Beiträge zum Mathematikunterricht 2016

VORTRÄGE AUF DER 50. TAGUNG FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
VOM 07.03.2016 BIS 11.03.2016
IN HEIDELBERG

FÜR DIE GDM HERAUSGEGEBEN
VOM
INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK
DER
PÄDAGOGISCHEN HOCHSCHULE HEIDELBERG

BAND 3

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Inhaltsverzeichnis

Band 1: Seite 1 bis 524

1 Einführung und Hauptvorträge

2 Einzelbeiträge

<u>Band 3: Seite 1093 bis 1560</u>

3 Moderierte Sektionen

4 Posterbeiträge

Teil 3:
Moderierte Sektionen

Moderierte Sektion:

Analyse und Förderung mathematischen Argumentierens: theoretische Grundlagen und empirische Erkenntnisse

Esther BRUNNER, Kreuzlingen; Stefan UFER, Daniel SOMMERHOFF, München

Analyse und Förderung mathematischen Argumentierens: theoretische Grundlagen und empirische Erkenntnisse

Mathematisches Argumentieren in mehr oder weniger formaler, deduktiver oder symbolischer Form stellt für Lernende und Lehrende traditionell eine Herausforderung dar. Im Rahmen der Sektion wurden theoretische Analysen und empirische Studien zum Kompetenzbereich vorgestellt und diskutiert. Im Fokus standen dabei neben der Analyse von mathematischen Argumentationsprozessen, deren Voraussetzungen und Ergebnissen auch Ansätze zur Förderung von Argumentationskompetenz.

Im Rahmen der Sektion wurden insgesamt sieben Beiträge vorgestellt, die sich im methodischen Ansatz sowie den theoretischen Perspektiven deutlich voneinander unterscheiden. Zum Einen wurden Beiträge vorgestellt, die sich auf kognitive Prozesse der Beweiskonstruktion und Validierung sowie des Beweisenlernens bzw. einzelner Phasen davon beziehen und diese quantitativ untersuchen mit dem Ziel, prädiktive Modelle zu entwickeln. Zum Anderen wurde aus einer soziologisch-diskurstheoretischen Sicht Partizipation an Argumentationsprozessen qualitativ untersucht. Während sich einige der Beiträge auf den Kontext der Hochschule oder die Schnittstelle Schule – Hochschule bezogen, stand bei anderen das schulische Beweisen im Zentrum. Ein theoretischer Beitrag stellte Erklären als eine argumentative dialogische Handlung vor, die als „Erkären warum" den invarianten Kern eines Gegenstands bzw. einer Beziehung klärt. Dieser invariante Kern wird durch systematisches Variieren erkundet. Dies weist eine Nähe zum im zweiten theoretischen Beitrag vorgestellten didaktischen Potenzial operativer Beweise auf, bei denen es darum geht, den invarianten Kern bzw. den allgemeingültigen Zusammenhang plausibel anschaulich zu machen.

In der Sektion ergab sich insbesondere eine vertiefte Diskussion zu übergreifende Fragen. Ausgehend von anfänglichen begrifflichen Missverständnissen war eine Frage, was als inhaltlicher Kern des Konzepts „mathematischer Beweis" über die verschiedenen Schulstufen bis hin zur wissenschaftlichen Mathematik gesehen werden kann. Sowohl formalistische Auffassungen, die beispielsweise formale Repräsentationen als konstitutiv ansehen, als auch relativistische Sichtweisen, die eine Fassung des Beweiskonzepts allein dem sozialen Kontext (z.B. in einer Schulklasse) zuweisen, wurden eher kritisch gesehen. Davon ausgehend wurde diskutiert, inwiefern Kriterien wie deduktive Schlussformen, eine Einbettung in eine lokale Rahmentheorie und die Wahl einer adäquaten Repräsentation theoretisch gefasst und zur Charakterisierung des Beweiskonzepts über Kontexte (und Altersstufen) hinweg herangezogen werden können. Die unterschiedlichen

Kontexte, in denen die empirischen Beiträge der Sektion verortet sind, warfen zudem die Frage auf, inwiefern Forschungsergebnisse zwischen einzelnen Kontexten übertragbar sind. Insbesondere wurde die Notwendigkeit von Replikationen, beispielsweise durch Multi-Lab-Studies, diskutiert.

Wesentlich war darüber hinaus die Frage, inwiefern die verschiedenen methodischen und theoretischen Perspektiven (soziologisch, philosophisch, psychologisch) fruchtbar kombiniert werden können. Alle Arbeiten fokussieren prinzipiell denselben Phänomen- und Problembereich und können somit auf der Ebene der abgeleiteten Folgerungen für diese Problembereiche sicher gemeinsam diskutiert werden. Dennoch konnte in der Diskussion noch nicht abschließend geklärt werden, wie welche Ansätze zum Aufbau einer übergreifenden didaktischen Theorie des mathematischen Argumentierens und seiner Förderung kombiniert werden können. Unterschiedliche Sichtweisen hingegen zeigen sich in der Definition eines Beweises und der Frage, was einen Beweis konstituiert sowie in der Bewertung von Formalem und formal-symbolischer Notation. In einem Beitrag wurde explizit in Form und Inhalt getrennt, auch wenn Wechselwirkungen attestiert wurden, in anderen hingegen wurde die Notation im Sinne einer Repräsentation des kognitiven Prozesses interpretiert, der somit ein anders akzentuiertes Denken zugrunde liegt.

Eine fruchtbare Weiterarbeit würde darin bestehen, in Publikationen nicht nur forschungsmethodologische Zugänge offen zu legen, sondern ebenso sehr die theoretische Perspektive aus der heraus man einen Blick auf mathematische Argumentationsprozesse wirft, welche Bezugsdisziplinen man heranzieht und welche Zielsetzungen und Implikationen vorliegen.

Sektionsvorträge

Brunner, E.: Beweistypen: Ihre unterschiedlichen kognitiven Anforderungen und ihr unterschiedliches didaktisches Potential.

Grundey, S.: „Condition of transparency“ – ein theoretisches Modell zur Einsicht in eigenständige Beweisprozesse von Lernenden.

Kempen, L.: Beweisakzeptanz bei Studienanfängern: Eine empirische Untersuchung.

Knipping, C. & Cramer, J.: Partizipation An Argumentation.

Müller-Hill, E.: Warum „immer“ so – und nicht anders? Erklären(-warum) im Mathematikunterricht mittels operativer Invarianz entlang kontrastiver Leitfragen.

Ottinger, S., Ufer, S., & Kollar, I.: Mathematisches Argumentieren und Beweisen in der Studieneingangsphase – Analyse inhaltlicher und formaler Qualitätsindikatoren.

Sommerhoff, D., Ufer, S., & Kollar, I.: Validieren von Beweisen – Probleme von Studierenden und die Rolle von mathematischen und übergreifenden Voraussetzungen.

Esther BRUNNER, Kreuzlingen

Beweistypen: Ihre unterschiedlichen kognitiven Anforderungen und ihr didaktisches Potenzial

Theoretische Einbettung und Bezüge

Lernt man durch Argumentieren konzeptuelles mathematisches Wissen aufzubauen oder geht es darum, spezifisch argumentieren zu lernen? Andriessen, Baker und Suthers (2003) unterscheiden zwischen „argue to learn" und „learn to argue". Zweiteres bezieht sich auf den Aufbau spezifischer Argumentationskompetenzen, Ersteres auf das Aufbauen konzeptuellen Wissens. Dabei gehen die Autoren von einem sehr weiten Argumentationsbegriff aus. Ein solcher liegt dem mathematischen Argumentieren gemäß der verschiedenen Bildungsstandards (D-EDK, 2014; D-EDK, 2014) aber nicht zugrunde. Die Präzisierung „mathematisch" argumentieren (Blum, Drüke-Noe, Hartung & Köller, 2006) verdeutlicht, dass es um einen spezifischen Kontext geht, innerhalb dessen argumentiert werden soll, um die Mathematik. Da sich Mathematik als beweisende Wissenschaft versteht (Heintz, 2000), rückt auch die Beziehung zwischen Beweisen und Argumentieren in den Blick. Diese wird in der Literatur kontrovers konzeptualisiert (vgl. Reid & Knipping, 2010), was auch damit zusammenhängt, dass kein Konsens vorliegt, was man unter einem Beweis versteht (z.B. Reid, 2005), zumindest in der Schulmathematik.

Unterschiedliche Beweistypen

Eine mögliche integrierende Sicht zum Verhältnis von Argumentieren und Beweisen ist es, diese als Pole innerhalb eines Spektrums von Begründen („Reasoning") in mathematischen Kontexten zu denken (vgl. Abbildung). Mathematisches Begründen kann unterschiedlich erfolgen, was auch an unterschiedlichen Beweistypen (Wittmann & Müller, 1988) illustriert werden kann. Diese Beweistypen verlangen je andere kognitive Prozesse und führen dadurch auch zu unterschiedlichen Repräsentationen des Denkens (Aebli, 2003). Damit stellen sie unterschiedliche kognitive Anforderungen und bieten auch ein je unterschiedliches didaktisches Potenzial.

Wittmann und Müller (1988) unterscheiden den experimentellen, den inhaltlich-anschaulichen oder operativen und den formal-deduktiven Beweis. Die ersten beiden können zu den präformalen Beweisen (Blum & Kirsch, 1991) gezählt werden, was ihre Bedeutung insbesondere für schulisches Lernen aber keineswegs schmälert. Der experimentelle Beweis arbeitet mit Beispielen und Gegenbeispielen, versucht also zu verifizieren oder zu falsifizieren, bleibt dabei aber grundsätzlich an die geprüften Beispiele gebunden. Er erzeugt somit auch keine Gewissheit bezüglich der Allgemeingültigkeit eines Satzes. Das Denken wird in konkreten Beispielen repräsentiert. Eine weitere Abstraktion ist nicht notwendig. Stylianides (2015, S. 216) spricht in diesem Zusammenhang von einem „empirischen Argument“, das aber noch keinen Beweis darstellt. Wird das empirische Argument bzw. das Beispiel allerdings für weitere verallgemeinernde Überlegungen und Aktivitäten in einem operativen Sinn verwendet, kann es den Status eines „generischen Beispiels“ bekommen und als Ausgangslage für einen inhaltlich-anschaulichen oder operativen Beweis dienen (Mason & Pimm, 1984). Der inhaltlich-anschauliche oder operative Beweis zeigt die Gültigkeit der Behauptung durch eine anschauliche Weise oder eine Manipulation im Sinne einer Operation auf. Dieser Beweistyp steht in der Tradition der Gestaltpsychologie (z.B. Wertheimer, 1964) und repräsentiert das Denken in einer Operation, die auf enaktiver oder ikonischer Ebene (Bruner, 1974) dargestellt wird. Beim formal-deduktiven Beweis schließlich wird eine weitere Abstraktion vorgenommen und das Denken formal-symbolisch repräsentiert und algebraisch ausgedrückt. Erlangt ist ebenfalls – wie bereits beim inhaltlich-anschaulichen oder operativen Beweis – Gewissheit bezüglich der Allgemeingültigkeit der Behauptung.

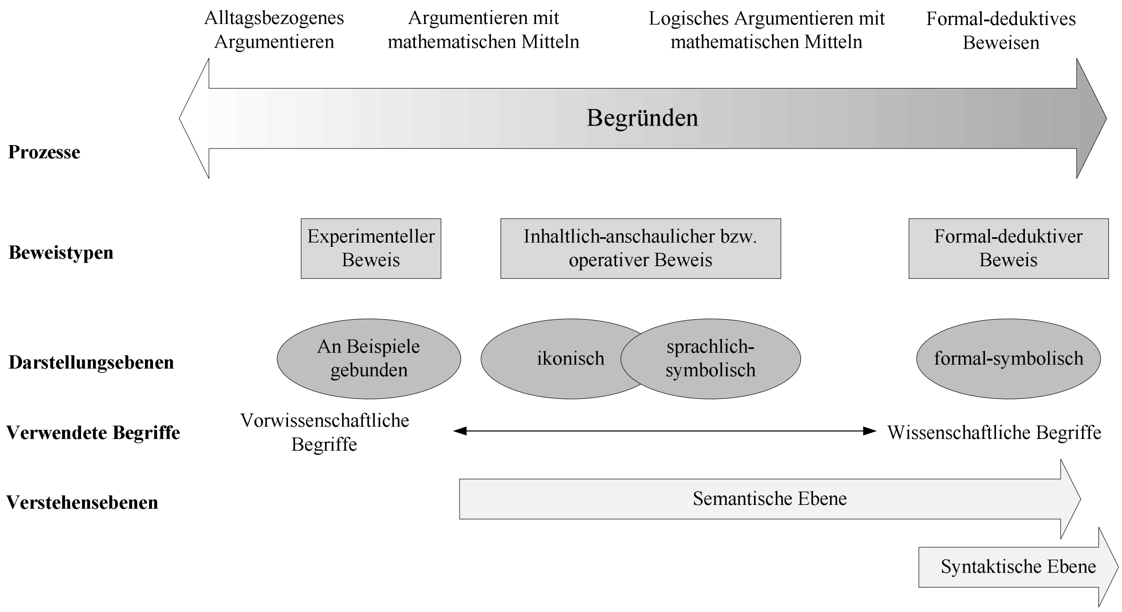


Abbildung 1: Kontinuum des mathematischen Begründens (Brunner, 2014, S.49, hier adaptiert)

Innerhalb des Begründungsspektrums werden je unterschiedliche Begriffe verwendet. Beim experimentellen, beispielgebundenen Arbeiten kann mit alltagsnahen und vorwissenschaftlichen Begriffen gearbeitet werden, während bei formal-deduktiven Beweisen der formale Ausdruck wissenschaftliche Begriffe (Vygotsky, 1969) benötigt. Beim inhaltlich-anschaulichen oder operativen Beweisen werden zunehmend vorwissenschaftliche Begriffe verwendet und wissenschaftliche erprobt, aber noch nicht formal ausgedrückt. Verstehen spielt sich innerhalb des Begründungsspektrums bei den verschiedenen Beweistypen ebenfalls auf unterschiedlichen Ebenen ab. Beim experimentellen Beweis ist kein grundsätzliches Verstehen des Zusammenhangs notwendig, wohl aber ein beispielbezogenes Handeln und Nachvollziehen des postulierten Zusammenhangs. Es geht also weniger um ein „Verstehen, *warum*“, sondern um ein „Überprüfen, *ob*“. Beim inhaltlich-anschaulichen oder operativen Beweis hingegen ist ein inhaltsnahes semantisches Verstehen der Struktur notwendig. Ein solches liegt auch dem formal-deduktiven Beweis zugrunde, der erkannte Zusammenhang wird aber zudem noch auf der syntaktischen Verstehensebene ausgedrückt.

Didaktisches Potenzial der Beweistypen

Die drei Beweistypen mit ihren je unterschiedlichen kognitiven Prozessen und deren Repräsentation lassen sich aber nicht nur innerhalb des Spektrums mathematischen Begründens verorten, sondern weisen auch ein unterschiedliches didaktisches Potenzial auf, das für den schulischen Mathematikunterricht genutzt werden kann. Das Potenzial der Beweistypen soll hinsichtlich zwei für das Mathematiklernen zentraler Aspekte diskutiert werden: 1) bezogen auf das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler und damit in einem adaptiven Sinne und 2) hinsichtlich der Möglichkeiten zur selbstständigen Bearbeitung und Partizipation am Gespräch.

Experimentelle Beweise benötigen kein großes mathematisches Vorwissen und auch keine Verwendung von formal-symbolischer Sprache und sind somit gerade auch für leistungsschwächere und jüngere Schülerinnen und Schüler geeignet. Darüber hinaus enthalten sie ein hohes Potenzial zum Experimentieren im Sinne von Verifikationen und Falsifikationen, ohne dass substanziell neue, eigene Ideen und Begründungen zum Zusammenhang notwendig wären. Ihr Potenzial für Selbsttätigkeit und Partizipation ist somit hoch. Inhaltlich-anschauliche oder operative Beweise verlangen eine Einsicht in die Allgemeingültigkeit einer mathematischen Struktur und damit eine Verallgemeinerung. Sie benötigen deshalb mehr Abstraktionsfähigkeit von den Lernenden und mehr inhaltlich-mathematisches Vorwissen, weil es nicht genügt, etwas zu verifizieren oder falsifizieren. Ihr Potenzial bezüglich Selbsttätigkeit und Partizipation ist aber dennoch groß, weil keine formal-symbolische Sprache für die Formulierung des gefundenen Zusammenhangs notwendig ist. Formal-deduktive Beweise hingegen erfordern sowohl ein großes inhaltlich-mathematisches Vorwissen als auch algebraische Kenntnisse. Je nach Schulstufe und Voraussetzungen der Lernenden ist deshalb das Potenzial für Selbsttätigkeit und aktive Partizipation deutlich geringer als bei den anderen beiden Beweistypen. Inhaltlich-anschaulichen bzw. operativen Beweisen kommt eine besondere Stellung zu: Sie dienen sowohl zum Aufbau konzeptuellen mathematischen Wissens als auch dazu, spezifisch argumentieren zu lernen und Verallgemeinerungen zu erproben. Dadurch nehmen sie eine Brückenfunktion zwischen experimentellem Arbeiten und formal-deduktivem Beweisen ein.

Literatur

Aebli, H. (2003). *Zwölf Grundformen des Lehrens. Eine Allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage. Medien und Inhalte didaktischer Kommunikation, der Lernzyklus* (12. Aufl.). Stuttgart: Klett-Cotta.

Andriessen, J., Baker, M. J. & Suthers, D. (2003). Argumentation, computer support, and the educational context of confronting cognitions. In J. Andriessen, M. J. Baker & D. Suthers (Hrsg.), *Arguing to Learn: Confronting Cognitions in Computer-Supported Collaborative Learning environments* (S. 1–25). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (Hrsg.). (2006). *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen.* Berlin: Cornelsen.

Blum, W. & Kirsch, A. (1991). *Preformal proving: Examples and reflections. Educational Studies in Mathematics, 22*(2), 183–203.

Bruner, J. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie.* Berlin: Cornelsen.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen: Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Heidelberg: Springer.

D-EDK. (2014). *Lehrplan 21. Mathematik.* Bern: Projekt Lehrplan 21.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin.* Wien: Springer.

Reid, D. (2005). The meaning of proof in mathematics education. In M. Bosch (Hrsg.), *European Research in Mathematics Education IV. Proceedings of CERME 4, San Feliu de Guixols, Spain, 2005.* Barcelona: Universität Ramon Llull.

Reid, D. A. & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching.* Rotterdam: Sense Publisher.

Stylianides, A. J. (2015). The role of mode of representation in students' argument construction. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9, 4-8 February 2015)* (S. 213–210). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Vygotsky, L. S. (1969). *Denken und Sprechen.* Frankfurt a.M.: Fischer.

Wertheimer, M. (1964). *Produktives Denken* (2. Aufl.). Frankfurt a.M.: Kramer.

Wittmann, E. C. & Müller, N. G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237–258). Berlin: Cornelsen.

Svenja GRUNDEY, Pestalozzigymnasium München; Christine KNIPPING, Universität Bremen

„Condition of transparency" - ein theoretisches Modell zur Einsicht in eigenständige Beweisprozesse von Lernenden

Begründen und Beweisen kommt in der Mathematik und in den heutigen Bildungsplänen eine zentrale Rolle zu. Trotz dieser Bedeutung zeigen viele mathematikdidaktische Studien, dass Lernende große Schwierigkeiten mit dem mathematischen Argumentieren und Beweisen haben (z.B. Healy & Hoyles 1998; Weber, 2001). In diesem Beitrag wird ein theoretisches Modell vorgestellt, welches Einsichten in eigenständige Beweisprozesse von Lernenden ermöglicht. Anhand eines ausgewählten Fallbeispiels eines Designexperiments zum eigenständigen Beweisen in Jahrgang 10 wird dieses theoretische Modell veranschaulicht.

„Condition of transparency" (Problematik der Sichtbarkeit)

Hemmi (2006) hat im Kontext von Hochschulmathematik einen theoretischen Ansatz entwickelt, auch als „condition of transparency" bezeichnet, um Probleme beim Lehren und Lernen mathematischer Beweise zu erklären. Ihr Ansatz geht auf Lave und Wenger (1991) und Wenger (1998) zurück, die betonen, dass nur durch das Wechselspiel zwischen der Verwendung von Artefakten und einem Verständnis über ihre Bedeutung das Artefakt selbst erfasst und verstanden werden kann. Hemmi hat diesen Gedanken auf das Lernen von mathematischen Beweisen übertragen. Grundlegend ist dabei die Annahme, dass beim Lehren und Lernen mathematischer Beweise ein ständiges Wechselspiel zwischen Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit stattfindet. Unter Sichtbarkeit von Beweisen versteht Hemmi (2008), dass der Fokus im Lernprozess explizit auf die Bedeutung mathematischer Beweise, etwa ihre logische Struktur oder Funktion gerichtet wird. Damit wird die Aufmerksamkeit auf die Beweisebene gelenkt („Sichtbarkeit der Beweisebene"), während die Inhalte in den Hintergrund rücken. Gleichzeitig werden durch Beweise mathematische Inhalte (Theoreme, Sätze) einsichtig und so mögliche Zusammenhänge zwischen diesen vermittelt. Die Beweisebene rückt in den Hintergrund und es findet eine Fokussierung auf die Inhaltsebene statt („Unsichtbarkeit der Beweisebene"). Das Wechselspiel von Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit ist für Hemmi nicht nur charakteristisch für mathematische Beweisprozesse sondern auch notwendigerweise in den Produkten, den mathematischen Beweisen, angelegt. Die Schwierigkeit für Lernende besteht ihrer Auffassung nach darin, dass ihnen dieses Wechselspiel häufig verborgen bleibt („Problematik der Sichtbarkeit").

Insbesondere können während eigenständiger Beweisprozesse Brüche und Probleme bei diesen (notwendigen) Wechseln zwischen beiden Ebenen auftreten. Dies kann sowohl zu Schwierigkeiten bei der Entwicklung eines differenzierten Beweisverständnisses als auch zu Hürden bei der Produktion eigenständiger Beweise führen. Um diesen Herausforderungen zu begegnen, ist Hemmis Modell sowohl in der Konzeption des Designexperiments (siehe auch Grundey, Knipping 2014) als auch bei der Auswertung der eigenständigen Beweisprozesse der Lernenden angewandt worden. Besonders bei Bruchstellen im Beweisprozess ermöglicht der Blick auf das Wechselspiel zwischen Inhalts- und Beweisebene vertiefte Einblicke in die Prozesse und liefert mögliche Erklärungsansätze für die auftretenden Schwierigkeiten. Im Folgenden wird die Konzeption des Designexperiments skizziert und dann exemplarisch ein Bruch in den Beweisprozessen von drei Lernenden beschrieben und mit Hilfe des Modells von Hemmi erklärt.

Ergebnisse

Zentral für das von uns entwickelte Designexperiment war ein Zyklus: Beweisrezeption, Beweisdiskussion und Beweiskonstruktion. Die Lernenden haben diesen Zyklus insgesamt drei Mal durchlaufen. Ausgangspunkt bildeten die Vorstellungen der Lernenden bezüglich mathematischer Beweise. Diese wurden erneut am Ende des Designexperiments erhoben, um mögliche Veränderungen rekonstruieren zu können. Ziel des Designexperiments war es, das Verständnis von mathematischen Beweisen im Bereich der Analysis bei Lernenden des 10. Jahrgangs zu fördern.

Anhand von prototypischen Schülerbeweisen (angelehnt an Healy & Hoyles 1998) zur Aussage, dass eine ganzrationale Funktion zweiten Grades genau eine Extremstelle besitzt, sollten die Schülerinnen und Schüler zunächst eine Validierung der Aussage vornehmen. Im Anschluss wurden in den Klassen über diese Beweise diskutiert und auf dieser Grundlage Kriterien für mathematische Beweise entwickelt. Die Diskussionsphasen ermöglichten es der Lehrperson, einen Fokus auf die Beweisebene zu legen und damit die Aufmerksamkeit der Lernenden auf zentrale Charakteristika von Beweisen, etwa ihre Struktur oder Funktionen zu legen („Sichtbarkeit"). Nach dem Modell von Hemmi findet dabei jedoch auch immer ein Wechsel zur Inhaltsebene statt, indem die Lernenden beispielsweise bei der Validierung der Beweise auf die benötigten inhaltlichen Theoreme und deren Zusammenhänge fokussieren („Unsichtbarkeit"). Dieses Wechselspiel zeigt sich beispielsweise bei der Diskussion des folgenden prototypischen Schülerbeweises:

Lisas Begründung:

„Wenn eine ganzrationale Funktion den Grad 2 hat, dann ist der Grad der Ableitungsfunktion f' genau 1 und f '' ist konstant und ungleich Null. Jede ganzrationale Funktion 1. Grades hat genau eine Nullstelle x_e. Diese Nullstelle ist damit die einzige Extremstelle x_e von f, da f '' konstant und f ''(x_e) ungleich Null ist. **Daher ist die Aussage wahr.“**

Die Begründung wurde häufig von den Lernenden auf einer Inhaltsebene betrachtet und bewertet, indem sie z.B. untersucht haben, welche mathematischen Sätze von Lisa explizit angeführt wurden, inwieweit ihre logische Struktur korrekt sei und welche Zusammenhänge zwischen diesen Theoremen bestehen. Diese Betrachtungen geschehen auch im Wechsel mit der Beweisebene, auf der den Lernenden Kriterien wie eine logische Struktur oder auch die Allgemeingültigkeit gegenwärtig werden. Dies zeigt sich beispielhaft bei Till, wenn er Lisas Beweis aufgrund von Kriterien der Beweisebene (in diesem Fall eine bestimmte Darstellungsform) ablehnt, obwohl nach Tills Auffassung die Begründung auf einer inhaltlichen Ebene korrekt sein könne.

> *„Aber ich würde sagen, dass für nen Beweis ne gewisse Schreibweise von Nöten ist und deswegen ist das für mich kein Beweis, auch wenn es vielleicht inhaltlich alles stimmt, muss man ja ne gewisse Form wahren.“* *(Till, 10d)*

In den anschließenden eigenständigen Beweisprozessen liefert das Wechselspiel zwischen der Beweis- und Inhaltsebene auch mögliche Erklärungsansätze für auftretende Bruchstellen. Dies soll im Folgenden exemplarisch an einem Beweisprozess aufgezeigt werden. Mit Hilfe des Modells soll verdeutlicht werden, warum es den Lernenden schließlich nur mit starker Intervention gelingt, einen eigenständigen Beweis zu führen bzw. zu notieren.

Gegeben ist die mathematische Aussage, dass eine ganzrationale Funktion geraden Grades mindestens eine Extremstelle besitzt. Auf der Inhaltsebene ziehen Brady, Luke und Mason zunächst die notwendige und hilfreiche Bedingung für die Existenz von Extremstellen heran. Im Anschluss versuchen sie, diese Argumentation allgemeingültig und logisch deduktiv zu notieren (Beweisebene). Dabei tritt die Schwierigkeit auf, dass Brady, Luke und Mason nicht in der Lage sind, ihren inhaltlichen Ansatz in algebraischer Form zu notieren. Dies scheint für die drei jedoch für einen mathematischen Beweis notwendig zu sein, sofern die Beweisebene betreten wird. Dies führt nach einiger Zeit dazu, dass Brady schließlich auf der Inhaltsebene einen neuen Ansatz verfolgt und nun den Verlauf von ganzrationalen Funktionen geraden Grades im Unendlichen betrachtet. Daraus folgert er schließlich, dass die Aussage wahr ist. Obgleich er auf der Inhaltsebene durchaus eine tragfähige Beweisidee entwickelt hat, lässt er diese aufgrund seiner algebraischen Vorstellung von Beweisen (Beweisebene) nicht gelten, da er keine Möglichkeit hat, diese formal algebraisch zu realisieren. Der folgende Auszug aus dem Interview verdeutlicht dies.

> *Brady – „Mathematically, we didn't complete it. It wasn't completed. What we were trying to say was there's two high points, so at some point there has to be a point where, for the lack of a better term, bottoms out. Or vice versa, it will cap and go down. And we were just trying to put that into words and, but, we didn't finish."*

Die beschriebene Episode veranschaulicht sowohl das stattfindende Wechselspiel zwischen der Inhalts- und Beweisebene in dem eigenständigen Beweisprozess als auch dessen Fragilität. So führt ein Problem auf einer der beiden Ebenen dazu, dass die Lernenden nicht zu einem eigenständigen Beweis gelangen bzw. ihre Lösung nicht als Beweis bewerten.

Fazit

Das beschriebene theoretische Modell „Problematik der Sichtbarkeit" stellt eine fruchtbare Perspektive dar, Schwierigkeiten und Brüche in Beweisprozessen zu beschreiben und zu erklären. Dies kann auch Lehrerinnen und Lehrer ein Bewusstsein für dieses Wechselspiel zwischen Beweis- und Inhaltsebene vermitteln. So wird es ihnen möglich, auftretende Probleme bei den Lernenden besser zu verstehen und auf einer der beiden Ebenen gezielte Hilfestellungen zu geben. Auch eröffnet es didaktisch die Möglichkeit, bei Beweisprozessen den Fokus gezielt auf die meist unbewusst stattfindenden Wechsel zu legen. Darüber hinaus scheint es notwendig, im Unterricht verstärkt die Beweisebene zu thematisieren, um ein Beweisverständnis zu fördern, welches sich nicht auf eine algebraische Darstellung beschränkt.

Literatur

Grundey, S., Knipping, C. (2014). Beweisvorstellungen und deren Einfluss auf die eigenständigen Beweise. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*, 463–466, Münster, WTM-Verlag.

Healy, H. & Hoyles, C. (1998). Justifying and Proving in School Mathematics. Technical Report on a Nationwide Survey. 1998.

Hemmi, K. (2006). Approaching proof in a Community of Mathematical Practice. Stockholm, 2006.

Hemmi, K. (2008). Students' encounter with proof: the condition of transparency. In: *ZDM - The International Journal on Mathematics Education 2008, 40,* 413–426.

Weber, K. (2001). Student difficulties in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 101–119.

Leander KEMPEN, Paderborn

Beweisakzeptanz bei Studienanfängern: Eine empirische Untersuchung

Im Rahmen eines Forschungsprojekts wurde eine Operationalisierung des Konstrukts „Beweisakzeptanz“ erarbeitet, welche auf den Bewertungen der verschiedenen Funktionen eines Beweises in konkreten Beweisprodukten aufbaut. Die aus den entsprechenden Likert-Items gebildeten Skalen weisen hohe Reliabilitätswerte auf.

Generische Beweise in der Mathematikdidaktik

Generische Beweise haben sich im internationalen Kontext als didaktisch motivierte, beispielgebundene Begründungsform etabliert (etwa Dreyfus et al. 2012). Dabei wird an konkreten Beispielen ein beispielübergreifendes (generisches) Argument ausgemacht, mit dessen Hilfe allgemeingültige Verifikationen vollzogen werden können. Dieses Beweiskonzept wurde an der Universität Paderborn im Rahmen der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ aufgegriffen.

Die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“

Die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ wurde an der Universität Paderborn von Rolf Biehler entwickelt und im Wintersemester 2011/12 zum ersten Mal durchgeführt. Sie soll als Brückenveranstaltung den Einstieg in die universitäre Mathematik bereiten und ist eine Pflichtveranstaltung für Lehramtsstudierende für Haupt-, Real- und Gesamtschule. In dieser Lehrveranstaltung werden generischen Beweise (mit Zahlen und mit Punktmustern) verwendet, um den Studierenden u. a. den Übergang zu den formalen Beweisen der Hochschulmathematik zu erleichtern und um ihnen schuladäquate Begründungsformen für ihren späteren Lehrberuf zu vermitteln (Biehler & Kempen 2014). Damit auch in dem Diagrammsystem der Punktmuster ‚allgemeine‘ Darstellungen genutzt werden können, wurden so genannte geometrische Variable als Pendant zu den Buchstabenvariablen in der Algebra eingeführt (vgl. ebd.). Im Rahmen der Begleitforschung stellte sich allerdings die Frage, inwiefern die verschiedenen Beweisformen von den Studierenden ‚akzeptiert‘ werden.

Beweisakzeptanz: Konzeptualisierung und Operationalisierung

In der Literatur wird aufgrund verschiedener Parameter auf die Beweisakzeptanz Lernender geschlossen. So forderten Martin und Harel (1989) die Bewertung verschiedener Begründungen als „korrekte mathematische Beweise“ („valid mathematical proof“; ebd., S. 46) auf einer vierer Likert-Skala. Healy und Hoyles (2000) erhoben das Ausmaß, in dem Lernende die Funktionen Verifikation und Erklärung in vorgelegten Begründungen erfüllt sahen („… shows that the statement is always true“; „… shows you why the statement is true“; Healy & Hoyles 2000, S. 403). Die hier vorgeschlagene Konzeption von Beweisakzeptanz vereint diese beiden Grundpositionen (Passung einer Begründung mit dem individuellen Beweisbegriff und empfundenes Ausmaß verschiedener Funktionen eines Beweises). **Beweisakzeptanz** wird hier konzeptualisiert (und gleichsam operationalisiert) als *das Ausmaß, inwieweit bei einem vorgelegten Beweis vom Betrachter die Funktionen Verifikation, Überzeugung und Erklärung empfunden werden und inwieweit der Beweis durch den Betrachter als „korrekter und gültiger Beweis“ bewertet wird*.

Fragestellung, Testinstrumente und Durchführung der Untersuchung

Im Zentrum des Interesses steht die Frage, inwieweit die vier Beweisformen der Lehrveranstaltung (generischer Beweis mit Zahlen, generischer Beweis mit Punktmustern, Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen und formaler Beweis) von den Erstsemesterstudierenden des Lehramts Mathematik (HRG) akzeptiert werden. Innerhalb des vorliegenden Artikels soll allerdings nur auf die Akzeptanz des generischen Beweises mit Zahlen [„GenZ“] und des formalen Beweises eingegangen werden [„FB“]. Die Forschungsfrage ist: Wie unterscheiden sich die beiden Beweisformen der Lehrveranstaltung (der generische Beweis mit Zahlen und der formale Beweis) bzgl. ihrer Akzeptanz bei den Erstsemesterstudierenden zu Beginn der Lehrveranstaltung?

Für die Konstruktion des Testinstruments zur Erfassung von Beweisakzeptanz wurde je ein konkreter Beweis pro Beweisform ausgewählt (s.u.), der von den Studierenden anhand verschiedener Aussagen auf einer sechser Likert-Skala ([1] „stimme überhaupt nicht zu“ … [6] „stimme voll zu“) bewertet werden sollte. Hierzu gehören u. a. die Aussagen: Die Begründung… (i) „…überzeugt mich, dass die Behauptung wahr ist“ [Überzeugung], (ii) „…zeigt, dass die Behauptung 100-prozentig für alle Zeiten wahr ist“ [Verifikation], (iii) „… erklärt mir, warum die Behauptung wahr ist“ [Erklärung] und (iv) „… ist ein korrekter und gültiger Beweis“ [korrekter Beweis]. Die Erhebung fand im Rahmen einer Eingangsbefragung der Studierenden der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ im Wintersemester 2014/15 statt.

Die zu bewertenden Beweise waren ein generischer Beweis mit Zahlen [Begründung (1)] zu der Behauptung „Addiert man zu einer ungeraden natürlichen Zahl ihr Doppeltes, so ist die Summe immer ungerade“ und ein formaler Beweis [Begründung (2)] zu der Behauptung „Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt: Wenn b ein Vielfaches von a ist und c ein Vielfaches von a ist, dann ist auch (b+c) ein Vielfaches von a.“ (s. Abbildung 1).

Begründung (1):

$$
\begin{array}{rcll}
1 + 2 \cdot 1 & = & 3 \cdot 1 & = 3 \\
5 + 2 \cdot 5 & = & 3 \cdot 5 & = 15 \\
13 + 2 \cdot 13 & = & 3 \cdot 13 & = 39 \\
 & (*) & (**) & (***)
\end{array}
$$

(*) Die Summe aus einer ungeraden natürlichen Zahl und ihrem Doppelten ist gleich dem Dreifachen der Ausgangszahl.

(**) Da die Ausgangszahl eine ungerade Zahl ist, erhält man somit immer das Produkt von zwei ungeraden Zahlen.

(***) Da das Produkt von zwei ungeraden Zahlen immer ungerade ist, muss das Ergebnis immer ungerade sein.

Begründung (2):

Seien a, b, c beliebige, aber feste natürliche Zahlen. b und c seien Vielfache von a.

Da b ein Vielfaches von a ist, gibt es eine natürliche Zahl n mit: $n \cdot a = b$.
Da c ein Vielfaches von a ist, gibt es eine natürliche Zahl m mit: $m \cdot a = c$.

Dann gilt:
$b + c = n \cdot a + m \cdot a = (n + m) \cdot a$.
Da $(n + m)$ eine natürliche Zahl ist, ist $(b + c)$ ein Vielfaches von a.
q.e.d.

Abb. 1: Die zu bewertenden Begründungen (oben: der generische Beweis mit Zahlen; unten: der formale Beweis)

Ergebnisse

In der Eingangsbefragung zur Lehrveranstaltung (WS 2015/16) wird der formale Beweis von den Erstsemesterstudierenden (n=71) bzgl. der Aspekte „Überzeugung“, „Verifikation“, „Erklärung“ und „korrekter Beweis“ höher bewertet als der generische Beweis mit Zahlen (vgl. Abbildung 2). Alle Medianunterschiede zwischen den Beweisformen sind statistisch hoch signifikant (p<,001, Wilcoxon-Test).

Durch eine explorative Faktoranalyse konnte zu jedem Beweis eine Skala zur „Beweisakzeptanz“, bestehend aus insgesamt acht Items, ausgemacht werden. Hierzu zählen die vier oben aufgeführten Items und vier weitere. Alle Faktorladungen liegen dabei über 0,5. In der Abbildung 3 werden die statistischen Daten zu den Akzeptanzskalen bzgl. der beiden hier betrachteten Beweisformen aufgeführt.

	Überzeugung	Verifikation	Erklärung	korrekter Beweis
Der generische Beweis mit Zahlen				
n	68	70	70	70
aMittel	3,49	1,97	3,74	2,81
Median	4,00	2,00	4,00	3,00
SD	1,634	1,262	1,431	1,427
Der formale Beweis				
n	67	67	67	67
aMittel	5,24	4,54	5,16	5,18
Median	6,00	5,00	6,00	6,00
SD	1,088	1,318	1,201	1,18

Abb. 2: Ergebnisse der Akzeptanzbewertungen zum generischen Beweis mit Zahlen und zum formalen Beweis (Erstsemesterstudierende)

	n	aMittel	Median	SD	Cronbachs Alpha
Akz_GenZ	67	2,8	2,63	1,134	,868
Akz_FB	67	5,05	5,25	,95	,912

Abb. 3: Statistische Daten der Akzeptanzskalen zum generischen Beweis mit Zahlen [„Akz_GenZ"] und zum formalen Beweis [„Akz_FB"]

Zu Beginn der Lehrveranstaltung liegt der Akzeptanzwert des formalen Beweises (aMittel: 5,05) statistisch hoch signifikant über dem des generischen Beweises mit Zahlen (aMittel: 2,8; p<,001; T-Test.)

Diskussion

Von den Studienanfängern wird der formale Beweis signifikant besser ‚akzeptiert' als der generische Beweis mit Zahlen. Es scheint sich somit bereits im schulischen Mathematikunterricht im Rahmen von Beweisen eine Präferenz für formale Darstellungen und eine Abkehr von beispielgebundenen Begründungen abzuzeichnen.

Literatur

Biehler, R., & Kempen, L. (2014). Entdecken und Beweisen als Teil der Einführung in die Kultur der Mathematik für Lehramtsstudierende. In J. Roth, T. Bauer, H. Koch & S. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 121-136). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Dreyfus, T., Nardi, E., & Leikin, R. (2012). Forms of proof and proving in the classrom. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (S. 191-214). Heidelberg u.a.: Springer Science + Business Media.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 41-51.

Christine KNIPPING, Bremen; Jenny Christine CRAMER

Partizipation an Argumentation

Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht sind ein komplexes Gefüge. Die Betrachtung der Partizipation von Lernenden an diesen erlaubt, fachliche Lernprozesse und mögliche Hürden in diesen besser zu verstehen. Wir verbinden Krummheuers Ansatz (2015) zur Identifikation von Sprecherrollen mit Habermas (1983) diskursethischen Überlegungen. Potentieller Hindernisse für die Partizipation an Argumentation können auf dieser diskursethischen Grundlage rekonstruiert und erklärt werden.

Partizipation an Argumentation nach Krummheuer

Krummheuer (2015) verbindet zwei Ansätze zur Analyse von Interaktionsprozessen im Mathematikunterricht: Argumentations- und Partizipationsanalyse. Grundlegend ist dabei die lerntheoretische Annahme, dass im Kontext von Mathematikunterricht Lernprozesse „aus der Partizipation an kollektiven Argumentationsprozessen“ hervorgehen (Krummheuer, 1992, S. 144). Krummheuers Argumentationsanalysen basieren auf der Rekonstruktion lokaler Argumente mithilfe des Toulmin-Schemas, das hier nicht näher beschrieben werden soll (siehe dazu etwa Knipping & Reid 2015 oder Krummheuer 2015). Sein Ansatz zur Analyse von Partizipation beruht auf der Zerlegung von Sprecherrollen nach Goffman in die Verantwortung für den Inhalt und die Verantwortung für die Formulierung der Äußerung. Für die Partizipation an Argumentation betrachtet Krummheuer (2015) vier Rollen: „author“, „relayer“, „ghostee“ und „spokesman“.

Statt „author“ verwenden wir den Begriff „Autor“/ „Autorin“. Autoren übernehmen Verantwortung für Inhalt und Formulierung ihrer jeweiligen Äußerung; sie bringen neue Ideen in den Unterrichtsdiskurs ein und formulieren diese. Im Gegensatz dazu gibt ein „relayer“ lediglich bestehende Ideen und Formulierungen wieder. Ein „ghostee“ sieht einen neuen Inhalt in eine bestehende Formulierung hinein. Ein „spokesman“ produziert keine eigenen Inhalte, sondern formuliert bestehende Ideen erstmals aus oder rephrasiert diese. Krummheuer (2015, S. 68) beschreibt, dass sich Autonomie und Lernfortschritt sowohl in den von Schülerinnen und Schülern produzierten Elementen von Argumentationen widerspiegeln können, als auch in der Einnahme unterschiedlicher Sprecherrollen. Er beschreibt, dass die Übernahme einer Autorenschaft für eine Äußerung darauf hindeuten könne, dass Lernende bereits etwas verstanden hätten. Eine Rollenübernahme als „ghostee“ oder „spokesman“ lasse entsprechend vermuten, dass sich Lernende auf einem Weg hin zu mehr Autonomie im Argumentieren befänden, während ein Auftreten als „relayer“ als erster Schritt zur Anwendung neuen mathematischen Wissens gesehen werden könne (Krummheuer 2015).

Ein weiterer Blick auf Partizipation: Diskursethik von Habermas

Krummheuers betrachtet Partizipation an Argumentation als Voraussetzung für mathematisches Lernen. Es bleibt jedoch ungeklärt, inwiefern die Möglichkeiten zur Partizipation an Argumentation für alle Lernenden in gleicher Weise gegeben sind (vgl. Knipping, 2012). Wir interessieren uns mit solchen *Partizipationsmöglichkeiten* Lernender für die Beteiligung an Argumentation auseinander. Im Rahmen der Theorie kommunikativen Handelns beschreibt Habermas (1983, S. 97ff.) subjektive Voraussetzungen für eine Teilhabe an Argumentation aus Perspektive der Rhetorik, Dialektik und Logik (vgl. Cramer, 2014). Für jede Perspektive gibt Habermas Regeln an, die für eine Partizipation an Argumentation subjektiv erfüllt sein müssen. Aus Perspektive der Rhetorik lauten diese diskursethischen Regeln: (R1) Jeder und jede darf sich an Argumentationsprozessen beteiligen. (R2) Die Inhalte der Kommunikation werden von allen Beteiligten gemeinsam beeinflusst. (R3) Die Kommunikation findet gleichberechtigt und befreit von Zwängen statt. Die zwei Regeln aus Perspektive der Dialektik sind: (D1) Wer etwas behauptet, muss diese Behauptung selbst glauben. (D2) Die Diskursteilnehmer setzen eine geteilte Wissensbasis voraus, die nicht unbegründet in Frage gestellt werden darf. Aus Sicht der Logik identifiziert Habermas drei Regeln: (L1) Beteiligte dürfen sich nicht selbst widersprechen. (L2) Wer in einer Situation eine Schlussregel anwendet, muss bereit sein, dieselbe Schlussregel in allen anlogen Situationen zu verwenden. (L3) Begriffe haben die gemeinsam festgelegte Bedeutung. Die drei Perspektiven müssen nach Habermas immer simultan betrachtet werden. Die Habermas'schen Diskursregeln liefern einen Ansatz zur Identifikation von Hindernissen und Möglichkeiten für die Partizipation von Lernenden an Argumentation (vgl. Cramer, 2015).

Ein Unterrichtsbeispiel: Händeschütteln

Eine Beispielanalyse soll den Gewinn und die Reichweite beider methodologischer Ansätze verdeutlichen (vgl. auch Knipping und Cramer, im Druck). Die Daten stammen aus einer Unterrichtsstunde in einer Kleingruppe. Die Schülerinnen Selin, Jawahir und Soraya sowie die Lehrperson Jenny thematisieren das Problem des Händeschüttelns. Im Fokus unserer Analysen in diesem Beitrag steht die Partizipation von Soraya.

Nach dem aktiven Händeschütteln der vier Anwesenden ermitteln Selin, Jawahir und Jenny die Anzahl der Begrüßungen zunächst für vier und dann für Personen als Additionen, die Rechnungen 3+2+1=6 und 4+3+2+1=10 werden an der Tafel notiert. Jenny stellt den Schülerinnen dann die Aufgabe die Anzahl der Begrüßungen für eine Situation mit 15 Personen selbstständig zu erarbeiten. Unter Zuhilfenahme von 15 Buntstiften ermitteln Selin und Jawahir die Rechnung 14+13+…+1. Selin äußert jedoch sofort

Zweifel am Ergebnis, 105 erscheint ihr zu hoch. Nach einer kurzen Stille wendet sie sich an Soraya, die bislang keinen Wortbeitrag geleistet hat. Selin fragt Soraya, ob sie ein Ergebnis habe. Soraya verneint diese Frage zunächst; Selin wendet sich erneut ihrem Rechenweg zu. Auf Selins erneute Äußerung von Skepsis bezüglich der 105 ergreift Soraya das Wort:

54	Soraya	Vielleicht dreißig. Weil ähm, fünf mal drei sind fünfzehn, und dann mal (1 Sek) zehn mal drei.
55	Selin	Aber du musst denken (1 Sek) wir sind vier Personen, es kamen sechs raus.
56	Soraya	Und fünf (2 Sek, zeigt mit Stift an die Tafel) zehn.
57	Selin	Stimmt.

Eine Rekonstruktion der gesamten Gesprächssituation nach Toulmin zeigt ein Argument mit mehreren Bestandteilen; die Partizipationsanalyse nach Krummheuer weist Soraya als Autorin für dieses (lokale) Argument aus. Sie liefert eine neue Konklusion („Vielleicht dreißig“, 54), dazu ein Datum („Fünf mal drei sind fünfzehn“, 54) und eine angedeutete Schlussregel („und dann mal (1 Sek) zehn mal drei“, 54). Ihre Schlussregel kann als „Die Anzahl der Begrüßungen wächst um denselben Faktor wie die Anzahl der Personen“ gedeutet werden, sie vermutet also eine Proportionalität. Diese Ideen und ihre Formulierungen stammen von Soraya. Sie begründet darüber hinaus ihr Argument, auch gegen Selins Einwand, durch ein weiteres Datum („Und fünf (... zeigt mit Stift an die Tafel) zehn“, 56). Im weiteren Unterrichtsdiskurs wird die von ihr vorgeschlagene 30 als Alternativlösung zur 105 wiederholt herangezogen. Etwa eine Minute nach Sorayas Argument identifiziert Selin darin zudem die Idee, dass die Anzahl der Personen halb so groß sei wie die Anzahl der Begrüßungen: „Fünf ist die Hälfte von Zehn“. Selin tritt dabei als „ghostee“ auf, denn die von ihr vermutete Proportionalität ist eine andere, als die von Soraya entworfene. Der von Selin vermutete proportionale Zusammenhang wird im Verlauf der Argumentation ebenfalls wiederholt herangezogen. Während Sorayas Ideen also im Diskurs immer wieder aufgegriffen werden, endet ihre aktive mündliche Beteiligung nach ihrem (lokalen) Argument (54-57). Die diskursethischen Regeln von Habermas erlauben dies zu erklären bzw. helfen, mögliche Gründe für diesen Abbruch von Sorayas sprechender Partizipation zu ermitteln. Soraya zögert zunächst als Selin sie anspricht. Empfindet Soraya sich nicht als gleichberechtigt bei der Teilhabe an Argumentation, so wird dies verständlich (R1). Sorayas Argument bezieht sich nicht auf den gemeinsam erarbeiteten Ansatz des additiven Ermittelns der Anzahl, sie verlässt damit eine faktisch geteilte Wissensbasis (D2). Selins Kritik (55) kann als Verweis auf eine analoge Situation (vier Personen) gedeutet werden, für die nicht dasselbe Verhältnis gelte. Soraya überträgt in diesem Fall ihre

Schlussregel nicht; auch dies verletzt eine Diskursegel (L2), Dies kann somit als Kritik verstanden werden, dass Soraya ihre Schlussregel nicht lückenlos übertrage (L2). Auch dies verletzt eine Diskursregel.

Fazit und Ausblick

Obwohl Soraya ein lokales Argument als Autorin selbstständig vorbringt, scheint ihre Teilhabe am Diskurs erschwert zu sein. Implizite Diskursregeln, die beachtet oder nicht beachtet werden, spielen hier eine Rolle. Während Krummheuers Ansatz die Identifikation von Sprecherrollen zulässt und so die Urheberschaft von Ideen zurückverfolgt werden kann, liefert die Diskursethik von Habermas eine Perspektive, um mögliche Hindernisse der Partizipation an Argumentationen zu identifizieren (vgl. Cramer, 2015). Die Rekonstruktion globaler Argumentationsstrukturen (Knipping & Reid, 2015) liefert darüber hinaus Ansatzpunkte, um implizite Partizipation in Form des Weiterbestehens und Wiederaufgreifen von Ideen zu erfassen.

Literatur

Cramer, J. C. (2014). „In der Mitte sind die Zwei und die Fünf "–Logisches Argumentieren im Kontext von Spielen. In J. R. & J. Ames (Eds.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2014 (pp. 293-296). Münster: WTM Verlag.

Cramer, J. C. (2015). Argumentation below expectation: A double-threefold Habermas explanation. Proceedings from CERME 9; to appear in 2015.

Habermas, J. (1983). Diskursethik-Notizen zu einem Begründungsprogramm. In Moralbewusstsein und kommunikatives Handeln (pp. 53-126). Frankfurt: Suhrkamp.

Knipping, C., & Reid, D. (2015). Reconstructing argumentation structures: a perspective on proving processes in secondary mathematics classroom interactions. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, N. Presmeg, & E. Özdil (Eds.), Approaches to qualitative research in mathematics education (S. 75-104). Dordrecht: Springer.

Knipping, C. & Cramer, J. (im Druck). Partizipation an Argumentation. Proceedings from ICME 13, 2016.

Krummheuer, G. (1992). Lernen mit" Format": Elemente einer interaktionistischen Lerntheorie: diskutiert an Beispielen mathematischen Unterrichts. Deutscher Studien Verlag.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, N. Presmeg, & E. Özdil (Eds.), Approaches to qualitative research in mathematics education (S. 51-74). Dordrecht: Springer.

Eva MÜLLER-HILL, Marburg

Warum „immer“ so und nicht anders? Erklären-warum im Mathematikunterricht mittels operativer Invarianz entlang kontrastiver und kontrafaktischer Leitfragen

Im Folgenden stehen inhaltlich-epistemologische Merkmale von Erklären-warum im Fokus. Betrachtet man Erklären-warum als Heranziehen spezifischer, nämlich entscheidender allgemeiner Gründe für das Bestehen eines Sachverhaltes, so lautet die Frage, woran man solche entscheidenden Gründe, also allgemeine Gründe mit Erklärkraft, erkennen kann. Dabei dient eine wissenschaftstheoretische Sicht als Ausgangspunkt:

> Whether or not a generalization can be used to explain has to do with whether it is *invariant* (Woodward 2000, S. 198)

Mit Rückbezug auf eine Erklärsituation aus dem Unterricht sollen solche charakteristischen Invarianzen hier erläutert werden.

Erklären-warum im Mathematikunterricht – ein Beispiel

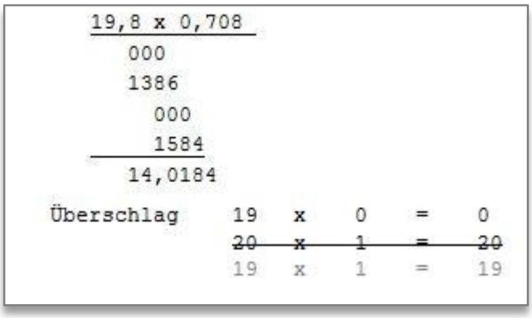
Die nachfolgende Unterrichtssequenz ist (Erath 2016) entnommen (Transkripte gekürzt): Die Schülerinnen und Schüler einer 5. Klasse eines Gymnasiums arbeiten an der Aufgabe $19{,}8 \cdot 0{,}708 = 14{,}0184$. Thasin wundert sich über die Diskrepanz zwischen seiner gerundeten Rechnung $19 \cdot 0 = 0$ und dem exakten Ergebnis. Der Lehrer greift Thasins Frage auf:

Lehrer: Thasin sagt ja; Mensch, eigentlich multiplizieren heißt ja ich mache was Größer; außer dann bei null ne; dann kommt null raus; das ist immer kleiner; aber hier jetzt auf einmal – kommt vierzehn raus; Super gesehen Thasin; nimm mal ein zwei Leute dran die dafür ma ne Erklärung suchen sollen;

Nach zwei Anläufen von Mitschülerinnen versucht es Thasin selbst.

Thasin: Also (geht zur Tafel) null mal neunzehn ist ja null; aber hier ist ja noch ein Komma, und das macht die null größer; und danach steht ja noch was; und null ist ja immer das es kleiner wird, und weil‘s nicht mal eins ist, sondern weniger; ist es kleiner als neunzehn;

Einige Mitschüler können Thasins erstem Erklärungsversuch nicht folgen.



Lehrer: versuch’s nochmal; aber Moment; bevor der Thasin die Erklärung nochmal startet, mach ich hier mal das hin; (*ändert den Überschlag 20 · 1 = 20 in 19 · 1 = 19, vgl. Abb. rechts*) vielleicht kannst du das nutzen Thasin;

Thasin: Okay; neunzehn mal null ist null; und neunzehn, neunzehn mal eins ist neunzehn; und hier ist es ja null komma siebenhundertacht; das liegt ja ähm – das ist nicht mal eins, aber auch nicht mal null; deswegen muss es zwischen die neunzehn und die null liegen – es ist kleiner als neunzehn, aber ist größer als null;

Die von Thasin zur Erklärung herangezogenen Gründe beantworten bestimmte kontrastive oder kontrafaktische Fragen, weil sie entsprechende Invarianzen aufweisen. Auf die vom Lehrer pointiert formulierte Frage „Eigentlich macht multiplizieren größer, warum kommt hier jetzt auf einmal etwas Kleineres heraus?" zeigt Thasins Erklärung, warum genau für Faktoren zwischen 0 und 1 das Ergebnis der Multiplikation mit 19,8 kleiner als 19,8 wird, und sonst nicht. Die Anregung des Lehrers „Was wäre, wenn du andere Überschläge verwendest?" kann Thasin aufnehmen.

Erklären aus der epistemologischen Perspektive

Die Grundfrage der epistemologischen Perspektive lautet: Wie kann man erklärende Gründe prinzipiell erkennen und prüfen? Mit Blick auf den eingangs zitierten allgemeinen wissenschaftstheoretischen Ansatz, dass erklärende Gründe sich durch geeignete Invarianzen ausweisen, und in Anlehnung an mathematikphilosophische Charakterisierungen speziell mathematischen Erklärens kann man präziser von erklärenden im Sinne von invarianten Mustern sprechen.

> [Explanations] make reference to a characterizing property of an entity or structure mentioned in the [explanandum]. (vgl. Steiner 1978)

Solche charakteristischen, essentiellen Eigenschaften mathematischer Objekte lassen sich als „konditionale Vermögen" in Bezug auf ihre Repräsentationen auffassen. (Nur) auf diese hat man operativen Zugriff. Erklärende Muster beruhen auf solchen Vermögen. Hierin besteht eine epistemologische Analogie zwischen mathematischem und empirischem Erklären.

Ein **potentiell erklärendes Muster** für einen mathematischen Sachverhalt *P* ist *(im einfachen Fall)* eine geeignete Generalisierung einer konditionalen Aussage der Form:

> *Wenn bestimmte Manifestationsbedingungen aufträten/hergestellt würden, manifestierte(n) sich Eigenschaft(en) φ in Form einer geeigneten Repräsentation bzw. Interpretation von P.*

Erfüllt das Muster gewisse epistemische Invarianzkriterien, so ist es (aus epistemologischer Perspektive) ein **erklärendes Muster**. Es beschreibt, in welcher Form und unter welchen prinzipiell interventionsfähigen, spezifischen Bedingungen, Setzungen, Operationen (Manifestationsbedingungen) sich der zu erklärende mathematische Sachverhalt an der betrachteten Repräsentation als Manifestation einer oder mehrere charakteristischer mathematischer Eigenschaften erweist.

Konkretisierung am Beispiel

Thasins erster Erklärungsversuch läuft ein wenig ins Leere und wird von seinen Mitschülern nicht recht verstanden. Man kann diesen Versuch als eine „algebraische“ Erklärung rekonstruieren, die auf der Distributivität (φ) der Körperverknüpfungen Multiplikation und Addition beruht. Von Thasin werden die zugehörigen Manifestationsbedingungen (stelle 0,708 dar als 0+x und 1–y) aber nur im Ansatz formuliert („*aber hier ist ja noch ein Komma, und danach steht ja noch was*“, „*weil‘s nicht mal eins ist, sondern weniger*“) – es fehlen ihm dazu ja nicht zuletzt die algebraischen Darstellungsmittel. Im zweiten Versuch liefert Thasin auf Anregung des Lehrers eine „analytischere“ Erklärung, die auf Rundungseigenschaften bzw. der Monotonie der Funktion $x \mapsto x \cdot 19{,}8$ beruht (also auf anderen φ). Thasin kann diese Erklärung vollständiger und für die anderen verständlicher formulieren, dabei dient ihm der Tafelanschrieb teilweise als visuelle Stütze. Thasins potentiell erklärendes Muster lässt sich so rekonstruieren:

> *Wählte man zwei Zahlen a < 0,708 < b, so manifestierte sich die Monotonieeigenschaft darin, dass a · 19,8 < 0,708 · 19,8 < b · 19,8.*

Für Thasins Erklärung ist a=0 und b=1. Das Explanandum *P* = „Das Ergebnis von 0,708 · 19,8 ist nicht null, aber kleiner als 19,8“ ergibt sich dann als „0,708 · 19,8 liegt zwischen 0 · 19,8 und 1 · 19,8“. Vermutlich hängt die Repräsentation, die Thasin „tatsächlich“ für sich nutzt, an den vom Lehrer an die Tafel geschriebenen Überschlagsrechnungen.

