pi$	eine Folge von Produktionsreihenfolgen $\pi_k$
$\pi_k$	die Produktionsreihenfolge auf Maschine $k$
$\pi_{kl}$	die Bestellung, welche auf Maschine $k$ als $l$ -te produziert wird
$\sigma$	ein Auslieferungsplan, bestehend aus einer Folge von Auslieferungsreihenfolgen $\sigma_k$
$\sigma'$	ein Auslieferungsplan, bestehend aus einer Folge von Auslieferungsreihenfolgen $\sigma'_k$
$\sigma^r$	Dauer der Beladungszeit vor Tour $r$
$\sigma^{i \rightarrow k}$	derjenige Auslieferungsplan, der aus Auslieferungsplan $\sigma$ durch Anfügen von $i$ an die Auslieferungsreihenfolge $\sigma_k$ entsteht
$\sigma_k$	die Auslieferungsreihenfolge von Transporter $k$
$\sigma_{kl}$	der Ort, welcher von Transporter $k$ als $l$ -ter besucht wird
$\tau_i$	die Ankunftszeit bei Ort $i$ (auch als nichtnegative Entscheidungsvariable)
$\varphi_i$	die nichtnegative Entscheidungsvariable, welche die bis zu Ort $i$ zurückgelegte Entfernung / verursachten Kosten angibt
$\varphi_{ik}$	die nichtnegative Entscheidungsvariable, welche die bis zu Ort $i$ von Transporter $k$ verursachten Kosten angibt
$\bar{\chi}(L')$	eine untere Schranke für die Zielfunktionswerte der Lösungen in der Lösungsraumteilmenge $L'$
$\chi$	die Zielfunktion eines Optimierungsproblems

- $\psi_k$  die nichtnegative Entscheidungsvariable, welche die von Transporter  $k$  verursachten Kosten angibt
- $\omega$  die Anzahl an Maschinen
- $\Omega$  die Menge der Maschinen

# Literaturverzeichnis

- [ABS11] C. Archetti, N. Bianchessi, und M. G. Speranza. A column generation approach for the split delivery vehicle routing problem. *Networks*, 58(4):241–254, 2011.
- [ABS14] C. Archetti, N. Bianchessi, und M. G. Speranza. Branch-and-cut algorithms for the split delivery vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, 238(3):685 – 698, 2014.
- [AC91] N. R. Achuthan und L. Caccetta. Integer linear programming formulation for a vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, 52(1):86–89, 1991.
- [AGL08] R. Armstrong, S. Gao, und L. Lei. A zero-inventory production and distribution problem with a fixed customer sequence. *Annals of Operations Research*, 159(1):395 – 414, 2008.
- [AGP10] N. Azi, M. Gendreau, und J.-Y. Potvin. An exact algorithm for a vehicle routing problem with time windows and multiple use of vehicles. *European Journal of Operational Research*, 202(3):756–763, 2010.
- [APS99] C. Arbib, D. Pacciarelli, und S. Smriglio. A three-dimensional matching model for perishable production scheduling. *Discrete Applied Mathematics*, 92(1):1–15, 1999.
- [AS12] C. Archetti und M. Speranza. Vehicle routing problems with split deliveries. *International Transactions in Operational Research*, 19(1-2):3–22, 2012.
- [ASGS08] C. Archetti, M. W. Savelsbergh, und M. Grazia Speranza. To split or not to split: That is the question. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 44(1):114–123, 2008.
- [Bak83] E. K. Baker. Technical note—an exact algorithm for the time-constrained traveling salesman problem. *Operations Research*, 31(5):938–945, 1983.
- [BDF<sup>+</sup>95] A. Z. Broder, M. E. Dyer, A. M. Frieze, P. Raghavan, und E. Upfal. The worst-case running time of the random simplex algorithm is exponential in the height. *Information Processing Letters*, 56(2):79–81, 1995.
- [BKS99] N. Balakrishnan, J. J. Kanet, und V. Sridharan. Early/tardy scheduling with sequence dependent setups on uniform parallel machines. *Computers and Operations Research*, 26(2):127–141, 1999.
- [BW88] G. R. Brodie und C. D. J. Waters. Integer linear programming formulation for vehicle routing problems. *European Journal of Operational Research*, 34(3):403–404, 1988.