Operative epistemische Invarianzkriterien für erklärende Muster

Zwei wesentliche epistemische Invarianzkriterien für erklärende mathematische Muster sind die **Interventions-** und die **Objektinvarianz** (vgl. im Detail und zu weiteren Invarianzkriterien Müller-Hill, eingereicht). Damit sind jeweils Invarianzen unter (potentiell oder aktual) herbeiführbaren Variationen gemeint (in diesem Sinne sind es „operative“ Kriterien). Die Prüfung und Bewertung dieser Kriterien ist vom jeweiligen Hintergrundwissen und den verfügbaren Variationsmöglichkeiten abhängig, wodurch ein dialektisches Verhältnis zwischen Hintergrundwissen und Erklären entsteht. *Interventionsinvarianz* bedeutet Invarianz des Musters unter aktivem Eingriff an den Manifestationsbedingungen. Letztere sollen insbesondere für das Herstellen bzw. das Auftreten des Explanandums entscheidend, mit Woodward gesprochen *difference maker* in Bezug auf das Explanandum sein. Dies ist in Thasins Beispiel der Fall, denn es besteht eine entsprechende funktionale Abhängigkeit zwischen Manifestationsbedingungen und Manifestation, insbesondere: Wählte man *nicht* a=0 und b=1, so manifestierte sich die Monotonieeigenschaft auch *nicht* in Form einer geeigneten Repräsentation von *P*. *Objektinvarianz* bedeutet, dass das Muster unter Variation der Objekte gültig bleibt. Das rekonstruierte Muster zu Thasins

Erklärung ist objektinvariant, denn es gilt nicht nur für 0,708 und 19,8, sondern sogar für zwei beliebige Zahlen in $\mathbb{R}$. Variiert man P entsprechend mit, so liefert das Muster gerade für Faktoren zwischen 0 und 1 eine Erklärung, denn genau dann repräsentiert sein Konsequenz für a=0 und b=1 das (variierte) Explanandum (kontrastive Objektinvarianz).

Ausblick zur pragmatischen Perspektive

Eine pragmatische Charakterisierung fasst Erklären-warum als das Antworten auf situativ herausfordernde, kontrastive Warum-Fragen und kontrafaktische Was-wäre-wenn-Fragen auf. Operative epistemische Invarianzkriterien liefern dabei eine inhaltsbezogene Basis, z.B.:

Warum tritt das Phänomen gerade für diese Objekte auf und für andere nicht? Was wäre, wenn ich eingreife, z.B. die Objekte verändere? Bleibt die Erklärhypothese gültig? (Objektinvarianz)

Warum besteht gerade dieser und nicht ein anderer Sachverhalt? Was wäre, wenn ich in Bezug auf die Manifestationsbedingungen etwas anders mache, tritt das Phänomen erneut auf, schwächt es sich ab, tritt eine wesentliche Veränderung ein? (Interventionsinvarianz)

Erklären in diesem Sinne hat stets einen dialogisch-argumentativen Kern (man kann hier etwa den Bezug zu Toulmins Theorie substantieller Argumentation herstellen, vgl. Müller-Hill 2015). Gleichzeit verweist die pragmatische Perspektive darauf, dass Erklären im Unterricht keine durchgängig argumentativ-sprachliche Struktur haben muss, denn solche Fragen können (zunächst) auch handelnd angegangen werden.

Literatur

Erath, K. (2016), *Mathematisch diskursive Praktiken des Erklärens in unterschiedlichen Mikrokulturen. Rekonstruktive Analyse von Unterrichtsgesprächen*. Dissertation, TU Dortmund, im Druck.

Müller-Hill, E. (2015), Mathematisches Erklären und substantielle Argumentation im Sinne von Toulmin, In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015 [S. 640-643]*. Münster: WTM-Verlag.

Müller-Hill, E. (eingereicht), Eine handlungsorientierte didaktische Konzeption nomischer mathematischer Erklärung.

Steiner, M. (1978). Mathematical explanation. *Philosophical Studies* 34, 135–151.

Woodward, J. (2000). Explanation and invariance in the special sciences. *The British Journal for the Philosophy of Science,* 51(2), 197-254.

Sarah OTTINGER, Stefan UFER, LMU München, Ingo KOLLAR, Universität Augsburg

Mathematisches Argumentieren und Beweisen in der Studieneingangsphase – Analyse inhaltlicher und formaler Qualitätsindikatoren

1. Hintergrund und Forschungsstand

Für viele Studierende stellt der Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik eine große Herausforderung dar (Heublein, 2014). Die unterschiedliche Akzentuierung mathematischen Argumentierens und Beweisens in den beiden Bildungsinstitutionen kann dabei als eine mögliche Ursache aufgefasst werden (Rach, 2014). Das Formulieren und Absichern mathematischer Vermutungen erfordert sowohl informelles Explorieren anhand von Beispielen und Gegenbeispielen (Koedinger, 1998) als auch das Suchen nach potentiell anwendbaren Sätzen, Definitionen und Konzepten. Der Rückgriff auf die Regeln der Logik sowie die sprachliche Struktur eines Beweises tragen dabei ebenfalls wesentlich zur Komplexität der Anforderungen bei (Epp, 2003). Studien weisen darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler über alle Jahrgangsstufen hinweg Schwierigkeiten bei der Konstruktion mathematischer Beweise haben (u.a., Healy & Hoyles, 1998). Studienanfängerinnen und Studienanfänger scheitern häufig daran, eine logische Schlusskette zu finden und diese mit der jeweils erforderlichen sprachlichen Präzision nach den Standards der Community zu kommunizieren (Epp, 2003). In vielen Modellen zum mathematischen Argumentieren und Beweisen (Boero, 1999; Schwarz, Hershkowitz & Prusak, 2010) lassen sich im Wesentlichen zwei übergeordnete, idealisierte Prozesse identifizieren: Einerseits müssen Studierende Argumente für oder gegen eine mathematische Vermutung suchen und diese zu einer logisch stringenten Schlusskette organisieren. Dabei müssen Relationen zwischen verschiedenen mathematischen Konzepten identifiziert und nach ihrem Potential, eine mathematische Vermutung zu stützen, ausgewählt werden (Boero, 1999). Andererseits müssen die Argumente und logischen Schlüsse in akzeptabler Weise dargestellt werden, um sie der jeweiligen Community zugänglich zu machen. Dabei ist die Verwendung mathematischer Symbole, zwar nicht zwingend notwendig, aber dennoch häufig hilfreich. Der Erfolg beider Prozesse äußert sich in der von den Studierenden erstellten Lösung zu der jeweiligen Beweisaufgabe. So zeigt sich der Erfolg des Suchens nach logischen Schlüssen darin, dass zentrale Beweisideen in der Argumentation ersichtlich (Lai & Weber, 2014), Bezüge zur Rahmentheorie hergestellt (Griffiths, 2000), und Allgemeingültigkeit und Vollständigkeit des Arguments entsprechend den Anforderungen der Community erreicht werden. Darüber hinaus zeigt sich in der korrekten Verwendung der mathematischen Fachsprache und einem präzisen Umgang mit symbolischen Notationen, ob Anforderungen zur Kommunikation der gefundenen Schlüsse erfüllt wurden. Inwiefern diese inhaltliche und formale Qualität mathematischer Argumentationen und Beweise zusammenhängen, wurde trotz der Thematisierung beider Aspekte (bspw. Selden & Selden, 2011) bislang noch nicht analysiert. Nach Selden und Selden (2009) finden sich Hinweise darauf, dass in bestimmten Teilen eines Beweises vorwiegend die Qualität der Problemlöseprozesse wiedergespiegelt wird (*problem-centered part*), während andere Teile eines Beweises davon geprägt sind, dass sie stark mit der formalen Qualität verknüpft sind (*formal-rhetorical part*).

2. Ziele und Fragestellungen

Ziel der Studie war, die inhaltliche und formale Qualität mathematischer Argumentationen und Beweise von Studienanfängerinnen und Studienanfängern systematisch zu untersuchen. Dabei sind folgende Forschungsfragen zentral: (1) Welche inhaltlichen und formalen Schwierigkeiten haben Studienanfänger(innen) bei der Konstruktion mathematischer Argumentationen und Beweisen? (2) Bilden die Qualitätsindikatoren mathematischer Argumentationen und Beweise ein ein-dimensionales Konstrukt oder beschreibt ein zweidimensionales Modell mit einer inhaltlichen und einer formalen Komponente die vorgefundenen Daten besser?

3. Design

Es wurde ein querschnittliches Design mit einem Test zur mathematischen Beweis- und Argumentationskompetenz in der Teilbarkeitslehre (Reichersdorfer, Vogel, Fischer, Kollar, Reiss & Ufer, 2012) gewählt. 159 Studienanfänger(innen) der Studiengänge Bachelor Mathematik, Wirtschaftsmathematik und gymnasiales Lehramt (72 weiblich, $M_{\text{Alter}} = 19.67$ Jahre, $SD_{\text{Alter}} = 3.18$) nahmen im Rahmen eines freiwilligen Brückenkurses an der Erhebung teil. Die schriftlichen Studierendenlösungen wurden sowohl auf ihre inhaltliche als auch formale Qualität hin kodiert. Die inhaltliche Qualität wurde anhand einer vierstufigen Skala beurteilt. Zur Analyse der formalen Qualität wurde je eine ordinalskalierte Variable zur korrekten Darstellung von Implikationen und Äquivalenzen, zur Darstellung von Teilbarkeitsrelationen, zur Kennzeichnung von Definitionen, zur Verwendung von Variablen sowie Quantifizierungen entwickelt. Die Lösungen wurden von zwei unabhängigen Ratern kodiert und es konnte über alle Variablen hinweg eine gute Interrater-Reliabilität erreicht werden. Zur Beantwortung der zweiten Fragestellung wurde eine explorative Faktorenanalyse durchgeführt, wobei die hierarchische Struktur der Daten (mehrere Items pro Schüler) und die Verteilung der Qualitätsindikatoren (robuste Maximum-Likelihood-Schätzer) berücksichtigt wurden.

4. Ergebnisse

Die Ergebnisse weisen darauf hin, dass insbesondere das Finden längerer Schlussketten Probleme bereitet. Außerdem können Resultate bisheriger Studien gestützt werden (vgl. Reichersdorfer et al., 2012): Das Widerlegen mathematischer Aussagen stellt im Vergleich zu technischen Beweisen, komplexen Beweisen und dem Identifizieren und Beweisen wahrer Aussagen geringere Herausforderungen an die Studienanfänger(innen). Definitionen wurden insgesamt am seltensten symbolisch gekennzeichnet, während Variablen sehr häufig Verwendung fanden. Der Verzicht auf formale Notationen wurde für den entsprechenden formalen Indikator als fehlender Wert kodiert und hatte, soweit nicht zwingend erforderlich, keine negativen Auswirkungen für die Bewertung der formalen Qualität. Ergebnisse zu den formalen Qualitätsindikatoren zeigen auf, dass die Darstellung von Definitionen und die Verwendung von Quantoren am meisten von Fehlern behaftet war. In Bezug auf die zweite Forschungsfrage zeigte sich, dass das zwei-dimensionale Modell dem ein-dimensionalen Modell signifikant überlegen ist. Die beiden Faktoren korrelierten mäßig und positiv. Auf dem ersten Faktor laden neben der inhaltlichen Qualität die formalen Qualitätsindikatoren „Darstellung der Teilbarkeitsrelation“ und „Darstellung von Implikationen/Äquivalenzen“. Der zweite Faktor war von den formalen Qualitätsindikatoren zur „Verwendung von Variablen“, zur „Verwendung von Quantoren“ und zur „Darstellung von Definitionen“ geprägt.

4. Diskussion und Implikationen

Zusammenfassend repliziert die berichtete Studie zunächst die Ergebnisse bisheriger Studien: Sowohl das Finden einer Kette logischer Schlüsse als auch das Kommunizieren dieser Schlüsse mit formaler Präzision stellt für Studierende eine substantielle Hürde dar (u.a., Epp, 2003; Selden & Selden, 2009; 2011). Unseres Wissens ist diese Studie der erste Versuch, Zusammenhänge zwischen inhaltlichen und formalen Qualitätsindikatoren systematisch zu betrachten. Die Ergebnisse der explorativen Faktorenanalyse stützen zum einen die These, dass bestimmte formale Indikatoren (wie die Darstellung von Implikationen und Teilbarkeitsrelationen) eng mit der inhaltlichen Qualität verknüpft sind, was möglicherweise darauf zurückgeführt werden kann, dass diese formalen Aspekte Relationen zwischen mathematischen Objekten (Zahlen, Aussagen und Argumenten) beschreiben. Andererseits wird die Behauptung gestützt, dass gewisse formale Aspekte wie die Verwendung von Quantoren, Variablen und Definitionen weitgehend unabhängig von der inhaltlichen Qualität sind. Diese Indikatoren haben gemeinsam, dass sie zur Einführung und Beschreibung mathematischer Objekte verwendet werden. Die Ergebnisse legen also zur Thematisierung mathematischer Symbole zwei Strategien nahe: Einerseits können bestimmte formale Aspekte anscheinend relativ unabhängig vom konkreten

Inhalt betrachtet werden. Bei Aspekten, die enger mit der Bewältigung inhaltlicher Anforderungen verwoben sind, scheint es hingegen sinnvoll, sie im Kontext konkreter Beweisversuche zu diskutieren.

Literatur

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 7/8.*

Epp, S. S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly, 110* (10), 886-899.

Healy, L. & Hoyles, C. (1998). *Justifying and Proving in School Mathematics: Technical Report on the Nationwide Survey*. London: Institute of Education.

Heublein, U. (2014). Student Drop-out from German Higher Education Institutions. *European Journal of Education 4,* 497-513.

Griffiths, P.A. (2000). Mathematics at the Turn of the Millennium. *The American Mathematical Monthly, 107*(1), 1-14.

Koedinger, K. R. (1998). Conjecturing and argumentation in high school geometry students. In Lehrer, R. and Chazan, D. (Eds.), *New Directions in the Teaching and Learning of Geometry*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lai, Y. & Weber, K. (2014). Factors mathematicians profess to consider when presenting pedagogical proofs. *Educational Studies in Mathematics, 85,* 93-108.

Rach, S. (2014). Charakteristika von Lehr-Lern-Prozessen im Mathematikstudium: Bedingungsfaktoren für den Studienerfolg im ersten Semester. Münster: Waxmann.

Reichersdorfer, E., Vogel, F., Fischer, F., Kollar, I., Reiss, K., & Ufer, S. (2012). Different collaborative learning settings to foster mathematical argumentation skills. In T. Tso (Ed.): *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, 345-352.

Schwarz, B. B., Hershkowitz, R., & Prusak, N. (2010). Argumentation and mathematics. In K. Littleton & C. Howe (Eds.), Educational Dialogues: Understanding and Promoting Productive Interaction. (S. 103-127). London, UK: Taylor & Francis.

Selden, J., & Selden, A. (2009). Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students' abilities. In M. Blanton, D. Stylianou, & E. Knuth (Eds.), *The learning and teaching of proof across the grades* (S. 339-354). London: Taylor & Francis.

Selden, A., & Selden, J. (2011). Mathematical and non-mathematical university students' proving difficulties. In L. R. Wiest & T. D. Lamberg (Eds.), *Proceedings of the 33rd annual conference of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 675–683). Reno, NV.

Daniel SOMMERHOFF, Stefan UFER, LMU München; Ingo KOLLAR, Universität Augsburg

Validieren von Beweisen – Probleme von Studierenden und die Rolle von mathematischen und übergreifenden Voraussetzungen

Argumentieren und Beweisen sind essentielle Charakteristika der Mathematik (Hanna & Jahnke, 1993). Entsprechend finden sich diese in den KMK-Kompetenzen als *Mathematisch Argumentieren*, sowie als Schwerpunkt innerhalb der universitären Ausbildung wieder. An der Universität stellen sich Studierenden im Kontext von Beweisen zwei wesentliche Anforderungen, das *Konstruieren von Beweisen*, sowie das *Validieren von Beweisen*, d.h. das Einschätzen potentieller Beweise hinsichtlich ihrer Gültigkeit. Letzteres bildet den Fokus der vorgestellten Studie, welche inhaltliche Anforderungen beim Validieren von Beweisen, sowie den Einfluss von individuellen kognitiven Voraussetzungen auf die Kompetenz Beweise zu Validieren untersucht. Entsprechende Ergebnisse sind hilfreich als Orientierung, um effektive Möglichkeiten zur Förderung von Studierenden beim Validieren von Beweisen zu schaffen.

1. Theoretisches Framework

Obwohl die Konstruktion von Beweisen weitgehend im Mittelpunkt der Mathematikdidaktischen Forschung steht (vgl. Sommerhoff, Ufer & Kollar, 2015), rückt das Validieren zunehmend in den Fokus (bspw. Alcock & Weber, 2005; Weber, 2008). Studien zeigen dabei immer wieder international und altersübergreifend Schwierigkeiten (Selden & Selden, 2003; Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009). Gerade im universitären Bereich liegen jedoch kaum systematische Erkenntnisse zu den inhaltlichen Ursachen dieser Probleme vor. Diesen Bereich strukturieren Heinze & Reiss (2003) mit dem Begriff *Methodenwissen*, jenem Wissen über soziokulturell gesetzte Akzeptanzkriterien von mathematischen Beweisen, welches zum Validieren von Beweisen benötigt wird. Heinze & Reiss (2003) heben drei Kriterien (*Beweisschema*, *Beweisstruktur* & *logische Kette*) hervor, welche jeweils spezifische Anforderungen für das Validieren von Beweisen umfassen.

Offen lässt die bisherige Mathematikdidaktische Forschung auch, welche individuellen kognitiven Voraussetzungen Studierende für das Validieren von Beweisen benötigen. Für das Konstruieren von Beweisen gibt es bereits verschiedenen Belege (für eine Überblick siehe Reiss & Ufer, 2009), dass eine konzeptuelle und prozedurale mathematische Wissensbasis, mathematisch-strategisches Wissen (Weber, 2001), Problemlösekompetenz, metakognitives Bewusstsein sowie Schlussfolgerndes Denken einen positiven Beitrag leisten sollten. Ob, und in welchem Umfang diese sechs kognitiven Voraussetzungen aber Kompetenzen zum Validieren von Beweisen bedingen ist weitgehend unklar.

2. Fragestellungen

Die vorliegende Studie verfolgt zwei wesentliche Fragen: Einerseits soll geklärt werden, wie erfolgreich Studierende beim Validieren von Beweisen sind und ob sich Unterschiede hinsichtlich der drei inhaltlichen Anforderungsbereiche zeigen. Zum Anderen soll empirisch erfasst werden, wie groß der Einfluss der verschiedenen kognitiven Voraussetzungen auf die Kompetenz zum Validieren von Beweisen ist.

3. Methodik

Die quasi-experimentellen Studie umfasst 66 Studierende (24 m, 41 w, 1 NA; M_{alter} = 21,19) der Mathematik (Bachelor (Wirtschafts-)Mathematik sowie Lehramt Gymnasium) des 1. und 3. Semesters, welche an einem freiwilligen Kurs in den Semesterferien zu mathematischem Beweisen teilnahmen. Bei der Haupterhebung wurden die Studierenden gebeten, Beweise auf ihre Gültigkeit hin zu validieren und es wurden ihre kognitiven Voraussetzungen in sechs Bereichen (*Mathematische Wissensbasis (konzeptuell, prozedural), mathematisch-strategisches Wissen, Problemlösen, Metakognitives Bewusstsein* und *Schlussfolgerndes Denken*) erfasst. Nach drei Tagen wurden die Studierenden zur Validierung erneut gebeten Beweise zu einer anderen Aussage einzuschätzen. Dabei wurde jeweils eine Aussage aus dem Bereich der Teilbarkeitslehre und vier potentielle, studentische Beweise präsentiert, welche die Teilnehmer validieren sollten. Jeweils einer der Beweise war korrekt, die Anderen enthielten je einen Fehler in einer der inhaltlichen Anforderungsbereiche. Die Reliabilität der verwendeten Skalen war ausreichend (α_{Mean} = 0,70), nur für das mathematisch-strategische Wissen ergab sich ein etwas niedrigerer Wert. Die Interraterrealiabilität für die Kodierung der offenen Aufgaben war gut (κ_{Mean} = 0,93).

4. Ergebnisse

Mit knapp 60% korrekten Antworten war die Leistung der Studierenden beim Validieren der Beweise eher moderat. Beim Vergleich der Lösungsraten der verschiedenen potentiellen Beweise zeigen sich insgesamt signifikante sowie, bis auf den Vergleich von *korrekter Beweis* und *Beweisschema*, paarweise signifikante Unterschiede zwischen den potentiellen Beweisen (vgl. Abbildung 1, links, dunkelgrau). Für Aussage 2 aus der Validierungserhebung zeigen sich analoge Muster (Abbildung 1, links, hellgrau). Die zusätzlich offen abgefragten Begründungen zu den Einschätzungen zeigen, dass die Studierenden Probleme haben ihre Einschätzungen sinnvoll zu begründen. Nur bei knapp einem Viertel der inkorrekten Beweise wurde eine inhaltlich auf den Fehler bezogene Begründung gegeben (vgl. Abbildung 1, rechts).

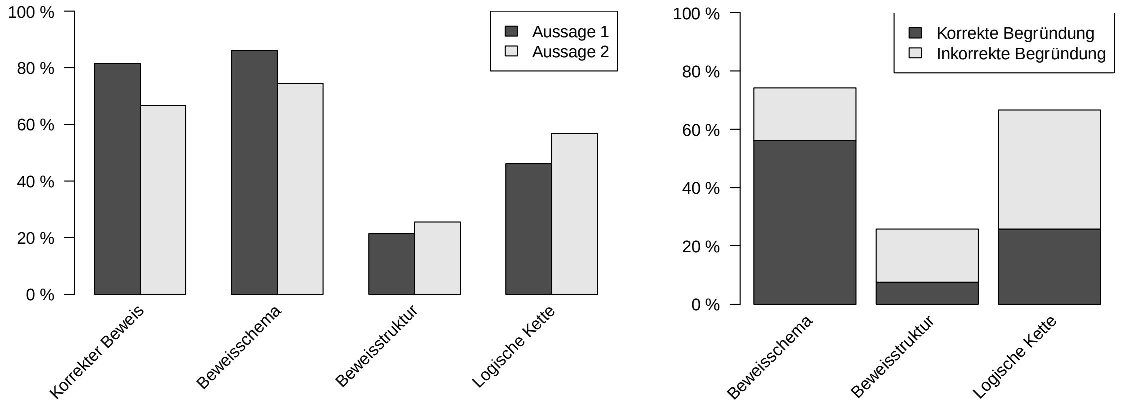


Abb. 1: Anteil korrekter Einschätzungen (li.) bzw. Begründungen (re.) der potentiellen Beweise (li.)

Zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage wurde ein generalisiertes lineares Mischmodell (GLMM) verwendet, welches die Inklusion dichotomer Variablen sowie die gleichzeitige statistische Bearbeitung mehrerer Items der gleichen Person ermöglicht. Als unabhängige Variablen wurden die sechs kognitiven Voraussetzungen sowie die vier präsentierten potentiellen Beweise verwendet. Von den kognitiven Voraussetzungen zeigten nur die konzeptuelle mathematische Wissensbasis sowie das metakognitive Bewusstsein signifikante positive Zusammenhänge mit der korrekten Validierung von Beweisen. Insgesamt konnten die Variablen einen substantiellen Anteil der Varianz im Validieren von Beweisen aufklären.

5. Diskussion

Die durchgeführte quasi-experimentelle Studie repliziert zunächst Ergebnisse, dass Studierende Probleme beim Validieren von Beweisen haben (Alcock & Weber, 2005), empirische Beweisschemata zwar weitestgehend ablehnen (Pfeiffer, 2011) jedoch die Struktur von Beweisen kaum korrekt evaluieren können (Selden & Selden, 2003). Darüber hinaus zeigt sie, dass Studierende selten Begründungen Ihrer Einschätzungen liefern, welche die inhaltlichen Fehler der potentiellen Beweise klar identifizieren.

Von den individuellen kognitiven Voraussetzungen konnte nur für konzeptuelles mathematisches Wissen sowie metakognitives Bewusstsein ein signifikanter Einfluss auf das Validieren von Beweisen gezeigt werden. Die anderen, insbesondere sämtliche generativen Voraussetzungen wie Problemlösen, zeigten in unserer Studie keinen signifikanten Zusammenhang mit der korrekten Evaluation von Beweisen. Weiterhin hatten domänenspezifische und -generelle Voraussetzungen in etwa den gleichen Einfluss.

Die Ergebnisse der Studie belegen weiterhin, dass Studierende nicht nur beim Konstruieren sondern auch beim Validieren von Beweisen Unterstützung benötigen. Die Ergebnisse der GLMM-Analyse deuten an, dass für das Validieren weniger komplexe kognitive Voraussetzungen benötigt werden als für das Konstruieren von Beweisen. Sollte sich weiterhin zeigen, dass Kompetenzen zum Validieren von Beweisen nicht nur positiv mit Kompetenzen zum Konstruieren von Beweisen zusammenhängt (Ufer et al., 2009), sondern sogar eine wesentliche (kausale) Voraussetzung darstellt, so wäre eine „Validieren vor Konstruieren“-Strategie eine interessante Option am Studienbeginn.

Literatur

Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(2), 125–134.

Hanna, G., & Jahnke, H. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 421–438.

Heinze, A., & Reiss, K. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. In M. A. Mariotti (Ed.), *International Newsletter of Proof Competence* (Vol. 4).

Pfeiffer, K. (2011). *Features and purposes of mathematical proofs in the view of novice students: Observations from proof validation and evaluation performances*. National University of Ireland, Galway.

Reiss, K., & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus?. *Jahresbericht Der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV)*, *111*(4), 155–177.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(1), pp. 4–36.

Sommerhoff, D., Ufer, S., & Kollar, I. (2015). Research on mathematical argumentation: A descriptive review of PME proceedings. In K. Beswick, T. Muir, & J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 193–200). Hobart, Australia: PME.

Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S., & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht: Die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *30*(1), 30–54.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 101–119.

Weber, K. (2008). How Mathematicians Determine If an Argument Is a Valid Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 431–459.

Moderierte Sektion:

Design Research in der Mathematikdidaktik

Mareike BEST, Angelika BIKNER-AHSBAHS, Universität Bremen

„From past to future“ – wie der Vorunterricht das Lernen beschränkt.

Die Creative Unit „Fachbezogene Bildungsprozesse in Transformation“ (FaBiT)[1] ist ein interdisziplinärer Verbund von FachdidaktikerInnen, der Wandel im Fachunterricht mittels Design-Based Research untersucht. Das Mathematikprojekt (vgl. Bikner-Ahsbahs, Thode & Best, 2015) in diesem Verbund erforscht, wie Wandel des Funktionskonzepts in der Einführungsphase der Oberstufe (E-Phase) gestaltet werden kann. Methodologische Basis für dieses Projekt ist das Bremer Modell zum Design-Based Research, eine Variante des Dortmunder Modells (Prediger et al., 2012). Das Bremer Modell greift fünf Kernbereiche auf (Peters & Róviro, 2016). Ausgangspunkt für den Designprozess ist ein *Handlungsdruck*, dem eine Klärung des *Designkontextes* folgt, d.h. der Lernbedingungen und des entsprechenden Fachdiskurses. Die Designzyklen bestehen aus drei Schritten: Restrukturierung des *Designgegenstandes*, zu dem der Lerngegenstand gehört und der Gegenstand, an dem gelernt wird; das ist die Basis für eine Revision der *Designkonzeption* und die Entwicklung von Hypothesen, Designprinzipien oder auch hypothetischen Lernpfaden, die in der *Designerprobung* empirisch geprüft werden. Wir gehen davon aus, dass *Theoriekonstruktion* in jedem der Schritte mitgedacht wird. Nach einer gewissen Sättigung sollte es gelingen, einen Theoriebaustein empirisch begründet zu extrahieren und ein typisches Referenzdesign zu definieren. Dieser Prozess wird in ein System von Institutionsschichten eingebettet, die den Wandel prinzipiell beschränken und deshalb mitgedacht werden müssen. Institutionelle Beschränkungen können mithilfe von Praxeologien (Bosch & Gascón 2014) beschrieben werden. Diese sind gekennzeichnet durch typische *Aufgaben* und *Techniken* der Bearbeitung der Aufgaben sowie durch diskursive Bestandteile: die *Technologie* begründet die Technik und die *Theorie* ist die zugrunde liegende Philosophie der Technologie.

Lernende kommen mit einem äußerst fragmentierten Funktionsverständnis in die E-Phase. Entwickelt werden soll ein Design, das diese Fragmentierung überwindet: Angestrebt wird, den *Umgang mit Funktionen zu flexibilisieren.* Aufgrund der sehr heterogenen Schülerschaft sind diese Prozesse jedoch kaum vorhersehbar. Deshalb wird in dem Designprozess die Frage untersucht, welche Bedingungen diesen Prozess fördern oder behindern. Flexibilität meint: „Ability to shift flexibly across different perspectives“ (Ellis 2011, S. 226). Als Perspektiven betrachten wir Diagramme, Parameter und Variablen, Funktionen und ihre Aspekte, Kontexte. Potenzial für eine solche Flexibilisierung enthalten Formeln für Flächeninhalte oder Volumina, etwa das Kegelvolumen. Letzteres beschreibt in Abhängigkeit von der Höhe bei konstantem Radius einen linearen Zusammenhang. In diesem Fall ist der Radius ein Parameter und die Höhe die Funktionsvariable. Ist der Radius die Variable und die Höhe ein Parameter, dann wird der Zusammenhang quadratisch. Zugleich ändern sich die Variablenaspekte: Bereichsaspekt und Einzelaspekt tauschen ihre Rollen im Term.

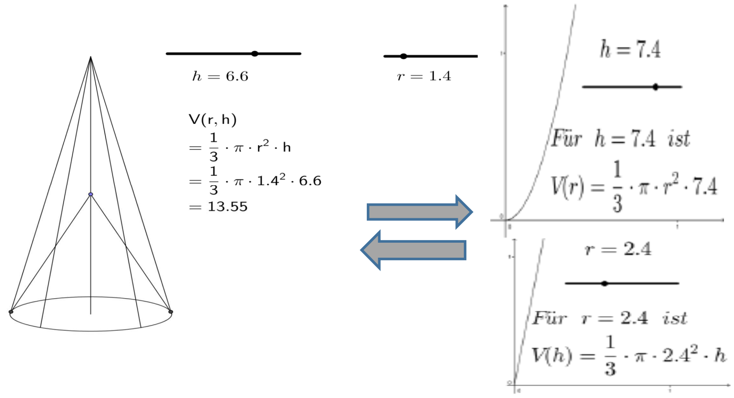
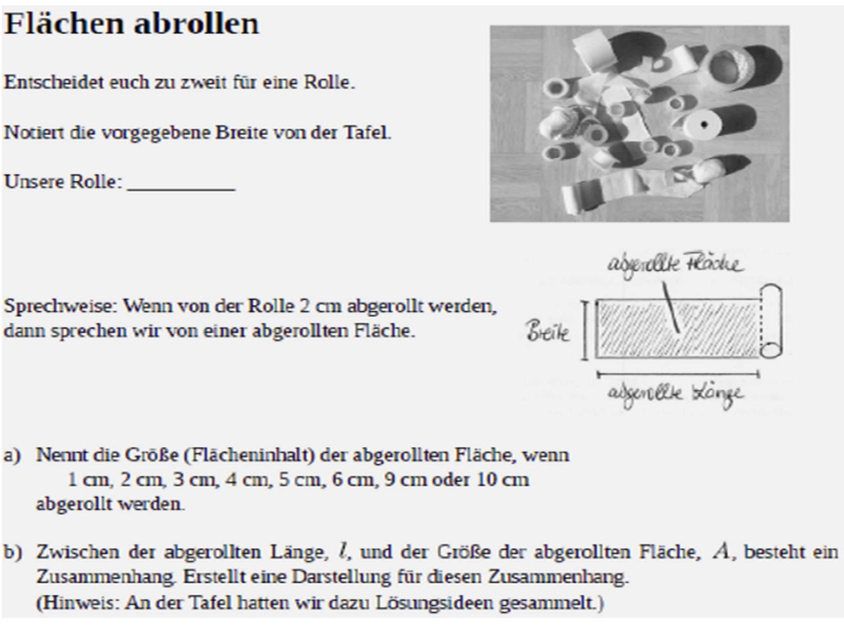


Abb.1: Formel und Funktionen

Als Einführungsdesign erwies sich die Formel des Kegelvolumens in den Designexperimenten als viel zu komplex. Deshalb wurde die Flächeninhaltsberechnung von Rechtecken für das Klassenexperiment in der E-Phase verwendet. Gemäß dem Conceptual blending (Fauconnier & Turner 2003) wurden Role-ups wie z.B. Kleberollen als materielle Repräsentationen genutzt, um variable Flächeninhalte zu illustrieren und einen flexiblen Gebrauch von Funktionen zu praktizieren. Sie dienten als generische, reale Modelle für die funktionale Interpretation der Formel zum Flächeninhalt.

Designerprobung



Flächen abrollen

Entscheidet euch zu zweit für eine Rolle.

Notiert die vorgegebene Breite von der Tafel.

Unsere Rolle: __________

Sprechweise: Wenn von der Rolle 2 cm abgerollt werden, dann sprechen wir von einer abgerollten Fläche.

a) Nennt die Größe (Flächeninhalt) der abgerollten Fläche, wenn 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 9 cm oder 10 cm abgerollt werden.

b) Zwischen der abgerollten Länge, l, und der Größe der abgerollten Fläche, A, besteht ein Zusammenhang. Erstellt eine Darstellung für diesen Zusammenhang. (Hinweis: An der Tafel hatten wir dazu Lösungsideen gesammelt.)

Abb. 2: Arbeitsblatt

Das obige Arbeitsblatt wurde zu Beginn der E-Phase eingesetzt. Eine gemeinsame Sammelphase an der Tafel stellte mögliche Formeln und Darstellungsformen (Wertetabelle, Graph, Skizzen, Formeln) bereit. Die anschließende schriftliche Bearbeitung führte zu folgenden Ergebnissen.

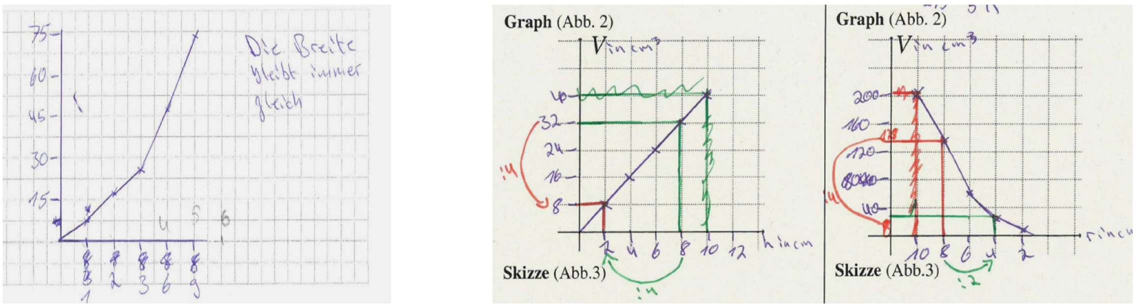


Abb. 3 Zur Rekonstruktion von Techniken

Die *Aufgabe* „Graphen darstellen“ illustriert, welche *Techniken* Lernende aus der Sekundarstufe mitbringen: Die äquidistante Skalierung wird zunächst konstant und dann nicht äquidistant beschriftet. Punkte werden geradlinig verbunden, auch bei quadratischen Zusammenhängen. Konventionen in der Verwendung von Koordinatensystemen werden nicht befolgt. Die Zahlen werden wie in der Aufgabe vorgegeben übergetragen, zunächst nur die gewählte Zahl 8 (cm), dann die vorgegebenen in der gegebenen Reihenfolge. Es scheint als gäbe es folgende Technologie/Theorie: *Was ich tun soll, zeigt die Lehrkraft mit den angegebenen Zahlen an, deshalb kann man die Zahlen einfach übertragen (im Sine von woanders hinschreiben).*

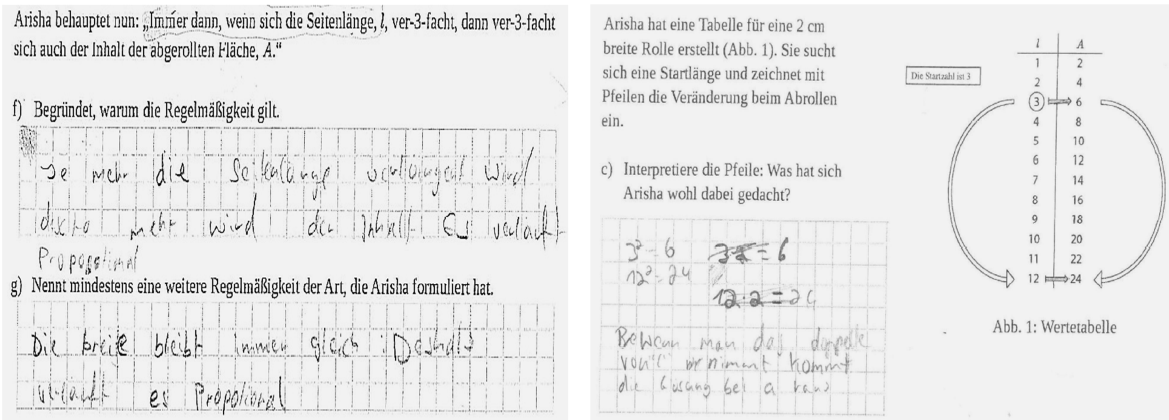


Abb. 4 Zur Rekonstruktion von Technologien

Der gleiche Schüler bearbeitet die obigen Aufgaben, die den Umgang mit Begründungen und Regelmäßigkeiten als Grundlage für die *Technologie* und die *Theorie* prüft. *Je mehr … desto mehr* … wird mit der Eigenschaft *proportional* verbunden. Die Aufgabe g) wird nicht beantwortet, d.h. ähnliche Regelmäßigkeiten werden hier nicht angegeben. Stattdessen wird ergänzt, dass die Breite konstant bleibt, ein wichtiger Aspekt für die hier vorliegende Proportionalität, aber keine Antwort auf die Aufgabe. Der gleiche Schüler lässt die Interpretation der Kovariation (Abb.4, rechts) aus, beschreibt nur die Pfeile zur Zuordnung als *Ablesen der Wertetabelle*. Er aktiviert also gewohnte, nicht zur Frage passende Deutungsmuster.

Die Lösungen der Aufgaben legen die Vermutung nahe, dass dieser Schüler singuläre, gewohnte Bestandteile aktiviert und bearbeitet, zuweilen auch unpassend. Begründungen und Muster scheinen sich der Maxime „ein Bestandteil genügt“ unterzuordnen und nicht vollumfänglich zur Technologie zu gehören. Wir erhalten individuelle Spuren von Praxeologien (preaxeologische Equipments), die vermischt mit individuellen Erfahrungen und Sichtweisen als Gewohnheit aus der Sekundarstufe 1 mitgebracht werden. Dieser Befund passt zu einer Rekonstruktion aus den Zuliefererschulen: Die betreffende Lehrerin unterrichtet nach der Maxime, *wenn du Konzepte lehrst, dann lehre seine Teile und vereinfache so weit wie möglich.* Es entstehen sich spiegelnde *praxeologische Equipments* von Schüler und Lehrkraft, die den angelegten Wandel in der E-Phase beschränken.

Wenn Flexibilisierung bei Lernenden erzielt werden soll, dann müssen neue Lehrkraft und Lernende ihre praxeologischen Hindernisse überwinden und eine gemeinsame, neue Praxeologie aufbauen.

[1] Creative Unit (www.uni-bremen.de/cu-fabit), gefördert von der Exzellenzinititive des BMBF

Literatur

Bikner-Ahsbahs, A., Thode, D. & Best, M. (2015). Funktionsverständnis im Übergang zur Sekundarstufe II. *Beiträge für den Mathematikunterricht*, Vortrag auf der Jahrestagung 2015 in Basel, Schweiz.

Bosch, M. & Gacòn, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbahs, und S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 67-83), Advances in Mathematics Education. New York: Springer.

Ellis, A. (2011). Algebra in the Middle-School: Developing Functional Relationships Through Quantitative Reasoning. In Jinfa Cai und Eric Knuth (Eds.), *Early Algebraization. A Dialogue from multiple perspectives* (pp. 215—238), Advances in Mathematic Education. New York: Springer

Fauconnier, G. & Tuner, M. (2003). Conceptual Blending, Form and Meaning. *Recherches en communication* Nr. 19 (n.p.). Retrieved 01.07.2015 from: http://tecfa.unige.ch/tecfa/maltt/cofor-1/textes/Fauconnier-Turner03.pdf.

Peters, M. & Róviro, B. (2016, im Druck). Introduction and Methodology. In Sabine Doff und Regine Komoss (Hrsg.). How *does change happen? Wandel im Fachunterricht analysieren und gestalten*. NewYork, Berlin, Heidelberg: Springer.

Prediger, S. , Link., M., Hinz, R., Hussmann, & S., Ralle, B. & Thiele, J. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen. *MNU* 65/8 (pp. 452–457). Neuss: Verlag Klaus Seeberger.

Stephanie WESKAMP, Essen

Design einer Lernumgebung für differenzierenden Mathematikunterricht der Grundschule und Erforschung diesbzgl. Bearbeitungsprozesse

1. Design Research in der Mathematikdidaktik

In den vergangenen Jahren sind in der Literatur verschiedene Forschungsansätze zur Verknüpfung von Theorie und Praxis diskutiert worden (vgl. z. B. Wittmann 1992; TDBRC 2003; Prediger et al. 2012). Wittmann (1992) beschreibt die Erforschung und Entwicklung von Lernangeboten zum Lehren und Lernen von Mathematik zur Verbesserung des Unterrichts als zentrales Aufgabenfeld der Mathematikdidaktik (vgl. ebd., S. 56). In diesem Zusammenhang werden substanzielle Lernumgebungen als charakteristische Form der empirischen Unterrichtsforschung genannt (vgl. Wittmann 1998, S. 337 ff.). Dadurch werden zum einen Erkenntnisse über Lehr- und Lernprozesse im Rahmen der eingesetzten Lernumgebungen gewonnen, zum anderen können diese selbst weiterentwickelt werden, um diesbzgl. Unterrichtsprozesse noch wirksamer gestalten zu können (vgl. ebd., S. 339). Die Praxisorientierung meint dabei keinesfalls eine Reduzierung auf die unmittelbare Anwendbarkeit, sondern die Berücksichtigung des Spannungsfelds Theorie-Praxis, d. h. die Konstruktion und Erforschung soll, im Sinne der Mathematikdidaktik als „Design Science“, mit entsprechenden Theoriegerüsten erfolgen (vgl. Wittmann 1992, S. 62).

Neben dem Begriff „Design Science“ existieren zur Beschreibung der Verknüpfung von Forschung und Design von Lernangeboten international verschiedene konzeptionelle und begriffliche Ausschärfungen, die z. T. synonym verwendet werden (z. B. Design Experiments, Design Research, Design-Based Research, Research-Based Design). Obwohl die Ansätze unterschiedliche Schwerpunktsetzungen aufweisen und nicht von *dem* Ansatz gesprochen werden kann, wird von einer Gruppe verwandter Forschungsansätze ausgegangen (vgl. Link 2012, S. 101 f.; Prediger et al. 2012, S. 452). Als gemeinsame zentrale Merkmale werden Interventionen in realen Situationen, ein iterativer Forschungsprozess, Nutzungs- und Prozessorientierung bzgl. der Interventionen sowie Theorieorientierung (theoriebasiert und theorieentwickelnd) genannt (vgl. van den Akker et al. 2006, S. 3). Die Charakterisierung durch diese Merkmale ist nur sehr grob, sie erlauben aber eine erste Einordnung bzw. Abgrenzung von Forschungsprojekten (vgl. Link 2012, S. 102). Der Ansatz des vorgestellten Projekts, im Sinne eines Design-Based-Research-Ansatzes, wird im Folgenden näher dargestellt.

2. Design-Based-Research-Ansatz im Rahmen des Forschungsprojekts

Zielsetzungen des Projekts sind zum einen die theoriegeleitete Entwicklung substanzieller Lernumgebungen für heterogene Lerngruppen im Mathematikunterricht der Grundschule, zum anderen die genauso bedeutsame (Weiter-)Entwicklung von Theorien bzgl. des Lehrens und Lernens von Mathematik (vgl. hierzu Design Science: Wittmann 1992; Design-Based Research: TDBRC 2003). Diesbzgl. werden Arbeitsprozesse von Grundschulkindern (Klasse 4) bei verschiedenen Lernumgebungen charakterisiert sowie Merkmale von Lernumgebungen zum Umgang mit Heterogenität herausgearbeitet. Abbildung 1 (vgl. TDBRC 2003; Juuti & Lavonen 2006; Prediger et al. 2012) zeigt den iterativen Forschungsprozess.

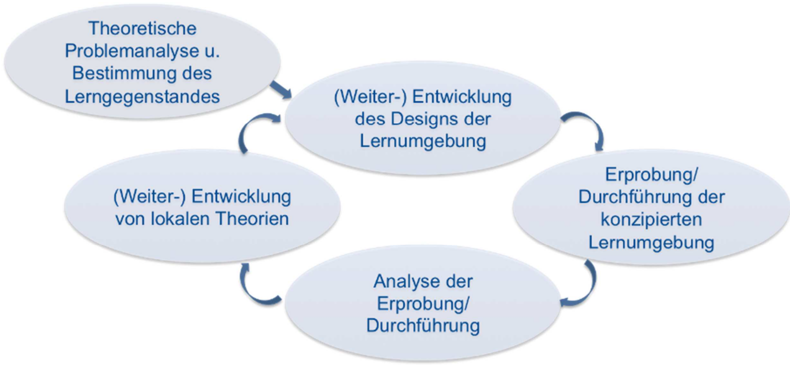


Abbildung 1: Zyklus zur Entwicklung und Erforschung von Lernumgebungen

Die theoretische Problemanalyse greift die Anforderungen des Umgangs mit Heterogenität, insbesondere hinsichtlich unterschiedlicher Leistungsniveaus im Mathematikunterricht der Grundschule mit Blick auf den mathematischen Gegenstand auf. Diesbzgl. bietet die natürliche Differenzierung, realisiert durch substanzielle Lernumgebungen, vielfältige Möglichkeiten (vgl. Krauthausen & Scherer 2014). Daher wurden hermeneutisch erste Anforderungen an Lernumgebungen für heterogene Lerngruppen herausgearbeitet und theoretische Analysen zum Lerngegenstand Pascalsches Dreieck (PD) durchgeführt. Auf dieser Basis wurde die Lernumgebung PD für das Projekt „Mathe-Spürnasen" an der Universität Duisburg-Essen entwickelt. Die Erprobung der Lernumgebung erfolgte im Rahmen von Experimentiervormittagen in unterrichtsnahen Lernsituationen. Die Lernumgebung wurde über vier Zyklen mit acht vierten Klassen (n=154) durchgeführt und videographiert. Ferner liegen aus den letzten zwei Zyklen ausgewählte Einzelinterviews (n=28) vor, um die Arbeitsprozesse detailliert analysieren zu können. Bzgl. der Analyse der Video- und Schülerdokumente erfolgt die Charakterisierung der Arbeitsprozesse, u. a. durch Identifizieren der verschiedenen Anforderungsbereiche (AB; vgl. KMK 2005). Die letzte Phase umfasst die (Weiter-)Entwicklung lokaler Theorien (Prediger et al. 2012, S. 455), die ggf. an weiteren Lerngegenständen überprüft werden.

3. Lernumgebung Pascalsches Dreieck

Die Lernumgebungen im Projekt „Mathe-Spürnasen" ermöglichen Lernenden, Themen unter vielfältigen Perspektiven (Einführung und Vertiefungen) zu erforschen (vgl. Baltes et al. 2014). Die Lernumgebung PD besteht aus Einführung Herleitung des PD und drei Vertiefungen Galtonbrett, Wege in Mannheim und Zahlenmuster (vgl. Weskamp 2015). Die Einführung umfasst die Konstruktion des PD mittels kombinatorischer Aufgabe, wobei aus *n* verschiedenfarbigen Murmeln eine bestimmte Anzahl *k* gezogen wird (Kombination o. W.; vgl. Kütting & Sauer 2011). Lernende erstellen jeweilige Figurenmengen und bestimmen deren Mächtigkeit. Das Übertragen der Möglichkeiten auf separate Karten und deren Umstrukturierung soll das Begründen der vollständigen Figurenmenge ermöglichen. Durch Notieren der jeweiligen Anzahl in einer Tabelle entsteht das PD, das mittels historischer Abbildung umstrukturiert wird, sodass Lernende die additive Bildungsregel entdecken und das arithmetische Dreieck fortsetzen können.

4. Exemplarische Veränderungen im Design-Based-Research-Prozess

Um möglichst das gesamte Spektrum an Bearbeitungsniveaus herauszufordern, wurde die Umsetzung der Lernumgebung hinsichtlich unterschiedlicher Facetten, u. a. hinsichtlich der Arbeitsaufträge, der Lehrerinterventionen oder des Materialeinsatzes, weiterentwickelt. Dabei zeigten sich z. T. komplexe Wirkungsweisen. Im Speziellen wurde bei der Einführung bzgl. des Materialeinsatzes das Arbeitsblatt verändert. Es zeigte sich, dass die Struktur durch Angabe der Anzahl an Murmeln *n* und *k* zwar notwendig ist, um das PD zu konstruieren, jedoch führte eine Offenheit bzgl. der Darstellung der Figurenelemente zu einem größeren Bearbeitungsspektrum auf verschiedenen Repräsentationsebenen. Bzgl. der Auslotung der fachlichen Substanz konnte das Begründen der vollständigen Figurenmenge (AB III) in Schüleräußerungen zunächst nicht identifiziert werden. Folglich wurde dies durch Weiterentwicklung der Lehrerinterventionen herausgefordert, indem Lernende die Kombinationen auf separate Karten übertragen und die Vollständigkeit begründen sollten (vgl. Höveler 2014). Über Strukturierung durch Elementfixierung (ebd., S. 199 ff.) begründete Jana im Interview:

J Wenn man jetzt zuerst <u>blau</u> hat, dann haben wir blau orange, blau rot und blau weiß (*legt die Karten „blau/orange", „blau/rot", „blau/weiß" waagerecht in einer Reihe*) genommen, weil das halt die vier Farben waren.

I Mhm.

J Und <u>dann</u> waren wir halt mit blau durch. Dann haben wir die weißen, glaub ich, genommen. Ähm, haben wir weiß mit orange genommen (*legt die Karte „weiß/orange" in zweiter Reihe unter die Karte „blau/orange"*). Ähm, weiß mit rot (*legt die Karte „weiß/rot" in eine Reihe mit der Karte „weiß/orange"*). Und dann haben wir halt wieder alle durch und dann rot und orange (*legt die Karte „rot/orange" in zweiter Reihe an die Karten mit weißer Murmel*).

Die Vollständigkeit wird nicht nur beispielhaft an einer Teilmenge begründet, sondern bereits allgemeiner durch vollständige Strukturierung der gesamten Figurenmenge. Insgesamt zeigen die Analysen ein großes Bearbeitungsspektrum innerhalb eines AB und keine unbedingte Hierarchie der AB (vgl. Weskamp 2015). Perspektivisch sollen verschiedene Aspekte der Bearbeitung noch genauer analysiert sowie Design-Prinzipien für Lernumgebungen formuliert und Folgerungen für deren Einsatz abgeleitet werden.

Literatur

Baltes, U., Rütten, C., Scherer, P. & Weskamp, S. (2014). Mathe-Spürnasen – Grundschulklassen experimentieren an der Universität. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (Bd. 1, S. 121-124). Münster: WTM-Verlag.

Höveler, K. (2014). *Das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme. Eine Untersuchung zu den Strukturierungs- und Zählstrategien von Drittklässlern*. Zugriff am 03.03.2016. https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/33604/1/Hoeveler_ Anzahlbestimmung.pdf

Juuti, K. & Lavonen, J. (2006). Design-Based Research in Science Education: One Step Towards Methodology. *Nordic Studies in Science Education, 2*(2), 54-68.

KMK (Hrsg., 2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich Beschluss vom 15.10.2004*. München: Wolters Kluwer.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2014). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule*. Seelze: Kallmeyer.

Kütting, M. & Sauer, M. J. (2011). *Elementare Stochastik: Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte*. Berlin: Springer.

Link, M. (2012) *Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster. Entwurf, Erprobung und Überarbeitung von Unterrichtsaktivitäten als ein Beispiel für Entwicklungsforschung.* Wiesbaden: Springer.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J. & Ralle, B. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. *MNU 65*(8), 452-457.

TDBRC – The Design-Based Research Collective (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5-8.

Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S. & Nieveen, N. (2006): Introducing educational design research. In J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Hrsg.), *Educational Design Research* (S. 3-7). London: Routledge.

Weskamp, S. (2015). Einsatz von substanziellen Lernumgebungen in heterogenen Lerngruppen im Mathematikunterricht der Grundschule. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (Bd. 2, S. 996-999). Münster: WTM-Verlag.

Wittmann, E. C. (1992). Mathematikdidaktik als „design science“. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *13*(1), 55-70.

Wittmann, E. C. (1998). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerbildung*, *16*(3), 329-342.

Moderierte Sektion:

Diagnostische Testaufgaben (DTA)

Regina BRUDER, Darmstadt, Kathrin WINTER, Flensburg

Diagnostische Testaufgaben – DTA

Unter einer diagnostischen Testaufgabe – kurz DTA – für mathematisches Grundwissen und Grundkönnen (vgl. Bruder et al., 2015) soll eine digitale Aufforderung verstanden werden, die sich auf ein oder mehrere mathematische Stoffelemente bezieht in Verbindung mit einer oder mehreren Handlungen. Sie enthält im Hintergrund operierende Antwortmuster, die im geschlossenen Antwortformat als Distraktoren sichtbar werden und bei offenem Antwortformat computergestützt verarbeitet werden (z. B. mit STACK). In Abhängigkeit von der Komplexität der DTA wird eine elementarisierende Schleife angelegt. Eine DTA umfasst ein fehleranalytisches Feedback sowohl für Lehrende als auch für die Testteilnehmer/innen.

Die hier angesprochenen diagnostischen Testaufgaben werden insbesondere unter dem Aspekt der Einbindung in digitale Diagnose- und Förderprogramme erforscht und entwickelt (vgl. Nitsch & Bruder, 2015). Bereits seit einigen Jahren werden digitale Testaufgaben mit diagnostischem Potential im Rahmen von Mathematik-Online-Self-Assessments eingesetzt. In diesem Falle handelt es sich um Aufgaben mit geschlossenem Antwortformat, die auf Basis der speziell entwickelten Distraktoren und des Testdarstellungsformates eine qualitativ und quantitativ gleichwertige Diagnose des mathematischen Grundwissens und Grundkönnens der getesteten Person ermöglichen (vgl. Winter, 2011). Eine Weiterentwicklung lässt den Einsatz in Open Common Learning-Management-Tools wie ILIAS und moodle zu und mit dem Einsatz von STACK auch die Einbindung offener Antwortformate (vgl. Kallweit et al., 2015).

Durch die Einbindung elementarisierender Schleifen (vgl. Feldt-Caesar, 2015) könnten die Verknüpfungen verschiedener Antwortformate von diagnostischen Testaufgaben in digitalen Systemen sowohl eine individuelle Echtzeitdiagnose als auch -förderung ermöglichen (vgl. Kallweit et al., 2015). Die Projektgruppe DTA arbeitet im Rahmen von Grundlagen- und Entwicklungsforschung an einer fundierten Theorie zur Entwicklung diagnostischer Testaufgaben mit hohem diagnostischen Potential, in unterschiedlichen Antwortformaten und mit der Zielsetzung eines adaptiven Diagnose- und Fördersystems in verschiedenen Bereichen mathematischen Grundwissens und Grundkönnens. In dieser Sektion werden Hintergrundtheorien, Einsatzszenarien mit Beispielen und erste Erfahrungen mit DTAs vorgestellt und diskutiert.

Sektionsvorträge

Schaub, M.: Die DTA unter einem tätigkeitstheoretischen Blickwinkel.

Feldt-Caesar, N.: Konzeptualisierung und Operationalisierung von Mindeststandards – von der Zielformulierung zum digitalen Diagnoseverfahren.

Krusekamp, S., Neugebauer, C.: „Im Bereich der Statistik verfügen Sie nur über geringe Vorkenntnisse." - Hilfreiches Feedback im Rahmen von Online-Self-Assessments (OSAs).

Kallweit, M.: Der Computer als Tutor – technikbasierte Diagnostik mit Freitextaufgaben.

Derr, K., Hübl, R. & Podgayetskaya, T.: Formatives eAssessment in Online-Brückenkursen: Potenziale und Grenzen und die Rolle des Feedback.

Literatur

Bruder, R., Feldt-Caesar, N., Pallack, A., Pinkernell, G. & Wynands, A. (2015): *Mathematisches Grundwissen und Grundkönnen in der Sekundarstufe II.* In: Blum, W. et al. (Hrsg.): Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II. Braunschweig: Schrödel. S. 108-124.

Feldt-Caesar, N. (2015): *Möglichkeiten der Diagnose von Grundwissen und Grundkönnen durch ein adaptiv gestaltetes Testverfahren.* In: Caluori, F. et al.: Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Münster: WTM-Verlag. S. 276-279.

Kallweit, M., Krusekamp, S., Neugebauer, C. & Winter, K. (2015): *Mathematische Online-Self-Assessments zur frühzeitigen Diagnose und Förderung von Grundlagenkenntnissen.* Tagungsband zum Hansekolloquium 2015 in Lübeck, (im Druck).

Nitsch, R. & Bruder, R. (2015): *Diagnoseinstrument zum Aufdecken von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge.* In: Roth, J. et al.: Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. Münster: WTM-Verlag. S. 855-858.

Winter, K. (2011): *Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse: Didaktische Überlegungen, empirische Untersuchungen und konzeptionelle Entwicklung für ein internetbasiertes Mathematik-Self-Assessment*. Münster: WTM-Verlag.

Katja DERR, Reinhold HÜBL, Tatyana PODGAYETSKAYA, Mannheim

Formatives eAssessment in Online-Brückenkursen: Potentiale und Grenzen und die Rolle des Feedback

1 Einleitung

Unterstützungsangebote für die Studieneingangsphase und den Übergang Schule / Hochschule haben als Reaktion auf eine gestiegene Nachfrage in Studierendenschaft (Bargel, 2015) und als Maßnahme, um der hohen Heterogenität der Studienanfänger/-innen zu begegnen deutlich zugenommen. Allein im Förderprogramm Qualitätspakt Lehre sind 125 Projekte diesem Themenfeld zugeordnet (BMBF, 2011). Im QPL-Verbundprojekt *optes* werden Methoden und Konzepte zur Optimierung des begleiteten Selbststudiums in einem Online-gestützten Mathematik Vorkurs entwickelt und erprobt. Der (Selbst-)Lernprozess wird durch verschiedene didaktische und technische Maßnahmen strukturiert und gefördert (Halm et al., 2013; Samoila et al., 2016; Daniel & Wingerter, 2015). Im Teilprojekt „formatives eAssessment“, das an der Dualen Hochschule Baden-Württemberg Mannheim angesiedelt ist, wurde ein Online-Fragepool der Grundlagenmathematik erstellt, der mittlerweile als offene Ressource zur Verfügung steht.

2 Formatives eAssessment

Der Einsatz formativer eAssessments lässt sich unterschiedlichen didaktische Zielen zuordnen, vom Impuls zu Beginn einer Lerneinheit über das Einüben des Gelernten bis hin zur Prüfungsvorbereitung, bzw. summativen eAssessments (Shavelson et al., 2008). Je nach Einsatzgebiet ist zu überlegen, welche Art von Aufgaben, und welche Form des automatisierten Feedback geeignet sind. Neben der einfachen Rückmeldung, ob eine Frage richtig oder falsch beantwortet wurde („Verifikationsfeedback“) sind verschiedene Formen des erweiterten Feedback („Elaborationsfeedback“) möglich (vgl. Renkl, 1991). Neben der erwarteten Antwort können z.B. Musterlösungen, Kommentare und Bewertungen ausgegeben werden. Im *optes*-Projekt wird unterschieden zwischen *diagnostischem* Feedback auf Tests, die zur Erfassung des Lernstandes zu Beginn oder zum Abschluss des Lernprozesses stehen und *formativem* Feedback, das sich auf die Bearbeitung einzelner Übungsaufgaben bezieht.

3 Diagnostisches Feedback auf einen Test

Zu Beginn des Vorkurses haben die Teilnehmer die Möglichkeit, ihr Vorwissen über einen diagnostischen Einstiegstest zu überprüfen. Am Standort Mannheim umfasst dieser Test 77 Aufgaben aus zehn Themengebieten der gymnasialen Mittel- und Oberstufe (basierend auf cosh, 2014), für deren Bearbeitung 120 Minuten zur Verfügung stehen. Um aufgabenspezifische oder technische Einflüssen zu minimieren, kommen im diagnostischen Einstiegstest ausschließlich niederschwellige Online-Aufgabentypen zum Einsatz, die keine besonderen Vorkenntnisse wie z.B. die Eingabe von Formeln erfordern. Dies sind geschlossene Fragetypen, also alle Formen von Multiple Choice (Martinez, 1999), und halb offene Fragetypen, die die Eingabe von numerischen Werten verlangen. Soweit möglich, adressiert jede Aufgabe nur ein Thema (z.B. „Termumformungen“ im Themengebiet „Arithmetik“), damit das Ergebnis zur Berechnung des diagnostischen Feedback genutzt werden kann. Neben dem Gesamtergebnis beinhaltet dieses die Bewertung der Vorkenntnisse pro Themengebiet. Bei geringen Kenntnissen wird eine Lernempfehlung für dieses Thema ausgesprochen, inklusive Links zu passenden Lernmaterialien.

Die Aufgabe des diagnostischen Feedback ist die „Kalibrierung“ (Winne, 2004), also der Abgleich der Kenntnisse der Lernenden mit den Lernzielen des Vorkurses. Im Fokus steht das (An-)Erkennen von Wissensdefiziten (so denn vorhanden), eine Fehleranalyse pro Aufgabe findet im diagnostischen Feedback nicht statt (siehe Tabelle 1).

Analog zum Einstiegstest (Pretest) erfolgt ein abschließender „Kontrolltest“ (Posttest) zu Beginn des Studiums zur individuellen Lernerfolgskontrolle, sowie der Evaluation des Programms. Dieser wird in den Räumen der DHBW Mannheim mit allen Studienanfänger/-innen der Fakultät Technik durchgeführt. So können auch die Vorkenntnisse der Studienanfänger/-innen erhoben werden, die nicht am Vorkurs teilgenommen haben.

4 Formatives Feedback auf eine Aufgabe

Im Verlauf des Lernprogramms erhalten die Lernenden immer wieder die Möglichkeit, Übungsaufgaben oder Kurztests zu einem Themengebiet zu bearbeiten. Zu Beginn eines Kapitels kommen eher einfache und wenig komplexe Übungsaufgaben zum Einsatz, um das Gelernte zu wiederholen und mathematische Routinen einzuüben. Sofern möglich, werden Anwendungsbeispiele gegeben. Diese können dann zu einem späteren Zeitpunkt in etwas komplexere und anspruchsvollere Aufgaben eingekleidet werden. Neben Multiple Choice und numerischer Eingabe ist für den Bereich der Übung auch der Fragetyp STACK sehr gut geeignet, der die Eingabe von mathematischen Formeln über AsciiMath Syntax erlaubt (Sangwin, 2013).

Beim formativen Feedback auf Übungsaufgaben stehen der Lösungsweg und das Verständnis eines konkreten mathematischen Problems im Vordergrund. Neben der Rückmeldung, welche Antwort erwartet und vom System als „richtig“ gewertet wurde, erhalten die Teilnehmer eine detaillierte Musterlösung. Bei Multiple Choice Aufgaben ist es außerdem möglich, das Fehlerfeedback zu einzelnen Distraktoren durch Kommentare zu ergänzen (z.B. „Hier haben Sie möglicherweise Zähler und Nenner vertauscht.“).

	Verifikations-feedback (Richtig/ Falsch)	*Erweitertes Feedback*			
		Lösung	Muster-lösung	Kom-mentar	Bewer-tung
Diagnostisches Feedback auf einen Test	x			x	x
Formatives Feedback auf eine Aufgabe	x	x	x	x	x

Tabelle 1: Feedbackformate (Diagnostisches und Formatives Feedback)

5 Grenzen des automatisierten Feedback

Die genannten geschlossenen und halb offenen Aufgabenformate decken einen weiten Bereich des Lernprozesses ab, und durch die Weiterentwicklung adaptiver Verfahren ist in der Zukunft mit deutlich optimierten individualisierten Feedbackformaten zu rechnen (siehe die Beiträge der moderierten Sektion DTA in diesem Band). Komplett offene Aufgabenformate, bei denen individuelle (Problem-)Lösungsansätze analysiert werden, erfordern jedoch nach wie vor die Rückmeldung (menschlicher) Expert/-innen.

Im Vorkursprogramm der DHBW Mannheim werden offene Aufgaben im einmonatigen Zusatzangebot „Betreutes eLearning“ genutzt. Die Lernenden laden wöchentlich ihre Lösungen zu einem Aufgabenblatt hoch, inklusive Herleitungen und einzelner Rechenschritte. Da die Studienanfänger/-innen nicht über die nötigen Syntaxkenntnisse zur Eingabe mathematischer Ausdrücke verfügen, wird mit gescannten oder fotografierten handschriftlichen Unterlagen gearbeitet; die PDF-Dokumente werden dann von den Dozent/-innen in der Lernplattform kommentiert und mit den Lernenden diskutiert. Das Verfahren ist aufwändig, und die klaren Vorteile von Online-Fragetypen, wie schnelles Feedback und bessere Lesbarkeit der Eingaben, fallen weg. Dieser Fragetyp liefert aber wichtigen Zusatznutzen im eLearning, da nur über offene Aufgabenformate Leistungen abgefragt und gewürdigt werden können, die außerhalb eines vorgefertigten Antwortspektrums liegen. Durch das Notieren der eigenen Rechenschritte wird die Fähigkeit zur Darstellung von und Kommunikation über mathematische Lösungsansätze gefördert.

6 Ausblick

Eine wichtige Aufgabe der verbleibenden Förderphase ist die Entwicklung von Konzepten zur Verwaltung und Nutzung großer Fragepools. Aktuell sind 860 Items im *optes*-Pool, die nach Themengebieten, Fragetypen und Schwierigkeitsgraden sortiert sind. In Kooperation mit der ILIAS Special Interest Group Mathematik wird nach Lösungen gesucht, das Finden und Aktualisieren von Aufgaben für Partnerhochschulen zu vereinfachen.

Das Projekt *optes*, Optimierung der Selbststudiumsphase, wird im Rahmen des Qualitätspakts Lehre aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert (Förderkennzeichen 01PL12012). www.optes.de

Literatur

Bargel, T. (2015). *Studieneingangsphase und heterogene Studentenschaft - neue Angebote und ihr Nutzen. Befunde des 12. Studierendensurveys an Universitäten und Fachhochschulen.* Hefte zur Bildungs- und Hochschulforschung 83, Arbeitsgruppe Hochschulforschung.

BMBF Bundesministerium für Bildung und Forschung (2011) Qualitätspakt Lehre Pressemitteilung https://www.bmbf.de/de/qualitaetspakt-lehre-524.html

cosh cooperation schule:hochschule (2014). *Mindestanforderungskatalog Mathematik (2.0) der Hochschulen Baden-Württembergs für ein Studium von WiMINT-Fächern* http://www.mathematik-schule-hochschule.de/images/Aktuelles/pdf/MAKatalog_2_0.pdf

Daniel, M. & Wingerter, B. (2015). STACK – Ein neuer Fragetyp in der Mathematik, Tagungsband zum 2. HD-MINT Symposium, Nürnberg, 54–57.

Halm, L., Heubach, M., Mersch, A. & Wrenger, B. (2013). Zwei Seiten des Online-Lernens in mathematischen Grundlagenveranstaltungen: Unterstützung Lehrender und Betreuung Studierender im Selbststudium, *Tagungsband zum 1. HD MINT Symposium, Nürnberg*, 177–183.

Martinez, M. E. (1999). Cognition and the Question of Test Item Format. *Educational Psychologist*, *34* (4), 207–218.

Renkl, A. (1991). *Die Bedeutung der Aufgaben- und Rückmeldungsgestaltung für die Leistungsentwicklung im Fach Mathematik.* Dissertation, Universität Heidelberg.

Samoila, O., Heubach, M., Mersch, A. & Wrenger, B. (2016). Das ePortfolio und flankierende Maßnahmen des Verbundprojektes optes zur Unterstützung INT-Studierender in mathematischen Grundlagenveranstaltungen. In: A. Hoppenbrock et al. (Hrsg.) *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze*. Berlin: Springer Spektrum, 423-434.

Sangwin, C. (2013). *Computer Aided Assessment of Mathematics Using Stack.* Oxford University Press.

Shavelson, R. J. et al. (2008). On the impact of curriculum-embedded formative assessment on learning: A collaboration between curriculum and assessment developers. *Applied measurement in education* (21), 295–314.

Winne, P. H. (2004). Students' calibration of knowledge and learning processes: Implications for designing powerful software learning environments. *International Journal of Educational Research*, *41* (6), 466–488.

Nora FELDT-CAESAR, Darmstadt

Konzeptualisierung und Operationalisierung von Mindeststandards – von der Zielformulierung zum digitalen Diagnoseverfahren

Die Festlegung von Mindeststandards kann dazu beitragen, bei allen Schülerinnen und Schülern gleiche Lernausgangsbedingungen zu sichern. Insbesondere durch die Klagen über mangelnde mathematische Eingangsvoraussetzungen von Studienanfängern sind Mindeststandards in den letzten Jahren vermehrt in das Zentrum fachdidaktischer und bildungspolitischer Diskussionen gerückt. Als Konsequenz sind zahlreiche Mindeststandardkonzepte und Online-Self-Assessments (OSA's) zur Diagnose von Mindeststandards entstanden.

Im Rahmen eines Dissertationsprojekts an der TU Darmstadt wurde ein Prozessmodell für die Konzeptualisierung und Diagnose von Mindeststandards entwickelt. Dieses kann helfen, bestehende Konzepte zu analysieren und zu verorten. Gleichzeitig kann es zukünftigen Konzepten einen theoretischen Rahmen bereitstellen. Als Hintergrundtheorie wurde die Tätigkeitstheorie verwendet. Ihre lerntheoretischen Konzepte auf kognitiver und Handlungsebene stellen geeignete Beschreibungsmittel für den Prozess der Konzeptualisierung und Diagnose von Mindeststandards bereit.

Prozessmodell zur Konzeptualisierung von Mindeststandards

Den Ausgangspunkt bildet ein verallgemeinerter Mindeststandardbegriff (Mindeststandards als „grundlegendes Wissen und Können, über das jeder Schüler verfügen soll“), der über die notwendige Offenheit für konzeptspezifische Konkretisierungen verfügt. Hierfür können zentrale Rahmenfragen (*mit welchem Ziel?/ für wen?/ zu welchem Zeitpunkt?/ wie?*) Orientierung bieten. Die auf diese Weise normativ gesetzten Rahmenbedingungen werden in der Formulierung der allgemeinen Ziele und in der Definition des konzeptspezifischen Mindeststandardbegriffs ausgewiesen. Hieran schließt sich der Prozessschritt der inhaltlichen Konkretisierung an. Dieser gliedert sich in zwei Phasen: Zunächst werden die Inhalte, die zu den Mindeststandards zu zählen sind, ausgewählt und in Form von konkreten Lernzielen auf Kenntnisebene ausgewiesen. Diese Festlegung ist in der Regel Gegenstand eines Aushandlungsprozesses, an dem je nach allgemeiner Zielstellung des Konzepts unterschiedliche Akteure beteiligt sein können. Im zweiten Teil der inhaltlichen Konkretisierung werden die erforderlichen Kenntnisqualitäten inhaltsspezifisch festgelegt. Hierzu wird ein modifiziertes Begriffssystem nach Pippig (u.a. 1988) verwendet, das die Merkmale *Verfügbarkeit*, *Exaktheit*, *Allgemeinheit* und *Übertragbarkeit* umfasst (vgl. auch Feldt, 2013). Ergebnis dieser Festlegung ist ein erweiterter Inhaltskatalog, der neben den konkreten inhaltlichen Lernzielen auch die notwendigen Aneignungsqualitäten der jeweiligen Kenntnisse ausweist. In der sich anschließenden Operationalisierung tritt erstmals ein operatives Moment hinzu. Das Ergebnis ist ein Katalog expliziter Lernziele, in dem die zu bewältigenden Anforderungen ausgewiesen werden. Die Verwendung festgelegter Handlungsdimensionen kann diesen Prozessschritt strukturieren. Das mathematikspezifische Begriffssystem der Elementar- und Grundhandlungen nach Bruder und Brückner (1989) erweist sich hier als geeignet, insbesondere durch die Zusammenhänge, die sich zu den Qualitätsmerkmalen von Kenntnissen herstellen lassen. Der Prozess der Konkretisierung und Operationalisierung ist damit zunächst abgeschlossen, jedoch soll ein Mindeststandardkonzept in der Regel nicht nur die Funktion einer normativen Setzung übernehmen, sondern auch den Ausgangspunkt für eine entsprechende Diagnose und Förderung bilden.

Anforderungen an die Diagnose von Mindeststandards

Eine individuelle Diagnose kann im Idealfall präzise aufzeigen, welche Inhalte bereits sicher beherrscht werden und an welchen Stellen möglicherweise Wiederholungsbedarf besteht. Dabei stellen sich im Mindeststandardbereich spezifische Anforderungen an ein Diagnoseinstrument: Da häufig die Mindeststandards mehrerer Unterrichtseinheiten oder sogar Klassenstufen zusammen überprüft werden, muss in der Regel ein relativ breiter Inhaltsbereich abgedeckt werden. Zusammen mit einer üblicherweise begrenzten Testzeit ergibt sich hieraus eine *Inhalt-Testzeit-Problematik*. Zudem sind die zu überprüfenden Inhalte meist stark vernetzt und entsprechende Kenntnisse sollten im Sinne von Weinerts intelligentem Wissen über vergleichsweise hohe Aneignungsqualitäten verfügen. Daher scheint zunächst der Einsatz komplexer (d.h. mehrschrittiger) Testitems sinnvoll, in denen mehrere elementare Inhalte und Handlungen miteinander verknüpft werden müssen. Auf der anderen Seite ist es im Mindeststandardbereich besonders wichtig, eventuelle Defizite genau lokalisieren und so gezielt durch eine entsprechende Förderung beheben zu können. Für eine solch präzise Diagnose werden elementare, einschrittige Items benötigt – insbesondere dann, wenn ein digitales Diagnoseinstrument verwendet wird, das der Lehrkraft keinen Einblick in die individuellen Bearbeitungswege der Lernenden gewährt. Als mögliche Lösung für diese Anforderungen wurde mit dem *Elementarisierenden Testen* ein adaptives Diagnoseverfahren entwickelt, das die beiden genannten Itemformate nach Bedarf verbindet. Hierzu durchlaufen alle Lernenden eine Hauptlinie von Testaufgaben, in der Inhalte und Handlungen (auch) in verknüpfter Form überprüft werden. Tritt bei der Bearbeitung einer dieser Hauptlinienaufgaben ein Fehler auf, wird der Lernende in eine ‚Schleife' aus zusätzlichen Elementaritems geleitet, in der die Anforderungen der Hauptlinienaufgabe isoliert überprüft werden. Nach ihrer Bearbeitung wird der Lernende wieder zurück auf die Hauptlinie geleitet und fährt mit der Bearbeitung der nächsten regulären Aufgabe fort. Ein solches Testverfahren entlastet von der Notwendigkeit, viele einzelne Elementaritems in die reguläre Teststruktur einzubinden. Somit können vermehrt mehrschrittige Testitems eingesetzt werden, die Kenntnisse von hoher Aneignungsqualität fokussieren. Da Elementaritems auf diese Weise nur bei Bedarf eingesetzt werden, kann die zur Verfügung stehende Testzeit effizient genutzt werden. Gleichzeitig erlauben die individuell vorgenommenen Elementarisierungen, mögliche Defizite auch im Bereich elementarer Kenntnisse präzise zu lokalisieren. Im Idealfall umfasst ein solches Diagnoseinstrument im Rahmen eines fehleranalytischen Feedbacks direkte Verweise auf entsprechende Nachlernmaterialien, sodass die gewonnenen diagnostischen Informationen unmittelbar förderwirksam genutzt werden können.

Exemplarische Konkretisierung

Der entwickelte theoretische Rahmen wurde mit dem Konzept des *Mathematischen Grundwissens und Grundkönnens* exemplarisch konkretisiert. Das primäre allgemeine Ziel dieses Konzepts besteht in der Befähigung zu einem erfolgreichen Weiterlernen, insbesondere in einem Studium. Folgende Definition wird zugrunde gelegt:

Als Mathematisches Grundwissen und Grundkönnen bezeichnen wir jene mathematischen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten, die bei allen Schülerinnen und Schülern am Ende der beiden Sekundarstufen in Form von Begriffen, Zusammenhängen und Verfahren langfristig und situationsunabhängig, das heißt insbesondere ohne den Einsatz von Hilfsmitteln, verfügbar sein sollen.

Vor dem Hintergrund dieses normativ gesetzten Rahmens sind die einzelnen Phasen der Konkretisierung und Operationalisierung durchlaufen worden, wobei der Prozess der Inhaltsfindung durch Rückgriff auf bestehende Konzepte verkürzt worden ist. Auf diese Weise sind für das Ende der Sekundarstufe II Mindeststandard- und Anforderungskataloge mit Fokus auf der Leitidee des Funktionalen Zusammenhangs entstanden, auf deren Grundlage ein digitales, elementarisierendes Diagnoseinstrument entwickelt worden ist. Das Diagnoseinstrument ist zusammen mit einem automatisch generierten Feedback unter www.grundwissen-funktionen.de für Lehrende und Lernende frei verfügbar.

Da das Diagnoseverfahren des *Elementarisierenden Testens* aufgrund seiner Neuheit eine Reihe spezifischer Forschungsfragen aufwirft, wurde das entwickelte Testinstrument am Übergang von der Sekundarstufe II ins Studium erprobt. Hierzu wurde zum einen das vollständige Diagnoseinstrument evaluiert, zum anderen wurden die elementarisierenden Aufgabenkomplexe daraus gesondert qualitativ und quantitativ untersucht. Insgesamt nahmen an der Hauptstudie 457 Studienanfänger(innen) aus dem MINT-Bereich und 163 Schüler(innen) aus der Sekundarstufe II teil. Zusätzlich wurden 26 diagnostische Interviews geführt. Einen zentralen Untersuchungsgegenstand bildete dabei das diagnostische Potential einzelner elementarisierender Aufgabenkomplexe. Dieses wurde mit dem Konstrukt der *Fehleraufklärungsquote* (Feldt-Caesar, 2015) quantifiziert. Alle eingesetzten Aufgabenkomplexe können demnach einen Beitrag zur Fehleraufklärung leisten, wobei die festgestellten Fehleraufklärungsquoten zwischen 51 % und 92 % liegen und somit stark schwanken. Eine deutliche Steigerung lässt sich durch den kombinierten Einsatz von elementarisierenden Testschleifen und Itemdistraktoren mit diagnostischem Potential (Winter, 2011) erzielen.

Im Rahmen der Erprobung konnten zu vielen der das Elementarisierende Testen betreffenden Forschungsfragen erste Hypothesen formuliert werden. An dieser Stelle sind weitere, systematische Untersuchungen notwendig, um diese Hypothesen zu validieren und verallgemeinerte Konstruktionsprinzipien abzuleiten. Insbesondere die Optimierung des diagnostischen Potentials sollte dabei im Vordergrund stehen. Hier ist vor allem die weitere Untersuchung des kombinierten Einsatzes von diagnostischen Itemdistraktoren und elementarisierenden Testschleifen sinnvoll, um die Synergieeffekte, die die bisherigen Ergebnisse vermuten lassen, optimal nutzen zu können.

Literatur

Bruder, R. & Brückner, A. (1989). Zur Beschreibung von Schülertätigkeiten im Mathematikunterricht – ein allgemeiner Ansatz. *Pädagogische Forschung, 30,* 72-82.

Feldt, N. (2013). Konkretisierung und Operationalisierung von Grundwissen und Grundkönnen durch ein theoriegeleitetes Vorgehen. In G. Greefrath et al. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 308-311). Münster: WTM.

Feldt-Caesar, N. (2015). Möglichkeiten der Diagnose von Grundwissen und Grundkönnen durch ein adaptiv gestaltetes Testverfahren. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. 276-279). Münster: WTM.

Pippig, G. (1988). *Pädagogische Psychologie*. Berlin: Volk und Wissen.

Winter, K. (2011). *Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse*. Münster: WTM.

Michael KALLWEIT, Bochum

Der Computer als Tutor - technikbasierte Diagnostik mit Freitextaufgaben

Viele Lernplattformen ermöglichen inzwischen offene Formate für Mathematikaufgaben mit automatischer Auswertung. Die Software STACK bietet darüber hinaus intelligente Optionen für individuelles Feedback, das Lernenden und Lehrenden spezifische Rückmeldung über Fehlvorstellungen und Lernerfolge liefert. Erste Erfahrungen mit STACK-Aufgaben und ihren Feedback-Bäumen dienen zur Pilotierung einer Untersuchung über die Wirksamkeit und Nachhaltigkeit dieses Formates in verschiedenen Kontexten.

Einleitung

Technische Systeme, die für die Mathematik geeignete offene Aufgabenformate bereitstellen finden zur Zeit eine immer stärkere Verbreitung (siehe z. B. Buchsteiner, Kallweit, 2015). Das Assessmentsystem STACK (Sangwin, 2013) bietet vielfältige Möglichkeiten zur Konstruktion von digitalen Mathematikaufgaben mit automatischer Bewertung durch ein Computeralgebrasystem und individuell generiertem Feedback (siehe auch Kallweit. 2015).

Der Einsatz von STACK als Bestandteil regulärer Veranstaltungen wurde an der Ruhr-Universität Bochum (RUB) im WS 2015/2016 in zwei Szenarien erprobt und ausgewertet.

Einsatz im Eingangstest

In zwei Präsenzvorkursen für Mathematik wurde ein freiwilliger digitaler Eingangstest durchgeführt an dem insgesamt 146 Studienanfänger teilgenommen haben (48 aus dem Vorkurs für Mathematiker und Physiker, 98 aus dem Vorkurs für Ingenieure). Basis für die Aufgaben war ein Eingangstest der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster (WWU), der im dortigen Vorkurs von 191 Teilnehmer durchgeführt wurde (vgl. Neugebauer 2013). Dieser Test bestand aus 25 MultipleChoice-Aufgaben, deren Distraktoren auf empirisch ermittelten Falschantworten und dahinterliegenden Fehlerkonzepten beruhen (Neugebauer & Winter, 2014). Pro Frage gab es mindestens 5, im Mittel 6,5 und maximal 9 verschiedene Antwortmöglichkeiten, womit sich insgesamt 145 Distraktoren ergaben. Hinzu kam zu jeder Aufgabe die Auswahlmöglichkeit „Meine Antwort ist nicht dabei“, welche von allen Testeingaben aber nur 69 (1,6%) mal ausgewählt wurde.

Für die Variante an der RUB wurden 23 der insgesamt 25 Aufgaben in das offene Aufgabenformat mit STACK überführt und die Auswertungs-/Feedbackbäume anhand der MultipleChoice-Distraktoren konstruiert. Durchschnittlich wurden hier 15 verschiedene Eingaben pro Aufgabe erfasst, was sich insgesamt zu 347 summierte. Ein Extrembeispiel zeigt eine Aufgabe zu Termumformungen: Hier wurden 9 verschiedene Distraktoren hinterlegt, aber 41 unterschiedliche Lösungsterme von den Teilnehmern eingegeben.

Test mit MultipleChoice (WWU)	Test mit STACK (RUB)
Ø 6 Distraktoren	Ø 15 vers. Eingaben
max. 9 Distraktoren	max. 41 vers. Eingaben
insg. 145 Distraktoren	insg. 347 vers. Eingaben
1,6% der Auswahlen sind „meine Lösung ist nicht dabei„	> 60% der Eingaben sind neue Eingaben

Tabelle 1: Vergleich der Auswahlen bzw. Eingaben des Eingabetests

Einsatz in den wöchentlichen Übungsaufgaben

Als zweites Szenario wurden digitale Aufgaben mit STACK als Teil der regulären wöchentlichen Übungsaufgaben der Veranstaltung Lineare Algebra I gestellt. Pro Übungsblatt gab es 3 auf Papier zu lösende Aufgaben und eine digitale Aufgabe in der eLearning-Plattform Moodle. Für die Bearbeitung beider Aufgabentypen hatten die Studierenden eine Woche Zeit. Für korrekte Lösungen gab es einen Bonus für die Modulpunkte. Der Großteil der Hörer nahm an den Übungen teil und bearbeitete Aufgaben. Die Anzahl der Abgaben sank (von 299 Studierende anfangs auf ca. 150 am Ende) über den Verlauf des Semesters (siehe Abbildung 2), wobei die elektronischen Aufgaben generell (bis auf die erste Woche) häufiger bearbeitet wurden, was die Akzeptanz dieses Aufgabenformats bei den Studierenden unterstreicht. Erfahrungsberichte zeigen, dass anfängliche Probleme mit dem technischen System, wie z. B. das Erlernen der Eingabesyntax, nach kurzer Zeit nur noch in sehr seltenen Fällen auftraten. In einem Fall musste eine Aufgabe durch Fehler bei der Konstruktion nochmals nachgebessert werden. Dies war aber ohne weitere Interaktion mit den Studierenden möglich, da STACK das nochmalige Auswerten aller Aufgaben unterstützt.

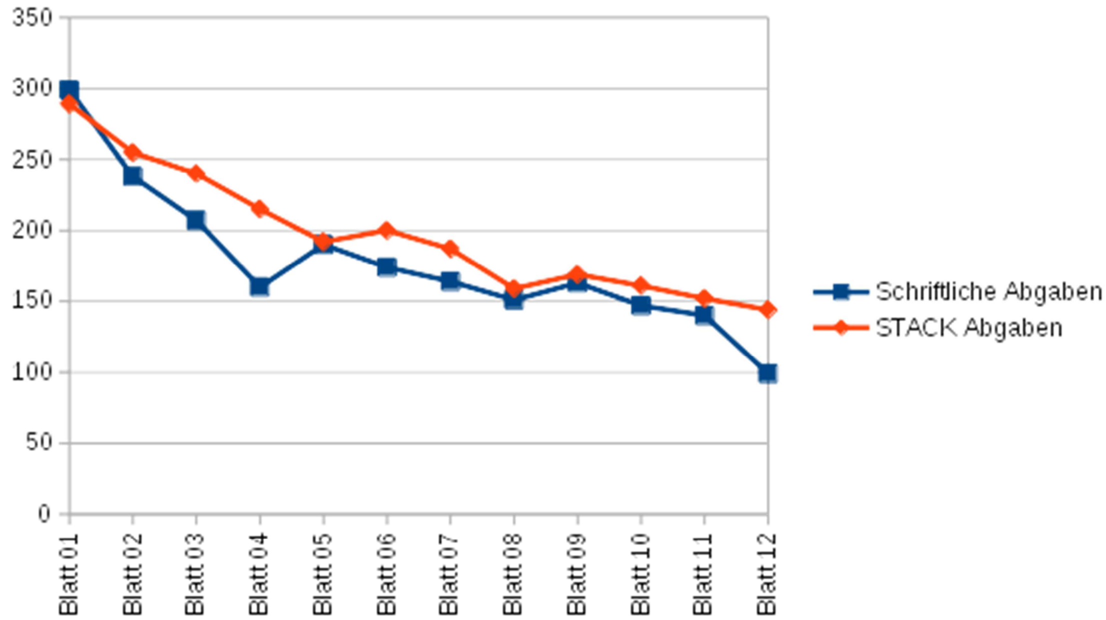


Abbildung 2: Abgabezahlen nach Aufgabentyp

Als Aufgaben wurden klassische Fragestellungen als Grundlage herangezogen, hierbei aber versucht die neuen Möglichkeiten des offenen Formats auszuschöpfen. So wurde u. a. die Generierung von Beispielen eines mathematischen Sachverhalts abgefragt (siehe Abbildung 3). STACK ermöglicht einen Wechsel des Auswertungsparadigmas von „Welcher Fehler wurde gemacht“ (Distraktoren bei MultipleChoice) zu „Was wurde richtig gemacht“.

Sei $\varphi : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}\backslash\{0\})$ mit $\varphi(x) = e^x$. Zeigen Sie, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist.	$\leftrightarrow$	Geben Sie einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}\backslash\{0\})$ an. $\varphi(x) = \boxed{}$

Abbildung 3: Vergleich Papieraufgabe und STACK-Aufgabe

Setzt man die erreichten Punktzahlen bei den Papier- und den STACK-Aufgaben zueinander und zum erreichten Klausurergebnis in Beziehung, ergeben sich signifikante Korrelationen (Tabelle 4).

Papier ↔ STACK	r=0,902	p<0,0001
Papier ↔ Klausur	r=0,556	p<0,0001
STACK ↔ Klausur	r=0,625	p<0,0001

Tabelle 4: Korrelationen nach Pearson

Fazit

Der offene mit STACK umgesetzte Aufgabentyp bietet im mathematischen Kontext eine Bereicherung der Überprüfungsmöglichkeiten von Wissen und Kompetenzen. Schwierigkeiten in der Nutzung durch Studierenden treten nur beim ersten Kontakt mit den Tools auf. Die Akzeptanz im praktischen Einsatz ist auf Seite der Studierenden und Lehrenden gleichermaßen hoch. Die Fokussierung auf die Überprüfung mathematischer Eigenschaften einer Eingabe durch den Nutzer bei der Erstellung der Aufgaben, ermöglicht zudem kürzere Entwicklungsprozesse, da nicht zwingend sämtliche möglichen Fehler im Vorfeld überlegt werden müssen. Dennoch lassen sich gerade durch das offene Format weitere Daten für eine didaktische Analyse sammeln. Der Einsatz von STACK in diagnostischen Tests in Kombination mit diesen vorher ermittelten Fehleraufklärungen ist ein vielversprechender Ansatz, der in Zukunft weiter erforscht werden soll.

Literatur

Buchsteiner, J. , Kallweit, M. (2015): *Professionalisierung des Helpdesk Mathematik* In: H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2015, 220-223. Münster: WTM.

Kallweit, M. (2015). *Mathematik-Kompetenzen überprüfen und fördern – Automatisiert Lehren und Lernen mit STACK.* Workshop der ASIM/GI-Fachgruppen, Argesim Report AR 50.

Neugebauer, C., Winter, K. (2014): *Fehleranalysen bei Studienanfängern als Basis zur individuellen Förderung in Mathematik.* In: Roth, J., Ames, J. (Hrsg.) (2014): Beiträge zum Mathematikunterricht, Münster: WTM-Verlag, S. 851-854.

Neugebauer, C. 2013: *Online - Test zum Self-Assessment im Themenfeld "Studierfähigkeit in Mathematik": Zur Entwicklung von Multiple-Choice-Items.* In: Hoppenbrock, A., Schreiber, S., et al. (2013): Mathematik im Übergang Schule/Hochschule und im ersten Studienjahr.

Sangwin, C. J. (2013). *Computer Aided Assessment of Mathematics.* Oxford University Press

Christoph NEUGEBAUER, Siegen, Sebastian KRUSEKAMP, Münster

„Im Bereich der Statistik verfügen Sie nur über geringe Vorkenntnisse." – Hilfreiches Feedback im Rahmen von Online-Self-Assessments (OSAs)

Ausgangslage

Seit der Einführung des Bachelor/Master-Systems werden die deutschen Hochschulen mit dem Problem erhöhter Studienabbruchquoten verstärkt konfrontiert. Im internationalen Vergleich befindet sich Deutschland mit einer Abbruchquote von 23% in Diplom- und 28% in Bachelor-Studiengängen „im unteren Mittelfeld der OECD-Länder", die Zahl der Studienabbrecher an den Hochschulen ist in den vergangenen Jahrzehnten jedoch stark angestiegen (Mette, Montel, 2014, S. 297). So liegt die Studienabbruchquote in Bachelorstudiengängen an Universitäten für die Fächergruppe Mathematik/Naturwissenschaften derzeit bei 39 %. Den vordersten Platz innerhalb dieser Fächergruppe belegt mit 55 % die Mathematik (Heublein et al. 2012).

Es werden verschiedene Gründe als Erklärung für den starken Anstieg der Abbruchquoten genannt. Heublein et al. (2012) führen ihn zum Teil auf die Einführung des Bachelor/Master-Systems zurück. Der Übergang von der Schule zur Hochschule bringt allerdings auch so viele Herausforderungen mit sich. Durch die Umbrüche und die Heterogenität im deutschen Schulsystem sind die Kenntnisse und Kompetenzen der StudienanfängerInnnen oftmals heterogen und aus Sicht der Lehrenden/Hochschulen unklar. Insbesondere in der Mathematik beklagen viele Lehrende ein abnehmendes Grundwissen und -können von StudienanfängerInnen.

Für Studieninteressierte, die angesichts der Vielzahl an Möglichkeiten besonderen Orientierungsbedarf haben, erscheint der Inhalt und die Anforderungen vieler Studienrichtungen – insbesondere der Mathematik – unklar. (vgl. u. a. Dieter, 2012)

Nicht zuletzt impliziert der Studienbeginn für StudienanfängerInnen generell große fachliche wie soziale Umstellungen. Die fachlichen Anforderungen und die Vermittlungsdichte steigen im Vergleich zur Schule stark an, so dass i. A. eine Umstellung der Lernstrategien, vor allem eine weit höhere Selbstlernkompetenz, nötig ist (u. a. Dieter 2012).

Um den geschilderten Problematiken zu begegnen, stellen Hochschulen in den letzten Jahren zunehmend Vorbereitungs- und Brückenkurse, aber auch sogenannte Online-Self-Assessments (OSAs) zur Verfügung. Ziel dieser Maßnahmen ist es, die Passung zwischen Studieninteressierten und Studiengang zu verbessern, um u. a. die Abbruchquoten zu senken. Die „Folgen einer mangelnden Passung zwischen Studierenden und Anforderungen des

Studiums [sind u. a.] […]: Erhöhter Studienabbruch und Fachwechsel, erhöhte Studiendauer, schlechtere Studiennoten, vermehrte Studienunzufriedenheit. Das steht im Gegensatz zu den Ansprüchen deutscher Hochschulen und zu den Appellen der Bildungs- und Wissenschaftspolitik, die Studienerfolgsquoten zu erhöhen und auch im internationalen Vergleich exzellent abzuschneiden“ (Rudinger, Hörsch 2009, S. 7).

Mathematische Online-Self-Assessments und ihr Feedback

Aus Nutzersicht können Online-Self-Assessments Stärken-Schwächen-Analysen sein, auf deren Basis Strategien zum Ausbau der Stärken und zur Dezimierung der Schwächen entwickelt werden können; sie können der Vorbereitung der Entscheidungsfindung sowie der Ermutigung, persönliche Beratung aufzusuchen, dienen.

Aus Sicht der Hochschulen können OSAs ein Hilfsmittel sein, um die Passung der Studieninteressierten zu verbessern, die Studienzufriedenheit zu erhöhen und die Abbruchquoten zu senken. Eine besondere Bedeutung zur Erreichung dieser Ziele kommt dabei dem Feedback innerhalb dieser OSAs zu, zumal es aller Wahrscheinlichkeit nach für viele Studieninteressierte das *erste* , für manche gar das *einzige* Feedback ist, welches Sie von Seiten der Hochschulen vor Aufnahme eines Studiums bekommen. Offensichtlich „ergibt sich ein Grundsatzproblem für Self-Assessments, indem […] kein Psychologe die Verarbeitung der Ergebnisrückmeldung [der Teilnehmer] begleitet. Es muss ein wesentliches Prinzip von Self-Assessment im Rahmen der Studienberatung sein, die Rückmeldung mit allen Informationen zu begleiten, die die Tragweite der Ergebnisse (fachlich bedingt) relativieren. […] Der Gesamterfolg eines Self-Assessments – individuell und volkswirtschaftlich betrachtet – [hängt] nicht nur von der Qualität der eingesetzten psychologisch-diagnostischen Verfahren ab, sondern mindestens genauso von der Qualität der Ergebnisrückmeldung“ (Kubinger et al., 2012, S. 14ff.).

Stand der Dinge

Einer aktuellen Studie des Stifterverbands zufolge werden jedoch die meisten der untersuchten Tests dem Versprechen einer Orientierungshilfe nicht unbedingt gerecht (Gollub, Meyer-Guckel, 2014).

Online-Self-Assessments weisen häufig sehr oberflächliche, wenig detaillierte inhaltliche Rückmeldungen auf. So werden bei den meisten Tests lediglich Lösungsquoten zurückgemeldet, teilweise ohne jegliche Angabe, welche der Aufgaben richtig bzw. falsch bearbeitet wurden, welchem Themengebiet die richtige/falsche Aufgabe angehört oder welche Art von Fehler gemacht wurde. Darüber hinaus fehlen Musterlösungen mit Lösungsweg oder die Angabe einer korrekten Lösung. Weiterhin fehlen spezifische Angebote für weitere Schritte nach Abschluss des Assessments. Des Öfteren wird eine generelle Empfehlung für Vorbereitungs- und oder Brückenkurse zum Ende des Assessments gegeben, ohne dass auf konkret verfügbare Angebote hingewiesen wird. Dies kann im ungünstigsten Fall zu einem Gefühl von Rat- und Hilflosigkeit bei den NutzerInnen führen, anstatt – wie erhofft – die Selbstwirksamkeit fördern.

Im Anschluss an die Bearbeitung eines Geographie-Tests erhielten wir ein sehr ausführliches Feedback.

„Beim Verständnis geographischer Texte unterlaufen Ihnen manchmal Fehler. […] Sie schaffen es, logisch korrekte Schlüsse zu ziehen. […] Im Bereich der Statistik verfügen Sie nur über geringe Vorkenntnisse. […]"

Der Test bestand aus Multiple/Single Choice-Aufgaben, von denen *keine* Antworten ausgewählt wurden. Der Tester hat sich also lediglich des „Weiter"-Buttons bedient; die nicht ausgewählten *falschen* wurden vom System als richtig gewertet, so dass es zu obigem Feedback kam. Genau darin besteht eines der größten Probleme – die Rückmeldungen der meisten existierenden Online-Self-Assessments sind wenig aussagekräftig und für eine Diagnostik ungeeignet, obwohl viele der existierenden Aufgaben durchaus diagnostisches Potential bieten.

Ausblick

Unser Ziel ist es, mit einem hilfreichen Feedback u.a. Lernfortschritte sichtbar zu machen, Selbstevaluation zu ermöglichen bzw. die Selbststeuerung beim Lernen zu unterstützen, eine Leistungsförderung und Handlungsinitiierung zu erreichen, die Motivation der NutzerInnen zu verbessern und den weiteren Lernprozesses positiv zu beeinflussen. Dabei nehmen wir nicht nur den oben fokussierten Übergang von der Schule zur Hochschule in den Blick, sondern auch den Einsatz von OSAs innerhalb verschiedener Studiengänge oder an der Schule.

Im Rahmen mehrerer Projekte werden Testaufgaben, Fördermaterialien und dazu passendes Feedback generiert. Das Projekt MaStEr (Mathematik Studieren mit Erfolg, Universitäten Flensburg, Münster) dient der Entwicklung von Diagnose- und Förderkonzepten sowie -materialien für Studierende und Studieninteressierte. Ziel ist die Konzeption frei zugänglicher Aufgaben-/Testpools mit der Möglichkeit zur individuellen Testzusammenstellung.

Die Kooperationsprojekte DTA (Diagnostische Testaufgaben) und DOT (Diagnostische Online-Tests) der Universitäten Darmstadt, Münster, Flensburg und Bochum betreiben einerseits Grundlagenforschung zu diagnostischen Testaufgaben in unterschiedlichen Formaten. Neben Multiple Choice-Aufgaben, deren Distraktoren diagnostisches Potential aufweisen (Winter, 2011), werden sogenannte elementarisierende Schleifen (Feldt-

Caesar, 2016) oder auch Aufgaben mit offenem Antwortformat basierend auf STACK (Kallweit, 2016) erforscht und entwickelt. Andererseits werden diagnostische Online-Tests für Mathematik für unterschiedliche Studiengänge – ein späterer Einsatz in Schulen ist ebenfalls geplant – basierend auf der Lernplattform ILIAS entwickelt.

Literatur

Dieter, M. (2012): Studienabbruch und Studienfachwechsel in der Mathematik: Quantitative Bezifferung und empirische Untersuchung von Bedingungsfaktoren. Dissertation, Universität Duisburg-Essen

Feldt-Caesar, N. (2016): Konzeptualisierung und Operationalisierung von Mindeststandards – von der Zielformulierung zum digitalen Diagnoseverfahren, Vorträge auf der 50. Jahrestagung der GDM vom 07.03. bis 11.03.2016 in Heidelberg, Beiträge zum Mathematikunterricht 2016, WTM-Verlag, Münster.

Gollub, J., Meyer-Guckel, V. (2014): Wer bin ich – und wenn ja, wie viele? Online-Studienselbsttests als „Orientierungs- und Entscheidungshelfer". In: Analysen. Edition Stifterverband

Heublein, U., Richter, J., Schmelzer, R., Sommer, D. (2012): Die Entwicklung der Schwund- und Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen. Statistische Berechnungen auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2010. In: HIS: Forum Hochschule 3/2012

Kallweit, M. (2016): Der Computer als Tutor – technikbasierte Diagnostik mit Freitextaufgaben, Vorträge auf der 50. Jahrestagung der GDM vom 07.03. bis 11.03.2016 in Heidelberg, Beiträge zum Mathematikunterricht 2016, WTM-Verlag, Münster.

Kubinger, K. D., Frebort, M. & Müller, C. (2012). Self-Assessment im Rahmen der Studienberatung: Möglichkeiten und Grenzen. In K. D. Kubinger, M. Frebort, L. Khorramdel & L. Weitensfelder (Hrsg.), Self-Assessment: Theorie und Konzepte (S. 9–24). Lengerich: Pabst Science Publishers.

Mette, C., Montel, C. (2014). Internet-Tools für die Studien- und Berufsorientierung: Leistung, Einbettung in Beratungsprozesse, Probleme. Report Psychologie, (7/8), 296– 308.

Winter, K. (2011): Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse: Didaktische Überlegungen, empirische Untersuchungen und konzeptionelle Entwicklung für ein internetbasiertes Mathematik-Self-Assessment. WTM-Verlag, Münster.

Marcel SCHAUB, Darmstadt

Die DTA unter einem tätigkeitstheoretischen Blickwinkel

In der Studieneingangsphase nimmt die Diagnostik fachlicher Studienvoraussetzungen eine wichtige Rolle ein. Diagnostische Tests erfolgen dabei meist digital. Neugebauer und Winter (2015, S. 660) stellen hierzu fest:

„Die wenigsten Produkte liefern mehr als eine Fehler- oder Lösungsquote zurück, eine individualdiagnostische Rückmeldung erfolgt gar nicht.“

Ansätze zu einer qualitativ hochwertigen Diagnostik liefern neben Winter (2011) mit intelligenten Distraktoren bspw. auch Nitsch (2015) mit dem Aufklären typischer Fehlermuster oder Feldt-Caesar (2014) mit dem elementarisierenden Testen. Das Projekt zur Diagnostischen Testaufgabe (kurz: DTA) kombiniert mehrere Ansätze, die im Folgenden erläutert werden.

Das Konzept der DTA

Die DTA umfasst eine Aufforderung im Bereich des Mathematischen Grundwissens und Grundkönnens, die digital umgesetzt wird. Mathematisches Grundwissen und Grundkönnen wird von Feldt (2013, S.309) wie folgt definiert:

> „Als Mathematisches Grundwissen und Grundkönnen bezeichnen wir jene mathematischen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten, die bei allen Schülerinnen und Schülern am Ende der beiden Sekundarstufen in Form von Begriffen, Zusammenhängen und Verfahren dauerhaft und situationsunabhängig, das heißt insbesondere ohne den Einsatz von Hilfsmitteln, verfügbar sein sollen.“

Kern einer Aufgabe in einer DTA sind ein oder mehrere verknüpfte Stoffelemente (Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren) mit einer oder mehreren Handlungen (Elementar- und Grundhandlungen nach Bruder und Brückner (1989, S. 79f.)). Die Beantwortung erfolgt im offenen oder geschlossenen Antwortformat. Die Antwortalternativen im geschlossenen Format bedienen sich intelligenter Distraktoren, die jeweils eine mögliche Fehlerursache diagnostizieren können. Das offene Antwortformat wird computergestützt bspw. über das Plug-in STACK in Moodle oder in Ilias ausgewertet. Dabei werden verschiedene Fehler und Formalia überprüft, die auch auf möglichen Fehlerursachen beruhen können.

Je nach Komplexität der Aufgabe werden elementarisierende Schleifen eingesetzt. Das bedeutet, dass eine Testperson, die die Hauptlinienaufgabe falsch beantwortet hat, ohne dass eine Fehlerursache diagnostiziert wurde, in eine elementarisierende Schleife geleitet wird (Feldt-Caesar, 2014, S. 353f.). Den Aufgaben der Schleife liegt eine Elementarisierung der Stof-

felemente und Handlungen zugrunde (ebd.). Somit werden diagnostische Informationen zu Teilanforderungen der Hauptlinienaufgaben eingeholt. Mögliche Fehlerursachen bzgl. einzelner Teilanforderungen sowie das (Nicht-)Erfüllen einer Teilanforderung können diagnostiziert werden.
Der Testperson steht nach Abgabe des Tests ein förderwirksames und (fehler-)analytisches Feedback zur Verfügung, welches die diagnostischen Informationen einarbeitet.

Hintergrundtheorie

Als Hintergrundtheorie fungiert die Tätigkeitstheorie wie auch schon in den Konzepten des Mathematischen Grundwissen und Grundkönnens (Feldt, 2013) und des elementarisierenden Testens (Feldt-Caesar, 2014). Mit Hilfe der Qualitätsmerkmale (Verfügbarkeit, Exaktheit, Allgemeinheit und Übertragbarkeit) von Pippig (1985) nach Feldt (2013) können Kenntnisse näher spezifiziert werden. Bei Kenntnissen handelt es sich um die im Gedächtnis des Individuums gespeicherten Lernergebnisse über das von der Gesellschaft generierte Wissen (Pippig, 1985, S. 21). Um Anforderungen analysieren und elementarisieren zu können, werden die benötigten Kenntnisse mit anforderungsadäquater Qualität in Verknüpfung mit Elementar- und Grundhandlungen beschrieben.

In Abbildung 1 ist eine DTA skizziert. Sie besteht aus einer Hauptlinienaufgabe und zwei Schleifenaufgaben, in die eine Testperson gelangt, wenn sie die Hauptlinienaufgabe falsch beantwortet. Die Hauptlinienaufgabe umfasst die Gesamtanforderung des Darstellungswechsels von graphischer zu algebraischer Beschreibung einer linearen Funktion. Teilanforderungen sind dabei das Identifizieren (und später Realisieren) des Begriffs der linearen Funktion (1) und die Bestimmung der Steigung bzw. des y-Achsenabschnitts einer linearen Funktion (2). Allgemein gilt, dass im Bereich des Mathematischen Grundwissens und –könnens die Verfügbarkeit und die Exaktheit hoch sein muss, was direkt aus ihrer Definition folgt (Feldt, 2013, S. 310). Teilanforderung (1) erfordert außerdem auch hohe Qualitäten bzgl. Allgemeinheit und Übertragbarkeit, da zwischen verschiedenen Abstraktionsebenen gewechselt und zusätzlich Verfahren aktiviert und in Beziehung gesetzt werden müssen. Im Vergleich zur Teilanforderung (1) benötigt Teilanforderung (2) nur eine mittlere Allgemeinheit, da das eigentliche Verfahren rein auf der graphischen Abstraktionsebene anzuwenden ist. Der Wechsel der Abstraktionsebene wird nur in Verknüpfung mit der ersten Teilanforderung nötig. Die Schleifenaufgaben fordern jeweils isoliert die oben genannten Teilanforderungen, jedoch weicht die geforderte Qualität im Vergleich zur Hauptlinien-

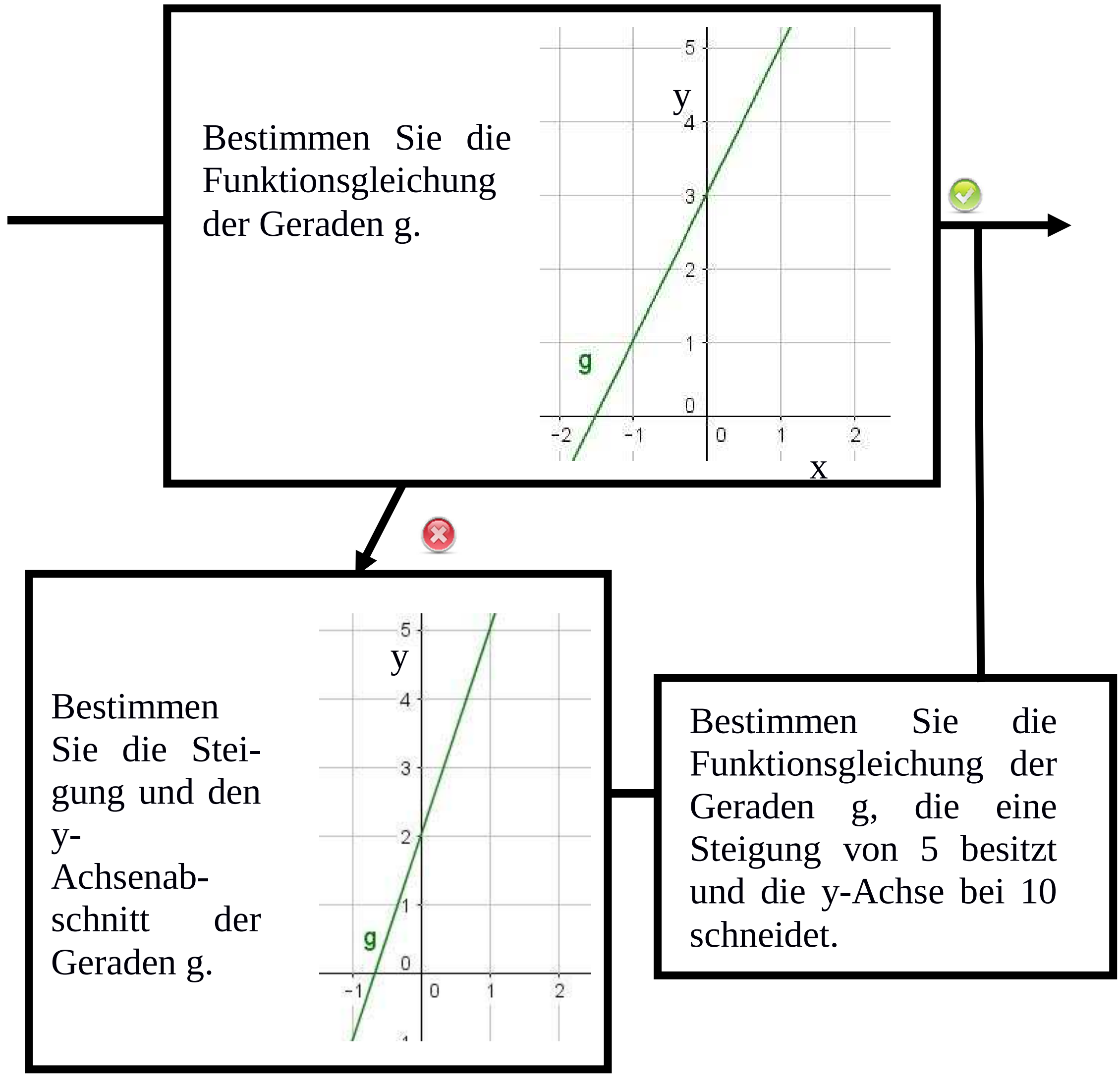


Abbildung 1: Beispielaufgaben für eine DTA mit zwei Schleifenaufgaben

aufgabe teilweise ab. Während die erste Schleifenaufgabe (Teilanforderung (2)) nur ein mittleres Maß an Allgemeinheit und Übertragbarkeit benötigt, reicht bei der zweiten Schleifenaufgabe (Teilanforderung (1)) auch ein niedriges Maß jeweils aus. Begründet werden kann dies durch die Isolierung der Aufgabe, da die Teilanforderung nicht mehr mit anderen Anforderungen verknüpft werden muss und der Wechsel der Abstraktionsebenen nicht mehr im gleichen Maß erforderlich ist. Bei der zweiten Schleifenaufgabe sei bemerkt, dass hier eine situative Beschreibung hinzugefügt wurde, womit die Anforderung sogar eine leicht andere ist. Die Exaktheit ist hier auch leicht reduziert, da die Nullstelle als klassifizierungsirrelevantes Merkmal wegfällt.

Offene Fragestellungen

Bezüglich der Elementarhandlungen lassen sich wie im obigen Beispiel Aufgaben digital umsetzen. Auch bezüglich der Grundhandlungen Anwenden und Erkennen, die als komplexere Varianten des Realisierens und Identifizieren verstanden werden können (Bruder & Brückner,1989, S. 79f.), ist eine digitale Umsetzung ersichtlich. Bei den verbleibenden Grundhandlungen ist die digitale Umsetzung noch zu prüfen, insbesondere ob Formate auch wirklich die in der Anforderung gestellte Handlung fordern. Zum Begründen lassen sich –auch im Hinblick auf die allgemeine Relevanzfrage in Mindeststandardkonzepten - folgende Forschungsfragen formulieren:

1. Welche Begründungshandlungen sind für Mathematisches Grundwissen und Grundkönnen (Mindeststandards) relevant?
2. Welche Teilhandlungen lassen sich aus dem Begründen extrahieren?
3. Wie lassen sich Begründungshandlungen bzgl. der DTA umsetzen?

Ausblick

Während sich die erste Frage über eine theoretische Diskussion und Expertenbefragungen beantworten lässt, wird sich den anderen Forschungsfragen durch qualitative Studien genähert, in der über Lernendeninterviews Begründungshandlungen und die gegebenen Anforderungen analysiert werden.

Literatur

Bruder, R.; Brückner A. (1989): Zur Beschreibung von Schülertätigkeiten im Mathematikunterricht 30 (6), S. 72–82.

Feldt, N. (2013): Konkretisierung und Operationalisierung von Grundwissen und Grundkönnen durch ein theoriegeleitetes Vorgehen In: Beiträge zum Mathematikunterricht.

Feldt-Caesar, N. (2014): Diagnose von Grundwissen und Grundkönnen durch ein adaptives Testverfahren. In: Beiträge zum Mathematikunterricht.

Neugebauer, C. & Winter, K. (2015): Entwicklung zielgruppenadäquater diagnostischer Testitems für Online-Self-Assessments In: Beiträge zum Mathematikunterricht.

Nitsch, R. (2015): Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. o. O.: Springer Spektrum.

Pippig, G. (1985): Aneignung von Wissen und Können – psychologisch gesehen. Berlin: Volk und Wissen Verlag.

Winter, K. (2011): Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse. Didaktische Überlegungen, empirische Untersuchungen und konzeptionelle Entwicklung für ein internetbasiertes Mathematik-Self-Assessment. Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien (Evaluation und Testentwicklung in der Mathematik-Didaktik, Bd. 2).

Moderierte Sektion:

Entdeckend-forschendes Lernen

Matthias LUDWIG, Frankfurt, Brigitte LUTZ-WESTPHAL, Berlin

Entdeckend-Forschendes Lernen

Die Diskussion um das forschend-entdeckende Lernen im Mathematikunterricht hat sich in den letzten Jahren weiter belebt. Es überrascht auch nicht, das forschendes Lernen der Arbeitsweise von Mathematikern aus Sicht der der Unterrichtsperspektive am ähnlichsten ist. In der Sektion wurden verschiedene Aspekte dieses Unterrichtsprinzips erörtert und auch der Anschluss zum entdeckenden Lernen gesucht. Ebenso wurde über Best-Practice-Beispiele und Implementierungsvorschläge berichtet. Ergänzend wurde auf Forschungsergebnisse rund um Probleme, Sichtweisen und Einstellungen bei Lehrenden und Lernenden eingegangen.

Die Sektion startet mit dem Vortrag von Matthias Ludwig (Goethe Universität Frankfurt) der über das forschend-entdeckende Lernen mit dem Programm Mathe.Forscher der Stiftung Rechnen berichtet. Zunächst wird aufgezeigt, dass die Idee des forschend-entdeckenden Lernens im Mathematikunterricht eine lernpsychologisch begründete und fundierte Methode ist Mathematik zu unterrichten. Allerdings wird dieses Konzept im Alltagsunterricht nur selten angewendet. Seit drei Jahren gibt es in der Region Rhein-Neckar das Programm Mathe.Forscher der Stiftung Rechnen, bei dem 10 Schulen und 30 Lehrende bei der Implementierung dieses Unterrichtsansatzes unterstützt werden.

Hanna Gärtner (Goethe Universität Frankfurt) berichtet über die Auswirkungen des Mathe.Forscher-Programms auf Lehrende und Lernende. Das Programm Mathe.Forscher hat sich zum Ziel gesetzt, entdeckendes, forschendes und projektartiges Lernen vermehrt in den Unterricht zu integrieren. Als Hilfe hierfür wurden die sogenannten Mathe.Forscher-Dimensionen entwickelt. Gärtner zeigte auf, dass sich vier der fünf Dimensionen faktoranalytisch bewährt haben. Ebenso konnte nachgewiesen werden, dass die Dimensionen mit den Beliefs Prozesss und Anwendung der am Programm Beteiligten gegenüber Mathematik positiv korrelieren.

Es ist unbestritten, dass das Stellen geeigneter Fragen ein bedeutender Aspekt beim forschenden Lernen ist. Ramona Behrens (Universität Würzburg) hat in ihrem Vortrag Gründe und Ausgangssituationen für das Formulieren von Fragestellungen im Mathematikunterricht betrachtet. Sie hat aufgezeigt, wie ein Taschencomputer dabei Unterstützung bieten könnte. Anschließend wurde darauf eingegangen, welche Strategien Schülerinnen und Schüler beim selbstständigen Stellen und Variieren von Fragen verwendet und inwiefern sie dafür einen Taschencomputer eingesetzt haben.

Im Vortrag von Brigitte Lutz Westphal und Alexander Schulte (Freie Universität Berlin) wird das mathematische Forschen selbst und die Charakterisierung von wissenschaftlichen Arbeitsweisen und Konzepten aus der Mathematik in den Mittelpunkt gestellt. Die Erkenntnisse daraus können uns helfen, forschendes Lernen im Mathematikunterricht authentisch und sinnstiftend zu gestalten. An einem konkreten Unterrichtsbeispiel des Sudokus wird dieses Vorgehen beispielhaft aufgezeigt.

Stephan Rosebrock (Pädagogische Hochschule Karlsruhe) arbeitete in seinem Beitrag anhand des Aufgabenformats „Zahlenwinkel" heraus, welche mathematische Herausforderungen hinter diesem Aufgabenformat stecken und wie anhand verschiedener Bearbeitungsstrategien Schülerinnen, Schüler und Studierende in verschiedenen Altersstufen mathematisch forschend tätig werden können.

Dass forschendes Lernen sich nicht auf bestimmte Schulstufen beschränken muss, wurde durch die Vorstellung des theoretisch entwickelten Modells des Forschungskreises im Vortrag von Christine Günter et. al (Stiftung Haus der kleinen Forscher) deutlich. Ausgehend von einem bereits bestehenden Forschungskreis bezüglich forschend-entdeckendem Lernen im naturwissenschaftlichen Bereich stellten die Vortragenden ein Modell eines Forschungskreises für mathematische Entdeckungen vor. Dieses Modell soll in Fortbildungen eingesetzt werden, so dass Lernbegleiter und Lernbegleiterinnen sowohl im Elementar- als auch im Primarbereich Kinder beim entdeckend-forschen Lernen im mathematischen Bereich unterstützen können.