- [Car82] J. Carlier. The one-machine sequencing problem. *European Journal of Operational Research*, 11(1):42 – 47, 1982. Third EURO IV Special Issue.
- [CHC09] H.-K. Chen, C.-F. Hsueh, und M.-S. Chang. Production scheduling and vehicle routing with time windows for perishable food products. *Computers & Operations Research*, 36(7):2311–2319, 2009.
- [Che10] Z.-L. Chen. Integrated production and outbound distribution scheduling: Review and extensions. *Operations Research*, 58(1):130–148, 2010.
- [CM07] S. Chopra und P. Meindl. *Supply chain management. Strategy, planning & operation*. Springer, 2007.
- [Cro58] G. A. Croes. A method for solving traveling-salesman problems. *Operations Research*, 6(6):791–812, 1958.
- [CV05] Z.-L. Chen und G. L. Vairaktarakis. Integrated Scheduling of Production and Distribution Operations. *Management Science*, 51(4):614–628, 2005.
- [Dak65] R. J. Dakin. A tree-search algorithm for mixed integer programming problems. *The Computer Journal*, 8(3):250–255, 1965.
- [Dan98] G. B. Dantzig. *Linear programming and extensions*. Princeton university press, 1998.
- [Dev08] P. Devapriya. *Optimal fleet size of an integrated production and distribution scheduling problem for a single perishable product*. PhD thesis, Graduate School of Clemson University, 2008.
- [DFJ54] G. Dantzig, R. Fulkerson, und S. Johnson. Solution of a large-scale traveling-salesman problem. *Journal of the Operations Research Society of America*, pages 393–410, 1954.
- [DFJ59] G. B. Dantzig, D. R. Fulkerson, und S. M. Johnson. On a linear-programming, combinatorial approach to the traveling-salesman problem. *Operations Research*, 7(1):58–66, 1959.
- [DKG03] A. G. De Kok und S. C. Graves. *Supply Chain Management: Design, Coordination and Operation (Handbooks in Operations Research and Management Science: Volume 11)*. Elsevier, Amsterdam, 2003.
- [DL91] M. Desrochers und G. Laporte. Improvements and extensions to the Miller-Tucker-Zemlin subtour elimination constraints. *Operations Research Letters*, 10(1):27–36, 1991.
- [DLSS88] M. Desrochers, J. K. Lenstra, M. W. P. Savelsbergh, und F. Soumis. Vehicle routing with time windows: optimization and approximation. *Vehicle routing: Methods and studies*, 16:65–84, 1988.
- [DT89] M. Dror und P. Trudeau. Savings by split delivery routing. *Transportation Science*, 23(2):141–145, 1989.
- [DT90] M. Dror und P. Trudeau. Split delivery routing. *Naval Research Logistics*, 37(3):383–402, 1990.

- [EC90] L. M. Ellram und M. C. Cooper. Supply chain management, partnership, and the shipper-third party relationship. *International Journal of Logistics Management, The*, 1(2):1–10, 1990.
- [FGG12] P. Farahani, M. Grunow, und H.-O. Günther. Integrated production and distribution planning for perishable food products. *Flexible Services and Manufacturing Journal*, 24(1):28–51, 2012.
- [Flo64] R. W. Floyd. Algorithm 245: Treesort. *Communications of the ACM*, 7(12):701, 1964.
- [FPZ86] A. Federgruen, G. Prastacos, und P. H. Zipkin. An allocation and distribution model for perishable products. *Operations Research*, 34(1):75–82, 1986.
- [GL04] J. M. Garcia und S. Lozano. Production and vehicle scheduling for ready-mix operations. *Computers & Industrial Engineering*, 46(4):803–816, 2004.
- [GLLS08] H. N. Geismar, G. Laporte, L. Lei, und C. Srisankandarajah. The integrated production and transportation scheduling problem for a product with a short lifespan. *INFORMS Journal on Computing*, 20(1):21–33, 2008.
- [Gom58] R. E. Gomory. Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64(5):275–278, 1958.
- [GS79] D. Goldfarb und W. Y. Sit. Worst case behavior of the steepest edge simplex method. *Discrete Applied Mathematics*, 1(4):277–285, 1979.
- [HK56] A. J. Hoffman und J. B. Kruskal. Integral boundary points of convex polyhedra. *Linear Inequalities and Related Systems*, 38:223–246, 1956.
- [HS92] L. A. Hall und D. B. Shmoys. Jackson’s rule for single-machine scheduling: making a good heuristic better. *Mathematics of Operations Research*, 17(1):22–35, 1992.
- [IS56] E. J. Isaac und R. C. Singleton. Sorting by address calculation. *Journal of the ACM*, 3(3):169–174, July 1956.
- [Jer73] R. G. Jeroslow. The simplex algorithm with the pivot rule of maximizing criterion improvement. *Discrete Mathematics*, 4(4):367–377, 1973.
- [KB85] R. V. Kulkarni und P. R. Bhave. Integer programming formulations of vehicle routing problems. *European Journal of Operational Research*, 20(1):58–67, 1985.
- [Kha79] L. G. Khachiyan. A polynomial algorithm in linear programming. *Soviet Mathematics Doklady*, 20:191–194, 1979.
- [KLB04] I. Kara, G. Laporte, und T. Bektas. A note on the lifted miller–tucker–zemlin subtour elimination constraints for the capacitated vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, 158(3):793–795, 2004.
- [KM72] V. Klee und G. J. Minty. How good is the simplex method. *Inequalities-III*, pages 159–175, 1972.
- [Koc04] T. Koch. *Rapid Mathematical Programming*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, 2004. ZIB-Report 04-58.