Sektionsvorträge

Ludwig, M.: Forschend- entdeckendes Lernen mit dem Mathe.Forscher-Programm

Gärtner, H., Ludwig, M.: Die Auswirkungen des Mathe.Forscher-Programms auf Lehrende und Lernende

Behrens, R.: Formulieren mathematischer Fragen – mit Unterstützung eines Taschencomputers

Lutz-Westphal, B., Schulte, A.,: Mathematische Forschung - Was Forschendes Lernen im Mathematikunterricht aus der Praxis lernen kann

Rosebrock, St.: Entdeckendes Lernen in der Sekundarstufe am Beispiel von Zahlenwinkeln

Günter, Ch., Ploog, D., Ploog, M., Wollring, B.: Der „Mathematikkreis" - kompetenzorientiertes Erarbeiten mathematischer Fragen mit 3 bis 10- jährigen Kindern

Hanna GÄRTNER, Matthias LUDWIG, Frankfurt

Die Auswirkungen des Mathe.Forscher-Programms auf Lehrende und Lernende

Das Programm Mathe.Forscher hat sich zum Ziel gesetzt, entdeckendes, forschendes und projektartiges Lernen vermehrt in den Unterricht zu integrieren. Die am Programm beteiligten Lehrerinnen und Lehrer sollen mit ihren Schülerinnen und Schülern Mathematik in deren Lebenswelt entdecken, erforschen und erkennen lernen. Als Hilfe hierfür wurden fünf sogenannten Mathe.Forscher-Dimensionen entwickelt: „Anwenden der Mathe.Forscher-Prinzipien“ (MFP), „Öffnung des Unterrichts“ (ÖU), „Arbeiten mit Forscherfragen“ (AF), „Handeln als Lernbegleiter“ (HL) und „Sichtbarmachen von Mathematik“ (SM). Diese stellen eine Art Checkliste dar, die den am Programm teilnehmenden Lehrerinnen und Lehrern ermöglicht, selbstständig abzufragen, ob der Unterricht die einzelnen Unterthemen bzw. Elemente dieser Dimensionen erfüllt. Entspricht der Unterricht allen Dimensionen, so stellt das in der Theorie den idealen Mathe.Forscher-Unterricht dar. Um zu untersuchen, welche Auswirkungen solch eine Implementierung dieser Dimensionen hat und ob sich die Dimensionen bewährt haben, werden die Dimensionen in Verbindung mit den Beliefs und Einstellungen der am Programm Beteiligten gegenüber Mathematik in Zusammenhang gebracht. Es soll überprüft werden, welches mathematische Weltbild dahinter steckt, wenn die entwickelten Mathe.Forscher-Dimensionen positiv gesehen werden.

Die mathematischen Weltbilder lassen sich unterteilen in eine statische Sicht (Mathematik als System) und eine dynamische Sicht (Mathematik als Tätigkeit). Diesen beiden Sichtweisen ordnen Grigutsch, Raatz und Törner (Grigutsch, 1998) jeweils Hauptaspekte zu. Mathematik als System setzt sich zum einen aus Formeln zusammen (Formalismusaspekt), die zum anderen nach einem bestimmten Schema benutzt werden (Schemaaspekt). Mathematik als Tätigkeit dagegen ermöglicht das Verstehen von Sachverhalten, das Einsehen von Zusammenhängen und die Entwicklung neuer Erkenntnisse (Prozessaspekt). Den vierten Aspekt stellt die Einschätzung des Nutzens von Mathematik dar (Anwendungsaspekt).

Design der Pilotstudie

Zwischen Mai und Juli 2015 wurden im Rahmen einer Pilotstudie in der Region Rhein-Neckar 26 Lehrerinnen und Lehrer und 168 Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I, die in den letzten beiden Jahren an mindestens einer Mathe.Forscher-Aktivität – also einer Unterrichtseinheit, die den Mathe.Forscher-Dimensionen entspricht – teilgenommen haben.

Es wurden 20 Lehrende und 168 Lernende mittels Fragebogen befragt. Zudem wurden 14 Lehrende (davon 8, die auch den Fragebogen beantwortet haben) und 31 Lernende interviewt. Die Fragebögen setzen sich aus 139 inhaltlichen Fragen für die Lehrenden bzw. 70 inhaltlichen Fragen für die Lernenden zusammen, die den Statements mit Hilfe einer fünfstufigen Likert-Skala zustimmen bzw. diese ablehnen sollen. Hierbei bedeutet der Wert 1 „stimmt gar nicht" bzw. „überhaupt nicht wichtig", der Wert 5 bedeutet „stimmt genau" bzw. „sehr wichtig". Eine hohe Zustimmung zu einem Statement der Dimensionen spricht dabei für eine starke Identifizierung mit den Mathe.Forschern.

Die Fragen aus dem Fragebogen wurden besonders in Bezug auf die Mathe.Forscher-Dimensionen und die Inhalte zum Projekt zum Teil selbst entwickelt, zum Teil aus der Evaluation von 2012 der Region Nord entnommen. Die anderen Fragen wurden aus vorhandenen Fragebögen (u. a. Kratz, 2011) entnommen, vor allem bei den Fragen nach den Weltbildern bedienten wir uns stark an den standardisierten Fragen von Grigutsch et al. Die Fragen zu den Dimensionen wurden einer Expertengruppe vorgelegt, die diese den fünf Dimensionen zuordnen sollten. Die Dimensionen „Anwenden der Mathe.Forscher-Prinzipien" (MFP), „Öffnung des Unterrichts" (ÖU), „Handeln als Lernbegleiter" (HL) und „Sichtbarmachen von Mathematik" (SM) wurden dabei sehr deutlich identifiziert. Die Dimension „Arbeiten mit Forscherfragen" (AF) konnte dabei nicht eindeutig unter den Fragen identifiziert werden, die Expertengruppe stufte AF-Fragen oft als MFP- oder HL-Fragen ein.

Da die Fragebögen auch von einer Kontrollgruppe von nicht am Programm Beteiligten ausgefüllt werden soll, enthält dieser keine expliziten Fragen zum Mathe.Forscher-Programm. Auch die Dimensionsfragen sind so formuliert, dass sie von nicht-Mathe.Forschern verstanden und beantwortet werden können, wie das folgende Beispiel (Tabelle 1) zeigt.

	stimmt gar nicht				stimmt genau
Ich schreibe meine mathematischen Ideen gerne auf und spreche gerne darüber.	☐	☐	☐	☐	☐

Tabelle 1: Frage 7.15 aus dem Fragebogen für Lernende zur Mathe.Forscher-Dimension „Sichtbarmachen von Mathematik"

Die Interviews dagegen beinhalten nur Fragen zum Programm. Sowohl die Lehrenden als auch die Lernenden wurden zum Beispiel gefragt, was sie als kennzeichnend für Mathe.Forscher-Unterricht erachten.

Ergebnisse der Pilotstudie

Betrachtet man die einzelnen Aspekte und die Mathe.Forscher-Dimensionen als Gesamtheit, so ergeben sich folgende Mittelwerte bei den Lehrerinnen und Lehrern (Abbildung 1). Man erkennt, dass der Schemaaspekt gegenüber dem Prozess- und dem Anwendungsaspekt in den Hintergrund tritt. Den Statements zum Formalismusaspekt wird gegenüber diesen beiden Aspekten weniger stark zu gestimmt, ist aber dennoch deutlich stärker als der Schemaaspekt.

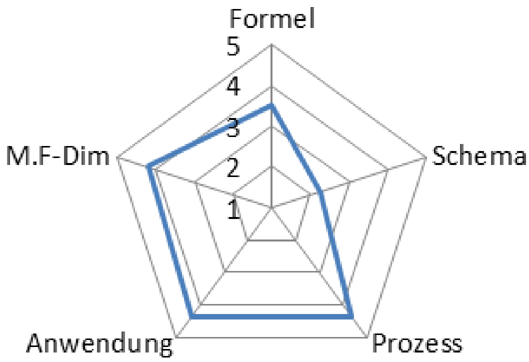


Abbildung 1: Die Mittelwerte aller befragten

Vergleicht man die Korrelationen der einzelnen Aspekte mit den Dimensionen bei den Lehrerinnen und Lehrern (Tabelle 3), so ist der Prozesscharakter mit einer signifikanten Korrelation von r= 0,59 am auffälligsten. Aber auch der Anwendungsaspekt weist mit r=0,39 eine schwache Korrelation mit den Mathe.Forscher-Dimensionen auf.

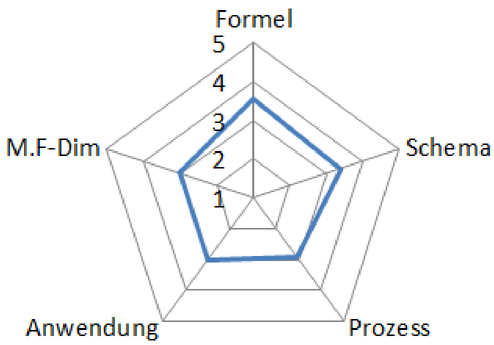


Abbildung 2: Die Mittelwerte aller befragten Lernenden der einzelnen Aspekte und der gesamten Dimensionen

M.F-Dimension/	Formel	Schema	Prozess	Anwendung
r	-0,22	-0,29	0,59	0,39
r^2	0,05	0,08	0,35	0,15

Tabelle 2: Korrelation und Bestimmtheitsmaß der Mathe.Forscher-Dimensionen mit den einzelnen Aspekten bei den befragten Lehrenden

Bei den Lehrerinnen und Lehrern können also 35 Prozent (vgl. Tabelle 3) der Varianz des Prozesscharakters über die Mathe.Forscher-Dimensionen erklärt werden.

Vergleicht man diese Werte bei den Ergebnissen der Schülerinnen und Schüler, so ist ein solcher Einbruch des Schemaaspekts nicht erkennbar. Wie in Abbildung 2 zu sehen, unterscheiden sich die Aspekte und Dimensionen kaum in ihren Mittelwerten. Beim Vergleich der Korrelationen (Tabelle 4) ist jeweils ein schwacher signifikanter Zusammenhang zwischen den Mathe.Forscher-Dimensionen und dem Prozessaspekt bzw. dem Anwendungsaspekt zu erkennen.

Generell kann man also ein dynamische Sicht auf Mathematik zu Grunde legen, wenn die Mathe.Forscher-Dimensionen positiv gesehen werden.

Unterscheidet man die Schülerinnen und Schüler danach, ob sie die Teilnahme am Programm weiterempfehlen würden, so lässt sich feststellen, dass die Schülerinnen und Schüler, die die Teilnahme am Mathe.Forscher-Programm weiterempfehlen würden (Werte 4 und höher), eine signifikant stärkere Zustimmung zu den Mathe.Forscher-Dimensionen aufweisen als die Schülerinnen und Schüler, die das Programm nicht weiterempfehlen würden.

M.F-Dimension/	Formel	Schema	Prozess	Anwendung
r	0,15	-0,09	0,43	0,44
r^2	0,02	0,008	0,19	0,19

Tabelle 3: Korrelation und Bestimmtheitsmaß der Mathe.Forscher-Dimensionen mit den einzelnen Aspekten bei den befragten Lernenden

Die Lernenden, die Mathe.Forscher-Unterricht weiterempfehlen, sind also diejenigen, die mehr Wert auf Elemente des M.F-Unterrichts legen.

Ausblick

Für die Evaluation der Region Heilbronn-Franken sind drei Erhebungszeiträume innerhalb von zwei Jahren geplant (Februar 2016, Juni/Juli 2016, Mai 2017). Diese Evaluation soll nicht nur eine Bestandsaufnahme wie in der Evaluation der Region Rhein-Neckar darstellen, sondern untersuchen, ob sich durch die Teilnahme am Programm über die gesamte Laufzeit Änderungen in der Einstellung gegenüber Mathematik bei den Lernenden und Lehrenden feststellen lassen.

Literatur

Grigutsch, S., Raatz, U., Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematikdidaktik,19(1)*, 3–45.

Kratz, H. (2011). *Wege zu einem Kompetenzorientiertem Mathematikunterricht.* Seelze:Kallmeyer.

Lubke, M., Ernst, S., Trübswetter, A., Ittel, A. (2011). *Programmevaluation Mathe. Forscher. 1. Zwischenbericht*. Berlin: TU.

Ramona BEHRENS, Würzburg

Formulieren mathematischer Fragen – mit Unterstützung eines Taschencomputers

Im Mathematikunterricht, insbesondere beim forschend-entdeckenden Lernen, ist das Stellen von Fragen und Variieren gegebener Situationen ein wichtiger Aspekt (vgl. Behrens 2015). Die KMK-Bildungsstandards (2003) für den Mittleren Schulabschluss betonen unter der Kompetenz Problemlösen, dass Schülerinnen und Schüler lernen sollen, vorgegebene Probleme zu lösen sowie eigenständig Aufgaben zu formulieren.

Das Ziel beim Formulieren von Aufgaben ist es, dass Lernende mithilfe ihrer mathematischen Erfahrung sowie Sachkenntnis aus Situationen selbstständig gutstrukturierte mathematische Aufgaben formulieren. Unter gutstrukturiert wird dabei verstanden, dass der Zielzustand aus den gegebenen Elementen und deren Beziehungen zueinander bestimmt werden kann. (vgl. Stoyanova 1997, McCarthy 1956, Dörner 1987)

Es wird zwischen dem Erzeugen neuer Aufgaben und der Umformulierung gegebener Aufgaben unterschieden. Diese Prozesse können sowohl unabhängig vom Bearbeiten einer Aufgabe als auch vor, während oder nach dem Lösen einer Aufgabe stattfinden. (vgl. Silver 1994)

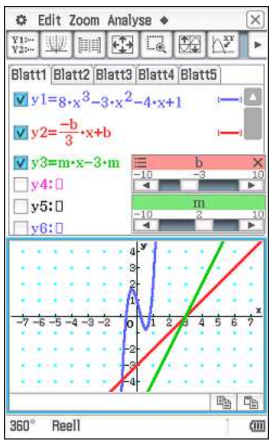
Es werden, abhängig von der Struktur der gegebenen Situationen, drei Ausgangssituationen für das Stellen mathematischer Aufgaben und Fragen unterschieden. Bei ganzstrukturierten Situationen sind Aufgaben oder auch deren Lösungen vorgegeben, zu denen neue Fragestellungen formuliert werden sollen. Halbstrukturierte Situationen sind dadurch gekennzeichnet, dass nicht alle Komponenten einer Aufgabe gegeben sind, beispielsweise könnte die Angabe des Zielzustands fehlen. Bei unstrukturierten Ausgangssituationen sollen Aufgaben zu Situationen formuliert werden, indem mögliche Elemente für die Situation gewählt und Verbindungen zwischen diesen Elementen erzeugt werden. Ein Beispiel dafür ist der Auftrag eine Aufgabe zu formulieren, die für einen Freund schwierig sein könnte. (vgl. Stoyanova 1997)

In dem Projekt sollen die Strategien, die Schülerinnen und Schüler beim Formulieren von mathematischen Fragestellungen und Variieren der gegebenen Situationen aus dem Bereich Funktionen verwenden, identifiziert werden. Dabei wird auch der Frage nachgegangen, ob und wofür die Lernenden, die im Mathematikunterricht einen Taschencomputer einsetzen, diesen auch beim Formulieren und Variieren verwenden. Als Taschencomputer werden in diesem Zusammenhang graphikfähige Taschenrechner bzw. Graphikprogramme mit Computer-Algebra-System bezeichnet. Zudem soll untersucht werden, ob sich beim Formulieren von Fragen und Va-

Beiträge zum Mathematikunterricht 2016, hrsg. v. Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg. Münster: WTM-Verlag

riieren einer gegebenen Situation Schwierigkeiten bzw. Lernchancen feststellen lassen. In der Untersuchung wurden als Ausgangspunkte vier halbstrukturierte Situationen verwendet, bei denen die Lernenden die nur teilweise vorgegebene Struktur der Situation untersuchen und diese mithilfe ihres Wissens und ihren Vorerfahrungen zu einer strukturierten Aufgabe vervollständigen sollten. Halbstrukturierte Situationen wurden gewählt, damit durch verschiedene Interpretationen der vorliegenden Situation Diskussionsbedarf in den einzelnen Gruppen besteht und unterschiedliche Fragen und Aufgabenstellungen entstehen. (vgl. u. a. auch Behrens 2015)

An der Untersuchung nahmen 33 Schülerinnen und Schüler der 10. bzw. 11. Klassenstufe von drei Gymnasien teil, die im Mathematikunterricht einen Taschencomputer einsetzen. Diese wurden in elf Dreiergruppen eingeteilt. Für jede Gruppe standen insgesamt 45 Minuten Zeit zur Verfügung und die Teilnehmer hatten die Möglichkeit, einen Taschencomputer zu verwenden. Zunächst erhielten die Lernenden in Einzelarbeit eine der vier halbstrukturierten Situationen mit dem Arbeitsauftrag sich mathematische Fragestellungen zu überlegen. Danach sollten sie in Gruppenarbeit ihre Fragen zusammentragen und sich Variationen der Situation überlegen. Abschließend wurde ein Gruppeninterview durchgeführt, bei dem die Teilnehmer u. a. nach ihrem Vorgehen und ihren Überlegungen, den aufgetretenen Schwierigkeiten und der Verwendung des Taschencomputers befragt wurden. Zudem sollten sie eine der selbstformulierten Fragestellungen beantworten. Nach der Durchführung mit den einzelnen Gruppen hat mit den Lehrpersonen ebenfalls ein Interview stattgefunden, welche die Situationen in Bezug auf die Vorkenntnisse und Vorerfahrungen der Teilnehmer einschätzen sollten. Die Gruppenarbeit sowie die Interviews wurden jeweils mithilfe einer Videokamera aufgezeichnet und anschließend transkribiert. (vgl. ebd.)



Die folgende halbstrukturierte Situation wurde in der Untersuchung verwendet: Gegeben sind eine Funktion f mit $f(x) = 8x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ und eine Gerade g, die durch den Punkt $P(3|0)$ verläuft. Mithilfe eines Taschencomputers kann die Situation veranschaulicht werden, indem beispielsweise verschiedene Geraden durch den Punkt P gezeichnet und durch Verwenden eines Schiebereglers verändert werden können. Dadurch kann u. a. geprüft werden, ob entdeckte Zusammenhänge auch bei anderen Fällen Gültigkeit haben. Als mögliche Variationen könnten Exponenten der Funktion f geändert oder zusätzliche Parameter hinzugefügt, sowie die Geradengleichung verändert werden. (vgl. ebd.)

Für die Untersuchung wurde zudem auch die folgende Ausgangssituation verwendet: Eine Parabel mit der Gleichung $p(x) = -0{,}5x^2 + 12{,}5$ mit $-5 \leq x \leq 5$ schließt mit der x-Achse ein Rechteck ein. Die Koordinaten zweier Eckpunkte des Rechtecks sind $A(-2|0)$ und $B(2|0)$. Welche mathematischen Fragestellungen fallen euch zu der gegebenen Situation ein?

Im Folgenden wird beispielhaft auf einige Fragestellungen eingegangen, die eine Gruppe zu dieser Situation formuliert hat. Die Fragestellungen deuten an, dass die Schülerinnen und Schüler die Situation unterschiedlich interpretiert und dabei verschiedene Schwerpunkte gesetzt haben. In der Einzelarbeit haben zwei der Teilnehmer zum einen Fragen zur Untersuchung der Parabel gestellt, die sie aus dem Mathematikunterricht kannten. Darunter finden sich Fragen nach Nullstellen, Scheitelpunkten, Symmetrie sowie Definitions- und Wertemenge der Parabel. Zum anderen wurden auch Fragestellungen formuliert, die sich nur auf das Rechteck bezogen, wie die Bestimmung von Flächeninhalt und Länge der Seiten des Rechtecks. Die Fragen von zwei Versuchsteilnehmern, welche in der Einzelarbeit formuliert wurden, beziehen sich hauptsächlich entweder auf die Parabel oder auf das Rechteck, weshalb dabei auch kaum Verknüpfungen zwischen diesen Objekten erkennbar sind. Diese Versuchsteilnehmer haben die Situation größtenteils statisch betrachtet. Des Weiteren wurden Fragen formuliert, welche die Lernenden mit ihren Vorkenntnissen nur näherungsweise beantworten konnten. Darunter fällt die Frage nach der Fläche, die die Parabel über der x-Achse abdeckt bzw. mit etwas anderem Fokus die Frage nach dem Anteil des Rechtecks an der Gesamtfläche. „Durch Hinzufügen welchen Faktors kann man den Scheitelpunkt der Parabel auf die x-Achse verschieben?“ sowie „Finde das Rechteck mit der größtmöglichen Fläche [...]“ zeigen, dass die beiden betrachteten Lernenden auch eine dynamische Sichtweise auf die Situation haben. Der dritte Teilnehmer dieser Gruppe hat während der Einzelarbeit keine Frage formuliert, die sich ausschließlich auf die Parabel bezieht, sondern hat den Fokus vor allem auf das Rechteck gelegt. Jede der Fragestellungen beginnt mit der Formulierung „Wo müssen die Punkte C/D liegen, damit ...?“ Beispielsweise wurde nach der Lage der Eckpunkte C und D des Rechtecks gefragt, damit das Rechteck einen bestimmten Flächeninhalt besitzt oder der Umfang des Rechtecks am größten ist. Hierbei wurde die Situation nur dynamisch betrachtet. Auch während der Gruppenarbeit dieser beispielhaft betrachteten Gruppe, bleibt eine Unterscheidung von Fragen zu der Parabel und dem Rechteck erkennbar. Zu der Parabel werden Standardfragen zur Untersuchung von Funktionen zusammengetragen. Eine Frage hat sich im Laufe der Gruppenarbeit ergeben. Dabei geht es darum, die Winkel zu bestimmen, welche sich durch den Schnitt der Parabel mit der x-Achse ergeben. Im anschließenden Interview haben die Lernenden erklärt, wie sie die Größe des Winkels durch Einfügen von zusätzlichen Dreiecken näherungsweise bestimmen würden. Zum Rechteck haben die Lernenden vor allem Fragen bezüglich der Veränderung des Rechtecks formuliert. Hier wurden insbesondere die Fragestellungen notiert, die der oben als dritte Versuchsteilnehmer bezeichnete Lernende in der Einzelarbeit formuliert hatte. Eine weitere Fragestellung, die aus der Diskussion entstanden ist, bezieht sich darauf, wie viele Quadrate in die Parabel über der x-Achse passen, ohne dass weitere Bedingungen, beispielsweise bezüglich der Größe der Quadrate, genannt werden. Die Strategien, die diese Gruppe bei der Formulierung und Variation verwendet hat, lassen sich mit Extremalisieren, Dynamisieren, Spezialisieren (Hinzufügen von Bedingungen) und Verallgemeinern (Weglassen von Bedingungen) bezeichnen (vgl. auch Schupp 2002).

Literatur

Behrens, R. (2015): Formulieren von mathematischen Fragestellungen – unterstützt durch Taschencomputer. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2015 (S. 124–127). Münster: WTM-Verlag

Dörner, D. (1987): Problemlösen als Informationsverarbeitung. Stuttgart: Kohlhammer.

Kultusministerkonferenz (2003): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.

http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf [15.02.2016]

McCarthy, J. (1956): The Inversion of Functions Defined by Turing Machines. http://www-formal.stanford.edu/jmc/inversion.pdf [15.02.2016]

Schupp, H. (2002). Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. In: For the Learning of Mathematics, 14, 1, FLM Publishing Association, Vancouver, British Columbia, Canada. 19–28. http://flm-journal.org/Articles/2A5D152778141F58C1966ED8673C15.pdf [15.02.2016]

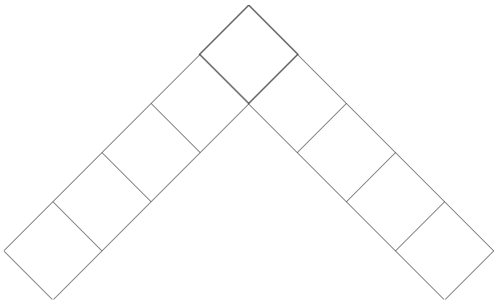
Stoyanova, E. N. (1997): Extending and exploring students' problem solving via problem posing. A study of years 8 and 9 students involved in Mathematics Challenge and Enrichment Stages of Euler Enrichment Program for Young Australiens. Edith Cowan University, Perth, Australia. http://ro.ecu.edu.au/theses/885/ [15.02.2016]

Stephan ROSEBROCK, Karlsruhe

Entdeckendes Lernen in der Sekundarstufe am Beispiel von Zahlenwinkeln

1. Entdeckendes Lernen und Zahlenwinkel

Nicht alle mathematischen Themen eignen sich gleichermaßen zum entdeckenden Lernen im Mathematikunterricht. Inhalte sind dann geeignet für Entdeckendes Lernen in der Schule, wenn es sich um einfach zu verstehende, motivierende Fragen handelt, wenn substanzielle Mathematik dahintersteckt und wenn die Fragen nicht zu schwer sind (Rosebrock 2011). Hier soll ein solches Thema aus dem Bereich Kombinatorik vorgestellt werden, welches mathematisch erstaunlich viel bietet.



Für die Grundschule gibt es eine schöne ‚Forschungsaufgabe' (Betzold 2012): Die Zahlen von 1 bis 9 sind so in den ‚Zahlenwinkel' links einzuschreiben, dass im rechten und linken Arm jeweils 4 Zahlen stehen und eine Zahl verbindet beide Arme. Dabei muss die Summe der Zahlen im linken Arm gleich der Summe der Zahlen im rechten Arm sein.

Deutlich schwieriger ist die Frage, wie viele Möglichkeiten es gibt, wenn n Zahlen so auf n Kästchen zu verteilen sind. Eine Strategie, die Schüler im Fall n=8 finden können, ist folgende: Schreibt man die 9 in die Ecke, so bleiben die Zahlen von 1 bis 8 zu verteilen. Die lassen sich in 4 Paare zerlegen mit jeweils Summe 9: (1,8), (2,7), (3,6), (4,5). Diese 4 Paare lassen sich in 3 Kombinationen verteilen. Sind das alle Lösungen für n=8?

Wir formalisieren das Problem: Sei $W_n=\{1, \dots , n+1\}$ und k ein Element aus W_n. Eine Zerlegung von $W_n\setminus\{k\}$ in zwei Mengen M_0 und M_1 heißt *zulässig*, wenn beide Mengen gleich mächtig sind und die Summe der Zahlen in beiden Mengen gleich groß ist. Sei $f_n(k)$ die Anzahl der zulässigen Zerlegungen von $W_n\setminus\{k\}$, wobei zwei Zerlegungen, bei denen nur die beiden Mengen vertauscht werden, nicht unterschieden werden sollen.

2. Ein paar mögliche Entdeckungen

n muss gerade sein, damit man nach dem Streichen der Zahl k zwei gleich mächtige Mengen bilden kann. Ist n durch 4 teilbar, so muss die zu streichende Zahl k ungerade sein, sonst ist die Summe der übrigen Zahlen ungerade und somit nicht durch 2 teilbar. Lässt n beim Teilen durch 4 den Rest 2, so muss aus demselben Grund k gerade sein.

Es gilt $f_n(k) = f_n(n+2-k)$. Zum Beweis definiert man eine bijektive Funktion h: $W_n \to W_n$ durch h(m)=n+2-m und rechnet nach, dass eine Lösung mit der gestrichenen Zahl k auf eine Lösung mit der gestrichenen Zahl n+2-k abgebildet wird.

Es ist auch nicht sehr schwer, verschiedene Ungleichungen von folgendem Typ zu beweisen: $2 \cdot f_n(k) \le f_{n+4}(k)$. Geschickt kann man hier zusätzliche Zahlen für eine zulässige Zerlegung der Menge $W_{n+4}\backslash\{k\}$ zu einer zusätzlichen Zerlegung der Menge $W_n\backslash\{k\}$ auf zwei verschiedene Arten hinzufügen.

Eine schöne Rekursion zur einfachen Ermittlung der Anzahl möglicher Lösungen bekommt man auf folgende Weise:

Sei M = $\{m_1 ,\dots, m_j\}$ eine beliebige endliche Menge natürlicher Zahlen. Seien $s, t \in \mathbb{N}_0$ und sei g(M, s, t) die Anzahl der Möglichkeiten s als Summe von genau t Elementen aus M darzustellen.

Es gilt für s > 0: $g(M, s, t) = g(M\backslash\{m_j\}, s, t) + g(M\backslash\{m_j\}, s-m_j, t-1)$

Dabei beschreibt der erste Summand die Anzahl derjenigen Summen, die m_j nicht enthalten und der zweite Summand die Anzahl derjenigen Summen, die m_j enthalten. Es gibt drei Randbedingungen, mit denen dann schnell die Anzahl der zulässigen Zerlegungen gezählt werden können. Im Fall der Zahlenwinkel ist

M = {1, … , k-1, k+1, … , n+1}, s = ((n+1)(n+2)/2-k)/2 und

$f_n(k)$ = g(M, s, n/2) / 2. Die letzte Division durch 2 kommt zustande, weil durch die Rekursion auch diejenigen Zerlegungen als zulässig gezählt werden, die sich durch Vertauschen der beiden Mengen ergeben.

Man kann, als Verallgemeinerung des ursprünglichen Problems, sich leicht klar machen, dass das gegebene Problem sich nicht wesentlich ändert, wenn man statt mit W_n mit einer Menge {m, … , m+n} startet.

3. Der Spezialfall k = n+1

In diesem Abschnitt untersuchen wir den Fall der gestrichenen Zahl n+1. Die Summe der übrigen Zahlen {1, … , n} ist n(n+1)/2. Aufgabe ist also, genau n/2 Zahlen auszuwählen, deren Summe n(n+1)/4 ist.

Wir kodieren eine zulässige Zerlegung auf folgende Weise: Wir betrachten Worte $w = x_1, \dots, x_n$ mit $x_i \in \{0,1\}$ und gleich vielen Einsen wie Nullen, wobei $x_i = l$ heißt: $i \in M_l$. Z.B. bedeutet das Wort 11000011 für n=8: M_0 = {3, 4, 5, 6} und M_1 = {1, 2, 7, 8}.

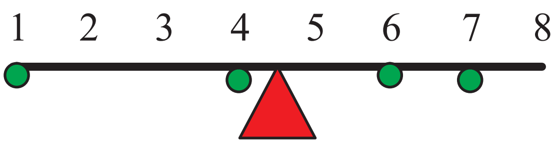
Ein solches Wort $w = x_1, \dots, x_n$ heißt *zulässig*, falls es die folgende Formel (1) erfüllt:

$$\sum_{i=1}^{n} i x_i = \sum_{i=1}^{n} i(1 - x_i)$$

Ein Wort ist damit zulässig, falls es zu einer zulässigen Zerlegung von $W_n \setminus \{n+1\}$ führt. Auf der linken Seite der Formel steht nämlich die Summe der Zahlen aus M_1 und auf der rechten Seite die Summe der Zahlen aus M_0.

Es gibt genau $\binom{n}{n/2}$ binäre Worte der Länge n mit genau n/2 Einsen. Dieser Binomialkoeffizient ist also eine obere Schranke für die Anzahl möglicher zulässiger Zerlegungen von $W_n \setminus \{n+1\}$.

Wir schildern ein, auf den ersten Blick, völlig anderes Problem: Wir haben eine Balkenwaage mit einem Balken der Länge n-1, der genau in der Mitte gelagert wird. Wir möchten n/2 gleich schwere Gewichte so an ganzzahligen Punkten lagern, dass die Waage im Gleichgewicht bleibt. Wir kodieren die Positionen einer solchen Gewichtsverteilung durch ein Wort $w = x_1, \ldots, x_n$ mit $x_i \in \{0,1\}$ mit gleich vielen Nullen wie Einsen. Dabei bedeutet $x_i = 1$, dass an Position i ein Gewicht hängt.



Zum Beispiel hat man für n=8 bei dem Wort 10010110 die Waage im Gleichgewicht. Es hängen Gewichte an Positionen 1, 4, 6, 7. Die Waage ist an der Stelle 4,5 gelagert. Die Abstände auf der linken Seite bis zur Mitte sind 3,5 und 0,5, zusammen 4. Die Abstände rechts sind 1,5 und 2,5 mit derselben Summe, so dass die Waage im Gleichgewicht ist. Gleichzeitig sehen wir, dass $M_0 = \{2, 3, 5, 8\}$ und $M_1 = \{1, 4, 6, 7\}$ eine zulässige Zerlegung von $W_8 \setminus \{9\}$ ist.

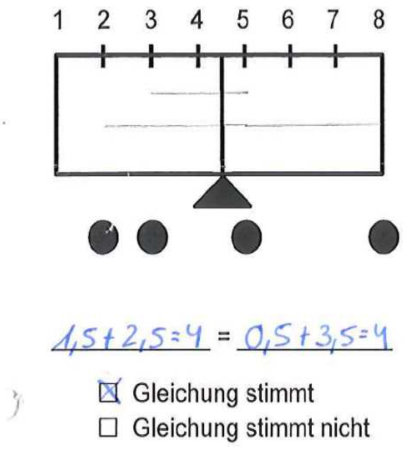
Was wir hier am Beispiel sehen, ist allgemein wahr: Die Waage ist genau dann im Gleichgewicht, wenn es sich um eine zulässige Zerlegung der zugehörigen Mengen handelt, genauer:

Satz: Ein Wort $w = x_1, \ldots, x_n$ mit $x_i \in \{0,1\}$ mit gleich vielen Nullen wie Einsen interpretiert als Positionen in einer Balkenwaage führt genau dann zum Gleichgewicht in dieser Waage, wenn das Wort zulässig ist.

Der Beweis ist nicht schwierig, man muss nur die Gleichung zum Gleichgewicht der Balkenwaage hinschreiben und umformen bis man die Formel (1) erhält.

Der Autor hat mit einem Seminar in einer 8. Hauptschulklasse das Thema getestet. Wir sind dabei mit einer Balkenwaage gestartet und haben uns zu den Zahlenwinkeln vorgearbeitet. Links die Prüfung einer Schülerin, ob eine Waage im Gleichgewicht ist.

Die Balkenwaage führt uns zu einer unteren Schranke: Hängen wir links beliebig Gewichte, können die rechts immer symmetrisch ergänzt werden, d.h. $f_n(n+1) \geq \binom{n/2}{n/4}$.



Durchläuft n die Vielfachen von 4, so ergibt sich für $f_n(n+1)$ eine bekannte Folge (siehe OEIS): 1, 4, 29, 263, 2724, 30554, …

Barrow (Barrow 2010) fand folgende äquivalente Formulierung: Wie kann man die Ruder von n Ruderern so in einem Ruderboot platzieren (also jeweils links oder rechts vom Boot), dass beim Rudern das Boot nicht nach rechts oder links zieht?

Literatur

Barrow D., *Rowing and the Same-Sum Problem Have Their Moments*, arXiv:0911.3551, (2010).

Bezold A., Argumentationskompetenzen im Unterrichtsalltag fördern,analysieren und bewerten}, in: *Prozessbezogene Kompetenzen: Fördern, beobachten, bewerten. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2012*. Hrsg. A. Steinweg. University of Bamberg Press, Bamberg (2012), S. 9-22.

Rosebrock, S. (2011). Begabungs- und Kreativitätsförderung aus Sicht der Mathematikdidaktik, in Schenz/Rosebrock/Soff (Hg.). *Von der Begabungsförderung zur Begabungsgestaltung – Vom kreativen Umgang mit Begabungen in Mathematik,* LIT-Verlag, Berlin, S. 85 - 96.

OEIS. (2016) The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. A168238; https://oeis.org/A168238

Brigitte LUTZ-WESTPHAL, Alexander SCHULTE, Berlin

Mathematische Forschung – Was Forschendes Lernen im Mathematikunterricht aus der Praxis lernen kann

Forschendes Lernen im Mathematikunterricht ist in den letzten Jahren immer mehr in den Fokus didaktischer Grundlagenforschung gerückt (vgl. Lutz-Westphal, 2014; Roth/Weigand, 2014). Es zeichnet sich eine klare Abgrenzung von forschendem Lernen in den Naturwissenschaften ab, da die betrachteten Objekte in der Mathematik meist abstrakt und nicht direkt beobachtbar sind. Dies hat Konsequenzen auf die Arbeits- und Kommunikationsformen (vgl. Heintz, 2000). Das Explorieren und vielfältige Hantieren mit mathematischen Strukturen muss einen breiten Raum einnehmen. Dazu kommt eine explizite Hervorhebung des Fragenstellens in eigenständiger und inhaltlich vielfältiger, mathematisch substantieller Weise (Lutz-Westphal 2014). Die Diskussion und Publikation der Erkenntniswege und Ergebnisse in geeigneter Form vervollständigen den Rahmen eines tatsächlich an Forschung angelehnten Unterrichts.

Um ein fundiertes didaktisches Konzept entwickeln zu können, muss die mathematische Forschungspraxis aus didaktischer Sicht untersucht und charakterisiert werden. Zudem interessiert die Vorstellung von Lernenden bezüglich mathematischer Forschung, um geeignete didaktische Brücken zwischen Vorstellung und Praxis bauen zu können.

1. Was verbinden Lernende mit mathematischer Forschung?

Zunächst muss geklärt werden, mit welchen Vorstellungen zu mathematischer Forschungspraxis Schülerinnen und Schüler in den Unterricht kommen. In einer ersten Untersuchung wurden insgesamt 60 Schülerinnen und Schüler aus den Jahrgangsstufen 5 und 9 sowie der Oberstufe eines Berliner Gymnasiums befragt. Eine erste Auswertung der Antworten auf die offenen Fragen ergab: Mathematik und mathematische Forschung werden von den Lernenden als Hilfsmittel wahrgenommen. In den Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler kann das Erforschen von Mathematik helfen, die Welt zu verstehen, dient aber keinem Selbstzweck. Mathematik wird durch eine hohe Anwendungsorientierung charakterisiert und nicht um ihrer selbst willen betrieben. Die Lernenden nehmen Mathematik als etwas wahr, das in Forschungsarbeit entdeckt und beschrieben werden kann, aber nicht im eigentlichen Sinne „gemacht" wird. Auffällig ist dabei die Gleichsetzung von *Rechnen* und *Mathematik*. Forschungsanlässe könnten in der Untersuchung von besonderen Zahlen (bspw. Primzahlen) und der Vereinfachung von „komplizierten" Rechnungen bestehen. Ansonsten wird Mathematik überwiegend als abgeschlossenes Themenfeld wahrgenommen, in dem schon „alles" erforscht ist. Allerdings hebt ein Großteil der Schülerinnen und Schüler durch alle befragten Jahrgangsstufen hindurch hervor, dass das Nachdenken über und das Erforschen von Mathematik unabhängig von räumlichen Gegebenheiten überall stattfinden könne. Mathematik finde vorwiegend im Kopf statt. Die Vorstellungen von mathematische Forschung scheinen sich kaum von den Weltbildern zur Mathematik selbst (vgl. Grigutsch/Raatz/Törner, 1998) zu unterscheiden.

2. Wie kann mathematische Forschungspraxis charakterisiert werden?

Um mathematische Forschungspraxis zu beschreiben und darauf aufbauend forschendes Lernen authentisch zu gestalten, ist ein didaktischer Blick auf die Forschungspraxis nötig. Es ist dabei von Interesse, was in der Praxis erforscht wird und wie Mathematikerinnen und Mathematiker zu ihren Forschungsthemen kommen. Um der Funktionsweise mathematischer Forschung auf den Grund zu gehen, soll außerdem die alltägliche forschende Tätigkeit charakterisiert werden. In Vorbereitung einer qualitativen Studie wurden Selbstbeschreibungen verschiedener Mathematikerinnen und Mathematiker ausgewertet.

Es ist zu beobachten, dass bei der Wahl der Forschungsthemen das persönliche Interesse zwar eine gewisse Rolle spielt, aber nicht entscheidend zu sein scheint. Vielmehr werden die Themen häufig durch äußere Gegebenheiten und Vorgaben (beispielsweise Forschungsaufträge aus Drittmittelfinanzierungen) sowie die Relevanz des Themas für die Community und die damit verbundenen Möglichkeiten zur Profilierung vorgegeben. Forschungsalltag besteht nicht nur darin, Ideen zu entwickeln und zu konkretisieren. Fachlicher Austausch auf kollegialer Ebene und der Abgleich von Erwartungen und Möglichkeiten mit Industriepartnern scheinen ebenso wichtig wie Recherche und Überarbeitung von Ergebnissen und Veröffentlichungen. Erfolgreiche Forschung scheint häufig weniger von der Begabung als von Zielstrebigkeit und Fleiß abzuhängen. Vor der Gewinnung neuer Erkenntnisse steht das Aneignen von Wissen. Auf Grundlage eines etablierten Wissenskanons werden Fragen und Anknüpfungspunkte entwickelt, Intuition und Erfahrung helfen dabei. Eigene Ergebnisse stehen dabei in einem ständigen Abgleich mit anderen veröffentlichten Ansätzen. Forschung muss nicht zwangsläufig bedeuten, etwas völlig Neues zu schaffen oder zu entdecken. Oft wird bereits Bekanntes modifiziert, indem Variationen gefunden und Alternativen beachtet werden.

Zusammenfassend lässt sich schlussfolgern, dass mathematische Forschung nicht zwingend aus intrinsischer Motivation heraus erfolgt und meist in einem engen inhaltlichen Rahmen geschieht. Eigenes Nachdenken ist ebenso entscheidend wie fundiertes Recherchieren. Forschungsarbeit ist oft sehr kleinschrittig und basiert auf der Grundlage fundierten Wissens.

3. Welche Rückschlüsse ergeben sich für den Mathematikunterricht?

Authentisches forschendes Lernen im Mathematikunterricht sollte den Lernenden mathematische Arbeitstechniken vermitteln, indem eine Orientierung an der Forschungspraxis stattfindet, und auf einem fachlichen Bezugsrahmen aufbauen, der von den Lernenden durchdrungen wurde. Vor allem Schülerinnen und Schüler, die wenig Erfahrungen mit forschendem Lernen haben, benötigen eine fördernde Begleitung. Die Lernenden sollten eine Vorstellung über mögliche Vorgehensweisen beim Forschen haben und es muss Klarheit darüber herrschen, was der fachliche Rahmen ist. Die Vorgabe der Forschungsthemen durch die Lehrkraft beeinträchtigt dabei nicht die Authentizität des Forschungsvorhabens. Der Unterricht ist so auszugestalten, dass Raum und Anleitung für das Entwickeln von Forschungsfragen gegeben wird und es Phasen für den fachlichen Austausch mit den Mitschülerinnen und Mitschülern gibt. Auch wenn forschendes Lernen in der Regel ein Nacherforschen von subjektiv unbekannten Inhalten ist, kann authentische Forschungsarbeit stattfinden (vgl. Roth/Weigand, 2011; Messner, 2009).

4. Wie kann Unterricht darauf aufbauend konkret ausgestaltet werden?

Im Folgenden wird ein Unterrichtsprojekt vorgestellt, welches das Konzept des forschenden Lernens nutzt, um die erarbeiteten Unterrichtsinhalte zu wiederholen und zu vertiefen.

Das Unterrichtsbeispiel führt anhand des bekannten Sudoku-Rätsels in die mathematische Programmierung ein. Die Einheit wurde in einem Wahlpflichtkurs Mathematik (9. Schuljahr) an einem Berliner Gymnasium durchgeführt. Das methodische Ziel der Einheit ist die Vermittlung von wissenschaftlichen mathematischen Arbeits- und Denkweisen. Die inhaltlichen Ziele sind die Einführung in die (ganzzahlige) mathematische Modellbildung und der Umgang mit Baumsuchalgorithmen (Propagierung, Probing, Branching). Das Thema Sudoku knüpft an die Lebenswelt der Lernenden an, denn die Regeln und die gängigen „händischen“ Lösungsstrategien des Sudoku-Rätsels sind den meisten Schülerinnen und Schülern bekannt. Zunächst wurde lehrkraftgesteuert ein ganzzahliges Modell von Sudoku entwickelt (vgl. Kaibel/Koch, 2006) und eine Einführung in die gängigen Baumsuchalgorithmen durchgeführt. Anschließend folgte eine Phase der selbstständigen Forschung. Dabei bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler selbst gestellte Fragen wie „Nach welchen Kriterien wird ein Sudoku als ‚schwer‘ oder ‚einfach‘ bezeichnet?“ oder „Welche ‚Spezialregeln‘ sind denkbar und welchen Einfluss haben diese Regeln darauf, ob das Sudoku eindeutig lösbar ist, wie viele Zahlen mindestens dazu angegeben werden müssen und wie viele verschiedene Sudokus es gibt.“ Diese Phase wies einen hohen Grad an Selbstdifferenzierung auf. Die Lernenden arbeiteten gemäß ihren Fähigkeiten und wählten selbst den Komplexitätsgrad der Forschung. Durch den fachinhaltlichen Fokus der Einheit und die Beschäftigung mit einem aus der Schule unbekannten Teilgebiet der Mathematik, das aktuell von herausragender wissenschaftlicher Bedeutung ist, erfuhren die Lernenden ein sehr authentisches Forschungserlebnis. Durch den forschenden Ansatz fand ein produktiver Umgang mit dem Lerngegenstand statt, der zu einem tiefen Verständnis führte. Die Mathematik sowie die Arbeitsweisen wurden sichtbar gemacht und systematisiert.

5. Fazit

Forschendes Lernen hat neben dem Ziel der Vermittlung von Forschungsmethodik und einer hinterfragenden Haltung die Funktion der fachlichen Auseinandersetzung. Es sollte in fachlich klar gestecktem Rahmen passieren und benötigt eine Wissensbasis zum Thema, die durchaus durch die Lehrkraft vermittelt werden kann. Auf dieser Basis kann dann eine authentische forschende Tätigkeit geübt und praktiziert werden und gleichzeitig eine fundierte Durchdringung des Lerngegenstandes stattfinden.

Literatur

Grigutsch, S., Raatz, U., Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19,* 3–45.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Wien: Springer.

Kaibel, V., Koch, T. (2006). Mathematik für den Volkssport. *Mitteilungen der DMV, 14*, 93–96.

Lutz-Westphal, B. (2014). Das forschende Fragen lernen. Pflasterungen: scheinbar Bekanntes neu durchdringen. *Mathematik lehren, 184,* 16–19.

Messner, R. (2009). Forschendes Lernen aus pädagogischer Sicht. In Messner, R. (Hrsg.), *Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen* (S. 15-30). Hamburg: Edition Körber-Stiftung.

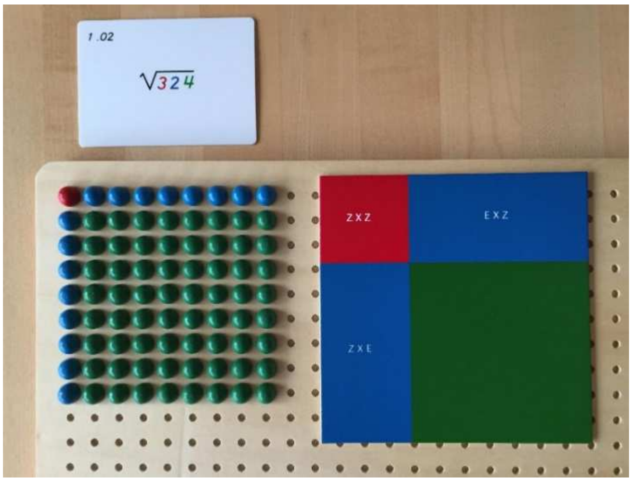
Roth, J., Weigand, H.-G. (2014). Forschendes Lernen im Mathematikunterricht. In Roth J., Ames, J. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 999–1002). Münster: WTM-Verlag.

Sandra THOM, Metjendorf

Von der fortgesetzten Addition zum Wurzelziehen in der Grundschule. Jerôme S. Bruner zum 100. Geburtstag

Es waren zwei neunjährige Mädchen, die eines Tages kurz vor Beginn der Mathematikstunde zu mir kamen und stolz die Wurzeln zweier Zahlen nannten, die sie bei einem großen Bruder „aufgeschnappt“ hatten. Durch Ordnung der von beiden Mädchen unsystematisch genannten Zahlen und ihrer Wurzeln („Die Wurzel von 4 ist 2, die Wurzel von 9 ist 3, die Wurzel von 16 ist …?“) konnten sie diese arithmetische Reihe fortsetzen und damit den Zusammenhang zu den im zweiten Schuljahr im Zusammenhang mit der Erarbeitung des Kleinen Einmaleins behandelten Quadratzahlen herstellen: Sie wollten unbedingt noch mehr ‚Wurzeln ziehen‘. Dies ist auch schon in der Grundschule möglich.

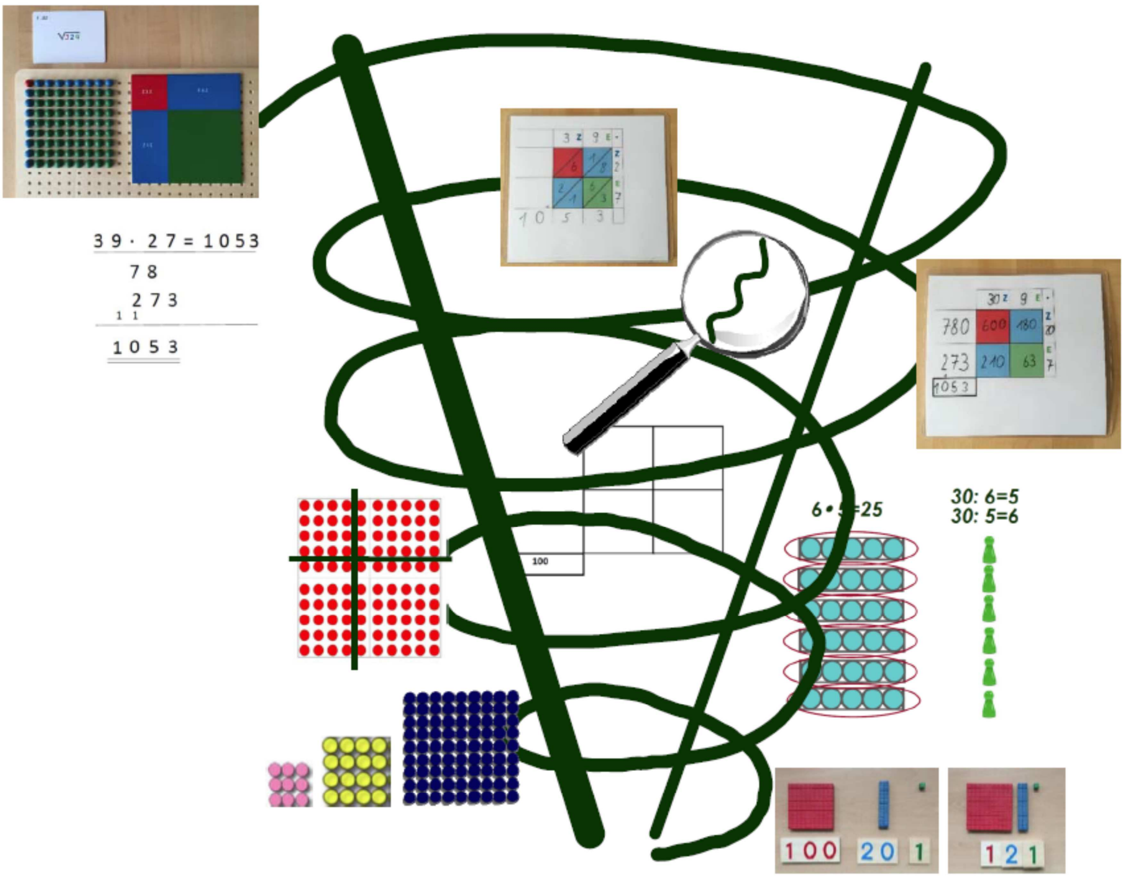
Jede beliebige Quadratzahl kann z.B. mit Plättchen bei ausreichend Platz und Zeit und Material als Quadrat ausgelegt werden; über die Seitenlänge als Menge der verwendeten Plättchen ließe sich damit die Wurzel bestimmen. Da jedoch die genannten Ressourcen bekanntlich beschränkt sind, muss bei großen Zahlen eine „Abkürzung“ her, ein Algorithmus zum Wurzelziehen.[1]



Das Wurzelbrett Montessoris materialisiert Wurzeln als flächige Darstellung (bei zweistelligen Wurzeln von Zahlen zwischen 101 und 9.999 auf Basis der binomischen Formel), wie am Beispiel der $\sqrt{324}$ bildlich dargestellt. Kinder können bei entsprechendem Vorwissen mit dem Material durch einen Verteil-Algorithmus unter Nutzung der distributiven Zerlegung der Stellenwertdarstellung Wurzeln ziehen: „Jedes Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeden Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden.“ (Bruner (1973b) 44)). Voraussetzung ist ein Unterrichten im Sinne des Spiralcurriculums (Bruner (1973b) 27ff.), zu dessen Konstruktion die Lehrkraft vor allem eine vertiefte Analyse mathematischer Inhalte durchführen und Kenntnisse fundamentaler Ideen, kognitions- und entwicklungspsychologischer Zusammenhänge sowie individueller Lernvoraussetzungen besitzen muss.

[1] Vergleiche vertiefend zum Algorithmus und möglichen Ebenen des Verstehens Winter (2011).

Um das Wurzelbrett verstehend nutzen zu können, braucht das Kind grundlegende Vorstellungen mathematischer Inhalte, so zur Rechteckdarstellung der Multiplikation, besonders Quadratzahlen, wie sie u.a. mit Perlenmaterial erzeugt werden können, zum Verteilen und Aufteilen (z.B. auch mit Perlenmaterial), zur Zerlegung von Zahlen als Teil des Stellenwertverständnisses (z.B. durch Mehrsystemmaterial und Zahlenkarten) sowie zur distributiven Zerlegung im Bereich der Multiplikation sowohl an flächigen ikonischen Darstellungen (Hunderterfeld z.B.) einerseits als auch symbolischen Notationen andererseits (Malkreuz). Damit entspricht dieses Spiralcurriculum für das Wurzelziehen weitgehend dem der schriftlichen Multiplikation, was durch den operativen Zusammenhang zwischen Multiplizieren und Wurzelziehen als Spezialfall der Division bedingt ist, bei dem Divisor und Quotient als gesuchte Größe(n) gleich groß sind und durch ein Verteilverfahren algorithmisch ermittelt werden können.



Lernen und insbesondere Entdeckungslernen geht mit Vorgängen ‚im Kopf' des Menschen vor sich, mit Um- oder Neustrukturierungen der kognitiven Struktur, die aktiv vom lernenden Individuum vorgenommen werden ((Bruner (1973a) 16). Die in obige Darstellung einer möglichen Curriculumspirale eingebrachte Lupe soll darauf hinweisen, dass Lernvorgänge mit Anstrengung(sbereitschaft) durch das Kind verbunden sind, um die Stufe der von Vygotskij so genannten Zone der gegenwärtigen zur Zone der nächsten Entwicklung (Lompscher / Kühn (1977[4]) 22ff.)) zu erklimmen. *Scaffolding* entspricht dabei einer Lenkung von Entdeckungslernen. Grundlage für Entdeckungen ist erst einmal die Fokussierung der Aufmerksamkeit. Bereits Bruner ((1971) 47ff.) hatte auf die Problematik der individuellen Dispositionen des Kindes hinsichtlich möglicher Transfers hingewiesen. Der Einsatz von *Analogiebrücken* (Thom (2010) 255ff.) ist daher ein wichtiger Bestandteil von *scaffolding*. Analogiebrücken werden zum Teil als ‚stummer Impuls' in einem auf Entdeckungen ausgerichteten Unterricht eingesetzt. Sie sind jedoch nicht nur methodisch, sondern vielmehr didaktisch zu sehen: Sie nutzen Oberflächenähnlichkeit u.a. durch verbindende Farben oder Handlungen oder gleiche Aufgaben und verbinden im Hinblick auf das Spiralcurriculum im Zuge aufsteigender Abstraktion sowohl verschiedene Repräsentationsebenen (intermodaler Transfer) als auch zunehmend abstrakter Inhalte auf einer einzelnen Darstellungsebene (intramodaler Transfer).

Ähnlich ist dies für die Einführung des Wurzelziehens möglich: Indem die beiden o.g. Mädchen zunächst nach dem ihnen vertrauten Multiplikationsschema des Malkreuzes eine entsprechende Malaufgabe ($18 \cdot 18$) rechneten, konnten sie dieses Schema anschließend auf dem Wurzelbrett mit den ihnen seit dem zweiten Schuljahr vertrauten Stellenwertfarben als Stecker nachlegen, so dass sie die Wurzel wie bei den Quadratzahlen einstelliger ‚Wurzeln' ablesen konnten. Sie abstrahierten sodann das Schema für andere drei- bis vierstellige (Quadrat-)Zahlen und bestimmten so direkt ohne den ‚multiplikativen Umweg' deren Wurzeln. Durch Ausloten der Grenzen (u.a. durch Quadrieren der kleinsten dreistelligen Zahl) konnten sie den Zahlenraum begrenzen. Im Laufe der nächsten Tage legten die beiden Viertklässlerinnen zunächst die Wurzeln aus zuvor bereit gestellten und später aus selbst durch Quadrieren von ‚Wurzeln' errechneten Quadratzahlen und mussten sich dabei ein Vorgehen für das Umgehen mit ‚Resten' überlegen. Voller Begeisterung tauchten sie absolut konzentriert in diese *für sie* überhaupt nicht abstrakte Welt ein und erreichten damit *flow* (Csikczenthimalyi (1985) 61ff.) als Punkt optimaler Passung kindlicher Interessen, Fähigkeiten und Lernvoraussetzungen der Zone der gegenwärtigen Entwicklung und den an sie gestellten Anforderungen des Wurzelziehens in der Zone der künftigen Entwicklung.

Wurzeln müssen für Lehrende und Lernende nicht die abstrakten und nebulösen mathematischen Gebilde im Elfenbeinturm algebraischen Operierens sein, die sie beispielsweise für Lehramtsstudierende nur allzu häufig sind. Versteht man sie geometrisch-algebraisch als ‚Ursprung einer Seite' und als ‚Wurzel' der Quadratzahlen, wie es historisch bei zahlreichen Mathematikern von Euklid in der griechischen Mathematik über Āryabhata und Brahmagupta, al-Khwarizmi und al-Uqlīdīsi in der indisch-arabischen Mathematik bis hin zu Mathematikern des europäischen Mittelalters und der

Neuzeit wie u.a. Fibonacci in der einen oder anderen Variante zu erkennen ist, so kann dieses Wissen und Verständnis als Verbindung historisch-genetischen Lernens mit psychologisch-genetischem Lernen genutzt werden (Thom (2013) 10ff.), um ein Spiralcurriculum zu entwerfen, das auf Grundlage inter- wie intramodalen Transfers Mathematiklernenden wie den beiden oben genannten Mädchen erlaubt, ‚intellektuell ehrlich' Wurzeln *verstehen* und ziehen zu können.

Es ist das Verdienst Jerôme S. Bruners, diese Begrifflichkeiten – entdeckendes Lernen, EIS-Prinzip, Spiralcurriculum – in die Mathematikdidaktik eingebracht und sie damit wie kein anderer nachhaltig geprägt zu haben. Die weitere Erforschung der Gelingensbedingungen entdeckenden Lernens vermag zu seiner Konkretisierung und damit zur weiteren Professionalisierung von Lehrkräften beizutragen. Analogiebrücken sind Teil von *scaffolding* als Lenkung von Entdeckungslernen, sie sind der kognitive Leim entdeckenden Lernens, um *jedem Kind* aktiv-entdeckendes Lernen möglich zu machen – nicht nur bei Wurzeln.

Literatur

Bruner, J. S. (1973a). Der Akt der Entdeckung. In H. Neber (Hrsg.): *Entdeckendes Lernen*. Weinheim / Basel: Beltz, 15-27

Bruner, J.S. (1973b[3]). *Der Prozeß der Erziehung*. Düsseldorf: Berlin Verlag / Pädagogischer Verlag Schwann

Bruner, J. S. (1971). Über kognitive Entwicklung. In ders. et al. (Hgg.). *Studien zur kognitiven Entwicklung. Eine kooperative Untersuchung am "Center for Cognitive Studies" der Harvard-Universität*. Stuttgart: Ernst Klett, 21-53

Csikszentmihalyi, M. (1985). *Das Flow-Erlebnis. Jenseits von Angst und Langeweile: im Tun aufgehen*. Stuttgart: Klett-Cotta

Lompscher, J. / Kühn, H. (1977[4]). Das Lernen als Grundvorgang der Persönlichkeitsentwicklung. In: J. Lompscher et al. (Hgg.). *Psychologie des Lernens in der Unterstufe*. Berlin: Volk und Wissen, 11-74

Thom, S. (2013). Geschichte der Mathematik in der Grundschule. In dies. (Hrsg.). *Historisch-genetisches Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule. Forschen – Fördern – Fordern*. Hildesheim: Franzbecker, 1-26

Thom, S. (2010). *Kinder lernen entdeckend. Eine hermeneutische Untersuchung zur Konzeption und Realisierung des Mathematikunterrichts Maria Montessoris*. Hildesheim: Franzbecker

Winter, M. (2011). Ebenen des Verstehens: Überlegungen zu einem Verfahren zum Wurzelziehen. In M. Helmerich et al. (Hgg.). *Mathematik verstehen. Philosophische und Didaktische Perspektiven.* Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 189-198

Christine GÜNTHER, Berlin; David PLOOG, Hannover; Bernd WOLLRING, Kassel

Der Mathematikkreis – kompetenzorientiertes Erarbeiten mathematischer Fragen mit drei- bis zehnjährigen Kindern

Der *Mathematikkreis* ist ein Instrument zur Lernbegleitung von drei- bis zehnjährigen Kindern. Er betont den Prozesscharakter der Mathematik und unterstützt Fach- und Lehrkräfte dabei, mit Kindern in Dialoge über Mathematik zu treten. Ziel der Stiftung „Haus der kleinen Forscher" ist es, Materialien zur Weiterentwicklung der Interaktionskompetenzen pädagogischer Fach- und Lehrkräfte für eine qualifizierte Bildungsarbeit mit Kindern auch im mathematischen Bereich zur Verfügung zu stellen. Dazu liefert der Mathematikkreis Impulse: Er zeigt auf, wie die Pädagoginnen und Pädagogen mit Kindern mathematischen Fragen systematisch nachgehen können. Seine Entwicklung ist von drei Aspekten bestimmt:

(1) Der Mathematikkreis soll die Spezifik der Mathematik darstellen und beinhalten, insbesondere die Leitidee „Muster und Strukturen" und die „prozessbezogenen Kompetenzen" (Kultusministerkonferenz, 2005).

(2) Der Mathematikkreis soll eine Entsprechung des etablierten naturwissenschaftlichen Forschungskreises (Haus der kleinen Forscher, 2013) für die Mathematik darstellen.

(3) Der Mathematikkreis soll sich auf den verschiedenen Repräsentationsebenen mathematischen Wissens konkretisieren lassen (Bruner, 1960).

Der Zugang zu mathematischen Inhalten ist von eigenem Handeln und Beobachten der Kinder geprägt. Sie machen beiläufig mathematische Erfahrungen und Entdeckungen in ihrem Alltag, bevor die gezielte mathematische Auseinandersetzung beginnt.

Analog zu dem erprobten naturwissenschaftlichen Forschungskreis der Stiftung „Haus der kleinen Forscher" kennzeichnen den Mathematikkreis sechs zyklisch auftretende Phasen des Handelns mit konkreten Materialien und Phasen der Dokumentation und Reflexion.

Phase 1: Mathematische Fragestellung erfassen. Das Ziel der ersten Phase ist es, aus den mathematischen Entdeckungen eine konkrete mathematische Frage zu identifizieren. Die Frage begegnet den Kindern im eigenen Handeln, oder die pädagogischen Fach- und Lehrkräfte stoßen sie an. Leitfragen, die sich die Lernbegleitung in dieser Phase stellen kann, sind: Womit beschäftigen sich die Kinder? Was interessiert sie daran? So werden mathematisch gehaltvolle Situationen im Alltag genutzt, um Fragen aufzuwerfen, die für die Kinder bedeutsam sind.

Entscheidend ist, dass diese eigenen Fragestellungen der Kinder offen sind, der Ausgang des Befassens mit der Frage ist ungewiss. Dies entspricht der wissenschaftlichen Praxis. Jeder mathematische Forschungsprozess beginnt mit Fragen, die fast immer auf Vorarbeiten (oft von vielen anderen) aufbauen. Die mathematische Forschungsfrage ist ebenso offen wie die Frage der Kinder. Im Vorhinein ist unbekannt, ob die Frage einfach oder schwer, lösbar oder unlösbar ist. In dieser Phase werden als prozessbezogene Kompetenzen Teilbereiche des Modellierens angesprochen, nämlich das Erkennen mathematisch relevanter Informationen in Sachsituationen.

Phase 2: Begriffe klären und Bezeichnungen vereinbaren. Diese Phase setzt ein, sobald die Kinder eine Frage formuliert haben, der sie genauer nachgehen wollen. In der wissenschaftlichen Praxis wird in dieser Phase ein Problem formuliert, das nicht durch einen einfachen Beweis lösbar ist. Oft werden dabei einbezogen: analoge Ergebnisse aus anderen mathematischen Gebieten, der Physik usw., Spezialfälle der Ausgangsfrage und Gegenbeispiele für eine Verallgemeinerung. Ggf. folgt das Zerlegen des Problems in kleinere Teilprobleme.

Die Kinder tragen gegebene Informationen zusammen und berücksichtigen bereits Bekanntes. Ziel dieser Phase ist es, dass sich die Kinder auf gemeinsame Bezeichnungen einigen. Um sie dabei zu unterstützen, sind im Mathematikkreis Fragen zur Lernbegleitung festgehalten: Welche Worte benutzen die Kinder? Verstehen alle das Gleiche darunter? Diese Phase beinhaltet Teilbereiche des Kommunizierens und des Problemlösens (Verstehen der Aufgabe nach Pólya, 1995, 19ff.). Darstellen wird angesprochen, sofern die Kinder und die Lernbegleitung die gegebenen Informationen, Bedingungen und gemeinsamen Bezeichnungen festhalten.

Phase 3: Beispiele ausprobieren. Die nun folgende Phase nimmt oft einen sehr großen Teil der Zeit ein. In der mathematischen Praxis werden ständig Beispiele untersucht. Die Anfangsfrage an einem nicht-trivialen Beispiel zu überprüfen, ist nicht nur psychologisch beruhigend, sondern eröffnet auch regelmäßig einen tieferen Einblick in die Struktur des Problems, und damit einen ersten Schritt zur Lösung.

In dieser Phase des Mathematikkreises machen die Kinder analog zur wissenschaftlichen Praxis eigene Erfahrungen zum Gegenstand der Frage. Diese Erfahrungen sind die Grundlage, um Muster zu entdecken. Leitfragen zur Lernbegleitung können in dieser Phase sein: Was möchten die Kinder ausprobieren? Wie können sie dabei vorgehen? Ziel dieser Phase ist es, dass die Kinder systematisch verschiedene Möglichkeiten ausprobieren. Die Kinder verändern Parameter und untersuchen die Wirkung der Veränderung. Außerdem ist es in vielen Fällen sinnvoll, Extremfälle zu testen, z. B. ganz große oder ganz kleine Größenordnungen. Diese Phase spricht

Teilbereiche des Problemlösens an (Extremalprinzip und systematisches Probieren z. B. in Bruder, Collet, 2011).

Phase 4: Muster erkennen. Durch Vergleichen und Ordnen der Beispiele ergeben sich oft Möglichkeiten, Regelmäßigkeiten zu erkennen – das Thema dieser Phase. Mathematiker suchen hier einen Beweisansatz, etwa eine geeignete algebraische, geometrische oder kombinatorische Struktur oder sie entwickeln eine konstruktive Lösung (Algorithmus).

Fragen, die sich die pädagogische Fach- und Lehrkraft zur Lernbegleitung stellen kann, sind: Wie können die Kinder ihre Beispiele darstellen? Was fällt ihnen auf? Die Kinder können dabei gegenständliche Muster erkennen, wie das Schachbrettmuster oder auch Handlungsmuster, etwa die Handlungsfolge eines Klatschspiels. Diese Phase fokussiert die prozessbezogenen Kompetenzen des Darstellens (Visualisieren) und des Problemlösens (Heuristik: etwa Suche nach Beziehungen, Umstrukturieren, Symmetrieprinzip …).

Phase 5: Muster prüfen und nutzen. Hier geht es darum, das gefundene Muster auf weitere Beispiele zu übertragen. Lässt sich nur ein Fall finden, in dem das Muster nicht passt, muss es nochmals überdacht werden. Für Mathematiker bedeutet das, einen formalen Beweis aufzuschreiben, etwa dass der Algorithmus funktioniert. Außerdem werden die Ergebnisse auf Beispiele übertragen, auch für die Praxis (bei angewandter Mathematik, oder in der Physik usw.).

Die Kinder können in dieser Phase ihr gefundenes mathematisches Muster auch auf andere, passende Fragestellungen übertragen, es also auf bestimmte Kontexte anwenden. Dieser Schritt ist immer eine Abstraktionsleistung, also äußerst wichtig im pädagogischen Kontext. Deshalb spricht diese Phase wiederum die prozessbezogene Kompetenz des Modellierens (innermathematische Lösung wieder auf Sachsituation übertragen) an. Außerdem bereiten die Kinder eine Argumentation durch die Prüfung des gefundenen Musters vor.

Phase 6: Ergebnisse erörtern. Die Resultate mathematischer Forschung werden von der mathematischen Gemeinde eingegliedert. Sie werden ihrerseits Ausgangspunkt für neue Fragen und Arbeiten.

Analog ist es Ziel dieser Phase, dass die Kinder ihre Resultate vorstellen. Wie erklären die Kinder ihr Ergebnis? Wie können sie es darstellen? Sie begründen ihre Antworten und versuchen Darstellungsmöglichkeiten dafür zu finden. Möglicherweise ergeben sich neue Fragen, denen die Kinder nachgehen wollen, und der Mathematikkreis beginnt wieder von vorn. Mit der sechsten Phase werden insbesondere die prozessbezogenen Kompetenzen Argumentieren, Darstellen und Kommunizieren angesprochen.

Fazit. Der Mathematikkreis bildet verschiedene Zieldimensionen mathematischer Bildung im Elementar- und Primarbereich ab (Benz et al. (in Vorbereitung)): Die inhaltsbezogene Kompetenz „Muster und Strukturen“ wird als übergreifende Leitidee verstanden und in ihm verankert. Zudem sind die prozessbezogenen Kompetenzen im Mathematikkreis integriert. Er bedient ferner die Zieldimension der mathematikdidaktischen Kompetenzen, indem er Pädagoginnen und Pädagogen dabei unterstützt, passgenaue Lernumgebungen für ihre Kinder umzusetzen.

Das Vorgehen im Mathematikkreis geht mit der wissenschaftlichen Praxis der mathematischen Forschung einher. Es bezieht die reine und die angewandte Mathematik mit ein. Der Mathematikkreis wird durch Fortbildungen und Materialien der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ in der pädagogischen Praxis implementiert.

Literatur

Benz, C., Grüßing, M., Lorenz, J.-H., Selter, C. & Wollring, B. (in Vorbereitung). Zieldimensionen mathematischer. Bildung im Elementar- und Primarbereich. In: Stiftung Haus der kleinen Forscher (Hrsg.), *Wissenschaftliche Untersuchungen zur Arbeit der Stiftung Haus der kleinen Forscher*. Schaffhausen: Schubi Lernmedien AG.

Bruder R., Collet, C. (2011). Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen

Bruner, J. S. (1980) Der Prozess der Erziehung. 5. Aufl. Berlin: Berlin, Originalausgabe (1960) *The Process of Education*.

Kultusministerkonferenz (Hrsg.) (2005). Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf Aufrufdatum 21.03.2016

Pólya, G. (1995). Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme, 4. Aufl. Tübingen und Basel: Francke

Stiftung Haus der kleinen Forscher (Hrsg.) (2013) Der Forschungskreis. http://www.haus-der-kleinen-forscher.de/fileadmin/Redaktion/1_Forschen/Paedagogik/Forschungskreis.pdf Aufrufdatum 22.03.2016

Moderierte Sektion:

Erkundungsstudien zum unterrichtlichen Problemlösen

Frank HEINRICH, Braunschweig

Erkundungsstudien zum unterrichtlichen Problemlösen

Zum Hintergrund

Während „herkömmliches“ Problemlösen relativ gut untersucht ist, muss unser Wissen über Problemlösen im Unterricht noch als recht lückenhaft angesehen werden. Es ist davon auszugehen, dass die im Folgenden aufgeführte Aussage von Winnefeld (1963, S. 96f.) auch heute noch weitgehend zutrifft (vgl. Leiss, 2007, S. 1): „Das problemlösende Denken, wie es im Unterricht wirklich abläuft, ist bisher kaum untersucht worden, obgleich ihm stets eine zentrale Rolle zugebilligt wird.“

Zwar wird in Bildungsstandards und curricularen Vorgaben (vgl. z. B. Kultusministerkonferenz, 2005) die Bedeutung des Problemlösens im Mathematikunterricht hervorgehoben, doch fehlen in der Breite empirische Befunde, wie Probleme unterrichtlich behandelt werden, wie entsprechende Unterrichtsstunden verlaufen.

Durchsucht man die Tagungsbände der Jahrestagungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik seit 2008, lässt sich unschwer feststellen, dass die unterrichtliche Behandlung von Problemen im Mathematikunterricht (ohne spezifische Interventionen) lediglich marginal thematisiert wurde. Auch international wird der diesbezüglich geringe Kenntnisstand seit längerer Zeit beklagt (z. B. Fan & Zhu, 2007).

Die Problematik macht auf eine empfindliche Forschungslücke aufmerksam, insbesondere weil Problemlöseunterricht besondere Anforderungen an die Lehrperson stellt. Diese muss beispielsweise Lernende durch passende Problemstellungen oder Problemsituationen in angemessener Weise herausfordern, möglichst günstige Rahmenbedingungen für eine erfolgreiche Bearbeitung schaffen, Lernende beobachten und unterstützen, Informationen bereitstellen, an passenden Stellen zur Reflexion anregen, Bearbeitungsergebnisse und -erfahrungen zusammentragen und neben der Bewältigung methodischer und classroom-managment-Anforderungen zugleich immer mathematisch mitdenken (vgl. da Ponte, 2001; Fritzlar & Heinrich 2012, S. 7). Es scheint daher sehr wichtig, nach empirisch gestützten Antworten auf die Frage zu suchen, wie Lehrerinnen und Lehrer mit diesen Anforderungen tatsächlich umgehen?

Sollte es gelingen, die bestehende Wissenslücke zu verringern, könnten sich bessere Möglichkeiten des Vergleichens (und gegebenenfalls Bewertens) von Problemlöseunterricht ergeben. Zudem sind ergänzende Anregungen für seine Gestaltung möglich.

Vor diesem Hintergrund wurde die Sektion „Erkundungsstudien zum unterrichtlichen Problemlösen“ ins Leben gerufen. In fünf Vorträgen wurden explorative Studien zum Problemlösen im Klassenraum vorgestellt. Dabei ging es um Problemlösen im Mathematikunterricht sowohl in der Primar- als auch in der Sekundarstufe. In den einzelnen Vorträgen wurden die folgenden Themenkreise behandelt:

Sektionsvorträge

Beyerl, M.: Empirischer Erkundungen zum Umgang mit Wechseln von Lösungsanläufen beim Bearbeiten mathematischer Probleme im Mathematikunterricht.

Heinrich, F., Jerke, A. & Schuck, L.-D..: Eröffnungsszenarien unterrichtlichen Problemlösens.

Lüddecke, J.: Zum Umgang der Lehrkraft mit „Schülerfehlern“ beim Problemlösen im Mathematikunterricht.

Ohlendorf, M.: Zur Phase Rückschau im Problemlöseunterricht.

Rott, B.: Zusammenhänge von Unterrichtsgestaltung und Beliefs zum mathematischen Problemlösen (ProKlaR).

Literatur

Fan, L., & Zhu, Y. (2007). From convergence to divergence: the development of mathematical problem solving in research, curriculum, and classroom practice in Singapore. ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 39, 491–501.

Fritzlar, T. & Heinrich, F. (2012). Antrag auf Gewährung einer Sachbeihilfe bei der DFG mit dem Thema „Vorstellungen von Lehrpersonen zur Gestaltung eines problemorientierten Mathematikunterrichts und deskriptive Modelle der unterrichtlichen Behandlung mathematischer Probleme (unveröffentlicht).

Kultusministerkonferenz (Ed.) (2005). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. München: Luchterhand.

Leiss, D. (2007). „Hilf mir es selbst zu tun“: Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren. Hildesheim: Franzbecker.

Ponte, J. P. da (2001). Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. In F. L. Lin & T. J. Cooney (Eds.), Making sense of mathematics teacher education (pp. 53–72). Dordrecht: Kluwer.

Winnefeld, F. (1963): Pädagogischer Kontakt und pädagogisches Feld. Beiträge zur pädagogischen Psychologie. München: Reinhardt.

Maria BEYERL, Braunschweig

Empirische Erkundungen zum Umgang mit Wechseln von Lösungsanläufen beim Bearbeiten mathematischer Probleme im Mathematikunterricht der Sek I

Besonders seit der Veröffentlichung der Ergebnisse der TIMS-Studie (1995) und auch der PISA-Studie (2000) ist das Problemlösen stärker in den Fokus mathematikdidaktischer Diskussionen gerückt. Es ließ sich feststellen, dass deutsche Schülerinnen und Schüler gerade in diesem Teilgebiet der Mathematik erhebliche Defizite aufwiesen. Als prozessbezogene Kompetenz ist das Problemlösen inzwischen auch fest in den Bildungsdokumenten verankert (vgl. KMK 2003). Doch wie lassen sich die Forderungen, die hier an den Mathematik-Unterricht gestellt werden, praktisch in Schulen umsetzen? Wie lässt sich denn - ganz konkret - die Problemlösekompetenz fördern? Empirische Untersuchungen der Vergangenheit, zum Beispiel HEINRICH (2004), WALZEBUG (2011) und ROTT (2013), haben herausgestellt, dass unter Anderem das Wechseln von Lösungsansätzen einen wichtigen Aspekt von Problemlöseprozessen darstellt. Allerdings wurde der Umgang mit diesem Aspekt im praktischen Mathematikunterricht bisher wenig bis gar nicht untersucht. Aus diesem Grund hat die Arbeitsgruppe des IDME der TU Braunschweig (F. HEINRICH, M. BEYERL, J. LÜDDECKE, M. OHLENDORF) im Frühjahr 2015 eine Studie in 9. und 10. Klassen an Real- und Gesamtschulen in der Region Braunschweig durchgeführt. Erste Erkenntnisse aus der qualitativen Auswertung dieser Studie werden an späterer Stelle in diesem Beitrag vorgestellt.

Zunächst sollen jedoch die theoretischen Rahmenbedingungen des Aspekts *Wechseln von Lösungsanläufen beim Bearbeiten mathematischer Probleme* erläutert werden. Beim individuellen Problemlösen kann ein Wechsel wie folgt definiert werden.

> „Allgemein gesprochen sei unter der Begrifflichkeit *Wechseln von Lösungsanläufen* ein vom Problemlöser vollzogener Übergang von einem nicht zum Ziel führenden oder geführten Lösungsanlauf L_n zu einem anderen, davon verschiedenen Lösungsanlauf L_{n+1} (mit $n \in N$, $n \geq 1$) verstanden. Dabei kann das Ausmaß an Veränderung, d.h. das Ausmaß, in dem sich L_{n+1} von L_n unterscheidet, unterschiedlich groß ausfallen.“

(HEINRICH, 2004, S.18)

Der Problemlöser verfolgt also zunächst einen (ersten) Lösungsanlauf L_n, der aus diversen Gründen abgebrochen wird. Auf diesen Abbruch folgt sodann ein weiterer Lösungsanlauf L_{n+1}, welcher je nach Ausmaß der Veränderung innerhalb der gleichen Grundidee vollzogen werden kann, eine gänzlich neue Grundidee aufgreift, oder sich auf eine an früherer Stelle verwendete Grundidee rückbezieht (Abb. 1).

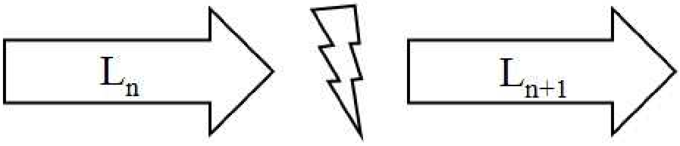


Abb. 1: Wechsel von Lösungsanläufen

Man kann sich an dieser Stelle nun folgende Fragen stellen.

1. *Warum* wird gewechselt?
2. *Was* wird geändert?
3. *Wie* wird das gemacht?

Die zuvor genannten Untersuchungen von HEINRICH, WALZEBUG und ROTT und nicht zuletzt eine frühere Arbeit der Autorin (BEYERL, 2015) haben sich die Beantwortung dieser Fragen teilweise sehr ausführlich, teilweise eher ansatzweise zur Aufgabe gemacht und festgestellt, dass diese schwierigen Stellen einen großen Einfluss auf Problemlöseprozesse und deren Erfolg haben. Der Aspekt *Wechsel* kann also auch ausschlaggebend für die Förderung der Problemlösekompetenz sein, welche für uns Mathematikdidaktiker ja das Fernziel der Problemlöseforschung an sich darstellt. Im Lehr-/Lernkontext geht es in diesem Sinne darum, Handlungsmöglichkeiten zu generieren, um solche schwierigen Stellen bewältigen zu können. Auch in die Bildungsdokumente hat der Umgang mit schwierigen Stellen beim Problemlösen schon Einzug gehalten:

> „Daher müssen im Mathematikunterricht die Bereitschaft und die Fähigkeit schrittweise entwickelt werden […] verschiedene Ansätze auszuprobieren und sich durch Misserfolge nicht entmutigen zu lassen."
>
> (NKM, 2006, S. 17)

Soweit zu einem ersten theoretischen Framing und den daraus resultierenden Anforderungen an den Mathematikunterricht. Doch welche Beachtung erfahren diese tatsächlich vor Ort in den Schulen? Bisher fanden Untersuchungen zum Problemlösen hauptsächlich auf individueller Ebene statt. Der Fokus lag hierbei auf dem Problemlöser und dessen Vorgehen während er isoliert ein Problem bearbeitete. Probanden solcher Erkundungen kamen vorwiegend aus dem Primar- oder dem Oberstufenbereich. Die Studie unserer Arbeitsgruppe hat nun bewusst die Rahmenbedingungen hin zu einem didaktischen Bedingungsgefüge, welches in der Breite kaum untersucht wurde, verändert. Gegenstand der Untersuchungen sind Lerngruppen regulären Mathematikunterrichts an Real- und Gesamtschulen des Jahrgangs

9/10 mit ihren gewohnten Lehrpersonen. Der Fokus liegt nun auf eben dieser Lehrperson und ihrem (didaktischen und methodischen) *Umgang* mit dem Aspekt *Wechsel von Lösungsanläufen*.

Als Beispiel dient an dieser Stelle die Mathematikstunde von Herrn K. in einer 10. Realschulklasse. Die zu behandelnde Problemstellung umfasste das Bestimmen der Innenwinkelsumme eines Sternfünfecks. Da die Struktur einer authentischen Unterrichtsstunde sehr komplex sein kann, wurde sie zunächst zur besseren Übersicht in die klassischen Unterrichtsphasen *Hinführung*, *Arbeitsphase* und *Rückschau/Zwischensicherung* unterteilt, da sich diesen Phasen im Problemlöseunterricht in der Regel bestimmte Inhalte zuordnen lassen, wohlwissend, dass sich diese auch überschneiden können.

Die Beispielstunde von Herrn K. beinhaltete eine Hinführungsphase und insgesamt drei Arbeitsphasen, auf welche je eine kurze Zwischensicherung folgte.

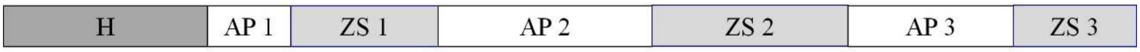


Abb. 2: Strukturierung Beispielstunde

In AP 1 sollten die Schülerinnen und Schüler erste Ansätze finden, in AP 2 wurde paarweise an verschiedenen Ansätzen gearbeitet und in AP 3 wurde ein bestimmter Ansatz einer Schülerin von der gesamten Lerngruppe paarweise weitergeführt, was anschließend in ZS 3 im Plenum fortgesetzt wurde. Die qualitative Auswertung besteht nun darin, die sichtbaren Lehrer-Schüler-Interaktionen nach (potentiellen) Wechselsituationen zu durchkämmen und den durch ihr Agieren und Reagieren verübten Einfluss der Lehrperson auf diese zu ermitteln, zu codieren und zu kategorisieren. So kann beispielsweise die didaktische Gestaltung der Hinführung die Wahrscheinlichkeit beeinflussen, ob Schülerinnen und Schüler in den Arbeitsphasen Lösungsstrategien eher wechseln oder eher nicht. In Phasen der Rückschau kann die Lehrperson hingegen einen Einfluss auf die Bewusstmachung solcher Wechselstellen nehmen, indem sie diese explizit oder implizit thematisiert. Auf die Arbeitsphasen soll an dieser Stelle etwas näher eingegangen werden. Hier kommt es nämlich zu einer direkten Konfrontation mit den Ausführungen der Schüler. Der *Umgang* (der Lehrkraft) mit dem Parameter *Lösungsanlauf* ist dabei ausschlaggebend für die Beeinflussung einer (potentiellen) Wechselsituation. Verschiedene Reaktionen können verschiedene Effekte auf das Wechselverhalten haben.

L_n wird…	Abbruch von L_n wird…	Wechsel zu L_{n+1} wird…
… falsifiziert	… provoziert	… initiiert
… kritisiert	… bestärkt	… bestärkt
… unterstützt	… gehemmt	… gehemmt
… verifiziert … instruiert	… unterbunden	… unterbunden

Die Lehrkraft kann also mit ihren Aktionen und besonders Reaktionen das Wechselverhalten der Schülerinnen und Schüler massiv beeinflussen. An dieser Stelle sei allerdings noch keine Bewertung abgegeben, wie sinnvoll oder nicht sinnvoll ein z.B. Hemmen oder Initiieren eines Wechsels an einer Stelle war.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass der Aspekt Wechseln von Lösungsanläufen nicht nur beim individuellen, sondern auch beim unterrichtlichen Problemlösen eine große Rolle spielt, der bisher allerdings noch nicht genug Beachtung geschenkt wurde. Die Untersuchungen zeigen, dass die didaktische Gestaltung einer Mathematikstunde und besonders auch das Verhalten der Lehrkraft selbst maßgeblich für das Auftreten/Ausbleiben von Wechseln verantwortlich sind und somit den Verlauf der verschiedenen Problemlöseprozesse stark beeinflussen können. Eine weitere Untersuchungen wird die quantitative Betrachtung der Frage „Wie oft werden Lösungsanläufe verifiziert/falsifiziert bzw. bestärkt/kritisiert?“ sein, sowie die Entwicklung einer Folie, welche den Rahmen eines aus Expertensicht sinnvollen Umgangs mit Wechselsituationen absteckt, um Anregungen für konkrete Maßnahmen zu Verbesserung der Lehre zu entwickeln.

Literatur

Beyerl, Maria (2015): Was tun, wenn man nicht mehr weiß, was zu tun ist? Empirische Erkundungen zum Wechseln von Lösungsanläufen beim Bearbeiten mathematischer Probleme. Hamburg: disserta Verlag.

Heinrich, Frank (2004): Strategische Flexibilität beim Lösen mathematischer Probleme. Theoretische Analysen und empirische Erkundungen über das Wechseln von Lösungsanläufen. Hamburg: Kovač (Schriftenreihe Didaktik in Forschung und Praxis, Bd. 17).

Pólya, George (1980): Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. 3. Aufl. Bern: A. Francke AG Verlag (Sammlung Dalp, 36).

Rott, Benjamin (2013): Mathematisches Problemlösen. Ergebnisse einer empirischen Studie. Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien (Ars inveniendi et dejudicandi, Bd. 2).

Walzebug, Conny (2011): Warum bist du dir sicher, dass das alle sind…? - Problemlöseprozesse von Sechstklässlern verstehen und unterstützen. In: Die Grundschulzeitschrift.

Frank HEINRICH, Anika JERKE, Lara-Denise SCHUCK; Braunschweig

Eröffnungsszenarien unterrichtlichen Problemlösens

Mathematische Probleme zu lösen, gehört zum Selbstverständnis derjenigen, die sich mit Mathematik befassen. Aus mathematikdidaktischer Sicht ist es daher von großem Interesse, wie mathematisches Problemlösen gelingen kann und wie von Schülerinnen und Schülern entsprechende Kompetenzen erworben werden können (vgl. Heinrich et. al. 2015, S. 279). Anregungen zur Beantwortung dieser Fragen können aus Analysen von Problemlöseunterricht gewonnen werden. Vor diesem Hintergrund berichten wir im Weiteren über eine empirische Erkundungsstudie in der Jahrgangsstufe vier. Sie befasste sich u. a. mit der Frage, wie Lehrpersonen mit ihren Schülerinnen und Schülern die Arbeit am Problem beginnen.

Die Eröffnungsphase beim „herkömmlichen" Problemlösen

Phasenverlaufsmodelle mathematischen Problemlösens haben Tradition. Das Modell von Pólya (1949) kann als das bekannteste seiner Art angenommen werden. Die Phase „Verstehen des Problems" kennzeichnet dabei den Arbeitsbeginn. Sie und entsprechende Phasen in verwandten Modellen, z. B. von Mason, Burton & Stacey (2008) werden insbesondere durch diejenigen Inhalte und Tätigkeiten charakterisiert, die in der folgenden Übersicht angegeben sind. Zudem finden sich in der Literatur methodische Ratschläge zur Gestaltung dieser Tätigkeiten.

Verstehen des Problems: … mit dem Problem vertraut werden, es verstehen und durchdringen …

Inhalte/Elemente/Tätigkeiten	*Methodische Empfehlungen, z. B.*
▪ Wortlaut des Problems verstehen, ▪ Hauptteile des Problems herausarbeiten (Gegebenes/Bekanntes, Gesuchtes/Unbekanntes, Bedingungen) ▪ nicht selten auch technische Vorbereitungen für die Lösungsdurchführung treffen (Bezeichnungen, Skizzen, …)	▪ Text wiederholen, ▪ ihn mit eigenen Worten wiedergeben, ▪ ihn fließend formulieren, ▪ bei sehr vielen Informationen diese schon ordnen, ▪ Unklarheiten und missverständliche Aussagen ausräumen, ▪ Kern der Frage erfassen

In der Literatur wird die Bedeutung dieser Phase nachdrücklich unterstrichen. Beispielsweise heben Mason, Burton & Stacey (2008, S. 29) hervor, dass sich einige Problembearbeiter auf die erste beste Idee stürzen, ohne sich vorher Gedanken zu machen. Dieser erste Ansturm führt oft deswegen ins Leere, weil sie die Frage nicht richtig verstanden haben. In einer auf die Grundschule bezogenen Schrift verweisen Schnabel & Trapp (2012, S. 21) darauf, dass aktuelle internationale Studien zeigen, dass gerade auch das Textverständnis ganz erheblichen Einfluss ausübt, eine Aufgabe zunächst zu verstehen und dann lösen zu können. Es besteht Konsens, dass es sinnvoll ist, einige Überlegungen zu einem effektiven Start anzustellen und dadurch Grundlagen für eine erfolgreiche Lösungsdurchführung zu legen.

Die Eröffnungsphase beim unterrichtlichen Problemlösen

Wegen der oben geschilderten Bedeutung der „Verstehensphase" sind wir der Frage nachgegangen, in welcher Weise wir beim Problemlösen im Klassenraum die als bedeutsam angesehenen Inhalte bzw. Tätigkeiten dieser Phase (s.o.) aufgegriffen finden. Unser Blick richtet sich dabei auf das Verhalten der Lehrperson.

Wir haben im Rahmen einer explorativen Studie untersucht, wie Lehrende (von uns vorgegebene) Probleme in einer Mathematikunterrichtsstunde behandeln und werden uns im Weiteren insbesondere den jeweiligen Eröffnungsphasen zuwenden. Dazu wurden 16 Stunden des Problemlöseunterrichts videografiert und analysiert. Den auf freiwilliger Basis teilnehmenden Lehrpersonen wurde zwei Wochen vor Unterrichtsdurchführung die jeweilige Problemformulierung ausgehändigt. Lösungen, Bearbeitungs- oder Unterrichtshinweise erhielten sie nicht. Der Unterricht wurde mithilfe zweier Kameras aufgezeichnet. Zudem wurden die Lehrenden unmittelbar vor der jeweiligen Unterrichtsstunde nach Zielen und geplantem methodischen Vorgehen befragt. Darüber hinaus hatten sie im Anschluss an die Stunde Gelegenheit über den Unterrichtsverlauf zu reflektieren. Es kamen zwei (bekannte) Probleme vom Typ „problemhaltige Textaufgaben" (Rasch 2001) zum Einsatz, je 8 Lehrpersonen unterrichteten das gleiche Problem.

Kühe-Enten-Problem (KE)

Auf einer Wiese stehen Kühe und Enten. Zusammen haben sie 26 Beine. Wie viele Kühe und wie viele Enten können es sein?

Teufelsproblem (T)

Der Teufel sagte zu einem armen Manne: „Wenn du über die Brücke gehst, will ich dein Geld verdoppeln. Doch jedes Mal, wenn du zurückkommst, musst du für mich 8 Taler ins Wasser werfen." Als der Mann das dritte Mal zurückkehrte, hatte er keinen blanken Taler mehr. Wie viele Taler hatte er am Anfang? Begründe deine Antwort!

Wir konnten feststellen, dass 6 der 16 Lehrpersonen nach der Darbietung des Problems mit den Kindern keine Verstehens- bzw. Analysephase im Sinne von Pólya durchgeführt haben. Beim KE-Problem war das bei vier Lehrpersonen der Fall und beim T-Problem bei zwei Lehrkräften. Wegen der oben hervorgehobenen Bedeutung der Pólyaschen Verstehensphase verwundert es zunächst, dass im Kontext Unterricht vor dem eigentlichen

Lösen des Problems mögliche Elemente dieser Phase lehrerseitig nicht erkennbar thematisiert worden sind. Wir kommen darauf zurück.

Hinsichtlich der Eröffnungsphasen der anderen Lehrpersonen konnten wir die folgenden Elemente/Tätigkeiten herausarbeiten, die auf das Durchdringen und Verstehen des Problems gerichtet waren: 1-Inhaltswiedergabe mit anderen (auch eigenen) Worten, 2-Herausstellen von Gegebenem, Gesuchtem und von Bedingungen, 3-Sachverhalt anders darstellen, 4-Klärung auftretender Fragen, 5-Absicherung grundlegender Wissenselemente (mathematischer Art, aber auch Allgemeinwissen). Am häufigsten fanden die Elemente 2, 3 und 4 Verwendung; 1 und 5 traten hingegen nur peripher auf. Diese Ergebnisse können der Spezifika der beiden verwendeten Probleme geschuldet sein. Zudem war die Breite des Einbezugs solcher Tätigkeiten von Lehrkraft zu Lehrkraft unterschiedlich. So kamen pro Lehrkraft zwischen ein und vier Elemente zum Einsatz. Das kann unterschiedlichen Gründen geschuldet sein. Ob Lehrpersonen existieren, die nahezu immer bemüht sind, Verstehenselemente in großer Breite einzubeziehen; und ob es solche gibt, die sich auch in anderen Problemlösesituationen in der Regel auf wenige Verstehenselemente besinnen, muss weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

Verstehenselemente während und nach der Arbeit am Problem

Da bei einem großen Anteil der an der Studie beteiligten Lehrpersonen keine Verstehens- bzw. Analysephase vor dem eigentlichen Lösungsbeginn auszumachen war (s. o.), sind wir der Frage nachgegangen, warum das so ist. Wir vermuteten, dass es unter anderem der didaktischen Absicht der Lehrperson geschuldet ist, d. h. der Frage, welche Lernziele mit der Bearbeitung des Problems angesteuert werden. Die Vermutung wurde zumindest teilweise bestätigt. So äußerten mehrere Lehrpersonen in einem Interview vor der jeweiligen Unterrichtsstunde sinngemäß, dass das selbständige Lösen einzeln oder in Gruppen praktiziert wird bzw. dass eine bekannte Schrittfolge zum Lösen von Text- bzw. Sachaufgaben selbständig angewendet werden soll. In beiden Fällen geht es um selbständige Schülertätigkeit, was erklären kann, dass die Lehrpersonen das Problem von den Kindern bearbeiten lässt, ohne vorher eine Verstehensphase im Unterricht zu platzieren.

Vor diesem Hintergrund stellte sich die Frage, ob an späterer Stelle im jeweiligen Problemlöseunterricht auf Tätigkeiten des Verstehens eingegangen wurde, vielleicht im Rahmen einer Rückschau nach Beendigung der Problemlösebemühungen. Hier könnte von der Lehrperson die Wichtigkeit solcher Tätigkeiten an Beispielen (wiederholend) aufgegriffen bzw. bewusst gemacht werden. Auch diese Vermutung wurde bestätigt. So haben zwei der sechs Lehrpersonen, die für die Kinder keine Analyse- bzw. Verstehensphase gestaltet hatten, entsprechende Tätigkeiten während des Suchens und Findens einer Lösung und/oder nach Beendigung der Lösungsbemühungen thematisiert. Dieser Befund regte uns an zu prüfen, ob auch bei denjenigen Lehrkräften, die das Problemlösegeschehen mit einer Verstehensphase eröffnet haben, Elemente dieser Phase zudem noch an späterer Stelle im Lösungsprozess auftreten bzw. wiederkehren. Wir stellten fest, dass dies für einige zutrifft. Sowohl während der eigentlichen Arbeit am Problem (also während des Suchens und Findens einer Lösung), als auch im Rahmen retrospektiver Befassung mit dem Getanen (also im Rahmen einer Rückschau) bezogen Lehrpersonen Analyse- und Verstehenselemente in den Unterricht ein. Zumeist handelte es sich dabei um Maßnahmen zum Textverständnis.

Wir halten fest, dass beim unterrichtlichen Problemlösen Elemente der Pólyaschen Verstehensphase nicht nur vor dem eigentlichen Bearbeiten zum Einsatz gelangen können, sondern auch an späteren Stellen, also während oder nach der Problembearbeitung, lehrerseitig thematisiert werden. Es hat sich aber auch herausgestellt, dass in vier von 16 Problemlösestunden über den gesamten Bearbeitungsprozess hinweg keinerlei Lehreraktivitäten von uns erkannt wurden, die sich als Tätigkeiten des Durchdringens und Verstehens des Problems ausweisen lassen. Hier sind unseres Erachtens weiterführende Untersuchungen nach dem „Warum?“ angezeigt.

Literatur

Heinrich, F., Bruder, R. & Bauer, C. (2015). Problemlösen lernen. In: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.): Handbuch der Mathematikdidaktik, S. 279-301. Berlin, Heidelberg: Springer Sektrum.

Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (2008). Mathematisch denken[5]. München: Oldenbourg.

Pawlitzki, A. (2011). Empirische Erkundungen zur Behandlung des “Teufelsproblems“ im Mathematikunterricht der Grundschule. Masterarbeit, TU Braunschweig.

Pólya, G. (1949). Schule des Denkens. Bern: Francke.

Rasch, R. (2001): Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Hildesheim: Franzbecker.

Schnabel, J. & Trapp, A. (2012): Problemlösendes Denken im Mathematikunterricht. Donauwörth: Auer.

Schuck, L.-D. (2011). Empirische Erkundungen zur Behandlung des “Enten-Kühe-Problems“ im Mathematikunterricht der Grundschule. Masterarbeit, TU Braunschweig.

Julia LÜDDECKE, Braunschweig

Zum Umgang der Lehrkraft mit Fehlern beim Problemlösen im Mathematikunterricht

Die Förderung der Problemlösekompetenz ist seit geraumer Zeit ein zentrales Ziel von Mathematikunterricht. Da von keiner zufriedenstellenden Umsetzung dieses Vorhabens gesprochen werden kann (vgl. TIMSS 1995, PISA 2000), wurde der Kompetenzbereich „Mathematische Probleme lösen“ fest in den Bildungsstandards und Lehrplänen der einzelnen Bundesländer verankert (vgl. z.B. KMK 2003, NKM 2014). Mit dieser konkreten Zielsetzung von Mathematikunterricht geht die Fragestellung einher, wie die Problemlösekompetenz *besser als bisher* gefördert werden kann. Der Fehleraspekt kann als ein möglicher Ansatzpunkt zur Förderung der Problemlösekompetenz verstanden werden (vgl. Heinrich et al. 2015), denn häufig sind Fehler dafür verantwortlich, dass das Finden einer Lösung bei der Problembearbeitung be- oder sogar verhindert wird.

Beim Problemlösen können dem Individuum verschiedene Fehler unterlaufen. Geering (1995) unterscheidet drei Arten von Fehlern beim Problemlösen: (1) Fertigkeitsfehler (2) Wissensfehler und (3) Strategiefehler. Diese Fehler können für das Individuum lernträchtig sein, wenn der Problemlöser negatives Wissen (vgl. Oser, Hascher & Spychiger 1999) durch einen konstruktiven Umgang mit diesen erwirbt. Negatives Wissen stellt eine Ergänzung zu unserem Wissen über das „Richtige“ bzw. das „Korrekte“ dar: „Man versteht eine Sache oft erst, wenn man das Falsche sieht oder erlebt oder tut.“ (Oser). Auszüge aus Bildungsdokumenten machen deutlich, dass von den Lernenden ein lernförderlicher Umgang mit Fehlern beim Problemlösen erwartet wird: „Die Schülerinnen und Schüler beurteilen Prozess und Ergebnis der Problemlösung, indem sie Fehler erkennen, beschreiben und korrigieren“ (NKM 2014, S. 19). Wenn Schüler ihre eigenen Fehler nicht erkennen, ist die Hilfe der Lehrkraft unverzichtbar – doch wie sieht der richtige Umgang mit Fehlern aus? Basierend auf dem Modell von Guldiman & Zutavern (1999) über einen lernförderlichen Fehlerumgang mit den Schritten (1) Fehlersensibilität (2) Fehleranalyse (3) Fehlerkorrektur und (4) Fehlerprävention entwickelten Rach, Ufer & Heinze (2012, S. 218) folgendes Prozessmodell (Abb. 1), welches zwei typische Wege der Bearbeitung von Fehlersituationen unterscheidet: den pragmatisch-ergebnisorientierten Weg und den analysierenden-prozessorientierten Weg. Im Hinblick auf den Erwerb von negativem Wissen ist bei dem analysierenden-prozessorientierten Weg, bei dem „eine Verständnis und Lernorientierung“ (Rach, Ufer & Heinze, S. 218) im Fokus steht, mehr Potenzial für einen lernförderlichen Fehlerumgang vorhanden.

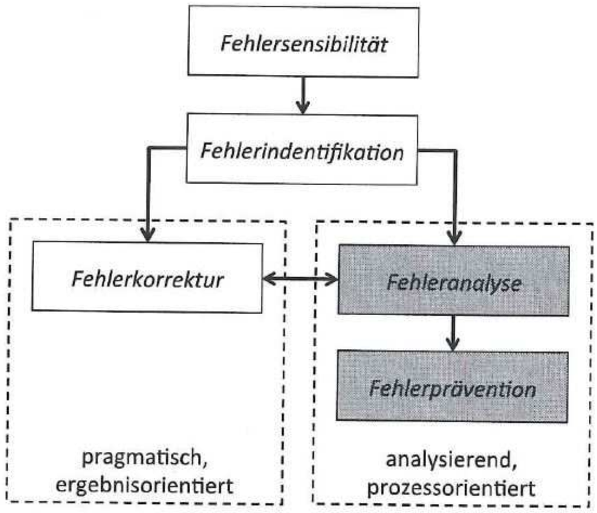


Abb. 1: Prozessmodell zur Bearbeitung von Fehlersituationen (ebd.)

Empirische Erkundungsstudie

Vor diesem theoretischen Hintergrund soll im Rahmen einer empirischen Erkundungsstudie eine Bestandsaufnahme gemacht werden, in welcher Form der Aspekt Fehler beim unterrichtlichen Problemlösen im Fach Mathematik vorkommt. Dabei sollen die folgenden Fragen im Fokus der Untersuchung stehen: (1) Welche Fehler(-arten) kommen beim unterrichtlichen Problemlösen vor? (2) Wie geht die Lehrperson mit diesen Fehlern um? Mit dem Ziel, unser Wissen über das Unterrichten des Problemlösens zu erweitern und ergänzende Ansatzpunkte zur Förderung der Problemlösekompetenz im Hinblick auf Fehler und den geeigneten Umgang der Lehrperson mit diesen Fehlern zu gewinnen. Als Zugangsmethode werden Analysen unterrichtlichen Problemlösens der Arbeitsgruppe des IDME (F. Heinrich, M. Beyerl, J. Lüddecke, M. Ohlendorf) durchgeführt, denn über Fehler beim Problemlösen und über Umgangsmethoden der Lehrkraft mit diesen Fehlern, weiß man bisher noch sehr wenig.

In einer ersten Vorstudie wurden sechs Klassen der Jahrgangsstufen 9 und 10 an Realschulen und Integrierten Gesamtschulen bei der Bearbeitung eines geometrischen Bestimmungsproblems videographiert, bei dem sie die Innenwinkelsumme in einem Sternfünfeck bestimmen sollten. Zur Vorbereitung auf die Unterrichtsstunde bekamen die Lehrkräfte vorab diverse Lösungsmöglichkeiten für die Problemstellung. Die methodische und didaktische Aufbereitung der Unterrichtsstunde stand den Lehrkräften frei. Für die Erhebung der Daten wurde die Lehrkraft mit einem Funkmikrofon ausgestattet, um sämtliche Lehrer-Schüler-Gespräche einzufangen. Das Unterrichtsgeschehen wurde mit mehreren Stativkameras aufgezeichnet.

Erste Ergebnisse[2]

Wie die Tabelle zeigt, konnten im beobachteten Mathematikunterricht überwiegend Strategiefehler identifiziert werden (Tab. 1). Dabei konnten verschiedene Ausprägungen von Strategiefehlern festgestellt sowie neuartige Ausprägungen entdeckt werden. Diese Erkenntnisse decken sich mit ähnlichen Untersuchungen zum individuellen Problemlösen der Arbeitsgruppe des IDME (vgl. z.B. Lüddecke 2015).

	Fertigkeitsfehler	**Wissensfehler**	**Strategie-fehler**
Identifizierte Fehler	8%	32%	**60%**

Tab. 1: Anteile der identifizierten Fehlerarten nach Geering (1995)

Wie die folgende Übersicht deutlich macht, blieb der Großteil der identifizierten Strategiefehler im Unterricht fehlerhaft bestehen. Zudem fand nur selten ein lernförderlicher (prozessorientierter) Fehlerumgang im Unterricht statt (Tab. 2). Diese Feststellung erscheint besonders problematisch, da Befunde beim individuellen Problemlösen deutlich machen, dass insbesondere Strategiefehler von Schülern nicht aus eigener Kraft erkannt werden (vgl. Lüddecke 2015). Wenn die Fehleridentifikation nicht stattfindet, kann auch keine Fehleranalyse bzw. Fehlerkorrektur erfolgen und somit auch kein lernförderlicher Fehlerumgang. Daher liegt die Vermutung nahe, dass es zum Erkennen von Strategiefehlern verstärkt der Hilfe der Lehrkraft bedarf. Aus diesem Grund sollten Lehrpersonen entsprechend qualifiziert werden, um Prozesse des Erkennens dieser Fehler bei ihren Schülern anzuregen.

	Fertigkeitsfehler	**Wissensfehler**	**Strategie-fehler**
Ergebnisorientierter Fehlerumgang	80%	35%	25%
Prozessorientierter Fehlerumgang	-	20%	≈ 27,7%
Keine Fehlererkennung/-korrektur	20%	45%	**≈ 47,3%**

Tab. 2: Anteile des Fehlerumgangs mit den identifizierten Fehlerarten

[2] Aufgrund der Stichprobengröße handelt es sich nicht um eine repräsentative Darstellung, sondern um eine quantitative Zusammenfassung der bisherigen Befunde.

Anmerkungen und Ausblick

Im Schulalltag fällt es Lehrkräften oft schwer, die Problembearbeitungsprozesse von Lernenden intensiv zu beobachten und zu begleiten. Daher können die durch Fehleranalysen herausgearbeiteten Defizite einen Beitrag zur Förderung der fachlichen, diagnostischen und didaktischen Kompetenz von Lehrkräften leisten, was eine wesentliche Bedingung für das Lehren von Problemlösen darstellt (vgl. Becker 1987). Wenn die Lehrperson um die Defizite ihrer Schüler weiß, eröffnen die Befunde den Lehrpersonen die Möglichkeit, „sich auf Schwierigkeiten ihrer Schüler noch besser einstellen und entsprechende Unterstützungsmaßnahmen zur Optimierung ihrer Problembearbeitungsprozesse vorzunehmen.“ (Zimmermann 2010, S. 2).

In einer für Frühjahr/Sommer 2016 geplanten Hauptstudie sollen die Untersuchungen, zu der oben aufgeführten Fragestellung mit 25 weiteren Klassen weitergeführt und ausgewertet werden. Aufgrund der bisherigen Befunde beim individuellen und unterrichtlichen Problemlösen soll der Fokus der Erkundung auf die Fehlerkategorie „Strategiefehler“ gelegt werden, denn insbesondere diese Fehlerart tritt erfahrungsgemäß problemübergreifend auf.

Literaturverzeichnis

Becker (1987): Über den Beitrag des Geometrieunterrichts zum Erwerb heuristischer Strategien. In: math. didact. 10, 3 / 4, S. 123 – 145.

Geering (1995): Aus Fehlern lernen im Mathematikunterricht. In: Beck/Guldimann/Zutavern (Hrsg.): Eigenständig lernen. St. Gallen, S. 59-70.

Guldiman & Zutavern (1999): „Das passiert und nicht noch einmal!“ Schülerinnen und Schüler lernen gemeinsam den bewussten Umgang mit Fehlern“. In: Althof (Hrsg.): Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern. Opladen, S. 233-258.

Heinrich et al. (2015): Problemlösen lernen. In: Bruder et al. (Hrsg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin, Heidelberg, S. 279-302.

KMK (2003): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. Beschluss vom 04.12.2003. München: Wolter Kluver.

NKM (2014): Kerncurriculum für die Realschule Schuljahrgänge 5-10 Mathematik.

Lüddecke (2015): Fehler beim Problemlösen. Empirische Erkundungen zu Fehlern beim Bearbeiten mathematischer Probleme. Hamburg: disserta Verlag.

Oser/Hascher/Spychiger (1999): Lernen aus Fehlern. Zur Psychologie des „negativen“ Wissens. In: Althof (Hrsg.): Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern. Opladen, S. 11-41.

Rach/Ufer/Heinze (2012**):** Lernen aus Fehlern im Mathematikunterricht – kognitive und affektive Effekte zweier Interventionsmaßnahmen. In: Unterrichtswissenschaft, 40. Jg, Heft 3, S. 213-234.

Zimmermann (2010): Denkenlernen durch Problemlösen. GYÖRGY PÓLYA (1887-1985) – Teil II. In: Der Mathematikunterricht (MU), Heft 3 / 2010.

Meike OHLENDORF, Braunschweig

Zur Phase Rückschau im Problemlöseunterricht

In Bezug auf die Förderung der mathematischen Problemlösekompetenz werden in der wissenschaftlichen Literatur bestimmte Aspekte, Sachverhalte oder Vorgänge beim Lösen mathematischer Probleme herausgestellt.

Ein Aspekt, der meist nur in theoretischen Abhandlungen thematisiert wird, ist in diesem Zusammenhang die *Phase Rückschau im Pólyaschen Sinne*.

Theoretische Grundlagen

In klassischen Verlaufsmodellen wie z.B. bei Pólya (1945), bei Mason et al. (1982) oder bei Schoenfeld (1985) schließt sich die Phase Rückschau als Abschluss der Problemlösetätigkeiten an das Ausführen eines Planes an.

Die Phase Rückschau wird von Pólya durch den Fragenkatalog in Abbildung 1 charakterisiert. Mason et al. unterteilen die Phase Rückschau in die drei Bereiche *Test, Nachdenken und Verallgemeinern.*

Polya (1945)

Kannst du das Resultat kontrollieren?

Kannst du den Beweis kontrollieren?

Kannst du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten? Kannst du es auf den ersten Blick sehen?

Kannst du das Resultat oder die Methode für irgendeine andere Aufgabe verwenden?

Mason et al. (1982)

Test:
- Berechnungen
- Überprüfen der Logik
- Plausibiliätskontrollen
- Ist die Aufgabe gelöst?

Nachdenken:
- über die entscheidenden Ideen
- über die Konsequenzen der Lösung

Verallgemeinern:
- Stellen Sie die Lösung in einen größeren Zusammenhang!
- Suchen Sie neue Lösungswege!
- Ändern Sie die Voraussetzungen ab!

Abbildung 1

Das nichtlineare Modell von Fernandez, Hadaway und Wilson (1994) betont die zyklische Struktur von Problemlöseprozessen und nimmt Managementprozesse wie Selbstkontrolle und Selbststeuerung mit auf. Anders als bei den (in Bezug auf die Phase Rückschau) eher linear angelegten Modellen wie z.B. von Pólya oder Mason et al. wird hier deutlich, dass die Phase Rückschau auch in der Verstehens-, der Planungs- oder der Durchführungsphase auftreten kann. Diese Bedeutungsweiterung der Pólyaschen Rückschau kann außerdem bedeuten, dass sich die Phase Rückschau auch auf falsche oder unvollständige Lösungsversuche beziehen kann.

Argumente zur Untersuchung der Phase Rückschau im Unterricht

Mason et al. (1982) bezeichnen die Phase Rückschau als die am meisten vernachlässigte und doch lehrreichste Phase. Kluwe (1981) und Dörner (1982) stellen heraus, dass es beim Problemlösen vor allem auf die dauernde Reflexion des eigenen Problemlöseprozesses ankommt.

Leong et al. (2011) betonen, dass die Phase Rückschau ein Bindeglied zwischen dem Problemlösen und dem (im Vergleich zum Problemlösen) relativ neuen Bereich des *Problemstellens* darstellt. Dieser Zusammenhang wird insbesondere im zyklischen Verlaufsmodell nach Fernandez/Hadaway/Wilson (1994) deutlich.

In Bezug auf das *Lernen mathematischen Problemlösens* beklagt Schoenfeld (1985), dass die Rückschau von Schülern zu ihrem Nachteil viel zu selten durchgeführt wird. Er hat außerdem den Eindruck, dass die meisten Lehrer unter der Phase Rückschau nur die Kontrolle der Lösungen verstehen und keine weitergehenden Überlegungen anstellen (Mail an Meike Ohlendorf, 2015).

In einer empirischen Erkundungsstudie zur Gestaltung des Mathematikunterrichts im Grundschulbereich von Heinrich/Pawlitzki/Schuck (2013) wird die Notwendigkeit einer weiteren Befassung mit der Umsetzung der Phase Rückschau im unterrichtlichen Problemlösen unterstrichen. Heinrich/Pawlitzki/Schuck teilen die beobachteten Unterrichtsstunden in drei Problemlösephasen ein, welche sie (I) Präsentation und Verstehen des Problems, (II) Suchen und Finden der Lösungen und (III) Präsentation und Auseinandersetzung mit dem Lösungsgeschehen nennen. Die Befunde zur Phase (III), welche auf der Analyse 16 beobachteter Unterrichtsstunden in Klasse 4 basieren, zeigen, dass in Phase (III) jeweils in Durchschnitt bei einem Viertel bis einem Drittel der Lehrpersonen folgende Maßnahmen vorkamen:

- Nachbereiten, Bewusstmachen von verwendeten Lösungsansätzen
- Auseinandersetzen mit Schwierigkeiten, Fehlern, ungeeigneten Lösungsansätzen
- Eingehen auf alternative Vorgehensweisen, Lösungswege
- Fortführung der Arbeit, weiterführende Probleme

Insgesamt fiel der Anteil der Maßnahme „Fehler“ dabei noch etwas höher aus. Heinrich/Pawlitzki/Schuck betonen, dass eine Bestätigung der Befunde in größerem Ausmaß noch aussteht.

Konzipierung, Durchführung und erste Befunde der Vorstudie

In diesem Zusammenhang haben wir im Frühjahr 2015 im Raum Braunschweig eine Erkundungsstudie im Sekundar-I-Bereich an Realschulen und Integrierten Gesamtschulen in den Klassenstufen 9/10 durchgeführt. Die teilnehmenden 6 Lehrer erhielten in dieser Vorstudie zwei Wochen vor Unterrichtsdurchführung ein geometrisches Problem inkl. möglicher Lösungswege. In der didaktischen und methodischen Umsetzung des Problems waren sie frei. Vor der 45-minütigen Unterrichtsstunde wurden die Lehrenden zu Zielen und Ablauf der Stunde befragt, nach der Stunde hatten sie Gelegenheit über den Unterrichtsverlauf zu reflektieren. Das Unterrichtsgeschehen und die Interviews wurden gefilmt, protokolliert und transkribiert. Die Auswertung der Daten erfolgte mithilfe der Methode der konsensuellen Validierung nach Maier (1991). Im Wechselspiel zwischen kategoriengeleitetem und kategorienentwickelndem Vorgehen soll dabei ein System entwickelt werden, mithilfe dessen man Verläufe und wichtige Komponenten unterrichtlichen Problemlösens erfassen kann.

Als vorläufige Befunde der Vorstudie in Bezug auf Phase (III) der beobachteten Unterrichtsstunden lassen sich folgende Erkenntnisse festhalten:

Die meistgewählte Maßnahme in Phase (III) war das Besprechen *eines* Lösungsweges, die Besprechung erfolgte dabei meist im Unterrichtsgespräch oder durch Schülervorträge. Schwierigkeiten bzw. Fehler wurden dabei kaum, weiterführende Probleme gar nicht thematisiert. Es gab zudem Lehrer, die starke Unsicherheiten zeigten, wenn es darum ging die Richtigkeit von Schülerlösungen einzuschätzen. Lehrer schätzten Schülerlösungen in diesem Zusammenhang falsch ein oder unterschätzten Lösungsansätze von Schülern möglicherweise, weil sie nicht ihrem eigenen favorisierten Lösungsweg entsprachen.

Als vorläufige Schlussfolgerung kann man festhalten, dass es noch Potential gibt, die *Vielfalt von Lösungswegen* ausgiebiger zu thematisieren. Außerdem unterstreicht die Vorstudie die *Bedeutung einer gründlichen fachlichen Vorbereitung* für eine erfolgreiche Umsetzung der Phase Rückschau und einen erfolgreichen Problemlöseunterricht.

Die vorläufigen Befunde der Vorstudie unterscheiden sich deutlich von den Ergebnissen der Studie von Heinrich/Pawlitzki/Schuck (2013) im Grundschulbereich.

Ausblick auf die Hauptstudie

In der Hauptstudie, welche im Frühjahr/Sommer 2016 stattfindet, soll deshalb Mathematikunterricht von 25 Lehrkräften in den Klassen 9/10 an Gymnasien gefilmt werden, die ein vorgegebenes geometrisches Problem unterrichten. Das methodische Vorgehen aus der Vorstudie bleibt bis auf kleinere Änderungen erhalten.

Zusätzlich zu den aus der Vorstudie bekannten technischen Hilfsmitteln wird die Lehrkraft in der Hauptstudie mit einer GoPro-Actionkamera mit Brustgurt ausgestattet um die Lehrer-Schüler-Interaktion besser beobachten zu können. Außerdem sollen die Lehrer vor der Stunde einen tabellarischen Unterrichtsverlaufsplan abgeben um die Planung des Lehrers besser nachvollziehen zu können.