- [KPCL15] H.-Y. Kang, W. Pearn, I.-P. Chung, und A. H. Lee. An enhanced model for the integrated production and transportation problem in a multiple vehicles environment. *Soft Computing*, pages 1–21, 2015.
- [LD60] A. H. Land und A. G. Doig. An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 497–520, 1960.
- [LKJL14] J. Lee, B.-I. Kim, A. L. Johnson, und K. Lee. The nuclear medicine production and delivery problem. *European Journal of Operational Research*, 236(2):461 – 472, 2014.
- [LR75] J. K. Lenstra und A. H. G. Rinnooy Kan. Some simple applications of the travelling salesman problem. *Operational Research Quarterly*, pages 717–733, 1975.
- [Man60] A. S. Manne. On the job-shop scheduling problem. *Operations Research*, 8(2):219–223, 1960.
- [MTZ60] C. E. Miller, A. W. Tucker, und R. A. Zemlin. Integer programming formulation of traveling salesman problems. *Journal of the ACM*, 7:326–329, October 1960.
- [Nad94] D. Naddef. A remark on “integer linear programming formulation for a vehicle routing problem” by nr achutan and l. caccetta, or how to use the clark & wright savings to write such integer linear programming formulations. *European Journal of Operational Research*, 75(1):238–241, 1994.
- [Pin12] M. L. Pinedo. *Scheduling: theory, algorithms, and systems*. Springer, 2012.
- [PR87] M. Padberg und G. Rinaldi. Optimization of a 532-city symmetric traveling salesman problem by branch and cut. *Operations Research Letters*, 6(1):1–7, 1987.
- [PR91] M. Padberg und G. Rinaldi. A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems. *SIAM Review*, 33(1):60–100, 1991.
- [SH73] J. A. Svestka und V. E. Huckfeldt. Computational experience with an m-salesman traveling salesman algorithm. *Management Science*, 19(7):790–799, 1973.
- [TK01] C. D. Tarantilis und C. T. Kiranoudis. A meta-heuristic algorithm for the efficient distribution of perishable foods. *Journal of Food Engineering*, 50(1):1–9, 2001.
- [Ull13] C. A. Ullrich. Integrated machine scheduling and vehicle routing with time windows. *European Journal of Operational Research*, 227(1):152–165, 2013.
- [Vie11] C. Viergutz. *Integrated Production and Distribution Scheduling*. PhD thesis, PhD thesis, University of Osnabrück, Department of Mathematics and Computer Science, 2011.
- [Wil64] J. W. J. Williams. Algorithm 232: Heapsort. *Communications of the ACM*, 7(6):347–348, 1964.
- [ZH00] Z. Zhu und R. B. Heady. Minimizing the sum of earliness/tardiness in multi-machine scheduling: a mixed integer programming approach. *Computers & Industrial Engineering*, 38(2):297–305, 2000.