Zudem wurde die Unterrichtszeit der Problemlösestunde von 45 Minuten auf 90 Minuten erhöht, da in der Vorstudie nach 45 Minuten oft der Problemlöseprozess noch nicht abgeschlossen war. Der Zielaspekt des Problemlösens wurde in den Informationsmaterialien für die Lehrer klar ins Zentrum gestellt, um die Problemlösestunden bezüglich dieses Aspekts im Vorhinein zu normieren.

Es wird interessant sein zu sehen, ob sich die Befunde der Vorstudie in größerem Umfang bestätigen.

Literatur

Dörner, D. (1982). Lernen des Wissens- und Kompetenzerwerbs. In B. Treiber & F.E. Weinert (Hrsg.), *Lehr- und Lernforschung* (S. 134-148). München: Urban & Schwarzenberg.

Fernandez M. L., Hadaway, N. & Wilson, J. W. (1994). Problem solving: Managing it all. *The Mathematics Teacher*, 87 (3), 195 - 199.

Heinrich, F., Pawlitzki, A. & Schuck, L. (2013). Problemlöseunterricht in der Grundschule. In F. Käpnick, G. Greefrath und M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 448-451). Münster: WTM.

Kluwe, R.H. (1981). Kontrolle eigenen Denkens und Unterricht. In B. Treiber & F.E. Weinert (Hrsg.), *Lehr- und Lernforschung* (S. 113-133). München: Urban & Schwarzenberg.

Maier, H. (1991). Interpretative Forschung im Bereich der Mathematikdidaktik. In: *Bei- träge zum Mathematikunterricht 1991* (S. 97 – 107). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Bristol: Addison-Wesley.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (2015). *Re: polyas stage looking back*. email: alans@berkeley.edu (15-03-27)

Leong, Y. H., Tay, E. G., Toh, T. L., Quek, K.S., & Dindyal, J. (2011). Reviving Pólya's "Look Back" in a Singapore school. *Journal of Mathematical Behavior*, 30 (3), 181-193.

Benjamin ROTT, Essen

Zusammenhänge von Unterrichtsgestaltung und Beliefs zum mathematischen Problemlösen (ProKlaR)

Hintergrund

Im Rahmen des Projekts ProKlaR (Problemlösen im Klassenraum) werden Lehrkräfte gebeten, Problemlöse-Stunden zu planen, zu halten und zu reflektieren; Fragestellungen des Projekts lauten: *Wie gestalten Lehrerkräfte Unterricht mit dem Inhalt „Problemlösen"?* Konkreter: *Wie gehen sie dabei vor? Welche Schwerpunkte setzen sie? Wie viele Freiheiten geben sie ihren Lernenden?* Details zum Projekt finden sich z. B. in Rott (2015).

Im Anschluss an ihre Stunde werden die Lehrkräfte interviewt – u. a. um ihre Einstellungen zur Mathematik und zum Problemlösen zu identifizieren. Hier soll exemplarisch gezeigt werden, dass diese Überzeugungen große Erklärungskraft in Bezug auf das beobachtete Lehrverhalten besitzen.

Überzeugungen zur Mathematik

Ernest hat bereits Ende der 1980er Jahre verschiedene mögliche Überzeugungen (engl. Beliefs) zur Mathematik zusammengestellt und ausführlich diskutiert. Die Quintessenz dieser Arbeit fasst er wie folgt zusammen:

> "First of all, there is a dynamic, problem-driven view of mathematics as a continually expanding field of human inquiry. Mathematics is not a finished product, and its results remain open to revision (the problem-solving view).
>
> Secondly, there is the view of mathematics as a static but unified body of knowledge, consisting of interconnecting structures and truths. Mathematics is a monolith, a static immutable product, which is discovered, not created (the Platonist view).
>
> Thirdly, there is the view that mathematics is a useful but unrelated collection of facts, rules and skills (the instrumentalist view)." (Ernest, 1989, S. 21)

In Deutschland haben insb. Grigutsch und Törner die Überzeugungen von Mathematiklehrkräften untersucht. Sie unterscheiden zunächst zwei grundsätzliche Leitvorstellungen über Mathematik – „Prozess" und „System":

> „Mathematik [kann] in vereinfachter Form in statischer Sicht als System oder in dynamischer Sicht als Prozeß bzw. als Tätigkeit [aufgefasst werden]. Beide Standpunkte sind nicht einfach voneinander zu trennen, so daß man manchmal von einer Janus-Köpfigkeit der Mathematik spricht." (Grigutsch et al., 1998, S. 11)

In ihren empirischen (Fragebogen-) Untersuchungen haben Grigutsch und Törner die System-Vorstellung unterschieden in „Formalismus" und „Schema"; zusätzlich erfassen sie den Anwendungsbezug der Mathematik, sodass sie auf vier Beliefdimensionen kommen: *Prozess*, *Schema*, *Formalismus* und *Anwendung*. Mit Bezug auf die Sichtweisen nach Ernest lässt sich „Mathematik als Prozess" dem *problem-solving view of mathematics* zuordnen, „Mathematik als System" ist recht passgenau zum *Platonist view* und der „Anwendungsaspekt“ entspricht dem *instrumentalist view of mathematics* (teilweise auch als „Mathematik als Toolbox“ bezeichnet).

Methodische Entscheidungen

Die Gestaltung von Unterrichtsstunden wird mithilfe des Kodierschemas (von zwei unabhängigen Ratern) für Unterricht aus der Schweizerisch-Deutschen Videostudie (Hugener, 2006) erfasst. In diesem Beitrag werden von den Stunden vereinfachend nur die kumulierten Dauern der Sozialformen angegeben, um auf die Schülerorientierung der Lehrkräfte zu schließen. Die Interviews werden im Team interpretiert.

Zur Teilnahme an der Studie konnten – zum Teil im Rahmen studentischer Abschlussarbeiten – bislang acht (Stand: November 2015) Lehrkräfte gewonnen werden. Drei typische Vertreter werden hier vorgestellt:

- Lehrerin A. Eine junge Lehrerin, die ihr Referendariat vor ca. 1,5 Jahren beendet hat und nun an einem Hannoveraner Gymnasium arbeitet. Gefilmt wurde eine Stunde zur „Sieben Tore“-Aufgabe in Jahrgang 6.
- Lehrerin D. Eine Lehrerin mit fast 25 Jahren Berufserfahrung, die an einem Gymnasium in Essen arbeitet. Gefilmt wurden zwei selbstgewählte Probleme in Jahrgang 9, die mithilfe einer Anwendung des Satzes des Pythagoras gelöst werden konnten.
- Lehrerin E. Eine Lehrerin mit etwa 8 Jahren Berufserfahrung, die an einem Essener Gymnasium arbeitet. Gefilmt wurde eine Stunde zur „Sieben Tore“-Aufgabe in Jahrgang 6.

Die beiden Lehrerinnen A und E haben jeweils aus drei für die Studie vorgegebenen Problemen die „Sieben Tore“-Aufgabe für ihre 6. Klassen ausgewählt. Lehrerin D hat ein eigenes Problem, das „Tunnelproblem“, für ihre 9. Klasse formuliert, um durch das Filmen „keine Stunde zu verlieren“.

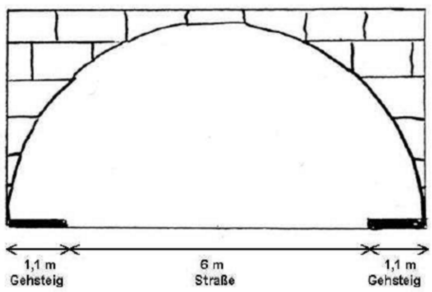
Sieben Tore

Ein Mann geht Äpfel pflücken. Um mit seiner Ernte in die Stadt zu kommen, muss er 7 Tore passieren. An jedem Tor steht ein Wächter und verlangt von ihm die Hälfte seiner Äpfel und einen Apfel mehr. Am Schluss bleibt dem Mann nur ein Apfel übrig.

Wie viele Äpfel hatte er am Anfang? [Quelle: Bruder et al. 2005]

Tunnelproblem

Kann ein LKW mit einer Höhe von 2,70m den halbkreisförmigen Tunnel passieren?



[Quelle: *Mathematik heute*, Text gekürzt]

Ausgewählte Ergebnisse

In den Daten (siehe Tabelle 1) fällt beispielsweise auf, dass insbesondere Lehrerin D sehr viel Zeit der Stunde im Plenum organisiert hat und dabei im Vergleich zu ihren Schülern den mit Abstand größeren Redeanteil hatte.

Sozialform	Lehrerin A	Lehrerin D	Lehrerin E
Einzelarbeit	05:35 (13,2%)	18:30 (32,0%)	17:14 (37,3%)
Partnerarbeit	11:30 (27,2%)	---	19:05 (41,4%)
Öffentl. Gespräch	25:10 (59,6%)	39:16 (68,0%)	09:50 (21,3%)
Redeanteile in öffentlichen Phasen	L: 08:50 (35%)	L: 20:19 (56%)	L: 07:51 (80%)
	S: 12:00 (48%)	S: 07:11 (20%)	S: 00:52 (09%)
	Still: 04:20 (17%)	Still: 09:55 (24%)	Still: 01:07 (11%)
Total	42:15 (100%)	57:46 (100%)	46:09 (100%)

Tabelle 1: Kumulierte Dauern der Sozialformen in den Unterrichtsphasen

Zusammenhänge von Unterrichtsgestaltung und Beliefs

Auf die Fragen, was für sie ein Problem sei und wie wichtig ihr diese Thematik im Unterricht sei, antwortete *Lehrerin A*: „[Ein Problem ist] eine Aufgabe, bei der der Lösungsweg nicht vorgeschrieben oder offensichtlich ist. Normalerweise gibt es mehrere Lösungswege.“ Im Unterricht wäre es so, dass „[Schüler] zu 100 Prozent […] Schema-F-Sachen [lernen], das ist leider so, entspricht aber nicht meinem Verständnis.“ Ihr ist es wichtig, dass die Lernenden Offenheit gegenüber verschiedenen Lösungswegen entwickeln und Werkzeuge besitzen, um sich mit Problemen auseinanderzusetzen. Ihre Überzeugungen zur Mathematik lassen sich insgesamt gut mit dem *problem-solving view* beschreiben. In der gezeigten Stunde spiegelt sich das insofern wider, dass sie den Schülern viel Zeit für das eigene Arbeiten einräumt und in der Besprechungsphase die verschiedenen Ansätze diskutieren lässt, ohne vorschnell auf eine „richtige“ Lösung zu drängen.

Für *Lehrerin D* ist ein Problem „irgendein Sachverhalt […], dessen Lösung man noch nicht weiß, wo es aber irgendwo ein Ziel, eine Lösung gibt, die man mit bekannten Mitteln erreichen soll.“ Ein gutes Problem ist ein „Sachverhalt, [den sich die Klasse] besonders gut vorstellen [kann], sodass die Umsetzung vom Text in die Aufgaben nicht zu schwierig ist.“ Im Gespräch wird deutlich, dass sie dem *instrumentalist view* zugeordnet werden kann. In der Aufgabenbesprechung werden (zeichnerische) Näherungslösungen der Schüler von ihr als „zu ungenau“ abgelehnt, sie selbst referiert abschließend eine rechnerische Lösung des „Tunnelproblems“ mithilfe des Satzes des Pythagoras und lässt alle Schüler den Rechenweg abschreiben.

Lehrerin E sagt: „ein Problem ist ein Sachzusammenhang, bei dem nicht sofort klar ist, welche Rechenschritte gemacht werden müssen, sondern bei dem ein bisschen Experimentieren erforderlich ist." Wichtig ist ihr das Herausfinden von Zusammenhängen. Ihre Aussagen sind sowohl mit dem *problem solving* als auch dem *Platonist view* vereinbar. In ihrem Unterricht lässt sich den Schülern einerseits viel Zeit zum eigenen Entdecken, andererseits steuert sie den Bearbeitungsprozess durch ausführliche Hilfekärtchen und referiert im abschließenden Unterrichtsgespräch die Lösung der Aufgabe, ohne ihre Schüler zu Wort kommen zu lassen. Spannend ist, dass Lehrerin E selbst den Eindruck hatte, „einen relativ niedrigen Redeanteil" zu haben und dass die Schüler „viel selbstständig" gearbeitet hätten.

Diskussion

In den ausgewählten Beispielen zeigt sich – wie in bislang allen im Rahmen der Studie analysierten Stunden und Interviews – eine sehr gute Passung zwischen den Beliefs zur Mathematik und der Gestaltung einer Problemlöse-Stunde. Z. B. geht der *problem-solving view* durchgängig mit hoher Schülerorientierung einher. Lehrerfortbildungen, die die Unterrichtsgestaltung insofern beeinflussen sollen, dass problem- und schülerorientiert (was insb. schülerzentrierte Sozialformen und Redeanteile in Plenumsgesprächen anbelangt) unterrichtet wird, sollten also auch (evtl. sogar vorrangig) auf eine Veränderung der mathematikbezogenen Überzeugungen der Lehrkräfte hinarbeiten. Letzteres kann nur langfristig und in aktiver Auseinandersetzung mit Mathematik gelingen, von einmaligen Fortbildungsangeboten kann man in diesem Zusammenhang kaum Effekte erwarten.

Literatur

Bruder, R., Büchter, A. & Leuders, T. (2005). Die „gute" Mathematikaufgabe ein Thema für die Aus- und Weiterbildung von Lehrerinnen und Lehrern. In G. Graumann (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005* (S. 139-146). Hildesheim: Franzbecker.

Ernest, P. (1989). The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: a model. *Journal of Education for Teaching: International Research and Pedagogy, 15*(1), 13-33.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19*(1), 3-45.

Hugener, I. (2006). Kapitel 4 – Sozialformen und Lektionsdauer. In E. Klieme, C. Pauli & K. Reusser (Hrsg.), *Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie. Teil 3 – Videoanalysen* (S. 55 – 61). Frankfurt am Main: Materialien zur Bildungsforschung.

Rott, B. (2015). Problemlösen im Klassenraum – Konzeption und erste Ergebnisse. In A. Kuzle & B. Rott (Hrsg.), *Problemlösen gestalten und beforschen. Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen 2014* (S. 75 – 91). Münster: WTM-Verlag

Moderierte Sektion:

Facetten des Bildungsbegriffs in der Mathematikdidaktik

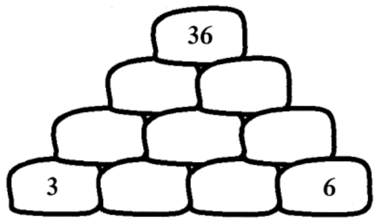
David KOLLOSCHE, Potsdam

Entdeckendes Lernen in der Kritik

Das Entdeckende Lernen im Mathematikunterricht ist in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik ein oft herangezogenes Konzept, mit dem nicht nur eine bestimmte Gestaltung von Lernsituationen, sondern auch die Hoffnung auf die Machbarkeit und Sinnhaftigkeit einer spezifischen Form von Unterricht verbunden ist. Während das Entdeckende Lernen vor wenigen Jahrzehnten noch intensiv diskutiert wurde (bspw. in Winter 1989), ist die wissenschaftliche Auseinandersetzung mit diesem Konzept weitgehend zu einem Stillstand geraten. Aktuelle Unterrichtsprojekte beziehen sich auf das Entdeckende Lernen und damit auf eine Idee, die in der Mathematikdidaktik vor guten 20 Jahren konzeptualisiert wurde, grundsätzliche Probleme aufweist und nicht hinsichtlich aktueller Entwicklungen in der Beforschung von Unterrichtskonzepten überarbeitet wurde. Infolgedessen klagen nicht nur viele Lehrer über die schwere Realisierbarkeit entdeckenden Lernens, sondern auch viele veröffentlichte Beispiele für den Mathematikunterricht erscheinen bei genauerer Betrachtung didaktisch fragwürdig. Um die Diskussion wieder aufzugreifen, soll das Entdeckende Lernen im Folgenden problematisiert werden, wozu einige kritische Fragen an dessen Konzeption herausgearbeitet werden.

1. Zur Konzeption des Entdeckenden Lernens

Die zahlreichen Quellen, auf die Entdeckendes Lernen zurückgeführt werden kann, und die vielfältigen Unterrichtskonzepte, die mit Entdeckendem Lernen in engem Zusammenhang stehen (wie problemorientiertes oder forschend-entdeckendes Lernen) erschweren eine genaue Begriffsbestimmung. Wirkungsmächtig waren in jedem Fall die Arbeiten von Bruner zum *discovery learning*. Bruner (1960/1973) legitimiert das Entdeckungslernen in scharfer Abgrenzung zum Expositionslernen (durch Lehrervorträge, Lehrtexte etc.) und baut seine Ausführungen auf lerntheoretischen Erwägungen und Lernexperimenten auf. Entdecken versteht Bruner bei Experten wie bei Laien im Sinne eines „Neuordnens oder Transformierens des Gegebenen“, um „über das Gegebene hinauszugehen“ (S. 16). Bruners Plädoyer für Entdeckendes Lernen, seine Unterscheidung von Entdeckungs- und Expositionslernen und die von ihm vorgebrachten Argumente für Entdeckendes Lernen wurden in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik unter anderem von Winter (1989) aufgegriffen. Demnach führe Entdeckendes Lernen zu gesteigerter Neugier und intrinsischer Lernmotivation, zur Entwicklung von Problemlösefähigkeiten, zum besseren Behalten des Gelernten, erlaube Einsicht in mathematische Erkenntnisse, fördere das Transferieren bekannten Wissens und Könnens auf neue Anwendungsgebiete und ermögliche die Erfahrung, dass Regelmäßigkeiten in unserer Welt eigenständig erkannt werden können. Eine wissenschaftliche Kritik der von Winter (1989) oder anderen (bspw. von Wittmann und Müller 1995) vorgelegten Unterrichtsbeispiele ist jedoch ebenso rar wie eine konzeptionelle Weiterentwicklung des Entdeckenden Lernens oder wissenschaftlich begleitete Umsetzungen im Regelunterricht. Vor diesem Hintergrund überrascht es nicht, dass es Praktikern zuweilen schwer fällt, Unterrichtsangebote zu entwickeln, die dem Anspruch des Entdeckenden Lernens gerecht werden. Müllers (2005) in einer Lehrerzeitschrift publizierter, nebenstehender Vorschlag, bei dem die Zahlenmauer auf unterschiedliche Arten vervollständigt und Gemeinsamkeiten herausgearbeitet werden sollen, ist nur ein Beispiel von vielen für eine fragwürdige Umsetzung. Zwar können alle Schüler konkrete Zahlenmauern zum vorgelegten Entwurf finden und dabei feststellen, dass im Zentrum der zweiten Zeile immer eine 9 steht; um die Entdeckung eines mathematischen Sachverhalts handelt es sich dabei jedoch nicht. Die Persistenz der 9 mathematisch zu erklären, die eigentliche mathematische Leistung, gelingt hingegen nur zwei Schülern in Müllers Klasse. Die fachlich wertvolle Entdeckung gelingt also kaum jemandem und die dem Entdeckenden Lernen nachgesagten Vorteile können so kaum greifen. Jenseits der Zweifel, ob das Entdeckende Lernen bisher in einer für die Praxis fruchtbar nutzbaren Weise aufbereitet wurde, sind jedoch zentrale Probleme in der Konzeption des Entdeckenden Lernens auszumachen.



2. Lerntheoretische Vorbehalte

Lerntheoretische Vorbehalte wurden schon zu Bruners Zeiten geäußert. Aktuelle empirische Befunde aus der pädagogischen Psychologie (Alfieri et al. 2011) und der Medizinausbildung (Albanese und Dast 2014) sowie Erkenntnisse aus benachbarten Gebieten der Mathematikdidaktik (bspw. Bakker et al. 2015) erlauben weitere Einblicke. Dabei besteht Konsens, dass ungeleitete Entdeckungsaktivitäten nicht erfolgsversprechend sind. Geleitete Entdeckungsaktivitäten können hingegen durchaus erfolgreich sein, insofern es gelingt, sie derart materialgestützt oder vom Lehrer zu betreuen, dass Entdeckungen in der intellektuellen Reichweite des jeweiligen Lerners liegen und dennoch weitgehend selbständig vollbracht werden können. Dabei ist gerade diese Herausforderung für Lehrer oft eine Überforderung, mit der sie im Unterrichtsalltag allein dastehen (vgl. Pfister et al. 2015). Es zeigt sich, dass an die Stelle einer antagonistischen Gegenüberstellung von Entdeckungs- und Expositionslernen die Frage rücken muss, wie beide Unterrichtsmethoden sinnvoll kombiniert werden können. Damit gerät auch die einseitige Zuschreibung von lernpsychologischen Vorteilen ins Wanken: Zu den Thesen der gesteigerten Neugier und Motivation und besseren Transferierbarkeit des Gelernten durch Entdeckendes Lernen gibt es keine eindeutigen Belege, aber durchaus Zweifel. Insbesondere ist anzunehmen, dass passend gestaltetes Expositionslernen ähnlich positive Effekte haben kann. Ähnliche Vorbehalte bestehen hinsichtlich der Frage, ob Entdeckendes Lernen zu einem besseren Behalten führt. Zwar ist es ein lernpsychologischer Gemeinplatz, dass Gedächtnisleistungen bei eigenaktiv konstruiertem Wissen vergleichsweise hoch sind. Das bedeutet jedoch weder, dass Entdeckendes Lernen in jedem Fall eine solche eigenaktive Konstruktion des gerade relevanten Wissens sicherstellt, noch, dass Expositionslernen unter bestimmten Bedingungen nicht ähnlich aktivierend sein kann. Daher wäre in jedem Fall neu abzuwägen, wo sich der Mehraufwand an Zeit und intellektuellem Aufwand durch Entdeckendes Lernen im Sinne eines ‚besseren' Lernens lohnt, und wo beispielsweise didaktisch aufbereitete Erläuterungen durch einen Experten vorteilhaft sind.

3. Epistemologische und soziolinguistische Vorbehalte

Gegenüber dem Entdeckenden Lernen bestehen aus epistemologischer Sicht noch grundlegendere Vorbehalte, welche auch eine soziolinguistische Dimension aufweisen. Das ‚Entdeckende' Lernen erzeugt schon rein semantisch die platonistische Vorstellung, dass in einem Phänomen wie der Zahlenmauer eine mathematische Idee *ver*deckt ist, welche der vernunftbegabte Lerner dann *ent*decken kann. Dabei entsteht eine Spannung zwischen der konstruktivistischen Lerntheorie, welche dem Entdeckenden Lernen zugrunde liegt, und einer platonistischen Auffassung der Möglichkeit und Bedingung von Erkenntnis. Aus der Sicht einer konstruktivistischen Epistemologie wäre nämlich zu sagen, dass die Mathematik keineswegs bereits im Phänomen steckt, sondern dass der Betrachter die mathematische Deutung des Phänomens erst erzeugt. Dann wird plötzlich fraglich, wie der noch unwissende Lerner den intendierten mathematischen Inhalt überhaupt erkennen soll. Am Beispiel der Zahlenmauer wäre beispielsweise fraglich, woher die Idee kommen sollte, dass sich die Persistenz der zentralen 9 überhaupt allgemeingültig und mit algebraischen Mitteln begründen ließe. Passender wäre es hier, im Sinne des Sozialkonstruktivismus von einer sozial vermittelten Wirklichkeit auszugehen, in der Eingeweihte in Phänomenen zwar Mathematik zu erkennen wissen und diese Erkenntnis auch an Lernende kommunizieren können, in denen es Lernenden aber nicht ohne weiteres möglich ist, in vorgestellten Phänomenen neue Mathematik auszumachen.

Soziolingustische Studien (bspw. Cooper und Dunne 2000) zeigen jedoch, dass gerade Kinder mit bildungsnaher Sozialisation sehr viel erfolgreicher *erahnen,* welche Form der Mathematisierung bei einem bestimmten Phänomen erwünscht ist, während dies Kindern mit bildungsferner Sozialisation deutlich seltener gelingt. Damit ergeben sich beim Entdeckenden Lernen auf Grund der Notwendigkeit zu erahnen, was die Lernsituation überhaupt erfordert, klare Unterschiede dahingehend, wie bestimmte Schülergruppen am Mathematikunterricht teilhaben können.

4. Fazit und Ausblick

Es steht außer Zweifel, dass die Diskurse zum Entdeckenden Lernen maßgeblich zur Weiterentwicklung der Kultur des Mathematikunterrichts beigetragen haben. Die aufgeführten Problemfelder zeigen jedoch, dass es dringend geboten ist, althergebrachte Überzeugungen zum Entdeckungslernen zu hinterfragen. Dabei könnte eine Auswertung aktueller Befunde aus der Unterrichtsforschung und Lernpsychologie als Anfang dienen. Andernfalls besteht die Gefahr, dass das Entdeckende Lernen zu einem affektiv aufgeladenen aber inhaltlich ausgehöhlten Gutwort degeneriert.

Literatur

Albanese, Mark & Laura Dast (2014) “Problem-based learning: Outcomes evidence from the health professions” in *Journal on Excellence in College Teaching 25*(3), S. 239–252.

Alfieri, Louis; Patricia J. Brooks; Naomi J. Aldrich & Harriet R. Tenenbaum (2011) “Does discovery-based instruction enhance learning?” in *Journal of Educational Psychology 103*(1), S. 1–18.

Bakker, Arthur; Jantien Smit & Rupert Wegerif (2015) “Scaffolding and dialogic teaching in mathematics education: Introduction and review” in *ZDM Mathematics Education 47*(7), S. 1047–1065.

Bruner, Jerome (1973) *Der Prozess der Erziehung*. Berlin Verlag: Berlin. Erstveröffentlichung von 1960 als *The Process of Education*.

Cooper, Barry & Máiréad Dunne (2000) *Assessing children's mathematical knowledge: Social class, sex, and problem-solving*. Open University: Buckingham.

Müller, Jan H. (2005) „Entdeckend Lernen mit Zahlenmauern in der Sekundarstufe“ in *Praxis der Mathematik in der Schule 47*(2), S. 32–38.

Pfister, Mirjam; Elisabeth Moser Opitz & Christine Pauli (2015) “Scaffolding for mathematics teaching in inclusive primary classrooms: A video study” in *ZDM Mathematics Education 47*(7), S. 1079–1092.

Winter, Heinrich (1989) *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Vieweg: Braunschweig.

Wittmann, Erich C. & Gerhard N. Müller (1995) *Handuch produktiver Rechenübungen*. Klett: Stuttgart.

Andreas VOHNS, Klagenfurt

Bildung, Standards, Zentrale Prüfungen – Ein Sortierungsversuch –

Im Vortrag ging es um unterschiedliche Positionen zur Frage, in welchem Zusammenhang man Bildung, Standards und zentrale Prüfungen sehen kann bzw. sollte. Die Motivation für die Beschäftigung mit diesem Thema stellt dabei die Beobachtung dar, dass die aktuelle Debatte um Bildung, Standards und zentrale Prüfungen auf unterschiedlichen Ebenen durch „falsche Dichotomien", Schwarz-Weiß-Malerei und einen „Wer nicht für mich ist, der ist gegen mich"-Gestus geprägt erscheint. Auf der einen Seite versuchen *Proponenten von Standards und zentralen Prüfungen* bisweilen, diese Unternehmungen als weitgehend *bruchlose Fortschreibung*, als einzig konsequente, zeitgemäße Re-Interpretation der klassischen Bildungs- bzw. Allgemeinbildungsidee zu positionieren. Auf der anderen Seite kontert die *Kritik an Standards und zentralen Prüfungen* dann bisweilen dadurch, einen *radikalen Bruch und inhärenten Widerspruch* zwischen Bildung einerseits sowie Standards und zentralen Prüfungen bzw. der zum Kampfbegriff erkorenen „Kompetenzorientierung" andererseits zu behaupten. Beide Positionen wurden im Vortrag als unterkomplex und reduktionistisch charakterisiert und Klafki (1991) folgend folgende Thesen zum Zusammenhang von Bildung, Standards und zentrale Prüfungen formuliert:

- Weil es den *einen* Bildungsbegriff, das *eine* Bildungskonzept nie gegeben hat, folglich auch nicht die *eine* universelle Bildungstradition gibt, ist es müßig, den Bruch mit einer solchen Tradition oder die konsequente Weiterentwicklung eines solchen Konzepts *sensu originali* zu behaupten.
- Es ist unredlich und gleichsam leer, das *Ideal einer Bildung* gegen die *faktische Realisierung einer anderen Bildung* ausspielen zu wollen.
- Gut gemeint ist nicht gut gemacht und *konzeptionelle Überlegungen* können prinzipiell nicht von der *Verantwortung für ihre faktischen Realisierungen* entbunden werden.

Im Folgenden wurden drei unterschiedliche Zugänge zum Verhältnis von Bildung, Standards und zentralen Prüfungen betrachtet.

Zugang 1: Allgemeinbildung und Zentralmatura

Auf Roland Fischers Konzeption „höherer Allgemeinbildung" (Fischer 2001) bzw. „fächerorientierter Allgemeinbildung" (Fischer 2012b) wurde sowohl explizit im Klagenfurter Pilotprojekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik" als auch implizit in dessen Ernstfall-Implementation „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik“ durch das Bundesinstitut bifie Bezug genommen. Den Kern von Fischers Bildungskonzeptionen stellt einerseits die These dar, dass Bildung ein Prozess sei, der sowohl die Individuen als auch die Gesellschaft als zu bildende Entitäten im Blick haben kann („Bildung ist die selbstreflexive Gestaltung von Individuen und Kollektiven in wechselseitiger Bezugnahme“ Fischer 2012a, S. 262). Andererseits seine Überzeugung, dass zwischen einer Bildung der Allgemeinheit und der (Aus-)Bildung der Spezialist/innen zu differenzieren sei. Nämlich dahingehend, dass betreffend der drei von ihm unterschiedenen Wissensbereiche („erstens *Grundkenntnisse* (Konzepte, Begriffe, Darstellungsformen) und -fertigkeiten, zweitens mehr oder weniger kreatives *Operieren* damit im Bereich der Anwendung (Problemlösen) oder zur Generierung neuen Wissens (Forschen), und drittens *Reflexion* (Was ist die Bedeutung der Begriffe und Methoden, was leisten sie, wo sind ihre Grenzen?)“ Fischer 2001) der Allgemeinheit im Sinne einer Bildung zu „reflektiert kommunikations- und entscheidungsfähigen Lai/innen“ die Ansprüche im Bereich operativen Wissens und Könnens erheblich geringer ausfallen müssen, als in der Ausbildung der Spezialist/innen.

Im Hintergrund steht dabei die Annahme, dass in einer modernen, arbeitsteilig organisierten Gesellschaft für gewisse, elaborierte fachliche Handlungen (z.B. die Planung eines Hausbaus, die medizinische Behandlung oder die Vertretung vor Gericht) entsprechend qualifizierte Spezialistinnen, an die man die eigentliche Ausführung einer Handlung regelmäßig delegiert bzw. delegieren kann. Soll dieses Delegieren bewusst und als rationale Entscheidung erfolgen, ist aber eine gewisse Kommunikation mit den Spezialisten, ein Grundverständnis für deren Handeln und ein qualifiziertes Nachdenken über deren Problemlösungsangebote nötig. Genau dafür braucht man nach Fischer aber vor allem Grund- und Reflexionswissen, während man im Sinne der Arbeitsteilung auf spezifisches Handlungswissen verzichten kann.

Mit Blick auf die zentrale Reifeprüfung hat Fischer zudem eingeräumt, dass eine zentrale Prüfung aufgrund der aus pragmatischen Gründen nötigen Beschränkung auf durch Tests gut messbare Fähigkeitsausprägungen notwendig auf *Grundwissens*bestände zu beschränken sein wird. Damit umfasst die zentrale Prüfung nur einen Teil dessen, das für Fischer Bildung ausmacht, mehr noch: Grundwissensbestände erlangen in der Allgemeinbildungskonzeption von Fischer ihre Relevanz eigentlich erst in ihrer Rolle für die Kommunikation mit Spezialistinnen und der Beurteilung von bzw. Entscheidung über deren. Bildend werden sie also erst im Zusammenspiel mit Reflexionswissen. Im Vortrag wurde näher ausgeführt, dass es an dieser Stelle in der realen Umsetzung sowohl von Seiten der Bildungsadministration als auch von Seiten der Lehrer/innen und Schüler/innen durchaus

Begehrlichkeiten geben kann, die zu einer *faktischen Reduktion auf Grundwissensbestände* führen. Da das Grundwissen in Fischers Bildungskonzeption aber keinen Bildungswert als solchen beanspruchen kann, verkäme die bildungstheoretische Orientierung der Reifeprüfung damit letztlich doch zum ideologischen Überbau.

Zugang 2: Bildung, Allgemeinbildung, Grundbildung

Im zweiten Zugang wurden kurz auf verschiedene Positionen zum Verhältnis von „Grundbildung“ (im Sinne PISAs) und Bildung, Allgemeinbildung (im Sinne der deutschsprachigen Tradition) von Baumert (2001), Messner (2003), Tenorth (2004), Benner (2005), Koch (2004) und Ladenthin (2002) eingegangen. Diese Autoren sind sich zwar weitgehend einig, dass mit Konzeptionen von „Grundbildung“ im Sinne PISAs eine deutliche Zäsur in der Bildungsdiskussion markiert wird, bewerten diesen Umstand allerdings sehr unterschiedlich. Baumert, Tenorth und Messner argumentieren im Kern so, dass Grundbildung als Teil eines Bemühens um eine zeitgemäße Bestimmung von Allgemeinbildung gesehen werden kann, die sich endgültig des überflüssigen Überbaus des Begriffs „Bildung“ entledigt hat. Koch und Ladenthin sehen hingegen im Bildungsbegriff und den mit ihm verbundenen geistesgeschichtlichen Traditionslinien keinen abzureißenden ideologischen Überbau, sondern ein theoretisches Fundament, ein einer jeden sinnvollen Allgemeinbildung notwendig gegenüberzustellendes Ideal, ohne welches Allgemeinbildung eine der reinen Emergenz ausgelieferte Kompromissveranstaltung werde, die der gesellschaftlichen, politischen und ökonomischen Vereinnahmung und Funktionalisierung relativ schutzlos ausgeliefert sei.

Zugang 3: Mathematical Literacies

In diesem Zugang ging es um unterschiedliche Ausprägungen, die „mathematical literacy“ annehmen kann. Mit Blick auf von Gellert, Jablonka & Keitel (2000) und Jablonka (2003) vorgenommene Unterscheidungen wurde dabei zu verdeutlichen versucht, dass „mathematical literacy“ je nach Begriffsverständnis sehr deutlich quer zu klassischen Bildungsbegriffen liegen kann, aber auch große Gemeinsamkeiten mit solchen Konzeptionen haben kann. Als problematisch wurde dabei vor allem herausgearbeitet, dass solche Begriffsunschärfen dazu führen können, dass konzeptionell eine Form von mathematical literacy beansprucht wird (z.B. „mathematical literacy by analyzing and evaluating the social use of mathematics“), die reale Umsetzung aber sehr deutlich die Züge einer anderen Form von mathematical literacy annehmen kann (vor allem „mathematical litearcy for developing human capital“ als deren utilitaristisch-funktionalistische Spielart), also erneut die Gefahr einer bloß ideologischen Nutzung des entsprechenden Begriffs/Konzepts besteht.

Ein vollständiges Vortragsmanuskript ist unter folgender Adresse abrufbar: https://dx.doi.org/10.13140/RG.2.1.4606.4403/1

Literatur

Baumert, J. (2001). *Deutschland im internationalen Bildungsvergleich*. Köln.

Benner, D. (2005). Schulische Allgemeinbildung versus allgemeine Menschenbildung?. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft* 8 (4), S. 563–575.

Fischer, R. (2001). Höhere Allgemeinbildung. In R. Aulke, A. Fischer-Buck und K. Garnitschnig (Hg.): *Situation - Ursprung der Bildung* (S. 151-161). Norderstedt: Fischer Verlag.

Fischer, R. (2012a). Bildung von Individuum und Gesellschaft. In R. Fischer, U. Greiner und H. Bastel (Hg.): *Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung* (S. 262–276). Linz: Trauner.

Fischer, R. (2012b). Fächerorientierte Allgemeinbildung. In R. Fischer, U. Greiner und H. Bastel (Hg.): *Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung* (S. 9-17). Linz: Trauner.

Gellert, U.; Jablonka, E.; Keitel, Chr. (2000). Mathematical Literacy and Common Sense. In B. Atweh, H. Forgasz und B. Nebres (Hg.): *Sociocultural research on mathematics education. An international perspective* (S. 57–76). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Jablonka, E. (2003). Mathematical Literacy. In: A. J. Bishop, M. A. Clements, Chr. Keitel, J. Kilpatrick und F. K. S. Leung (Hg.): *Second International Handbook of Mathematics Education* (S. 75–102). Dordrecht: Springer Netherlands.

Klafki, W. (1991). Die Bedeutung der klassischen Bildungstheorien für ein zeitgemäßes Konzept allgemeiner Bildung. In: W. Klafki (Hg.): *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik.* (S. 15–41). 2., erw. Aufl. Weinheim: Beltz,.

Koch, L. (2004): Allgemeinbildung und Grundbildung, Identität oder Alternative? *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft* 7 (2), S. 183–191.

Ladenthin, V. (2002). Bildung als Aufgabe der Gesellschaft. Prinzipien der Bildungsplanung nach PISA. In *Herausforderungen der Bildungsgesellschaft: Ringvorlesung im Sommersemester 2002 der Universität Erfurt* (9S.). Weimar: RhinoVerl..

Messner, R. (2003): PISA und Allgemeinbildung. *Zeitschrift für Pädagogik* 49 (3), S. 400–412.

Tenorth, H.-E. (2004): Stichwort: "Grundbildung" und "Basiskompetenzen". Herkunft, Bedeutung und Probleme im Kontext allgemeiner Bildung. *Zeitschrift für Erziehungs-wissenschaft* 7 (2), S. 169–182.

Moderierte Sektion:

Geschichte der Mathematik und Mathematikunterricht

Ysette WEISS-PIDSTRYGACH, Mainz

Geschichte der Mathematik und Mathematikunterricht

Geschichte der Mathematik kann die Inhalte des Mathematikunterrichts direkt ergänzen und bereichern. Gleichzeitig stellt sie interessante Herangehensweisen zur curricular vorgesehenen Begriffsentwicklung bereit.

In der Sektion Geschichte der Mathematik und Mathematikunterricht zeigte sich eine Vielfalt von Zugängen zur Verwendung mathematikhistorischer Themen im Unterricht. Es ging weniger um Rekonstruktion historischer Entwicklung als vielmehr um historisch-informierte mathematische Betrachtungen und grundsätzliche Überlegungen zur Einbeziehung von Geschichte der Mathematik in den alltäglichen Unterricht – sowohl explizit als auch implizit.

In den vier Vorträgen der Sektion wurden verschiedene solche Möglichkeiten der Einbeziehung historischer Inhalte sichtbar. In zwei der Vorträge (Kaenders/Kirfel & Vargyas) waren historische Quellen – *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* (Gregorius von St. Vincent) und die *Flächenlehre in den Elementen* (Euklid) – die Grundlage der mathematischen Betrachtung. In den anderen beiden Vorträgen (Kaenders & Weiss-Pidstrygach) wurden konkrete Probleme (das Sofa-Problem und die Berechnung von Polynomen und das Finden von Nullstellen) vorgestellt und die Geschichte von deren Lösungen betrachtet. Dies führte zu neuen Fragestellungen und zu Variationen der Methoden, die in diesen Problemkreisen zur Anwendung kommen können.

Besonders bei den Vorträgen zur Arbeit mit historischen Quellen unterschieden sich die Fragestellungen: Bei Gregorius von St. Vincent ging es um das Verständnis der Methode und eine Möglichkeit der Integration aller Funktionen der Schulmathematik mit geometrischen elementaren Methoden. Die Auseinandersetzung mit Euklids Flächenlehre diente zur Ausschärfung der Begriffe Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit und zur Kontrastierung mit der Einführung der Flächenlehre in der Schulmathematik.

Sektionsvorträge

Kaenders, R..: Schnecke im Sofa beim Umzug mit Stern

Kaenders, R. & Kirfel, C..: Weiterentwicklung historischer Zugänge zur Infinitesimalrechnung über Elementargeometrie

Vargyas, E.: Euklids Flächenlehre: Eine Herausforderung für die Schule?

Weiss-Pidstrygach, Y.: Auf der Suche nach Bildern im Buch der Geschichte der Mathematik

Rainer KAENDERS, Bonn

Schnecke im Sofa beim Umzug mit Stern

Vor hundert Jahren, im Jahr 1916, ist in Zürich die Dada-Bewegung gegründet worden. Das wäre Grund genug für den Titel dieses Vortrags; doch der Titel ist sogar ernst gemeint. Wir versuchen eine kurze Besprechung und einen Beitrag zum so genannten Sofaproblem. Das ist ein seit 50 Jahren offenes Problem mit einer einfachen und originellen Fragestellung, die als Grundlage des *macht mathe* Schülerwettbewerbs *Mathematik B-Tag* im November 2015 (Berendonk et al., 2015) gedient hat, der in den Niederlanden, Flandern und in NRW durchgeführt wird. Anhand des Titels stellen wir eine eigene Variation auf das Sofaproblem vor, bei der wir über Aspekte der Geschichte klassischer Kurven zu einem neuen Sofadesign gelangen.

1. Schnecke

Der Kurventyp der Pascalschen Schnecke oder des Limaçon geht zurück auf Étienne Pascal (1588–1651). Die große Vielfalt der Erzeugungsmöglichkeiten dieser Kurven gehört zu den Wundern der Elementargeometrie, die ohne weiteres in der Schule untersucht und verstanden werden können. So kann etwa die Pascalsche Schnecke als Kreiskonchoide oder als Hüllkurve konstruiert werden. Sie ist das Spiegelbild einer Hyperbel an einem Kreis um einen ihrer Brennpunkte oder Fußpunktkurve zu Kreis und Punkt. Auch ist sie mit einer einfachen Winkelbedingung definierbar und sie ist auf zwei Weisen eine Rollkurve (Hypotrochoide und Epitrochoide) und ist Dürersche Spinnenkurve. Die Kardioide oder die Trisektrix sind spezielle Limaçons.

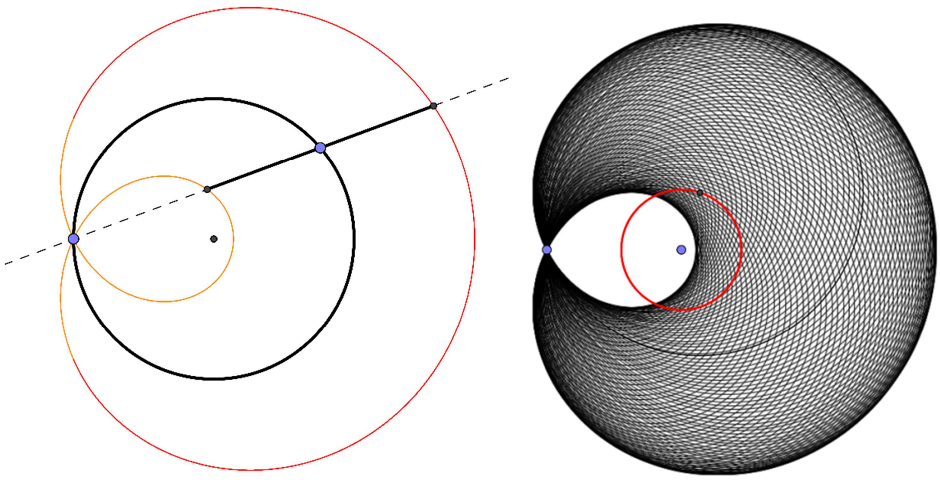


Abbildung 1: Zwei Erzeugungen der Pascalschen Schnecke als Kreiskonchoide und als Hüllkurve von Kreisen durch einen festen Punkt, deren Mittelpunkte einen Kreis formen.

2. Sofa

Leo Moser (1966) stellte vor 50 Jahren in der Rubrik *Problems and Solutions* der SIAM –Review die Frage: „Problem 66-11*, Moving Furniture Through a Hallway, […] What is the largest area region which can be moved through a "hallway" of width one (see Fig. 1)?"

Daraufhin entwarf John Hammersley (1968) ein Sofa, das von Kreissegmenten und Strecken begrenzt wird und das sich über eine verblüffende Bewegung um die Ecke des Korridors bewegt, die in der ansprechenden Animation[3] von Claudio Rocchini illustriert ist. Die Fläche dieses Hammersley Sofas beträgt $A = \pi/2 + 2/\pi \approx 2{,}2074$ und mit ihr begann ein Wettlauf um Sofas mit einer jeweils besseren *Sofakonstante*, der mit dem Sofa von Joseph Gerver (1992) und seinem Sofa mit A = 2,2195 zu einem vorläufigen Höhepunkt gelangte. Hierbei handelt es sich um einen achsensymmetrischen Umriss, der aus 18 einzelnen Kurven besteht (Kreisevolventen, Kreissegmente und Strecken) und der einem abgerundeten Hammersleys Sofa ähnelt. Gerver vermutete, dass sein Sofa optimal sei, doch ein Beweis steht bislang aus. Als obere Schranke für die Sofakonstante hatten Conway & Guy die Zahl $2\sqrt{2} \approx 2{,}8284$ bestimmt (vgl. Gerver, 1992).

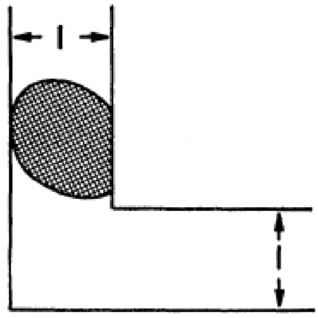


FIG. 1

Abbildung 2: Sofaproblem

3. Umzug

Betrachten wir derartige Umzugsprobleme, so liegt es nahe erst einmal einfache geometrische Formen ‚umzuziehen'. Das einfachste ist vielleicht ein Kreis oder ein Quadrat. Fragen wir uns nach der längsten Strecke, die wir ‚um die Ecke bringen' können, so wird das Problem schon kniffliger. Wir lassen eine Strecke die Wand entlang rutschen und fragen uns, welches Gebiet diese Strecke dabei überstreicht und wie die Hüllkurve bestimmt werden kann, die dieses Gebiet begrenzt. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass für eine Strecke optimal ist an der Wand entlang bewegt zu werden.

Stellen wir uns nun eine konkrete Position der Strecke ED (Abb. 3) vor, so fragen wir uns, welcher Punkt dieser Strecke zur Hüllkurve beitragen könnte. Betrachten wir zu der festen Strecke ED eine bewegliche Strecke GF, so sehen wir, dass der Teil von ED, der unter der Strecke GF liegt, sicher nicht zur Hüllkurve beiträgt. Bewegen wir GF, dann bleibt lediglich der Grenzwert des Schnittpunktes der Strecke ED mit der Strecke GF als Kandidat für einen Punkt der Strecke ED auf der Hüllkurve übrig. Nun existiert eine Drehung, die ED in GF überführt. Der Drehmittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittel-

[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Sofaproblem

senkrechten auf EG und FD. Damit ist es nun ein leichtes zu zeigen, dass die Hüllkurve als Rollkurve (siehe Abb. 3) dargestellt werden kann.

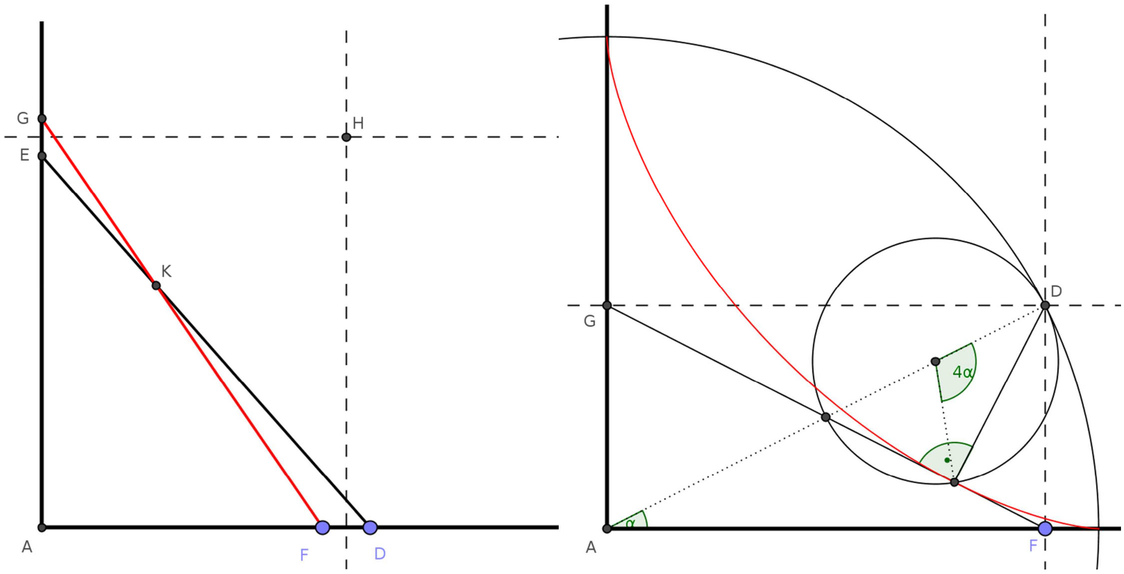


Abbildung 3: Die Astroide als Hüllkurve und Hypozykloide.

4. Stern

Jetzt stellen wir uns ein Sofa vor, das eine feste Strecke als Rückseite und dessen Seiten rechtwinklig dazu verlaufen (siehe Abb. 4). Wir möchten nun unter allen solchen das maximale Sofa bestimmen unter der Bedingung, dass die Rückseite an der Außenwand entlang verschoben wird.

Um dies zu untersuchen, lassen wir nicht das Sofa durch den Korridor rutschen, sondern bewegen den Korridor gegenüber dem Sofa – eine Idee, die auch Gerver (1992) allgemeiner zur Bestimmung seines Sofas verwendet hat. Welcher Teil des Sofas wird durch den Korridor bei der Bewegung weggewischt? Führen wir die Konstruktion mit GeoGebra aus, finden wir die folgende Sofaform (Abb. 4), die uns zunächst vor ein Rätsel stellt. Welche Kurve wird durch die Begrenzung dieses Sofas beschrieben?

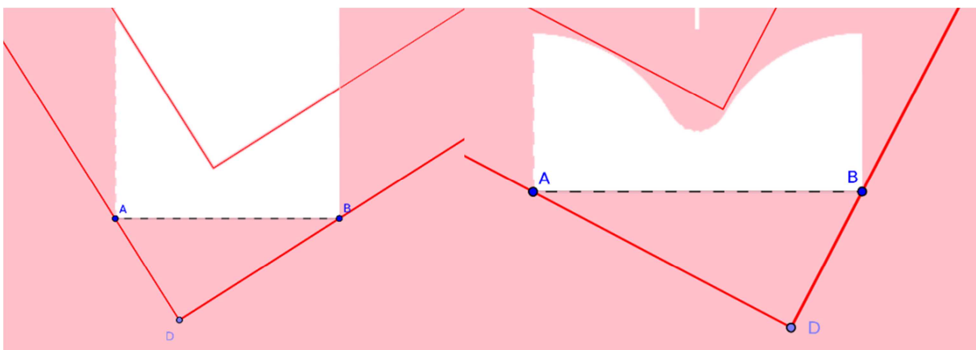


Abbildung 4: Ein Sofa mit einer Strecke als Rückseite, die an der Wand entlang rutscht.

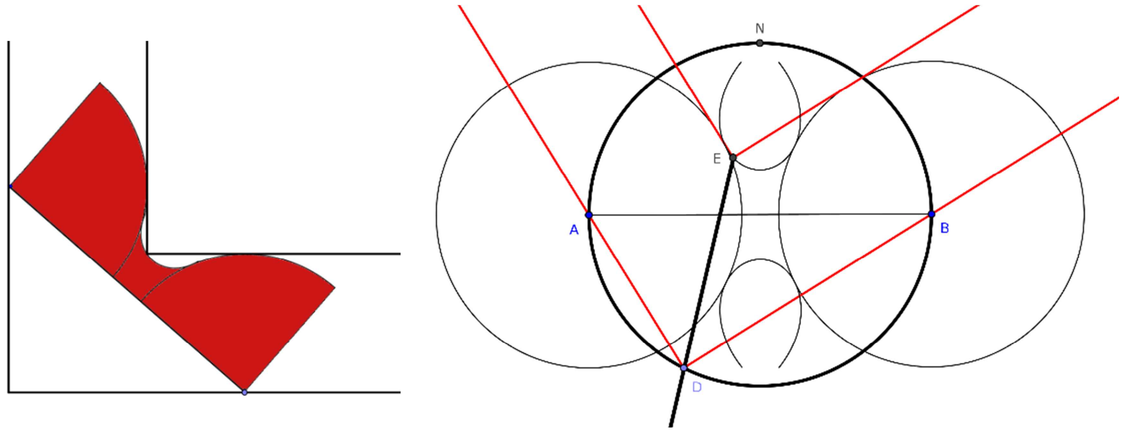


Abbildung 5: Sofa mit Pascalscher Schnecke (links). Beweisskizze der Aussage (rechts).

Recht schnell sieht man, dass es sich bei den äußeren Rundungen des Sofas um Kreissegmente handeln muss. Und das Kurvenstück zwischendrin? Tatsächlich finden wir hier eine Pascalsche Schnecke als Kreiskonchoide. Dazu können wir uns mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes (bzw. Satz vom Südpol) klar machen, dass die Winkelhalbierende des rechten Winkels $\angle ADB$ immer durch den Punkt N verläuft. Die Strecke DE bleibt dabei gleich lang und also beschreibt der Punkt E eine Pascalsche Schnecke.

5. Schnecke im Sofa beim Umzug mit Stern

Der Kontext des Sofaproblems gibt Anlass zu verschiedensten – teilweise einfachen – Untersuchungen, wie sie die Schülerinnen und Schüler beim Mathematik B-Tag vielfältig angestellt haben. Wenn wir von Schülern erwarten, dass sie eigenen Fragen nachgehen, sollten wir das selbst auch gelegentlich tun. Hierzu ist eine detailliertere Veröffentlichung geplant (Kaenders, 2016).

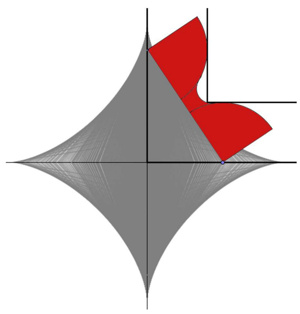


Abbildung 4: Schnecke im Sofa beim Umzug mit Stern.

Literatur

Berendonk, S., Beukers, F., Bos, R., Deprez, J., Van Eijmeren, M., Goddijn, A., Herremans, A., Kaenders, R., Van der Kooij, H., Lippert, M., Van Oord, R., Rijnierse, M., Tak, S. (2015). Um die Ecke – Mathematik B-Tag 2015. http://www.machtmathe.de/.

Gerver, J. L. (1992). On Moving a Sofa Around a Corner. *Geometriae Dedicata* 42 (3): 267–283.

Hammersley, J. M. (1968). On the enfeeblement of mathematical skills by "Modem Mathematics" and by similar soft intellectual trash in schools and universities. *Bull. Inst. Math. Appl.* 4, 66-85.

Kaenders, R. (2016). The Snail in the Sofa. *geplante ausführlichere Veröffentlichung*.

Moser, L. (1966). Problem 66-11: Moving furniture through a hallway. *SIAM Rev.*, 381.

Rainer KAENDERS, Bonn, Christoph KIRFEL, Bergen

Weiterentwicklung historischer Zugänge zur Infinitesimalrechnung über Elementargeometrie

Bei der Einführung der Integration in der Schule wird üblicherweise eine Herangehensweise verfolgt, bei der erst der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Berechnung der Integrale bei den Funktionen erlaubt, die in der Schule behandelt werden.

Die in der Schule vorkommenden Potenz- und Exponentialfunktionen sowie Logarithmen und die trigonometrischen Funktionen sind Realisierungen wichtiger funktionaler Eigenschaften, die häufig den Schülern bekannt sind, bevor sie den Integralkalkül angehen. Die Auseinandersetzung mit diesen Eigenschaften spezieller Funktionen spielt in der Schule eine größere Rolle als die abstrakte Behandlung aller (stetigen) Funktion. Dies bereitet auf die höhere Analysis und insbesondere die Behandlung von Differentialgleichungen vor, die wir als eine Form von Symmetriebedingung begreifen.

Entlang historischer Ideen des 17. Jahrhunderts (u.a. des Gregorius von St. Vincent) setzen wir Begriffe der Infinitesimalrechnung mit diesen Eigenschaften in Verbindung und zeigen einen Zugang zur Analysis, der wichtige Ideen der Geometrie vertiefend aufgreift und hiermit einen beziehungshaltigen Einstieg in die Infinitesimalrechnung ermöglicht. In Kaenders & Kirfel (2016) werden die Ergebnisse ausführlicher dargestellt.

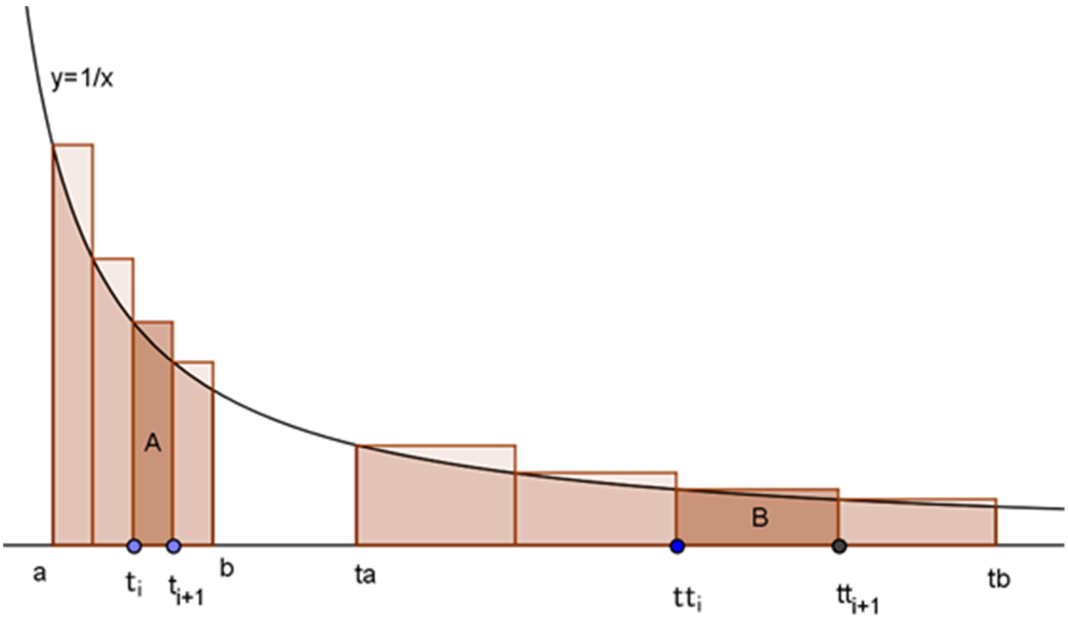
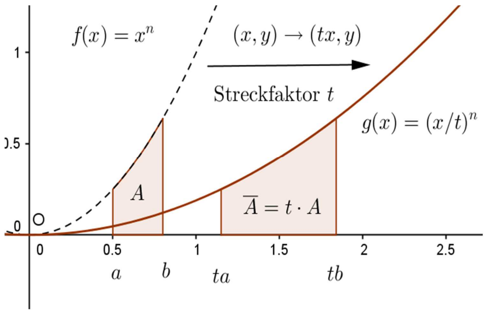


Abbildung 1: Gleicher Flächeninhalt der Rechtecke *A* und *B* unter der Hyperbel

1. Integration à la Gregorius

Gregorius (*1584 Brügge, †1667 Gent) war ein flämischer Jesuit am St. Vincent Kloster, der als erster die Fläche unter der Hyperbel berechnen konnte.



Das Integral $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ war schon von Pierre de Fermat und Gilles Personn de Roberville berechnet worden, doch keine der Fermatschen Methoden können für die Hyperbel angewandt werden. Gregorius hatte beobachtet, dass für ein $t > 0$ ein Rechteck A mit Breite $t_{i+1} - t_i$ und Höhe $\frac{1}{t_i}$ denselben Flächeninhalt hat wie ein weiteres Rechteck B mit Breite $tt_{i+1} - tt_i$ und Höhe $\frac{1}{tt_i}$ (Abb. 1).

Wir folgern $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \int_{ta}^{tb} \frac{1}{x} dx$ und erhalten die fundamentale Regel:

$$\begin{aligned} \int_1^{ab} \frac{1}{x} dx &= \int_1^a \frac{1}{x} dx + \int_a^{ab} \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^a \frac{1}{x} dx + \int_1^b \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

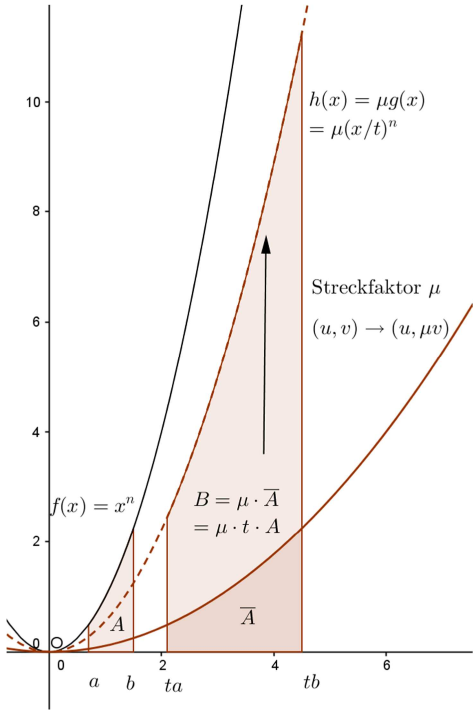


Abbildung 2: Der Funktionsgraph von $f(x) = x^n$ wird durch Strecken und Stauchen in sich überführt.

Damit sind die Grundlagen für die Erkenntnis gelegt, dass der Logarithmus die Fläche unter einer Hyperbel beschreibt. In (Kirfel, 2014) wird dies im Detail ausgeführt. Diese Idee kann nun auch auf alle anderen Funktionen der Schule erweitert werden.

2. Strecken und Stauchen

Diese Idee des Gregorius kann nun auch auf alle anderen Funktionen der Schule erweitert werden, wie wir in Kaenders & Kirfel (2016) zeigen. Bei der Hyperbel kann man zu demselben Ergebnis wie Gregorius gelangen, wenn man den Graphen der Funktion über Strecken und Stauchen in sich selbst überführt. Analog können wir so auch bei allen anderen Funktionen der Schule über Strecken und Stauchen vorgehen. Wir deuten dies hier zunächst anhand von Potenzfunktionen an.

In Abb. 2 sehen wir, wie eine Flächenstück A unter dem Graphen von $f(x) = x^n$, das mit dem Faktor $t > 1$ nach rechts gestreckt wird und zu einem Flächenstück $\bar{A}$ mit Flächeninhalt tA wird. Die Streckung mit dem Faktor t^n nach oben führt zu einem Flächenstück $\bar{\bar{A}}$, das wieder genau unter den Ausgangsgraphen passt und den Flächeninhalt $t^n \cdot tA$ misst. Dies ergibt: $\int_0^t x^k dx = C_p \cdot t^{k+1}$, wobei wir $C_p = \int_0^1 x^k dx$ berechnen möchten (vgl. Kaenders, 2015). Dazu berechnen wir die Flächen über den Intervallen $[0,1]$ und $[0,t]$ für $1 < t$. Den Unterschied $\int_0^t x^k dx - \int_0^1 x^k dx = C_p t^{k+1} - C_p$ zwischen diesen Flächen, den wir in Abb. 3 als schmalen Streifen erkennen können, schätzen wir jetzt nach oben und nach unten mit Rechteckstreifen ab und benutzen die Monotonie der Potenzfunktion:

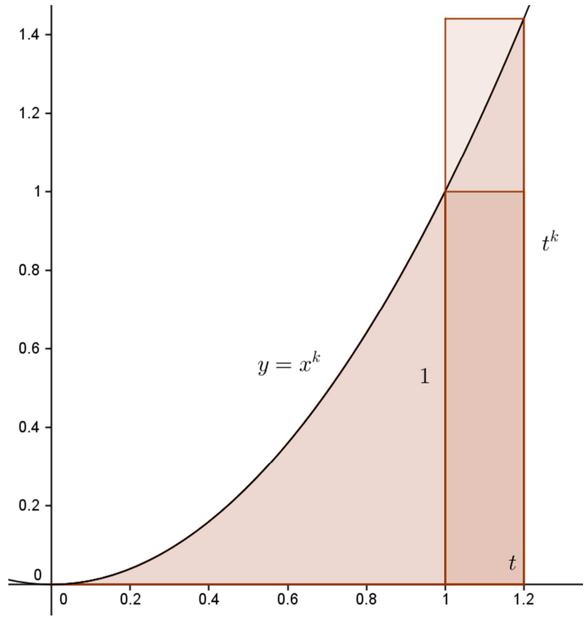


Abbildung 3: Berechnung der Konstanten C_p.

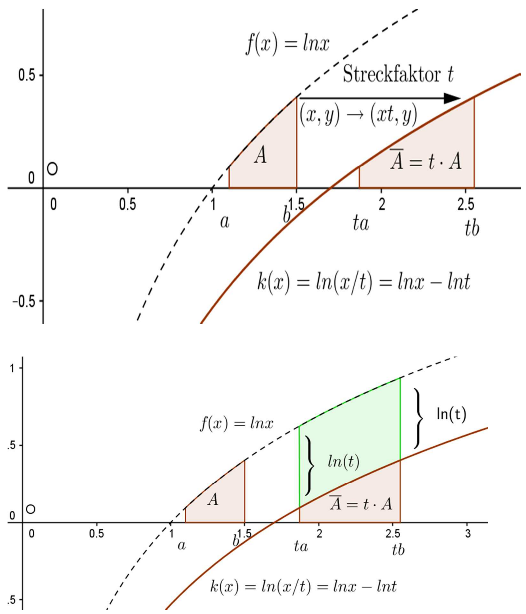


Abbildung 4: Herleitung des Integrals der Logarithmusfunktion.

$$
\begin{aligned}
(t-1)\cdot 1 &\le C_p t^{k+1} - C_p \\
&\le (t-1)\cdot t^k \\
&\Leftrightarrow 1 \\
&\le \frac{t^{k+1}-1}{t-1}\; C_p \\
&\le t^k
\end{aligned}
$$

Mit $1 \le (1 + t + t^2 + \cdots + t^k)\, C_p \le t^k$ für alle $t > 1$ folgt $C_p = \frac{1}{n+1}$.

Bemerkung. Die hier vorgestellte Methode ist für alle reellen Werte von $k \neq -1$ erlaubt, nicht nur für ganzzahlige Exponenten.

3. Logarithmus

Besonders schön stellt sich die verallgemeinerte Methode des Gregorius im Fall des Logarithmus dar. Wenn wir die Fläche A unter dem mus$f(x) = \ln x$ über dem Intervall $[a, b]$ von der y-Achse aus mit dem Faktor t strecken, dann erhalten wir wieder eine Fläche $\bar{A} = tA$. Strecken wir den Graphen von f auf dieselbe Weise, erhalten wir den Graphen der Funktion $k(x) = \ln\frac{x}{t} = \ln x - \ln t$. Das bedeutet, dass wir in Abb. 4 den Unterschied der Flächen über $[ta, tb]$ zwischen den Graphen von $f$und k als ein ‚Rechteck' erkennen, d.h. einen Streifen gleicher Höhe $\ln t$.

Aus dieser Beobachtung lesen wir nun unmittelbar die folgende Regel ab:

$$\int_{t\cdot a}^{t\cdot b} \ln x\, dx = \bar{A} + \ln t\,(t\cdot b - t\cdot a)$$

$$= t\int_a^b \ln x\, dx + t\ln t\,(b-a).$$

Und damit haben wir die Logarithmusfunktion integriert:

$$\int_0^t \ln x\, dx = \int_0^{t\cdot 1} \ln x\, dx$$

$$= t\int_0^1 \ln x\, dx + t\ln t\,(1-0)$$

$$= C_L\cdot t + t\ln t.$$

Auch die Konstante C_L kann ähnlich wie bei den Potenzfunktionen bestimmt werden.

4. Resumé

Auch auf die Funktionen Sinus und Kosinus ist der Gregorius Ansatz verallgemeinerbar. Eine viel detailliertere Darstellung mit ausführlichen Referenzen findet sich in Kaenders & Kirfel (2016).

Mit der „gregorianischen Methode" kann man zwar nicht jede stetige Funktion an sich, jedoch aber alle in der Schule vorkommenden Elementarfunktionen geometrisch integrieren. Sie baut auf elementargeometrischen Vorstellungen auf, die auch an anderer Stelle in der Schule von Bedeutung sind. Sie erfordert keine abstrakten Grenzwertbetrachtungen. Eine Abhandlung über eine entsprechende Herangehensweise an die Ableitung von Elementarfunktionen ist in Planung.

Literatur

Eine Literaturliste kann vom Autor angefordert werden.

Emese VARGYAS, Mainz

Euklids Flächenlehre: Eine Herausforderung für die Schule?

Motivation

In der Schulmathematik wird der Eindruck vermittelt, dass jede ebene Figur einen zahlenmäßigen Flächeninhalt hat, womit dann problemlos algebraisch gerechnet wird. Die *Elemente* von Euklid bilden auch für den heutigen Geometrieunterricht in vieler Hinsicht die Grundlage. Dort erfolgt aber das "Rechnen" mit Flächen geometrisch ohne Verwendung von Maßzahlen. Ziel des vorliegenden Artikels ist es, den Einstieg in die Flächenlehre im heutigen Schulunterricht und in Euklids *Elementen* kurz darzustellen. Von einer Lehrbuchaufgabe ausgehend, wird eine Methode für Zerlegung und Zusammensetzung aufgezeigt, mit deren Hilfe man ohne Rechnung zum Satz des Pythagoras gelangen kann.

Flächenlehre in der Schule

Die Anfänge der Flächenlehre kann man schon in der Grundschule in Form von Kästchen-Zählen aufspüren. Diese Vorerfahrungen werden in der Sekundarstufe I weiter ausgebaut, wobei der Flächenvergleich durch Zerlegung eine wichtige Rolle spielt. Der Flächenvergleich durch Ergänzung wird auch erwähnt, später wird aber kein Unterschied mehr zwischen Zerlegungs- bzw. Ergänzungsgleichheit gemacht. Die Formel für den Flächeninhalt eines Rechtecks, deren Seitenlängen natürliche oder Bruchzahlen sind, wird bis Ende des 6. Jahrgangs formuliert. Ausgehend davon, dass man ein Parallelogramm durch Zerlegen in ein flächengleiches Rechteck umwandeln kann, wird die Flächenformel auch für das Parallelogramm aufgestellt. Dieser Übergang vom Rechteck zum Parallelogramm wird ohne Rücksicht auf die Art der neu entstandenen Seitenlängen gemacht. Die ganz schiefen Parallelogramme werden meistens nicht mehr zerlegt. Auf sie wird nur die Formel „Basis mal Höhe“ angewendet, wodurch die Herangehensweise durch Zerlegen und Zusammenfügen zu schnell auf dem Altar der Formel-Anwendung geopfert wird. Diese Tendenz eines frühen Übergangs zur Formel ist auch im Falle des Dreiecks (bzw. Trapezes) zu beobachten.

Euklids Flächenlehre

Schaut man dagegen in Euklids *Elemente,* wird man bei der Suche nach Flächenformeln nicht fündig. Die Anfänge der Flächenlehre sind bei Euklid im Buch I (§ 35) zu finden, diese Lehre wird dann im Buch VI unter der Verwendung der eudoxischen Proportionenlehre erweitert. Eine arithmetische Flächenmessung erfolgt weder im Buch I noch im Buch VI. Am Beginn (§ 35) steht ein elementargeometrischer Flächenvergleich, welcher sich auf die Axiome aus Buch I stützt. Zuerst werden Parallelogramme miteinander verglichen. Mit dem Axiom 7 „Was einander deckt, ist einander gleich“ (vgl.

Thaer (1969) S. 3.) wird vorausgesetzt, dass Deckungsgleichheit Flächeninhaltsgleichheit impliziert, auch wenn der Begriff *Flächeninhalt* nicht explizit definiert wird. Bei dem Vergleich der Parallelogramme (bzw. weiterer einfacher Polygone) wird kein Unterschied zwischen Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit gemacht, sondern unterstellt, dass diese äquivalent sind. Diese Tradition wird, wie schon oben festgestellt, auch heutzutage in der Schule fortgesetzt. (Mehr Information zu dieser Äquivalenz findet der Leser in Hilbert (1956)). An dieser Stelle lohnt es sich, einen Blick auf die anderen Axiome zu werfen. Wie Abb. 1 zeigt, bieten diese Axiome eine gute Gelegenheit dazu, darüber nachzudenken, was mit einigen Begriffen eigentlich gemeint ist: In welchem Sinne ist *gleich* zu verstehen? Welche Bedeutung haben die Worte *Halbes*/*Halbierung, Doppeltes/Verdoppelung* u.s.w.?

Abb. 1

Ein gesonderter Blick gebührt dem Axiom 8: „Das Ganze ist größer als der Teil.“

Dieses Axiom wird oft bei den Beweisen verwendet, wobei keiner der Begriffe *Ganze* und *größer* explizit geklärt wird. Abb. 2 gibt ein Beispiel für die Notwendigkeit einer solchen Klärung.

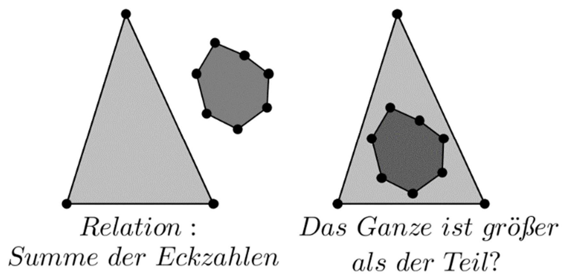


Abb. 2

Zerlegungen

Bei dem Flächenvergleich zweier einfacher Polygone durch Zerlegung besteht die größte Hürde darin, eine geeignete Zerlegung zu finden. Die folgende Aufgabe (Abb. 3) ist dem Lehrbuch „Neue Wege Mathematik 8 RP“ entnommen. Sie wurde im Kapitel „Flächen vergleichen“ gestellt, bevor die Flächenformeln für Parallelogramme und Dreiecke eingeführt wurden.

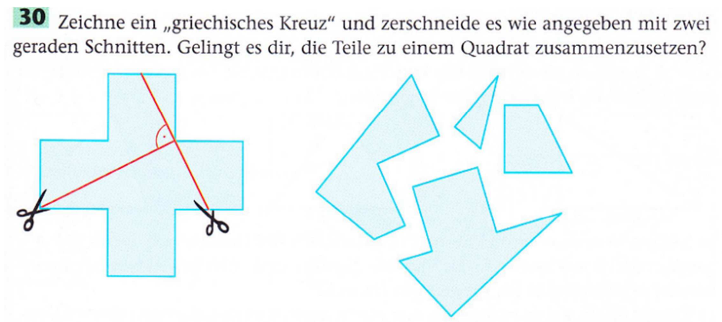


Abb. 3 (Neue Wege Mathematik 8 RP. Bildungshaus Schulbuchverlage Braunschweig 2005. ISBN 978-3-507-85568-7, S. 161.)

Wie man im rechten Bild leicht erkennt, wird die Aufgabe durch die besondere Anordnung der einzelnen Teile derart trivialisiert, dass den Schülern nur noch das Zusammenschieben der Teile übrig bleibt.

Die Umformulierung der Aufgabe „Wandle das griechische Kreuz in ein flächengleiches Quadrat um“ gestattet bei der Bearbeitung einen größeren Spielraum. Die Aufgabe ist in einer ähnlichen Form als Klassiker in vielen Büchern für Unterhaltungsmathematik zu finden (z.B. Dudeney (1970)). Abb. 4 zeigt eine Lösung, die minimale mathematische Kenntnisse erfordert. Ist eine

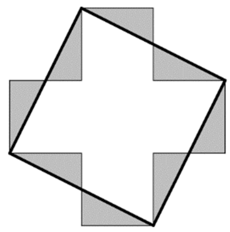


Abb. 4

Lösung (vgl. Abb. 4) nicht so einfach zu finden wie im Falle des griechischen Kreuzes, stellt sich die Frage, ob man für die Behandlung von Aufgaben, bei denen es um Zerlegen und Zusammenfügen geht, eine Methode entwickeln könnte. Eine Möglichkeit dafür bietet Abb. 5. Man legt die Ebene, falls möglich, mit der zu zerlegenden Figur aus.

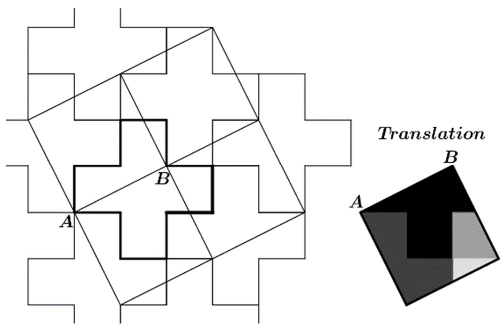


Abb. 5

Auf das so entstandene Gitter legt man das gesuchte (Quadrat)gitter wie in Abb. 5. Die Seitenlänge AB des Quadrates kann man entweder aus der Abb. 4 ablesen und z.B. mit dem Zirkel abtragen oder aus der Gleichung $|AB|^2 = 5$ (durch Zählen der Einheitsquadrate im griechischen Kreuz) ermitteln und anschließend konstruieren (falls der Satz oder die Satzgruppe des Pythagoras schon bekannt sind). Aus der Kreuzung dieser Gitter liest man dann einfach die Lösung ab. Durch die Verschiebung des oberen Quadratgitters entstehen weitere Lösungen (siehe Abb. 6). Alle diese Lösungen erhält man durch Translation der einzelnen Teile, einige davon lassen sich auch durch Rotation um bestimmte Punkte erzeugen (Abb. 6b und 6c). Dafür befestigt man das schwarze Vieleck, alle anderen Vielecke werden nacheinander um die gekennzeichneten Punkte gedreht, bis sie sich zum Quadrat zusammenfügen.

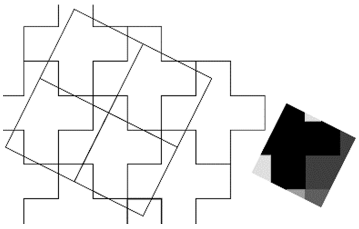


Abb. 6a

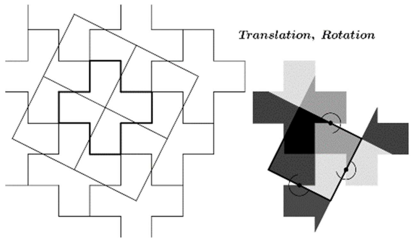


Abb. 6b

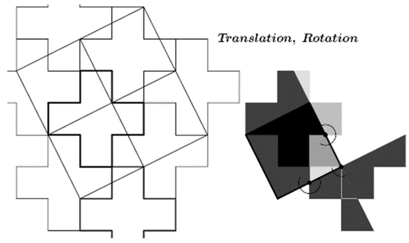


Abb. 6c

Der oben erarbeiteten Idee folgend, kann man sich auch dem Satz des Pythagoras nähern. Dazu pflastert man die Ebene gemäß Abb. 7 mit zwei beliebigen Quadraten. (Der Leser ist eingeladen, die Möglichkeit einer solchen Pflasterung zu prüfen.) Legt man auf das so entstandene Muster das Quadratgitter, dessen „Einheitsquadrat“ die Summe der gegebenen zwei Quadrate ist, so sieht man, dass das Quadrat über die Hypotenuse gleich der Summe der Kathetenquadrate ist (Abb. 8).

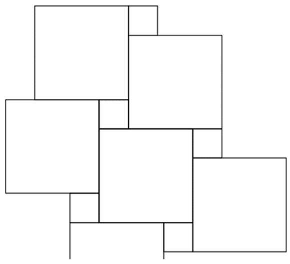


Abb. 7

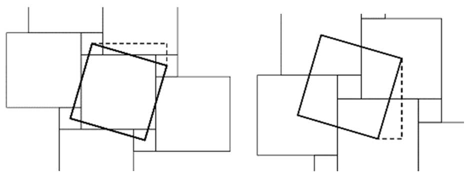


Abb 8

Literatur

Dudeney, H. E. (1970). *Amusements in Mathematics.* New York: Dover Publications, Inc.

Hilbert, D. (1956). *Grundlagen der Geometrie*. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft.

Neue Wege Mathematik 8 RP. Bildungshaus Schulbuchverlage Braunschweig 2005. ISBN 978-3-507-85568-7, S. 161.

Thaer, C. (1969). *Euklid: Die Elemente*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Ysette WEISS-PIDSTRYGACH, Mainz

Auf der Suche nach Bildern im Buch der Geschichte der Mathematik

Viele mathematische Konzepte, z.B. universelle Ideen, haben verschiedene mathematische Darstellungen und können in unterschiedlichen mathematischen Gebieten und Kontexten formuliert und entwickelt werden (Schreiber, 1983). Die meisten derzeitigen mathematikdidaktischen Fragestellungen beschäftigen sich in diesem Zusammenhang mit dem Darstellungswechsel von einem Kontext in den anderen; im Vordergrund steht dabei der Übergang zur geometrischen Darstellung. Ikonische Bezeichner in der Form von Illustrationen, Veranschaulichungen, Verbildlichungen werden hier leider kaum von einem im geometrischen Kontext entwickelten Begriff unterschieden. So wird, z.B. beim Wechsel von der analytischen Darstellung der Ableitung einer Funktion in den geometrischen Kontext nicht zum geometrischen Objekt *Tangente* an eine Kurve gewechselt sondern zur Visualisierung des Differenzenquotienten des Graphen der Funktion. Die Auseinandersetzung mit der historischen Entwicklung des Begriffs kann hier viel dazu beitragen, nicht nur das bildhafte Objekt sondern auch geometrische Operationen, Invarianten und Problemstellungen mit in den Darstellungswechsel einzubeziehen. In diesem Beitrag widmen wir uns Fragen zur Begriffsentwicklung schulrelevanter mathematischer Konzepte mit verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten, die sich Lehrende *vor* dem Einüben des Darstellungswechsels oder der Analyse dabei auftretender Fehlkonzepte im Rahmen langfristiger Unterrichtsplanung stellen sollten:

- Auf welchem Gebiet (Algebra, Geometrie, Arithmetik, Analysis, Topologie, Numerik) sollte das mathematische Konzept in der Schule (oder im Lehramtsstudium) eingeführt werden?
- Falls man sich für eine Begriffsentwicklung auf mehreren Gebieten entscheidet, durch welche Reihenfolge und mit welchem überbrückenden Bezugssystem kann man derzeitig vorhandene erfolgreiche Orientierungsstrategien Lernender nutzen und kontextübergreifende Überlegungen fördern?
- Welche Problemstellungen, Kontexte und Bezugsgebiete eignen sich zum entdeckenden Lernen und erlauben die Entwicklung eigener kontextbezogener oder kontextübergreifender Fragestellungen bei Lernenden?

Wesentlich für unseren Ansatz zur Beantwortung dieser Fragen ist die Bezugnahme zur historischen Begriffsentwicklung. Geschichte der Mathematik wird hier genutzt, um mathematisches Verständnis zu fördern und weiterführende Fragestellungen der Lernenden zu inspirieren.

1. Begriffsentwicklung in mehreren Kontexten mit Darstellungswechsel: Verschiedene Kontexte mit unterschiedlichen Problemstellungen

Als Ausgangspunkt der Diskussion dienen uns die theoretische Fundierung (Berendonk, 2013) und die schulpraktische Umsetzung (Berendonk, 2014) einer Lernumgebung zum Eulerschen Polyedersatz. Berendonk entwickelt Formulierungen und den Beweis des Eulerschen Polyedersatzes anhand verschiedener Problemstellungen und in verschiedenen Kontexten. Die Begriffsentwicklungen in den unterschiedlichen Kontexten erfolgen unabhängig voneinander und basieren auf Aufgabenstellungen, die auf den ersten unvorbereiteten Blick nichts miteinander zu tun zu haben scheinen. Die Entdeckung des Zusammenhangs erfolgt durch die Entwicklung und Verwendung einer kontextübergreifenden Metapher und durch kontextübergreifende Überlegungen.

Die verschiedenen Problemstellungen helfen hier u.a. das systematische Nachzählen der Ecken, Kanten und Flächen eines Polyeders, welches für das Aufstellen der Vermutung notwendig ist, zu motivieren: Die am Polyeder nicht intuitiv erscheinende mathematische Tätigkeit *Zählen und ins Verhältnis setzen* wird in einen anderen Kontext verlagert, wo sie als Teil der Analyse einer Gewinnstrategie naheliegend erscheint. Die kontextübergreifende Begriffsentwicklung ist angeleitet und durch die Entwicklung einer uniformierenden Metapher geprägt. Die begleitende Anleitung und Systematisierung der Ergebnisse in den Kontexten unterstützen die Entwicklung einer kombinatorischen Sicht auf diese Kontexte und eine sich in allen Kontexten ähnelnde schematische Darstellung der Lösung. Auf letztere wird in den kontextübergreifenden Überlegungen mithilfe jener Metapher zurückgegriffen. Der Darstellungswechsel besteht hier in der Nutzung der Metapher als wiederkehrendes Muster in allen Kontexten. Die Schwierigkeit und der große Charme dieser Begriffsentwicklung bestehen in der Vereinheitlichung der Lösungen der durch ihre Kontexte motivierten unterschiedlichen Problemstellungen. Vor allem historische Exkurse[4] zu den verschiedenen Kontexten geben dieser durch Instruktion geprägten Begriffsentwicklung Raum für entdeckendes Lernen.

2. Begriffsentwicklung in mehreren Kontexten mit Darstellungswechsel: Verschiedene Kontexte mit gleicher Problemstellung

Ausgehend von der Analyse der vorangegangenen Begriffsentwicklung fragen wir uns, wie wir Stärken unserer Schüler und Studierenden in die Vorgehensweise einbeziehen können. Durch die starke Algebraisierung der

[4] Für Beispiele siehe Berendonk (2013), S. 23 – 41.

Schulmathematik ist ihnen Algebra vertrauter als Geometrie. Algorithmisches Vorgehen und auf formalem Verständnis und Mustererkennung beruhende Strategien sind im Alltag erfolgreich und daher Teil routinierter Herangehensweisen. Die Output- und Testorientierung des Schulalltags fördern Reproduktionsfertigkeiten und operationalisierte Anwendungen von Lösungsschemata. Wir beginnen daher nicht mit problemorientierten Einstiegen, die zu einer kontextübergreifenden Struktur schematisiert und verallgemeinert werden müssten, sondern mit dem algebraischen Formalismus als Tätigkeit – einem *Algorithmus im Kontext der Algebra*. Dieser Algorithmus realisiert den Darstellungswechsel: Die Kontexte ermöglichen verschiedene Interpretationen des Ausgangsproblems bei deren Lösung die gleiche Problemlösemethode zur Anwendung kommt. Wie diese Kontextualisierungen erfolgen können, skizzieren wir am Beispiel des Problems *Lösen polynomialer Gleichungen* und der kontextübergreifenden Problemlösemethode *Hornerschema zur Bestimmung von Funktionswerten eines Polynoms*. Eine ausführliche Darstellung der Methode und der im folgenden diskutierten Kontexte findet der interessierte Leser in (Kalman, 2009).

$\tilde{x}$	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
	0	$b_{n-1}\tilde{x}$	$b_{n-2}\tilde{x}$	$\cdots$	$b_2\tilde{x}$	$b_1\tilde{x}$	$b_0\tilde{x}$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_1	b_0	$f(\tilde{x})$

$\tilde{x}=2$	1	6	11	6
		2	16	54
	1	8	27	60

Abbildung 1: Die Methode aus dem Jahr 1819 von William Horner (1786 – 1837): allgemein für $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ mit $a_0, a_n \neq 0$ (links) und im speziellen Beispiel für $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ (rechts).

Die Stärken unserer Schüler nutzend führen wir Horners Methode schematisch ein (Abb.1) und wenden sie an mehreren Beispielen an. Das Hornerschema und der Zusammenhang mit der Polynomdivision werden mit typisch algebraischen Methoden (Termumformung, Einführung von Indices) bewiesen, was die weitere Operationalisierung der Methode unterstützt. Im zweiten Schritt wird Lills Methode eingeführt. Die Objekte bei Lills Methode sind Polygonzüge; wir befinden uns also in einem geometrischen Kontext. Wir wählen dieselben Zahlenbeispiele und symbolischen Bezeichnungen für die Polygonzüge wie beim Hornerschema. Da der Beweis von Lills Methode Ähnlichkeit von Dreiecken und den Algorithmus des Hornerschemas verwendet, wird das Hornerschema nicht nur veranschaulicht, sondern geometrisch kontextualisiert. Letzteres führt zum geometrischen Ablesen von Nullstellen, also einer Ausweitung der Problemlösemethode, die nicht unmittelbar zurück in den algebraischen Kontext übertragen werden kann. Die Frage, ob der geometrische Zugang auch die Konstruktion von Wurzeln und – mittels Rückübersetzung in den algebraischen Kontext – Lösungsformeln für polynomiale Gleichungen liefert, erweitert den Darstellungswechsel zwischen Objekten auf einen Darstellungswechsel zwischen Kontexten. Lills

Methode bietet Anlass, einen Exkurs in die Ingenieurmathematik des 19. Jahrhunderts zu unternehmen. Die Methode von Carlyle (DeTemple, 1991), ein Spezialfall von Lills Methode, bildet die Brücke zur geometrischen Konstruktion von Wurzeln quadratischer Gleichungen. Durch die Interpretation von Lills Methode bzgl. der Konstruierbarkeit von Wurzeln mit Zirkel und Lineal oder Papierfalten (Hull, 2011) erhalten wir zwei weitere Kontextualisierungen. Der Darstellungswechsel wird hier durch die im geometrischen Kontext interpretierte (und gegen-über der algebraischen erweiterte) Problemlösemethode gewährleistet. Unser Ansatz mit der modernen algebraischen Methode zu beginnen, bringt Geschichte der Mathematik als Quelle für andere Kontexte ins Spiel: Die Entdeckungen einer mathematischen Struktur in verschiedenen Kontexten und auf verschiedenen Gebieten erfolgen selten zeitgleich. Geometrische und arithmetische Problemstellungen sind häufig Vorläufer für die algebraische Formalisierung. Dies bietet die Möglichkeit Begriffsentwicklung in verschiedenen Kontexten mit historischen Exkursen zu verbinden. Die Einbeziehung von Geschichte der Mathematik gestattet uns außerdem verschiedene Kontexte durch eine zusätzliche zeitliche Komponente voneinander abzugrenzen. Letzteres ist wesentlich für die Entwicklung eigener kontextbezogener Fragestellungen.

Literatur

Berendonk, S. (2013). *Erkundungen zum Eulerschen Polyedersatz: Genetisch, explorativ, anschaulich*. Springer-Verlag.

Berendonk, S. (2014). Im Land des Eulerschen Polyedersatzes. MatheWelt, *Mathematik lehren 184*, 1-16.

DeTemple, D. W. (1991) Carlyle Circles and the Lemoine Simplicity of Polygon Constructions. *The American Mathematical Monthly Vol. 98, No. 2,* 97 – 108.

Hull, T. C. (2011). Solving cubes with Creases: The work of Beloch and Lill. *The American Mathematical Monthly,* Vol. 118, No. 4 , pp. 307-315.

Kalman, D. (2009). *Uncommon mathematical excursions: Polynomia and related realms* (No. 35). MAA.

Schreiber, A. (1983). Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken. *mathematica didactica* 6, S. 65-76.

Moderierte Sektion:

Lehrerinnen und Lehrer (LuL) und Multiplikatorinnen und Multiplikatoren (MuM) im Fokus – DZLM

Axel M. BLESSING, PH Schwäbisch Gmünd, Ulrich KORTENKAMP und Christian DOHRMANN, Universität Potsdam

Mathematikfortbildungen mit E-Learning gestalten

Das im Beitrag dargestellte DZLM-Kurskonzept »Mathematikfortbildungen mit E-Learning gestalten« qualifiziert Fortbildner- und Fortbildnerinnen in zweierlei Hinsicht. Sie lernen zum einen, »klassische« Mathematikfortbildungen mit E-Learning-Elementen anzureichern und damit Blended-Learning-Kurse zu gestalten. Zum anderen erfahren sie, wie sie die zugrundeliegenden Prinzipien in eigenen Fortbildungen vermitteln können. Eingeleitet wird der Beitrag durch Informationen zum DZLM Online-Angebot.

dzlm.de – zentrale Anlaufstelle für Lehrerfortbildung Mathematik

Das DZLM nutzt bereits seit frühem Projektbestehen vielfältige online Informations- und Kommunikationsstrukturen zur Verbreitung und Unterstützung von Fortbildungsangeboten und wendet sich an Personen im ganzen Bundesgebiet. Eine umfangreiche Webplattform (http://dzlm.de) wurde im Mai 2012 als zentrale Anlaufstelle für alle implementiert, die an Mathematikunterricht und Fortbildungen interessiert sind. Hier finden sich Informationen zu Kursangeboten, Tagungen und Projekten des DZLM sowie digitale Fortbildungsmaterialien im Rahmen von besuchten Kursen oder in Form von Selbstlernplattformen, sogenannten Microsites. Darüber hinaus unterstützt das DZLM das Mathematikdidaktik-Wiki *Madipedia* der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (http://wiki.dzlm.de) als offene Bildungsressource. Madipedia verzeichnet aktuell über 850 Dissertationen aus der Mathematikdidaktik. Schließlich betreibt das DZLM seit 2012 eine eigene Lernplattform (http://lms.dzlm.de) auf Basis von Moodle zur Unterstützung der Fortbildungsdurchführung und als Organisationseinheit für die E-Learning Angebote des Zentrums.

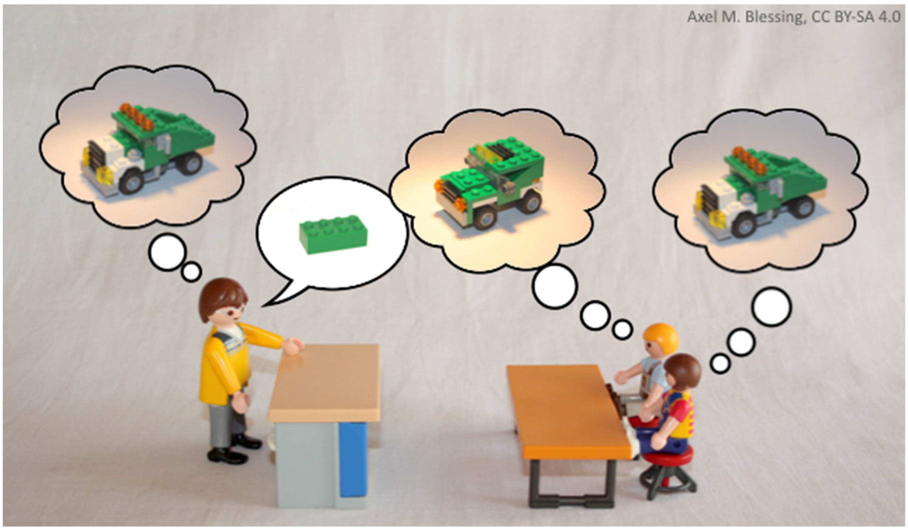
E-Learning und Blended Learning für DZLM-Fortbildungen

Die Einbindung von Online-Komponenten im Rahmen des Blended Learning gewinnt im Rahmen von DZLM-Fortbildungen zunehmend an Bedeutung. Die vom DZLM angebotenen Fortbildungskurse bestehen in der Regel aus mindestens zwei Präsenzen sowie einer zwischengeschobenen Online- und/oder Praxisphase (Standardkurs). Während der Onlinephasen sollen die Teilnehmerinnen und Teilnehmer (1) digitale Austauschmöglichkeiten nutzen können und (2) durch methodisch und inhaltlich passende E-Learning-Elemente beim Lernen unterstützt werden. Für den letztgenannten Punkt hat das Zentrum einen relevanten Fortbildungsbedarf identifiziert: Fortbildnerinnen und Fortbildner bzw. Kurs- und Materialersteller und -erstellerinnen müssen zunächst selbst fachkundig und erfahren im Umgang mit E-Learning sein. Die Sensibilisierung und Weiterbildung von Fortbildnerinnen und Fortbildner im Bereich E-Learning ist eine Herausforderung, der das Zentrum mit dem hier vorgestellten Fortbildungskonzept begegnet (Details zum Kurs unter http://dzlm.de/node/1472). Im Rahmen dieses Kurses werden E-Learning Erfahrungen gesammelt, die theoretischen Grundlagen erlernt und diese bei der Umsetzung bzw. Gestaltung eigener Fortbildungskurse durch DZLM-Experten begleitet umgesetzt, mit dem Ziel, dieses Wissen und die Erfahrungen in die eigene Fortbildungspraxis zu überführen.

Grundsätzliche Gedanken zum Lehren und Lernen

Der Einsatz von E-Learning-Elementen kann nur dann gewinnbringend sein, wenn er den Lehr-Lern-Prozess sinnvoll unterstützt. Das ist – vereinfacht gesagt – dann der Fall, wenn die Lernenden am Schluss ein viables Konstrukt des Lerngegenstands entwickelt haben.

Damit dies geschehen kann, wird von der Lehrperson üblicherweise ein Mix aus Instruktion und Konstruktion eingesetzt: Sie dekonstruiert ihr eigenes Wissen, vermittelt Informationen als Bausteine des Wissens, und unterstützt die Lernenden auf vielfältige Weise darin, die Bausteine zu einem eigenen Konstrukt zusammenzusetzen, das dem ursprünglichen mehr oder weniger nahe kommt (vgl. Abb.).



Der »Trick« beim E-Learning besteht nun darin, digitale Technologien für die instruktionalen Phasen sowie zur Unterstützung der Konstruktionsprozesse einzusetzen. Hier ist es hilfreich, sich anhand der nachstehenden Modelle grundlegende Gedanken über die Gestaltung der Lehr-Lern-Umgebung zu machen.

Welchen Anteil am Lehr-Lern-Prozess hat die Technologie?

Anhand der von Ebner, Schön & Nagler (2013, vgl. l3t.eu) formulierten »Barbecue-Typologie« kann man überlegen, wie die Lernzeit auf Präsenz- und auf Online-Phasen aufgeteilt wird. Bei diesem Modell steht eine Grillwurst »ohne Extras« für eine reine Präsenzveranstaltung. Nun kann man die Wurst aufschneiden und die Scheiben abwechselnd mit Gemüse (den Online-Phasen) zu einem Schaschlikspieß (dem Blended Learning) komponieren. So wie es beim Schaschlik verschiedene Varianten gibt, Wurst und Gemüse in verschiedenen Anteilen und Reihenfolgen aufzureihen, so gibt es auch beim Blended Learning unterschiedliche Möglichkeiten, die zur Verfügung stehende Lernzeit auf Präsenz- und Online-Phasen zu verteilen.

Welches Wissen benötigt die Lehrperson, um Technologie sinnvoll einsetzen zu können?

Die Frage nach dem benötigten Wissen kann mithilfe des von Mishra und Koehler beschriebenen TPACK-Modells dargestellt werden (vgl. tpack.org). Neben dem pädagogischen und dem inhaltlichen Wissen (Pedagogical Knowledge PK, Content Knowledge CK) sowie der resultierenden Schnittmenge (Pedagogical Content Knowledge PCK) ist für E-Learning weiterhin technologisches Wissen erforderlich (Technological Knowledge TK), also grundsätzliches Wissen über die Technologie an sich.

Wichtig ist, dass mit Hinzukommen des technologischen Wissens weitere Schnittmengen entstehen: Zum einen Technological Pedagogical Knowledge (TPK), d.h. Wissen wie man die Technologie für Lehr-Lern-Zwecke einsetzen kann, und zum anderen Technological Content Knowledge (TCK), d.h. Wissen über den Zusammenhang zwischen Technologie und fachlichen Inhalten. Letztlich ergibt sich die gemeinsame Schnittmenge aus PK, CK und TK als TPACK, d.h. als Technological Pedagogical Content Knowledge: Wie kann ich die Technologie so einsetzen, dass sich in meinem Inhaltsbereich ein Mehrwert für den Lehr-Lern-Prozess ergibt?

Welchen Mehrwert hat die Technologie?

Wenn man digitale Materialien einsetzt, dann stellt sich auch immer die Frage nach dem Mehrwert der Materialien. So kann man eine geometrische Figur bspw. als Scan einer handgefertigten Zeichnung bereitstellen oder als interaktives Applet, bei dem man einzelne Punkte bewegen kann. Puentedura hat aus dieser Überlegung heraus das SAMR-Modell entwickelt, mit dem sich der Mehrwert der digitalen gegenüber der analogen Variante abbilden lässt (vgl. hippasus.com). Die Buchstaben SAMR stehen dabei für den Grad an Mehrwert: Substitution, Augmentation, Modification, Redefinition.

Woher kommen die Inhalte?

In den meisten Fällen wird man beim Erstellen eines E-Learning-Kurses auf vorhandene Inhalte zurückgreifen und keine eigenen Inhalte erstellen. Dabei gerät man allerdings leicht in das Dickicht des Urheberrechts: Darf ich diese Inhalte unter den gegebenen Umständen überhaupt verwenden? Diese Frage und die damit verbundenen Unannehmlichkeiten umgeht man, wenn man auf OER zurückgreift: Open Educational Resources (vgl. open-educational-resources.de). Dabei handelt es sich um Materialien, die mit einer offenen Lizenz wie bspw. Creative Commons versehen sind, und die – meistens unter Angabe des Autors / der Autorin – unentgeltlich verwendet werden dürfen.

OER für Mathematikbildung

Für Mathematik und Mathematikdidaktik gibt es Sammlungen von offenen Bildungsresourcen, die eine breite Skala in mindestens zwei Dimensionen umfassen. Manche Sammlungen bieten Mehrwert durch eine Verschlagwortung und Sammlung von Metainformationen zu (externen) Ressourcen (z.B. bildungsserver.de/elixier und i2geo.net) oder durch eigene Inhalte (z.B. mathe-vital.de und tube.geogebra.org). Die zweite Dimension ist die Möglichkeit der Partizipation durch Hinzufügen eigener Inhalte – hier stehen Elixier und Mathe-Vital an einem Ende der Skala, i2geo und GeoGebraTube am anderen. Bei der Partizipation bleibt aber immer kritisch zu bemerken, dass man die einzuräumenden Rechte selbst besitzen muss und die Plattform sie zu klaren Bedingungen weitergibt – hier gibt es derzeit noch bei GeoGebraTube ein Problem, da man sämtliche Rechte überlassen muss, obwohl die Plattform selbst sie dann mit einer CC-by-nc-sa-Lizenz weitergibt.

Literatur

Blessing, Axel & Roland Rink (im Druck): Blended-Learning-Kurse in der Aus- und Fortbildung von Mathematiklehrer_innen. In: Silke Ladel, Christof Schreiber & Roland Rink (Hrsg.): Digitale Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe – Ein Handbuch für die Lehrerausbildung. Münster: WTM.

Ebner, Martin, Sandra Schön & Walther Nagler (2013). Einführung. Das Themenfeld »Lernen und Lehren mit Technologien«. In: Martin Ebner & Sandra Schön (Hrsg.): Lehrbuch für Lernen und Lehren mit Technologien. http://l3t.eu/homepage/das-buch/ebook-2013

Luise EICHHOLZ, Dortmund

Mathe kompakt – Entwicklung und Erforschung eines Fortbildungskurses für fachfremd unterrichtende Mathematiklehrpersonen in der Primarstufe

Das in der Grundschule vorherrschende Klassenlehrerprinzip und die derzeitige Ausbildungspraxis für Grundschullehrkräfte führen dazu, dass in Deutschland viele Schülerinnen und Schüler in der Primarstufe von fachlich nicht hinreichend ausgebildeten Mathematiklehrkräften unterrichtet werden. So gaben im Rahmen der IQB- Ländervergleichsstudie 27% der befragten Lehrkräfte in NRW an, Mathematik zu unterrichten, aber nicht studiert zu haben. Außerdem zeigten sich in Klassen, die von fachfremden Lehrkräften unterrichten wurden, schlechtere Schülerleistungen (vgl. Stanat et al. 2012).

1. Theoretischer Rahmen

Bei der Betrachtung des für den Unterricht erforderlichen Wissens von Lehrkräften ist seit Shulman (Shulman 1986, 1987) die Bedeutung des Faches deutlich stärker betont worden. Dabei werden fachdidaktisches Wissen und fachliches Wissen unterschieden (vgl. Ball et al. 2008; Hill et al. 2008). Lehrkräfte, die in ihrer Ausbildung Mathematik als Schwerpunktfach hatten, haben ein größeres fachliches und fachdidaktisches Wissen als solche ohne Mathematik als Schwerpunkt (vgl. Blömeke et al. 2010). Ein höheres fachdidaktisches Wissen hat, vermittelt über die Unterrichtsgestaltung, Auswirkungen auf die Leistungen der Schülerinnen und Schüler (vgl. Kunter et al. 2011).

Daneben spielen Überzeugungen bezogen auf Mathematik und das Lehren und Lernen von Mathematik eine wichtige Rolle bei der Wahrnehmung von Unterricht und sie beeinflussen diesbezügliche Entscheidungen stark (vgl. Handal 2003). Verschiedene Studien haben gezeigt, dass konstruktivistische Überzeugungen von Mathematiklehrkräften zu einem stärker kognitiv aktivierenden Unterricht führen (vgl. z.B. Peterson et al. 1989; Staub et al. 2002). Die Ergebnisse von TEDS-M zeigen, dass die Überzeugungen von Mathematiklehrkräften mit der Menge der Lerngelegenheiten in Mathematik während des Ausbildung korrelieren (vgl. Felbrich et al. 2010).

Daraus ergibt sich, dass vor allem auf der Ebene des fachdidaktischen Wissens und bezogen auf die Überzeugungen ein Fortbildungsbedarf für diejenigen Lehrkräfte besteht, die Mathematik unterrichten, für dieses Fach aber nicht ausgebildet wurden. Insgesamt gibt es jedoch, auch auf internationaler Ebene, bisher wenig Erkenntnisse über die Fortbildung fachfremd unterrichtender Lehrpersonen. Hier setzt das vorliegende Projekt an.

2. Konzeption von „Mathe kompakt“

Als Grundlage für die Entwicklung von Fortbildungen im Rahmen des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung (DZLM) wurden Gestaltungsprinzipien für Fortbildungen veröffentlicht (vgl. Barzel et al. 2015), die für „Mathe kompakt“ folgendermaßen umgesetzt wurden:

Erfolgreiche Lehrerfortbildungen erstrecken sich über einen längeren Zeitraum und regen durch einen Wechsel zwischen Präsenz- und Praxisphasen zur Reflexion an. Daher gliedert sich der Kurs in fünf Module, die jeweils einen ganztägigen Präsenztag, zwei Online- Seminare, eine etwa 3-5 wöchige Praxisphase und eine Reflexionsphase zu Beginn des nächsten Moduls beinhalten (Lehr-Lern-Vielfalt, Reflexionsförderung).

Da es nicht möglich ist, alle Inhalte des Studiums und des Referendariats abzudecken, ist eine Fokussierung erforderlich. Die Bildungsstandards formulieren für den Mathematikunterricht in der Primarstufe Kompetenzanforderungen auf inhaltlicher (z.B. Zahlen und Operationen) und prozessbezogener Ebene (z.B. Problemlösen). Gutem Mathematikunterricht liegen Überzeugungen zugrunde, die sich an konstruktivistischen Sichtweisen orientieren (vgl. Walther et al. 2008), dabei sollten inhaltliche und prozessbezogene Aspekte verknüpft werden.

Fachfremd Unterrichtende nutzen in ihrem Unterricht die Ressourcen, die ihnen zur Verfügung stehen, vor allem Lehrbücher und Kopiervorlagen. Ihre Überzeugungen bezogen auf Mathematikunterricht sind stark beeinflusst von ihren eigenen Erfahrungen als Schülerinnen und Schüler. Das bedeutet, dass die prozessbezogenen Kompetenzen in der Regel eine geringe Rolle in ihrem Unterricht spielen, da diese durch unreflektierten „Buchunterricht“ weniger gefördert werden können und auch selbst im Unterricht nicht erlebt wurden (Teilnehmerorientierung, Kompetenzorientierung).

Es wurden fünf Module entwickelt, die die Inhalte der Grundschulmathematik an konkreten Beispielen aufarbeiten, dabei aber den Schwerpunkt auf die Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen im Zusammenspiel mit den Inhalten legen. Dabei wird dem eigenen Erleben von Mathematik viel Raum gegeben und die dabei gemachten Erfahrungen werden reflektiert und auf die Arbeit mit Schülern übertragen (Teilnehmerorientierung, Reflexionsförderung).

Anhand von Unterrichtsvideos aus den Projekten KIRA und PIKAS werden konkrete Beispiele in den Präsenzphasen intensiv reflektiert. Im Laufe des Kurses werden eigene Schülerergebnisse und Erfahrungsberichte aus den Praxiserprobungen immer stärker einbezogen (Fallbezug, Reflexionsförderung).

Die Teilnehmer werden angeregt, mit anderen Kolleginnen der eigenen Schule gemeinsam die erarbeiteten Inhalte in der Praxis umzusetzen und durch gegenseitige Hospitationen zu reflektieren (Kooperationsanregung).

3. Durchführung und Ausblick

Im Schuljahr 2014/15 wurde der Kurs mit zwei Gruppen erfolgreich durchgeführt. Neben der Standardevaluation der einzelnen Module wurden alle Teilnehmer vor und nach Durchführung des Kurses mit Hilfe von Fragebogen zu ihren Überzeugungen und ihren unterrichtsbezogenen Kompetenzen befragt. Außerdem wurden mit einzelnen Teilnehmern teilstandardisierte Interviews durchgeführt.

Erste Auswertungen der Fragbogen und Interviews zeigen Entwicklungen in den Überzeugungen und den selbstberichteten Kompetenzen in der erwarteten Richtung, was den Schluss zulässt, dass die grundlegende Konzeption des Kurses erfolgreich war. Eine detaillierte Auswertung steht jedoch noch aus.

Aufgrund der Ergebnisse der Modulfragebogen und der Rückmeldungen zu den Modulen werden folgende Aspekte in Version 2 des Kurses überarbeitet:

- Integration des Moduls „Gute Aufgaben" in das erste Modul, neues Modul „Schriftliches/ Halbschriftliches Rechnen"
- Nutzen der Online- Seminare für weiteren Input, weniger für die Reflexion
- Stärkere Verbindlichkeit der Praxiserprobungen, schriftliche Reflexionen
- Modul 1 bereits vor den Sommerferien, um Berücksichtigung der Themen in der Schuljahresplanung zu ermöglichen
- Kleinere inhaltliche Überarbeitungen

Der Kurs wird im Schuljahr 2016/17 in der überarbeiteten Version erneut durchgeführt.

Literatur

Ball, D. L., Thames, H. M. & Phelbs, G. C. (2008). Content knowledge for teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*.

Barzel, B. & Selter, C. (2015). Die DZLM-Gestaltungsprinzipien für Fortbildungen *JMD: Special Issue. Lehrerfortbildung/Multiplikatoren Mathematik- Konzepte und Wirkungsforschung, 2*.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (2010). TEDS-M 2008 Primarstufe: Ziele, Untersuchungsanlage und zentrale Ergebnisse. In S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Hrsg.), *TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehen-*

der Primarstufenlehrkräfte im internationalen Bereich (S. 11-38). Münster: Waxmann.

Felbrich, A., Schmotz, C. & Kaiser, G. (2010). Überzeugungen angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. In S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Hrsg.), *TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Bereich* (S. 297-325). Münster: Waxmann.

Handal, B. (2003). Teachers' mathematical beliefs: A review. *The Mathematics Educator, 13*(2), 47-57.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematic Education, 39*(4), 372-400.

Kunter, M. & Baumert, J. (2011). Das COACTIV- Forschungsprogramm zur Untersuchung professioneller Kompetenz von Lehrkräften- Zusammenfassung und Diskussion. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 346-366). Münster: Waxmann.

Peterson, P. L., Fennema, E., Carpenter, T. P. & Loef, M. (1989). Teachers' pedagogical content beliefs in mathematics. *Cognition and Instruction, 6*(1), 1-40.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(4-14).

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1- 23.

Stanat, P., Pant, H. A., Böhme, K. & Richter, D. (2012). *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB- Ländervergleichs 2011*. Münster: Waxmann.

Staub, F. C. & Stern, E. (2002). The Nature of Teachers' Pedagogical Content Beliefs Matters for Students' Achievement Gains: Quasi-Experimental Evidence From Elementary Mathematics. *Journal of Educational Psychology, 94*(2), 344-355.

Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D. & Köller, O. (Hrsg.). (2008). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Martina HOFFMANN, Essen

Video-vignettenbasierte Untersuchung förderdiagnostischer Kompetenzen von Grund- und Förderschullehrpersonen im inklusiven Mathematikunterricht

1. Empfehlungen für einen inklusiven Mathematikunterricht

Die Umsetzung des inklusiven Unterrichts erweitert auf der Ebene der Lernenden das Heterogenitätsspektrum um die Facette des sonderpädagogischen Förderbedarfs, sodass Lehrpersonen in inklusiven Settings besonders herausgefordert werden. Auf der Ebene der Lehrenden wird daher u. a. die gemeinsame Unterrichtsverantwortung von Lehrpersonen mit unterschiedlichen Lehrämtern und Ausbildungen betont (vgl. KMK 2011), was die Arbeit in multiprofessionellen Teams unerlässlich macht. Daneben wird die Beachtung allgemeiner Bildungsstandards und Lehrpläne empfohlen, aber auch die individuellen Kompetenzen der Lernenden sind zu berücksichtigen (vgl. KMK 2011). Für Letzteres sind insbesondere Diagnose- und Förderkompetenzen erforderlich, wobei diese nicht nur in den Bildungswissenschaften, sondern auch im Fach selbst aufgebaut werden sollten (vgl. hierzu den Kompetenzbegriff nach Weinert (1999)). Trotz der Relevanz der Diagnose- und Förderkompetenzen weisen Studien darauf hin, dass diesbezüglich eine Stärkung der Mathematiklehrpersonen erforderlich ist (vgl. z. B. Brunner et al. 2011). Dies betrifft die Lehrerausbildung, aber auch Fortbildungen, die u. a. vom Deutschen Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) angeboten werden (vgl. Hoffmann/Scherer, eingereicht).

2. Forschungsinteresse und Forschungsfragen

Die gemeinsame Tätigkeit der Grund- und Förderschullehrpersonen im inklusiven Mathematikunterricht soll bezogen auf Diagnose und Förderung und am Beispiel des Sachrechnens betrachtet werden. Ziel ist die Ableitung von Leitideen für die Gestaltung multiprofessioneller Teams sowie auch für die Gestaltung von DZLM-Fortbildungsmaßnahmen für Grund- und Förderschullehrpersonen zum Themenbereich Diagnose und Förderung. Hierzu wird ein explorativ-qualitativer Zugang gewählt und es ergeben sich folgende Forschungsfragen:

a) Auf welche kognitiven Aspekte förderdiagnostischer Kompetenzen stützen sich Grund- und Förderschullehrpersonen in einer Diagnose- und Fördersituation bezogen auf das Sachrechnen?

Grundlage förderdiagnostischer Kompetenzen sind kognitive Aspekte, wie die fachliche, fachdidaktische, pädagogische sowie lern- und entwicklungspsychologische Expertise (vgl. Moser Opitz 2006), wobei die fachliche und fachdidaktische Expertise im Fokus stehen. Erläuterungen zur Diagnose- und Fördersituation folgen im Rahmen der Darstellung des methodischen Vorgehens und der Datenerhebung (siehe Abschnitt 3).

b) *Welche affektiv-motivationalen Aspekte förderdiagnostischer Kompetenzen zeigen sich bei Grund- und Förderschullehrpersonen in einer Diagnose- und Fördersituation bezogen auf das Sachrechnen?*

Neben den kognitiven Aspekten nehmen auch affektiv-motivationale Aspekte, wie mathematik- und selbstbezogene sowie auch förderdiagnostische Überzeugungen Einfluss auf förderdiagnostische Kompetenzen (vgl. Blömeke 2013). Schwerpunktmäßig werden die mathematikbezogenen und förderdiagnostischen Überzeugungen untersucht.

c) Lassen sich Gemeinsamkeiten und Unterschiede hinsichtlich der kognitiven und affektiv-motivationalen Aspekte förderdiagnostischer Kompetenzen von Grund- und Förderschullehrpersonen bezogen auf das Sachrechnen identifizieren?

Für die Ableitung fachbezogener und inhaltsspezifischer Leitideen zur Gestaltung multiprofessioneller Teams und DZLM-Fortbildungsmaßnahmen ist die Identifizierung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden von Interesse, wozu Erkenntnisse der Forschungsfragen a) und b) genutzt werden.

3. Methodisches Vorgehen und Datenerhebung

Im Rahmen des Projekts wurden 24 problemzentrierte Interviews mit Grund- und Förderschullehrpersonen geführt (Witzel 1982), deren Grundlage typische Situationen aus dem Unterrichtsalltag waren: Lehrende sollten eine Aufgabe fachlich durchdringen und diese fachdidaktisch analysieren und bewerten. Darüber hinaus sollten sie Schülerbearbeitungen und -dokumente analysieren sowie weitere Fördermaßnahmen planen. Hierzu wurden Gesprächsgegenstände, wie u. a. Sachaufgaben und Video-Vignetten genutzt, die im Rahmen des Projekts entstanden sind. Es wurden zunächst sechs schulbuchnahe Sachaufgaben entwickelt, die mit 43 Lernenden der 3. Klasse pilotiert und zu denen zwei Sonderpädagogen befragt wurden. Für die Durchführung der Interviews wurden dann zwei Aufgaben ausgewählt, die einen gewissen Diskussionsbedarf bieten und die als Grundlage für die Generierung der Video-Vignetten dienten. 64 Lernende der 3. Klasse bearbeiteten diese beiden Aufgaben in Partnerarbeit und wurden dabei aufgezeichnet. Anschließend wurden aus insgesamt 32 Aufzeichnungen zwei Video-Vignetten ausgewählt, die beobachtbare und zu analysierende Schwierigkeiten von Lernenden – mit und ohne besonderen Förderbedarf – bei der Bearbeitung von Sachaufgaben zeigen.

Die Aufgabe ›Taschengeld‹ (siehe Abb. 1) ist eine der Aufgaben, die in den Interviews eingesetzt wurde und zeigt einen fiktiven Dialog zwischen Cem und Lena über die Höhe ihres Taschengeldes sowie die Periodizität. Lenas

Behauptung, mehr zu bekommen, soll von den Lernenden überprüft werden.

Abb. 1: Ausschnitt aus einer exemplarischen Sachaufgabe

4. Fallbeispiele zur fachlichen und fachdidaktischen Expertise

Zu Beginn der Interviews sollten die Lehrpersonen die Aufgabe (siehe Abb. 1) ggf. unter Nutzung des Taschenrechners fachlich durchdringen und ihre Ergebnisse schriftlich festhalten. Abb. 2 zeigt die Bearbeitung einer Grund- (GL1) und einer Förderschullehrperson (FL2). GL1 berücksichtigt bei ihren Überlegungen die Häufigkeit der Sonntage im Monat, wohingegen FL2 die Periodizität nicht berücksichtigt.

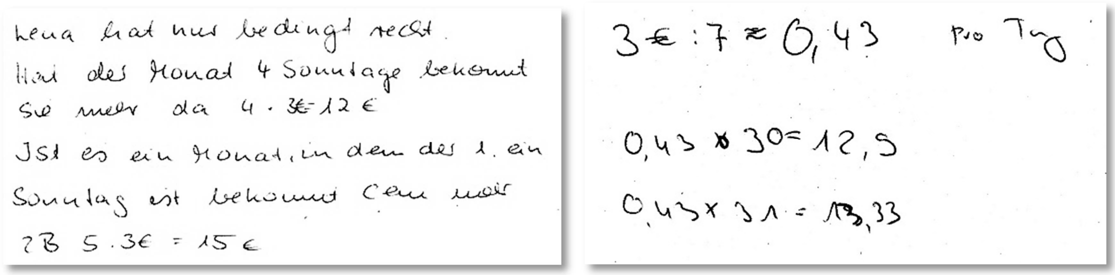


Abb. 2: Ausschnitt aus exemplarischen Lehrerdokumenten (links: GL1, rechts: FL2)

Nach der fachlichen Durchdringung war die Aufgabe fachdidaktisch zu beurteilen. Die folgenden Transkriptausschnitte zeigen die ersten Reaktionen einer Grund- (GL3) und einer Förderschullehrperson (FL4). GL3 spricht der Aufgabe ein gewisses Potenzial zu, bedenkt aber auch, dass einige Lernende ggf. unterstützt werden müssen:

> *„[..] jetzt könnte man das noch weiter spinnen und sagen, wer kriegt denn im Jahr am meisten? [..] Also, ich finde es sind viele Möglichkeiten da drin. Es kommt aber auf die Gruppe an, mit der ich das mache. [..] Also das müsste man dann noch mal überlegen, ob man ne Tippkarte oder nen Kalender hinlegt oder so was."*

FL4 schätzt die Aufgabe als schwierig ein und würde eine Beispielsituation als Einstieg wählen, wobei sie sich auf ihre Klasse bezieht:

> *„Das heißt, ich [..] würde wahrscheinlich die Aufgabe vorbereiten mit nem, also mit nem Sachbezug. Mit ner Beispielsituation. [..] Also ich glaube, ich schätze die jetzt schon für meine Gruppe recht schwierig ein."*

5. Schlussbemerkungen

Bei den interviewten Lehrpersonen zeigten sich einerseits unterschiedlich differenzierte fachliche Durchdringungen sowie anderseits unterschiedliche didaktische Analysen und Bewertungen der Sachaufgaben. Deutlich hervorgehoben wurde von den Lehrenden häufig der Praxisbezug im Umgang mit Sachaufgaben im eigenen Unterricht. Dabei bezogen sich ihre Überlegungen häufig nur auf die jeweilige aktuelle Lerngruppe.

Literatur

Blömeke, S. (2013). Moving to a higher state of confusion. Der Beitrag der Videoforschung zur Kompetenzforschung. In U. Riegel & K. Macha (Hrsg.). *Videobasierte Kompetenzforschung in den Fachdidaktiken* (S. 25-43). Münster: Waxmann.

Brunner, M., Anders, Y., Hachfeld, A. & Krauss, S. (2011). Diagnostische Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften* (S. 215-234). Münster: Waxmann.

Hoffmann, M. & Scherer, P. (eingereicht). Diagnose von Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht. Fortbildungskonzepte zur kritischen Reflexion verschiedener Methoden und Instrumente. In J. Leuders, M. Lehn, T. Leuders, S. Ruwisch & S. Prediger (Hrsg.). *Mit Heterogenität im Mathematikunterricht umgehen lernen - Konzepte und Perspektiven für eine zentrale Anforderung an die Lehrerbildung. Tagungsband zur 4. Fachtagung der Gemeinsamen Kommission Lehrerbildung der GDM, DMV, MNU.*

KMK – Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2011). *Inklusive Bildung von Kindern und Jugendlichen mit Behinderung in Schulen. Beschluss vom 20.10.2011*. URL: http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2011/2011_10_20-Inklusive-Bildung.pdf [20.02.2016].

Moser Opitz, E. (2006). Förderdiagnostik: Ziele, Leitideen, Beispiele. In M. Grüßing & A. Peter-Koop (Hrsg.). *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule: Beobachten – Fördern – Dokumentieren* (2. Auflage, S. 10-28). Offenburg: Mildenberger Verlag.

Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften. Diagnose und Förderung bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen*. Wiesbaden: Springer.

Weinert, F. E. (1999). *Konzepte der Kompetenz. Gutachten zum OECD-Projekt „Definition and Selection of Competencies: Theoretical and Conceptual Foundations (DeSeCo)“*. Neuchatel, Schweiz: Bundesamt für Statistik.

Witzel, A. (1982). *Verfahren der qualitativen Sozialforschung. Überblick und Alternativen*. Frankfurt a. M.: Campus Verlag.

Larissa ZWETZSCHLER, Universität Duisburg-Essen

„Beispiele den Kollegen mitzugeben – das verstehe ich unter einer Mathefortbildung“ – Multiplikator_Innen qualifizieren!?

Es gibt zahlreiche Erkenntnisse zur effektiven Gestaltung und zur Wirkung von Lehrerfortbildungen. Dadurch konnten unter anderem Design-Prinzipien zur Gestaltung effektiver Lehrerfortbildungen formuliert werden (Barzel & Selter 2015). Allerdings werden in Lehrerfortbildungen nur die Teilnehmer_Innen erreicht. Durch die Fortbildung von Multiplikator_Innen die anschließend selbst Lehrerfortbildungen anbieten kann eine Vielzahl an Lehrer_Innen erreicht werden. Bisher ist erst wenig über diesen Prozess des scaling up und die Fortbildung von Multiplikator_Innen bekannt. Ansatzpunkte bieten die Erkenntnisse zu Lehrerfortbildungen und Befunde zur Erwachsenenbildung (Geissler 2001). Inwiefern diese Erkenntnisse auf die Fortbildungen von Multiplikator_Innen übertragen werden können, ist noch nicht empirisch belegt. Die hier vorgestellte Studie beschäftigt sich damit, wie man Multiplikator_Innen qualifizieren kann und welche spezifischen Bedürfnisse diese haben.

1. Theoretischer Hintergrund

Scaling up durch die Fortbildung von Multiplikator_Innen ist eine von drei Varianten des scaling up, genannt Cascade Modell. Die anderen beiden sind nach Maaß und Artigue (2014) die Zusammenarbeit in Professionellen Lerngemeinschaften (PLGen) und E-Learning PLGen. Der Prozess des scaling up ist aber erst dann erfolgreich, wenn die Qualitätskriterien nach Coburn (2003) erfüllt sind: sustainability, depth, spread und shift in reform ownership. Der Fokus in diesem Forschungsprojekt liegt auf der Fortbildung der Multiplikator_Innen, da so Innovation aus der Forschung in die unterrichtliche Praxis kommen können.

Zahlreiche Autoren haben bereits versucht die Inhalte von Fortbildungen über die Differenzierung von Wissensarten genauer zu fassen. So unterscheidet Shulman (1986) bereits zwischen zwei Bereichen „the domains and categories of teacher knowledge […] and the forms for representing that knowledge” (ebd., p.10). Fenstermacher (1994) unterscheidet die *Domänen* in Wissen, das durch unterrichtliche Praxis entsteht und Wissen, das durch Forschung über die Praxis entsteht. Cochran-Smith und Lytle (1999) hingegen differenzieren das Wissen der Lehrpersonen noch weiter aus in knowledge-in-practice (Handlungswissen), knowledge-for-practice (kategoriales Wissen über Fortbildungen) und knowledge-of-practice (als Metawissen).

Damit scaling up durch Fortbildungen im Cascade Modell möglich wird müssen alle drei Wissensarten von Cochran-Smith und Lytle (1999) Teil der Fortbildungen sein. Denn bei der Reduktion auf knowledge-for-practice in Fortbildungen können Inhalte beispielsweise nicht in der Tiefe verstanden werden. Es zeigt sich allerdings, dass manche Multiplikator_Innen in Fortbildungen vorrangig praktisches Handlungswissen vermitteln und dadurch den in der Theorie bekannten Wunsch von erwachsenen Lernern bedienen (Geissler 2001). Das Design-Prinzip der Teilnehmerorientierung wird in diesen Fällen von den Multiplikator_Innen insofern falsch verstanden, dass nicht die Entwicklung der Teilnehmer von ihren Kompetenzen ausgehend berücksichtigt wird. Stattdessen werden ausschließlich die Wünsche der Teilnehmer_Innen erfüllt (Zwetzschler et al. 2016).

In diesem Beitrag wird deshalb der Frage nachgegangen, inwiefern sich Multiplikator_Innen die vorrangig die Wünsche der Teilnehmer_Innen bedienen, von Multiplikator_Innen die vorwiegend auf eine Kompetenzentwicklung ihrer Teilnehmer_Innen fokussieren, unterscheiden.

2. Methoden der Datenerhebung und Datenauswertung

Zur Beantwortung der Forschungsfrage wurden elf halbstrukturierte Interviews (je 45-120 Minuten lang) mit Multiplikator_Innen durchgeführt. Alle Interviewten hatten zuvor an einer Multiplikatorenfortbildung zum Differenzieren teilgenommen und anschließend eigene Lehrerfortbildungen zum Thema durchgeführt. Im Interview wurden Fragen zu ihrer Lehrerfortbildung, zur Multiplikatorenfortbildung, zu ihrem Unterricht und zu Fortbildungen allgemein gestellt. Zudem wurde der Planungsprozess von Lehrerfortbildungen simuliert. Alle Interviews wurden audiographiert und in Teilen transkribiert. Die Datenerhebung fand in Kooperation mit Kim-Alexandra Rösike, Bärbel Barzel und Susanne Prediger statt.

Diese Interviews wurden durch fünf weitere Interviews mit Multiplikator_Innen durch die Autorin ergänzt. Diese Multiplikator_Innen nahmen an einer anderen Multiplikatorenfortbildung teil. Die Interviews waren vergleichbar aufgebaut.

Die Daten wurden anhand der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2015) analysiert. Ausgewählte Stellen wurden zudem in der Tiefe mit Vergnauds (1996) Theorie der *conceptual fields* analysiert.

3. Empirische Befunde – Exemplarische Fallbeispiele Julia und Greg

Julia ist eine erfahrene Lehrerin und Multiplikatorin, die viel Wert auf die Vermittlung von knowledge-for-practice in ihren Fortbildungen legt. In Fortbildungen zur Differenzierung liegt Julias Fokus insbesondere auf der Differenzierung durch Zugangsweisen (Zwetzschler et al. 2016). Im folgenden Transkriptionsausschnitt erläutert Julia warum dieses Thema für sie relevant ist:

Julia: Also ich hab mir ja immer den Schwerpunkt auf die Zugangsweisen gelegt. [...] Weil ich das – weil mich das als ich das kennen gelernt habe, selber fasziniert hat – weil ich – seit ich im Unterricht – noch stärker darauf achte (...) viel weniger Übungsphasen brauche, in meinen Klassen – und viel mehr Kinder mitnehme.

Julia hat Erfahrungen mit der Differenzierung durch Zugangsweisen im eigenen Unterricht gesammelt. Dabei spricht sie darüber, dass sie dies „im Unterricht" einsetzt und dadurch „viel mehr Kinder mit[nimmt]". Differenzierung durch Zugangsweisen scheint somit für Julia ein durchgängiges Unterrichtsprinzip zu sein (knowledge-for-practice), und kein Name für gute Aufgaben und Umsetzungsbeispiele (knowledge-in-practice).

Greg hingegen ist ein erfahrener Lehrer und ein relativ unerfahrener Multiplikator. Sein Fokus in Fortbildungen liegt auf dem knowledge-in-practice (Zwetzschler et al. 2016). Im folgenden Transkriptionsausschnitt erläutert Greg warum er Selbstdifferenzierung in Fortbildungen thematisiert:

Greg: Und das, so was versuche ich, weil ich das jetzt selbst ausprobiere, so was dann eben auch, ob das auch funktioniert dann auf einer Fortbildung rüber zu bringen, dass man dieses Vertrauen in Schüler haben kann. [...] Ich hab das mal ausprobiert [...] Und damit war ich eigentlich gut gefahren. [...] Also man kann das Vertrauen, das versuche ich dann halt auf der Fortbildung, man kann den Schülern dieses Vertrauen geben.

Auch Greg nennt Unterrichtserfahrungen als Grund für seinen Fokus in der Fortbildung: „weil [er] das jetzt selbst [ausprobiert hat]". Im Gegensatz zu Julia spricht Greg hier über etwas, das er „mal ausprobiert" hat und mit dem er „eigentlich gut gefahren [ist]". Greg fokussiert hier auf singuläre Erfahrungen bei der praktischen Umsetzung. Die Reflektion von Gregs Unterricht findet somit auf der Ebene des konwledge-in-practice statt.

Julias und Gregs Unterrichtsreflektion finden anscheinend auf der gleichen Wissensebene, wie der Fokus ihrer Fortbildungen statt (knowledge-for-practice bei Julia und knowledge-in-practice bei Greg). Dieser Zusammenhang zeigte sich auch bei vielen anderen Multiplikator_Innen in der Studie.

4. Diskussion der Ergebnisse

Es scheint Zusammenhänge zwischen den fokussierten Wissensformen in Fortbildungen und der Reflektion und Durchführung eigenen Unterrichts zu geben. Diese Zusammenhänge legen nahe, bei der Wirkung von Multiplikatorenfortbildungen die Rollen der Teilnehmer_Innen als Lehrer- und Multiplikator_Innen zu berücksichtigen. So könnten die Wirkebenen von Lipowsky und Rzejak (2012) um die Rolle als Multiplikator_Innen erweitert werden für die Fortbildung von Multiplikator_Innen.

Literatur

Barzel, B. & Selter, C. (2015). Die DZLM Gestaltungsprinzipien für Fortbildungen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 36(2),* 259-284.

Coburn, C. E. (2003). Rethinking scale: Moving beyond numbers to deep and lasting change. *Educational Researcher, 32(6),* 3-12.

Cochran-Smith, M. & Lytle, S. L. (1999). Relationships of Knowledge and Practice: Teacher Learning in Communities. *Review of Research in Education, 24(1),* 249-305.

Fenstermacher, G. D. (1994). The knower and the known: The natur of knowledge in research on teaching. In L. Darling-Hammond (Hrsg.), *Review of Research in Education* (S. 3-56). Washington, DC: American Educational Research Association.

Geissler, K. A. (2001). Pädagogische Interaktion in der Erwachsenenbildung. In A. Krapp & B. Weidenmann (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 405-412). Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Lipowsky, F. & Rzejak, D. (2012). Lehrerinnen und Lehrer als Lerner – Wann gelingt der Rollentausch? Merkmale und Wirkungen effektiver Lehrerfortbildungen. In D. Bosse, L. Criblez & T. Hascher (Hrsg.), *Reform der Lehrerbildung in Deutschland, Österreich und der Schweiz. Teil 1: Analysen, Perspektiven und Forschung* (S. 235-253). Immenhausen b.Kassel: Prolog.

Maaß, K. & Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching:a synthesis. *ZDM Mathematics Education, 45(6),* 779-795.

Mayring, P. (2015). Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Hrsg.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (S. 365-380). Dodrecht: Springer.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15(2),* 4-14.

Vergnaud, G. (1996). The Theory of Conceptual Fields. In L. P. Steffe & P. Nesher (Hrsg.), *Theories of mathematical learning* (S. 219-239). Erlbaum: Mahwah.

Zwetzschler, L., Rösike, K., Prediger, S. & Barzel, B. (angenommen für 2016). Professional development leaders' priorities of content and their views on participant-orientation. Paper presented in TSG 50 at ICME 13, Hamburg.

Moderierte Sektion:

Lehr-Lern-Labore Mathematik

Katja LENGNINK, Gießen und Jürgen ROTH, Landau

„Lehr-Lern-Labor Mathematik“ als Ort der Forschung

An immer mehr Universitätsstandorten gibt es „Lehr-Lern-Labore Mathematik“, die Schülerinnen und Schüler mit Studierenden und Forschenden zusammenbringen. Mit der Vielfalt an Aktivitäten solcher außerschulischer Lernorte und Ideen zu ihrer Vernetzung setzt sich der Arbeitskreis Lehr-Lern-Labore (http://ak-lll.mathe-labor.de/) der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik auseinander, der im Herbst 2015 in Landau gegründet wurde.

1. Anliegen und Begriff der „Lehr-Lern-Labore Mathematik“

Mit den Lehr-Lern-Laboren werden in der Regel mehrere Ziele verfolgt:

- Schülerlabore bzw. Lernwerkstätten dienen als außerschulische Lernorte für Mathematik, mit dem Ziel, das Interesse von Schülerinnen und Schülern an Mathematik zu wecken und/oder zu fördern sowie mathematisches Denken und Arbeiten authentisch erlebbar zu machen. Der Fokus kann dabei auf sehr unterschiedlichen Zielgruppen liegen.
- Lehr-Lern-Labore ermöglichen eine theorie- und forschungsbasierte sowie praxisnahe Ausbildung von Lehramtsstudierenden mit dem Fach Mathematik.
- Lehr-Lern-Labore fungieren als Forschungsumgebung für fachdidaktische und bildungswissenschaftliche empirische Forschung im Sinne einer zyklischen fachdidaktischen Entwicklungsforschung. Durch den direkten Einbezug von Schülerinnen und Schülern wird die Praxisrelevanz der fachdidaktischen Forschung sichergestellt. Darüber hinaus können in der Laborumgebung sehr gezielt Einflussvariablen für den Lernprozess variiert und kontrolliert werden.

Die jeweiligen Perspektiven der „Lehr-Lern-Labore Mathematik“, ihre Ausstattung und ihr Fokus ist an den Standorten jeweils unterschiedlich, wodurch sich nur schwer eine gemeinsame Definition für Lehr-Lern-Labore festhalten lässt. Ein Anliegen des Forschungsprojekts von Brüning ist es, diese Vielfalt zu erfassen und konstituierende Merkmale anzugeben, die eine Definition des Begriffs ermöglichen (s. Brüning in diesem Band).

2. Forschungsansätze zu Lernprozessen von Schülerinnen und Schülern

Lehr-Lern-Labore werden als außerschulische Lernorte häufig genutzt, um die Wirkungen von Materialien und Lernumgebungen auf Schülerinnen und Schüler zu untersuchen, mit dem Ziel, ein besseres Verständnis über das Zusammenspiel von Lernprozessen und Lernmaterialien aufzubauen (zum Darstellen von Würfelgebäuden s. Helmerich in diesem Band). Dafür werden insbesondere Videographien zur spezifischen Erforschung der Prozesse eingesetzt, deren Analysen nicht nur einen statischen Einblick in die Lernprodukte sondern auch in die Prozesse der Entstehung bei den Lernenden erlauben (zum mathematikbezogenen Reflektieren s. Lengnink in diesem Band). Über diesen Fokus auf den Prozess des Handelns der Schülerinnen und Schüler können die Wechselwirkungen zwischen Material, Lernenden und Lehrenden unter besonderen Perspektiven (z.B. auf Lernschwierigkeiten, Begriffsbildungsprozesse, Vorstellungsveränderungen, Kompetenzaufbau und Lernbegleitung) untersucht werden (zur fachdidaktischen Entwicklungsforschung s. Prediger & Link 2012).

3. Lehrerprofessionalisierung

In der derzeitigen Landschaft der Lehr-Lern-Labore stellt sich der Fokus der Lehrerprofessionalisierung als übergreifend relevant heraus (s. etwa Bartel & Roth sowie Beretz, Lengnink & v. Aufschnaiter in diesem Band). Dabei wird in den beiden Beiträgen insbesondere die Förderung von diagnostischen Kompetenzen von Lehramtsstudierenden über den Einsatz von Videovignetten im Lehramtsstudium Mathematik untersucht. Die übergreifende Frage ist, in wie weit der Einsatz von Videos, die Schülerinnen und Schüler beim Mathematiklernen zeigen, eine produktive Verbindung zwischen Theorie und Praxis in der Mathematiklehrerbildung herstellen kann, die handlungsleitend für die zukünftigen Lehrkräfte ist (Wiliam & Thompson, 2007).

Sektionsvorträge

Helmerich, M.: Würfelgebäude erkunden – ein Praxisbericht aus der Mathe-Werkstatt zum räumlichen Vorstellungsvermögen

Bartel, M., Roth, J.: Begriffsbildungsprozesse von Schüler/innen mit Videovignetten diagnostizieren und unterstützen

Brüning, A.-K.: Untersuchungen zur Profilbildung und Evaluation von Lehr-Lern-Laboren im Entwicklungsverbund „Schülerlabore als Lehr-Lern-Labore" der DTS

Lengnink, K.: Reflektieren im Mathematikunterricht als Beitrag zur Mathematischen Bildung – Anspruch und Realisierung

Literatur

Wiliam, D. & Thompson, M. (2007). Integrating assessment with instruction: What will it take to make it work? In C. A. Dwyer (Hrsg.), The Future of Assessment. Shaping Teaching and Learning (S. 55-82). Mahwah, NJ: Routledge.

Prediger, S. & Link, M. (2012). Fachdidaktische Entwicklungsforschung – Ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche. In H. Bayrhuber, U. Harms, B. Muszynski, B. Ralle, M. Rothgangel, L.-H. Schon, H. J. Vollmer & H.-G. Weigand (Hrsg.), Formate Fachdidaktischer Forschung. Empirische Projekte – historische Analysen – theoretische Grundlegungen (S. 29-46). Münster: Waxmann.

Marie-Elene BARTEL, Jürgen ROTH, Landau

Begriffsbildungsprozesse von Schüler/innen mit Videovignetten diagnostizieren und unterstützen

Um angehenden Lehrkräften bereits im Studium die Möglichkeit zu geben, Lernprozesse von Schüler/innen zu analysieren und zu unterstützen, haben wir die Lernumgebung ViviAn (**Vi**deo**vi**gnetten zur **An**alyse von Unterrichtsprozessen) konzipiert und entwickelt (Bartel & Roth, 2015). ViviAn kommt im Rahmen von Großveranstaltungen zur Mathematikdidaktik zum Einsatz, um das dort vermittelte theoretische Wissen zu illustrieren, sowie den Studierenden die Möglichkeit zu geben, ihre diagnostischen Fähigkeiten selbstständig zu trainieren.

Diagnose von Begriffsbildungsprozessen

Diagnosen sind im Schulalltag zur Steuerung von Lehr-Lern-Prozessen von großer Bedeutung und somit für den pädagogischen Alltag unverzichtbar (Horstkemper, 2004). Auch das Konzept des *formativen Assessment*s besagt, dass Diagnosen Teil eines Lernprozesses sind und das Ziel verfolgen Lernprozesse zu optimieren (Maier, 2010). Eine Lehrkraft muss folglich im Unterricht Lernprozesse wahrnehmen, diagnostizieren und gegebenenfalls entsprechend handeln (Wiliam & Thompson, 2007). Dies stellt insbesondere für unerfahrene Lehrkräfte eine große Herausforderung dar und legt eine Förderung der benötigten Kompetenzen im Studium nahe.

Auf Grund der Komplexität des Konstrukts scheint eine Fokussierung der Diagnose seitens der Studierenden unabdingbar. Da Begriffsbildung ein zentraler Aspekt des Mathematikunterrichts darstellt (Hischer, 2012) und ein unzureichendes Verständnis des Bruchbegriffs als Ursache für viele Probleme bei der Bruchrechnung gilt (Hischer, 2012), wird an dieser Stelle eine Fokussierung auf Begriffsbildungsprozesse von Lernenden vorgenommen. Um Aussagen über solche Prozesse tätigen zu können, ist der Diagnostiker auf externe Handlungen der Lernenden angewiesen (Prediger & Wittmann, 2014). Nur auf Basis der Verbalisierungen, des Umgangs mit dem Material oder gegebenenfalls der Mitschrift der Schüler/innen, können begründete Aussagen über deren Grundvorstellungen zum Bruchzahlbegriff getroffen werden. Dies legt die Entwicklung einer Lernumgebung nahe, die den Studierenden möglichst viele der Informationen zur Verfügung stellt, die zu einer adäquaten Diagnose notwendig sowie in der Regel im Unterricht zugreifbar sind.

Das Tool ViviAn

Abbildung 1: Oberfläche des Videotools ViviAn

Auf Basis dieser Überlegungen haben wir ViviAn (vgl. Abbildung 1) konzipiert und entwickelt. Neben der zwei bis vierminütigen Videovignette, können die Studierenden auf weitere Informationen, die sich durch das Betätigen der entsprechenden Buttons in einem Pop-up-Fenster öffnen, zugreifen. So können sie sich beispielsweise den Arbeitsauftrag oder die von den Lernenden erstellten Mitschriften der gezeigten Lernsituation ansehen. Durch das Betätigen des Buttons „Diagnoseauftrag" öffnen sich unterhalb der Videovignette Fragen zu der dargestellten Situation. Die Mehrzahl der Items besteht jeweils aus einer geschlossenen Auswahlfrage und einer offenen Frage, die eine Begründung der gewählten Antwort einfordert. Dieses Format hat sich bereits in einer Vorstudie bewährt. Die beschriebene Lernumgebung ist in ein Learning Management System (kurz: LMS) integriert, das primär dem Schutz der videografierten Personen dient. Zudem ermöglicht das LMS u. a. ein Freischalten von Videovignetten zu gewünschten Zeitpunkten sowie das Erfassen und Speichern von Studierendenantworten.

Forschungsfragen und -design

Im Rahmen der Hauptuntersuchung sollen u. a. vier Forschungsfragen beleuchtet werden. Diese werden im Folgenden zusammen mit dem jeweils zugehörigen Forschungsdesign dargelegt und erläutert.

Nehmen Studierende ViviAn als praxisrelevante Lerngelegenheit wahr und haben sie Interesse damit zu arbeiten?

Hiermit soll die Frage nach der Akzeptanz der entwickelten Lernumgebung bei den Studierenden beantworten werden. Erste Ergebnisse aus der Vorstudie weisen bereits darauf hin, dass Studierende das Arbeiten mit ViviAn als praxisrelevant und interessant wahrnehmen. Diese Tendenzen sollen im Rahmen der Hauptstudie mit Hilfe von Items (überwiegend vierstufige Likert-Skalen), die auf die Erhebung der Konstrukte „Relevanz" und „Interesse" abzielen, empirisch bestätigt werden.

Kann mit ViviAn die Fähigkeit zur Lernprozessdiagnose (Begriffslernen von Brüchen) gemessen werden?

Erfasst werden sollen diese Fähigkeiten mit Hilfe des Videotools ViviAn. Hierbei werden Items, in Form von Diagnoseaufträgen, bezogen auf einen in einer Videovignette zu sehenden Lernprozess, als Messinstrument generiert und eingesetzt. Um damit messen zu können, muss transparent sein, wie die Studierendenantworten geratet werden. Dazu wurden zunächst mögliche Antworten basierend auf einer stoffdidaktischen Analyse der Vignetten (bezogen auf das Begriffslernen der Schüler/innen) sowie auf Ergebnissen aus Vorstudien erstellt. Diese wurden in einem nächsten Schritt von Mathematikdidaktiker/innen überprüft und können somit als adäquate, mögliche Antworten zu den entsprechenden Items angenommen werden. Sie gelten als Referenz zur Bewertung der Studierendenantworten. In der beschriebenen Messsituation kann die Videovignette nur einmal angeschaut werden, da die Rahmenbedingungen so am nächsten zu einer realen Situation im Klassenraum sind. Diese Videovignette wird im weiteren Verlauf des Beitrags als *Messvignette* bezeichnet.

Wird die Fähigkeit zur Lernprozessdiagnose (Begriffslernen von Brüchen) durch das Arbeiten mit ViviAn gesteigert?

Lässt sich die Fähigkeit zur Lernprozessdiagnose (Begriffslernen von Brüchen) durch das Arbeiten mit ViviAn besser fördern als durch das Arbeiten mit Transkripten?

Diese beiden Forschungsfragen sollen mit Hilfe einer experimentellen Studie beantwortet werden. Dazu werden die (ca. 200) teilnehmenden Studierenden der Vorlesung „Didaktik der Zahlbereichserweiterungen“ – einer Großveranstaltung im Rahmen des Bachelorstudiums – innerhalb des LMS randomisiert der Experimental- oder der Kontrollgruppe zugewiesen. Alle Studierenden besuchen gemeinsam die wöchentliche Vorlesung. Unterschiede bestehen lediglich in den Aufgaben, die die Studierenden im Selbststudium bearbeiten.

Zunächst füllen alle Studierenden einen Fragebogen aus (u. a. Fragen zu unterrichtlicher Erfahrungen), um mögliche Prädiktoren in der Auswertung berücksichtigen zu können.

Nachdem die entsprechenden und benötigten Inhalte zu Brüchen in der Vorlesung vermittelt wurden, bearbeiten alle Studierende selbstständig im Rahmen des Vortests die Diagnoseaufträge zur Messvignette zur Erhebung ihrer Fähigkeiten zur Lernprozessdiagnose.

In der sich daran anknüpfenden dreiwöchigen Interventionsphase, unterscheiden sich die Aufgaben der beiden Gruppen. Die Studierenden der Experimentalgruppe bearbeiten obligatorisch vier (und bis zu vier weitere) Diagnoseaufträge zu verschiedenen Videovignetten. In dieser Übungssituation haben die Studierenden die Möglichkeit sich die Videovignetten mehrmals anzuschauen. Nachdem die Studierenden die Diagnoseaufträge beantwortet haben, bekommen sie nicht individualisierte Rückmeldungen zu den Antworten. Diese Rückmeldungen wurden zuvor von Mathematikdidaktiker/innen validiert. Durch dieses Feedback können sie ihre Ergebnisse selbst einschätzen und erfahren, auf welche Aspekte sie achten sollen.

Den Studierenden der Kontrollgruppe hingegen stehen in der Interventionsphase anstelle der Videovignetten, mindestens vier Transkripte derselben Lernsituationen zur Bearbeitung zur Verfügung. Die Transkripte nehmen in der Lernumgebung ViviAn räumlich den Platz der Videovignette ein (im Zentrum der Lernumgebung). Außerdem sind die Diagnoseaufträge zu den Transkripten identisch zu denen der entsprechenden Videovignetten.

Im Anschluss an die Interventionsphase bearbeiten alle Studierenden im Zuge des Nachtests erneut die Diagnoseaufträge der Messvignette, um den eventuellen Leistungszuwachs bei der Diagnose von Begriffsbildungsprozessen der Studierenden zu erfassen.

Das Ende der Untersuchung bildet ein Fragebogen zu den in der ersten Forschungsfrage abgebildeten Konstrukten „Interesse“ und „Relevanz“. Dieser wird allen Studierenden der Vorlesung vorgelegt, je nach Gruppe bezogen auf Transkripte oder Videovignetten.

Literatur

Bartel, M.-E. & Roth, J. (2015): Diagnostische Kompetenz durch Videovignetten fördern. In: F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag, S. 1033-1036.

Hischer, H. (2012). Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur, Funktion, Zahl (Springer Studium). Wiesbaden: Springer [u.a.].

Horstkemper, M. (2004). Diagnosekompetenz als Teil pädagogischer Professionalität. *Neue Sammlung, 44 (2),* 201–214.

Maier, U. (2010). Formative Assessment – Ein erfolgversprechendes Konzept zur Reform von Unterricht und Leistungsmessung? *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 13 (2)*, 293–308.

Prediger, S. & Wittmann, G. (2014). Verständiger Umgang mit Begriffen und Verfahren: Zentrale Grundlagen der Komptenzbereiche Wissen-Erkennen-Beschreiben und Operieren-Berechnen. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), Fachdidaktik Mathematik. Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II (Reihe Lehren lernen, 1. Aufl., S. 128–140). Stuttgart: Klett; Kallmeyer.

Wiliam, D. & Thompson, M. (2007). Integrating assessment with instruction: What will it take to make it work? In C. A. Dwyer (Hrsg.), The Future of Assessment. Shaping Teaching and Learning (S. 55–82). Mahwah, NJ: Routledge.

Ann-Katrin BRÜNING, Münster

Untersuchungen zur Profilbildung und Evaluation von Lehr-Lern-Laboren im Entwicklungsverbund „Schülerlabore als Lehr-Lern-Labore“ der DTS

Einleitung

Der Organisationsform „Lehr-Lern-Labor“ (LLL) wird in aktuellen wissenschaftlichen Diskursen zunehmend Aufmerksamkeit geschenkt. Stiftungen und Förderungen, wie die Deutsche Telekom Stiftung (DTS) oder die Qualitätsoffensive Lehrerbildung (QLB) beziehen sich in ihren Programmen speziell auf eine solche Lehrveranstaltungsform in der Lehramtsausbildung. Dabei wird u.a. eine stärkere Verzahnung zwischen Fachwissenschaft, Fachdidaktik und den Bildungswissenschaften sowie zwischen Theorie und Praxis angestrebt, um hierdurch eine deutliche Verbesserung der universitären Lehramtsausbildung zu erzielen, in der professionelle Handlungskompetenzen der angehenden Lehrer[5] in besonderer Weise gefördert werden (vgl. z.B. LernortLabor 2015, Elsholz et al. 2012, Krofta et al. 2012). Was unter einem LLL jedoch verstanden werden sollte, bleibt oftmals ungeklärt. Zudem unterscheiden sich die praktischen Umsetzungen dieser Organisationsform enorm. Im Rahmen einer Promotion sollen daher zunächst (1) eine konsensfähige Definition des Begriffs wissenschaftlich bestimmt, (2) eine Profilbildung der am Entwicklungsverbund der DTS beteiligten LLL vorgenommen und (3) ein ausgewähltes LLL evaluiert werden.

1. Wissenschaftliche Bestimmung einer konsensfähigen Definition

Der Begriff LLL setzt sich aus drei Komponenten zusammen, die die Arbeit und die besondere Struktur dieser Organisationsform charakterisieren. Das Lehren umfasst, im Hinblick auf die Ausbildung von Lehramtsstudierenden, das praktische Kennenlernen von Unterrichtsmethoden, Sozialformen, Lern-umgebungen, Lernprozessen von Schülern sowie der praktischen Anwendung des erworbenen fachdidaktischen, fachwissenschaftlichen, allgemein-didaktischen und lernpsychologischen Wissens. Ferner kann diese Facette, je nach Intention und Struktur des LLL, auch die Reflektion des eigenen (Lehrer-)Handelns beinhalten. Somit zielt das Lehren im LLL auf die Verzahnung von Theorie und Praxis sowie von Fachdidaktik, Fachwissenschaft und Bildungswissenschaften ab und bereichert die universitäre Lehramtsausbildung. Der Aspekt des Lernens, i. S. eines forschenden Lernens, bezieht sich sowohl auf die teilnehmenden Studierenden als auch auf die Schüler. Zentral in einem Schülerlabor, welches

[5] Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung männlicher und weiblicher Sprachformen verzichtet. Sämtliche Personenbeschreibungen gelten gleichwohl für beiderlei Geschlecht.

häufig mit einem LLL verknüpft ist, ist das forschende und selbstgesteuerte Lernen und Experimentieren zur Förderung fachspezifischer Kenntnisse und Fertigkeiten sowie der Freude und des Interesses an dem Fach. Jedoch sollen auch die Studierenden ihr erworbenes Wissen anwenden und vertiefen sowie neue Kompetenzen erwerben (vgl. z.B. LernortLabor 2015, Haupt et al. 2013, Roth 2013, Völker & Trefzger 2010). Zuletzt bleibt der Labor-Begriff zu charakterisieren, welcher gerade in der Mathematikdidaktik für Kontroversen sorgen könnte. Er steht für eine authentische aber gleichwohl komplexitätsreduzierende Lernumgebung sowohl für die teilnehmenden Schüler als auch für die Studierenden. Während die naturwissenschaftlichen Bereiche diesen Begriff mehrheitlich für sich adaptieren, bleibt in der Mathematikdidaktik zu diskutieren, ob ein Begriff wie „Werkstatt", im Sinne einer Lernwerkstatt, angemessener sei (vgl. Köck & Ott 1997). Im Austausch der am Entwicklungsverbund der DTS teilnehmenden Leiter von LLL von sechs deutschen Universitäten wurden in Form eines Fragebogens von B. Weusmann, V. Nordmeier, F. Käpnick und mir Definitionen von 20 Fachdidaktikern aus allen MINT-Fächern erfasst und analysiert und im Ergebnis eine gemeinsame, für alle Beteiligten konsensfähige Definition bestimmt. Vorab sei angemerkt, dass in der Befragung zwei Herangehensweisen an das Definieren des Begriffs erkennbar waren: Zum einen die Annährung aus der Tradition der Werkstatt- und Schülerlaborarbeit, welche durch die Integration der inhaltlichen und didaktischen Leitideen zu einem speziellen Bestandteil der Lehramtsausbildung wird; zum anderen die Annährung von der fachdidaktischen Lehramtsausbildung, welche die „üblichen" Organisationsstrukturen der Lehrveranstaltungen aufbricht und erweitert. Im Ergebnis lässt sich die folgende Definition des Begriffs „LLL" angeben:

LLL sind eine spezielle Organisationsform der Lehramtsausbildung, in der schulisches Lernen und studentische Lehramtsausbildung unter einer ganzheitlichen Perspektive miteinander verknüpft werden. Im Unterschied zu Vorlesungen, Seminaren oder Übungen in üblicher Form bieten LLL den Studierenden die Möglichkeit, in authentischen, aber komplexitätsreduzierten Lernumgebungen – je nach Schwerpunktsetzung – besondere Diagnose-, Förder- bzw. Handlungskompetenzen sowie Professionswissen zu erwerben und diese in zyklischen bzw. iterativen Prozessen zu vertiefen und in vielfältiger Weise anzuwenden. Anknüpfend an die Lernkultur der Lernlabor- und Werkstattarbeit ist in LLL für die teilnehmenden Schülern meist ein forschendes Lernen prägend, für das die Studierenden in Abhängigkeit von den jeweiligen Intentionen und Gegebenheiten Mitverantwortung in der Planung und Organisation tragen und dies als eine wesentliche Basis für den angesprochenen Erwerb verschiedener Kompetenzen dient.

Neben diesen grundlegenden Gemeinsamkeiten unterscheiden sich LLL in

Abhängigkeit ihrer Ziele und den inhaltlichen Schwerpunktsetzungen hinsichtlich folgender Aspekte: dem Ort und der Ausstattung, der Anzahl und der soziodemografischen Daten der Schüler, der konkreten Ziele bzgl. der Förderung der Schüler, der Verortung in einer Studienordnung, ihrer Verknüpfung mit anderen universitären Veranstaltungen sowie außeruniversitären Institutionen, wie Schulen, Museen, u. Ä. m., der Gesamtzeitdauer und der zeitlichen Organisationsstruktur für Lehr-Lern-Aktivitäten, der Beteiligung von Lehrkräften und der Nutzung für bzw. der Einbindung in die Lehrerfortbildung. Über die Relevanz von wissenschaftlicher Forschung im Rahmen von LLL kann bislang noch keine endgültige Aussage gemacht werden. Während in der Befragung die Entwicklungsverbundteilnehmer eine (Begleit-)Forschung nicht mehrheitlich als einen essentiellen Bestandteil von LLL angaben, betonen nicht wenige Leiter von LLL, dass gerade LLL-Umgebungen ausgezeichnete Voraussetzungen und vielfältige Möglichkeiten für (empirische) Forschungen bieten. Die hier angegebene Definition muss daher als ein Zwischenergebnis eingeordnet werden, das durch den intensiven Austausch im Entwicklungsverbund in einem iterativen Prozess, auch unter Berücksichtigung der historischen Entwicklung der Schülerlabor- und Werkstattarbeiten sowie der universitären Lehramtsausbildung, vermutlich noch weiterentwickelt wird.

2. Profilbildung der am Entwicklungsverbund teilnehmenden LLL

Auf der Basis der hier angegebenen Definition von LLL, aber auch zur Überprüfung derselben, sollen durch schriftliche Befragungen und halbstandardisierte Leitfadeninterviews die verschiedenen Profile der am Entwicklungsverbund der DTS teilnehmenden LLL erfasst werden. Erste Pilotstudien im vergangenen Jahr zeigten, dass eine standardisierte Erfassung der Formate nur bedingt aussagekräftig ist, da sich diese zu stark voneinander unterscheiden. Eine vorher angestrebte Typisierung von LLL wurde somit zunächst ausgeschlossen, kann aber eine sinnvolle Anschlussuntersuchung darstellen. Bislang liegen hierzu noch keine fundierten Zwischenergebnisse vor.

3. Evaluation des Münsterschen LLL „Mathe für kleine Asse“

Der dritte Schwerpunkt des Promotionsvorhabens stellt die Evaluation des Münsterschen LLL „Mathe für kleine Asse“[6] dar. Diese bezieht sich auf die direkten und nachhaltigen Effekte der Teilnahme auf die Studierenden. Als ein Wahlpflichtseminar der fachdidaktischen Lehramtsausbildung, welches die Studierenden in der Bachelor- und Masterphase belegen können, soll es ihnen Einblicke in die Diagnose und Förderung mathematisch begabter Kinder im Speziellen aber auch in den Umgang mit Heterogenität

[6] Mehr über das Projekt kann man z.B. in Käpnick (2010) erfahren.

im Allgemeinen geben. Zudem sollen dementsprechende diagnostische, fachliche, fachdidaktische und kommunikative Kompetenzen vermittelt und vertieft werden, welche nach Weinert (2000) und Fischer et al. (2015) essentielle Voraussetzungen für ein angemessenes professionelles adaptives Lehrerhandeln sind. Die Kompetenzen sollen mithilfe einer Vignettentestung (nach Beck et al. 2008), die im Prä-Post-Design konzipiert ist, erhoben werden. Mithilfe eines deduktiv-induktiv entwickelten Erwartungshorizonts sollen die Probandenantworten ausgewertet und eine individuelle Entwicklung von Prä- zu Posttest gekennzeichnet werden. Die ersten Ergebnisse deuten auf qualitative, quantitative und inhaltliche Abweichungen zwischen den Probandenantworten untereinander sowie zum Erwartungshorizont hin. So muss über eine mögliche Überarbeitung der Vignette und der zugehörigen Handlungsanweisungen bzw. des Erwartungshorizonts nachgedacht werden.

Neben den Kompetenzen, also dem Professionswissen der Studierenden, sollen ebenfalls die Selbstwirksamkeitserwartungen (SWE) und Überzeugungen, welche u.a. nach Kunter, Klusmann & Baumert (2009) wichtige Bestandteile der professionellen Kompetenz von Lehrkräften sind, mithilfe eines Fragebogens im Prä-Post-Design erfasst werden. Dazu werden Skalen aus groß angelegten internationalen und nationalen Studien sowie aus vorangegangenen Dissertationsprojekten zu Überzeugungen und SWE u.a. zu den Themen „Inklusion“ und „Umgang mit Heterogenität“ eingesetzt. In der Pilotstudie zeigten sich bei mehreren Skalen signifikante positive Effekte im Prä-Post-Vergleich. So stiegen beispielsweise die Mittelwerte der lehrerspezifischen SWE (nach Schwarzer & Schmitz 1999) und die der SWE zur Diagnose von Lernvoraussetzungen (nach Schulte 2008) signifikant an. Man kann daher vermuten, dass die Teilnahme an dem LLL in dieser Hinsicht positive Effekte auf die Studierenden hat.

Ausblick

Die vorgestellten Untersuchungen zur Bestimmung der Definition, zur Profilbildung ausgewählter LLL und der Evaluation des LLL „Mathe für kleine Asse“ werden mithilfe teilweise weiterentwickelten Untersuchungsmethoden in den folgenden Semestern fortgeführt.

Literatur

Die verwendete Literatur kann bei der Autorin angefragt werden.

Katja LENGNINK, Gießen

Reflektieren im Mathematikunterricht als Beitrag zur Mathematischen Bildung – Anspruch und Realisierung

Mathematik wirkt in unserer Welt: So ist sie einerseits ein Mittel zur Beschreibung von Welt und ein Werkzeug zum Umgang mit spezifischen Problemen. Andererseits durchdringt sie unseren Alltag systemisch, sie ist so mit unserem Leben und unserer gesellschaftlichen Organisation verbunden, dass sie nicht mehr wegzudenken ist (Fischer, 1988). Letzteres bezeichnet Ole Skovsmose als die „formatting power of mathematics“ (1998, S. 197) und merkt an, dass der Umgang damit entscheidend für mathematische Bildung sei:

> Does mathematics education produce critical readers of the formatting? Or does mathematics education prepare a general acceptance of the formatting, independent of the critical nature of the actual formatting? (Skovsmose, 1998, S. 197).

Durch die zunehmenden Daten, die in unserer Gesellschaft zur Steuerung gesellschaftlicher Prozesse und der Bildung einer öffentlichen Meinung erhoben, ausgewertet und veröffentlicht werden, gewinnt die Rolle der Mathematik, der man sich hierzu bedient, eine immer größere Bedeutung. Die Frage, wie eine mathematische Allgemeinbildung aussehen kann, die zu einem mündigen Umgang mit Mathematik in unserer Welt befähigt, ist demnach zwar nicht neu und wurde auch vielfältig in der Folge aufgegriffen, sie hat jedoch keineswegs an Relevanz verloren.

In der bisherigen mathematikdidaktischen Diskussion stellte sich die Denkhandlung des Reflektierens als zentral für eine mathematische Bildung heraus, die über den Erwerb mathematischen Wissens und Könnens hinaus auf Mündigkeit und Urteilsfähigkeit im Umgang mit Mathematik fokussiert (Fischer, 2001). Es wurde diskutiert, worauf sich die Reflexionen beziehen sollten, um im oben genannten Sinne bildend zu sein (Lengnink, 2005), es wurden Anlässe zum Reflektieren und unterrichtspraktische Konzepte erarbeitet (u.a. Peschek, Prediger & Schneider, 2008; Schmitt, 2016). In den heutigen Schulbüchern finden sich allerdings kaum Realisierungen zum Reflektieren im Mathematikunterricht und in den Bildungsstandards wird es ausschließlich dem Anforderungsbereich III zugeschrieben.

Festzuhalten ist, dass bisher kaum untersucht wurde, was Schülerinnen und Schüler tun, wenn sie mit reflexionsorientierten Aufgaben konfrontiert werden. Eine Ausnahme bilden metakognitive Aufgaben (Sjuts, 2003), die hilfreich sind, um über das eigene mathematische Denken und individuelle Vorstellungen beim Lernen nachzudenken, die aber in Hinblick auf die hier fokussierte Ebene der Bildung zur mathematischen Mündigkeit nicht weiter betrachtet werden sollen. Eine systematische Untersuchung zum Einsatz reflexionsorientierter Aufgaben im Mathematikunterricht der Mittelstufe liegt m.E. bisher nicht vor. Zudem weist die Verortung in den Bildungsstandards darauf hin, dass der Aufbau von Reflexionskompetenzen keine einfache Angelegenheit ist. Wie ein solcher Kompetenzerwerb gestaltet und begleitet werden kann, stellt demnach ein Forschungsdesiderat dar.

Eine Pilotstudie zum Reflektieren

In der LernWerkstatt Mathematik der JLU Gießen wurde daher im Jahr 2015 gemeinsam mit Lena Eckhardt eine explorative Studie zum Entwickeln einer Sprache zur Beschreibung von Schülerhandlungen und Reflexionstiefen durchgeführt, an der 20 Schülerinnen und Schüler einer 11. Jahrgangsstufe (E-Phase) für 90 min teilnahmen. Sie wurden mit einem stummen Impuls zur Wirkung von Diagrammen auf das Thema eingestimmt. Danach fand eine Gruppenarbeit in Kleingruppen von je 4-5 Personen an Reflexionsanlässen zur Mathematik statt. Die Schülerinnen und Schüler präsentierten ihre Ergebnisse und schlossen die Lerneinheit mit dem Schreiben eines erdachten Dialogs (Wille, 2013) ab. Die Bearbeitungsprozesse wurden videografiert und die Arbeitsprodukte gescannt. Die für die Studie herangezogenen Reflexionsanlässe sind der Literatur entnommen und für die Studie angepasst worden. Um fachliche Schwierigkeiten zu vermeiden, wurden Anlässe ausgewählt, die ausschließlich mit mathematischen Kenntnissen aus der Sekundarstufe I gelöst werden können. Folgende Forschungsfragen standen dabei im Vordergrund:

1. Was tun die Lernenden mit Reflexionsaufträgen? Welche Reflexionsebenen nehmen sie ein? Welche Reflexionstiefe erreichen sie?
2. Welche mathematischen Erkenntnisse gewinnen sie dabei? Welche mathematischen Probleme zeigen sich in den Bearbeitungsprozessen?
3. Welche Verläufe nehmen die Reflexionsprozesse?

Einblick in die Daten und erste Auswertungsansätze

Im Folgenden sollen erste Einblicke in den ersten und dritten Fragekomplex gegeben werden. Dafür werden die von Skovsmose (1998) vorgeschlagenen Reflexionsebenen (Übersetzung nach Peschek et al., 2008, S. 4f.) vorgestellt:

Mathematisch orientierte Reflexion (Nachdenken über mathematische Inhalte, Gegenstände und Denkweisen)

Modellorientierte Reflexion (Fragen nach Bedeutung, Qualität und Grenzen mathematischer Modellierungen)

Kontextorientierte Reflexion (Nachdenken über die Funktion des konkreten Einsatzes von Mathematik in der gesellschaftlichen Realität und die damit verfolgten Interessen und Zwecke)

Lebensweltorientierte Reflexion (Fragen nach der individuellen Bedeutung des mathematischen Gegenstandes für das Leben, die Gesellschaft)

Die folgende Analyse bezieht sich auf eine Graphik aus der ZEIT (vgl. auch KMK, 2003), mit reflexionsorientierten Aufträgen an die Lernenden.

Die rechts abgebildete Grafik war einem Zeitungsartikel vom 15.07.1999 der Zeitschrift DIE ZEIT über eine Umfrage unter Studenten beigefügt. Das Diagramm zeigt die Ergebnisse zur Frage „Warum arbeiten Studenten?“. Mehrfachnennungen waren möglich.

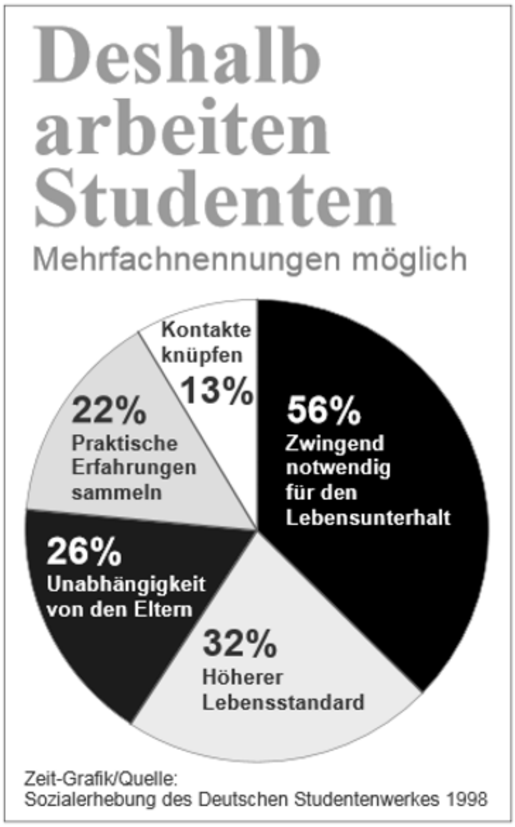
Daniel sagt: „Den Studierenden scheint es doch gar nicht so schlecht zu gehen, denn nur ungefähr ein Drittel muss ‚zwingend notwendig für den Lebensunterhalt‘ arbeiten.“
Emma entgegnet: „Das stimmt doch gar nicht!“

Aufgaben

a) Wie kommen Daniel und Emma jeweils zu ihren Meinungen?

b) Erläutern Sie, wie der Autor der ZEIT bei der Erstellung des Diagramms vermutlich vorgegangen ist.

c) Geben Sie eine graphische Darstellung der Befragungsergebnisse an, die die Meinungsverschiedenheit vermeidet.



vgl. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss 2003

Bei der Analyse der Bearbeitungsprozesse stellt sich heraus, dass sowohl die individuellen Zugänge als auch die Verläufe der Gruppendiskussionen unterschiedlich sind. So formuliert die Schülerin A1 aus Gruppe A einen direkten Bezug zum Thema, da sie auch selbst bereits arbeitet: *„Ah ja, das Leben kost Geld“*. Sie kommt im weiteren Verlauf mehrfach auf die Motive für die Arbeit zurück: *„Weil die müssen nicht arbeiten gehen. Vielleicht, weil aber sie wollen weil se‘ unabhängig von den Eltern sein wollen.“* Dort bleibt sie mit ihrer Reflexion stehen. Die anderen Mitglieder ihrer Kleingruppe hingegen arbeiten an der Beobachtung „Mehrfachnennungen möglich“ heraus, dass im Diagramm mehr als 100% abgetragen sind. Sie stellen fest, dass sich Daniel im Aufgabenteil a) an den Anteil im Kreisdiagramm hält, während Emma die Prozentzahl der Nennungen beachtet. Sie reflektieren demnach mathematisch orientiert. In Gruppe B nimmt die Diskussion einen anderen Verlauf, insofern zügig auf das Problem der Mehrfachnennungen und die Nicht-Passung des Kreisdiagramms durch Schülerin B1 eingegangen wird: „*Also bei der b) hat er dann wahrscheinlich einfach jedes Kreuz zusammengezählt und nicht jede Person, sondern jedes Kreuz, war dann ein Prozent.*“ Darüber hinaus lässt sich bei Aufgabenteil b) auch eine kontextorientierte Reflexion feststellen. So merkt Schülerin B2 an: „*Und ich denk mal deswegen hat der Autor das bestimmt auch so gemacht, oder, mit diesem Kuchendiagramm. Damit's einfach irgendwie so drastischer wirkt.… Oder vielleicht nicht so drastisch.*“ Insbesondere im Aufgabenteil c), der eigentlich eher operativ ausgerichtet ist, reflektieren die Schülerinnen und Schüler zudem modellorientiert.

Neben den oben aufgeführten Forschungsfragen ergeben sich aus der Pilotierung Fragen für weitere Untersuchungen: Inwiefern behindern oder begünstigen die außermathematischen Kontexte die Zugänge zur Reflexion? Welche (fach-)sprachlichen Anforderungen sind mit reflexionsorientierten Aufgaben verbunden und welche Rolle spielt mathematisches Grundwissen?

Literatur

Fischer, R. (2001). Höhere Allgemeinbildung. In A. Fischer et al. (Hrsg.), *Situation – Ursprung der Bildung. Franz-Fischer-Jahrbuch 2001* (S. 151–161). Leipzig: Universitätsverlag.

Fischer, R. (1988). Mittel und System – Zur sozialen Relevanz der Mathematik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 88* (1), 20–28.

KMK (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* Verfügbar unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf. [02.04.2016].

Lengnink, K. (2005). Mathematik reflektieren und beurteilen: Ein diskursiver Prozess zur mathematischen Mündigkeit. In K. Lengnink & F. Siebel (Hrsg.), *Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen* (S. 21–36). Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.

Peschek, W., Prediger, S. & Schneider, E. (2008). Reflektieren und Reflexionswissen im Mathematikunterricht. *Praxis der Mathematik in der Schule, 50* (20), 1–6.

Schmitt, O. (2016). *Reflexionswissen zur linearen Algebra in der Sekundarstufe II.* Unveröffentlichte Dissertation, Technische Universität Darmstadt.

Sjuts, J. (2003). Metakognition per didaktisch sozialem Vertrag. *Journal für Mathematikdidaktik, 24* (1), 18–40.

Skovsmose, O. (1998). Linking Mathematics Education and Democracy. Citizenship, Mathematical Archaelogy, Mathemacy and Deliberative Interaction. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 98* (6), 195-203.

Wille, A. (2013). Mathematik beim Schreiben denken – Auseinandersetzung mit Mathematik in Form von selbst erdachten Dialogen (S. 239–254). In M. Rathgeb et al. (Hrsg.), *Mathematik im Prozess*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Moderierte Sektion:

Mathematik im Beruf:
Herausforderungen und Ergebnisse der Forschung -
Nicht für die Schule,
sondern für das Leben lernen wir?

Kathrin WINTER, Flensburg, Maike VOLLSTEDT, Bremen, Aiso HEINZE, Kiel

Mathematik im Beruf: Herausforderungen und Ergebnisse der Forschung – Nicht für die Schule, sondern für das Leben lernen wir?

Wenn Schülerinnen und Schüler tatsächlich für das Leben und nicht für die Schule lernen, stellt sich die Frage, welche Rolle Mathematik im Leben nach der Schule spielt. In welcher Form tritt Mathematik tatsächlich in der Berufsausbildung bzw. im Beruf auf? Wird sie als Mathematik wahrgenommen? Und über welche mathematischen Kompetenzen verfügen Auszubildende bzw. Berufstätige? Weiterhin kann die Frage gestellt werden, wie Mathematik bestmöglich im schulischen Teil der dualen Ausbildung gelehrt werden kann. In den Beiträgen im Rahmen dieser Sektion werden konkrete Forschungsergebnisse und -projekte zu diesen Fragestellungen vorgestellt.

Eine ‚klassische' berufliche Ausbildung findet parallel in einer beruflichen Schule und in einer betrieblichen oder betriebsnahen Institution statt: In Deutschland und der Schweiz wird dies als duale Berufsausbildung bzw. Duales System bezeichnet (vgl. Braun & Scholz, 1981; Kaiser et al., 2014). In der Berufsbildungsforschung werden zwei Aspekte mathematischer Anforderungen unterschieden: Der *exchange value* beschreibt schulische (mathematische) Anforderungen, der *use value* fasst die mathematischen Anforderungen zusammen, die im Rahmen der Berufspraxis relevant sind (vgl. Coben, 2002). *Exchange* und *use value*, d. h. die Anwendung und Verwendung von Mathematik in der beruflichen Ausbildung bzw. in der Berufspraxis, unterscheiden sich immens (vgl. Sträßer 2010; Kaiser et al., 2014; Winter & Vollstedt, 2015).

Die Entwicklung konkreter Anforderungsprofile für Mathematik insbesondere für den Übergang von der Schule in die berufliche Ausbildung bedarf einer detaillierten Analyse unterschiedlicher Aspekte. So gibt es eine Vielzahl an Berufsfeldern und Berufen, die sich bereits hinsichtlich des benötigten Schulabschlusses für die Zulassungsvorrausetzung (Haupt-, Realschulabschluss, Fach- oder Hochschulreife) unterscheiden. Zudem wird Mathematik in vielen Aus- und Weiterbildungsgängen nicht als eigenes Fach unterrichtet, sondern die Inhalte werden in den Unterricht anderer Fächer eingebunden (vgl. Braun & Scholz 1981; Bardy et al., 1985; Musch et al. 2009).

Der Übergang nach einer abgeschlossenen Berufsausbildung in den Berufsalltag ist mit weiteren Veränderungen hinsichtlich der An- und Verwendung von Mathematik verbunden (vgl. Winter & Vollstedt, 2015). In der Berufspraxis (*use value*) wird Mathematik bspw. häufig in Form von Regelsätzen oder vorgegebenen Wertetabellen angewendet. Auf diese Weise „verschwindet" die Mathematik oftmals aus der Wahrnehmung der Berufstätigen (vgl. Noss et al., 2002; Duchhardt & Vollstedt, in diesem Band).

Sektionsvorträge

Siebert, U. & Heinze, A.: Modellierung mathematischer Kompetenzen von Industriekaufleuten am Übergang in die berufliche Erstausbildung

Kaiser, H.: Mit Lernenden die rechnerisch/mathematische Bewältigung von beruflichen Alltagssituationen erarbeiten

Duchhardt, C. & Vollstedt, M.: Die Rolle von Selbstberichten zur Nutzung von Mathematik im Beruf

Sträßer, R.: Anmerkungen zur moderierten Sektion „Mathematik im Beruf"

Literatur

Bardy, P., Blum, W., & Braun, H. G. (Hrsg.). (1985). *Mathematik in der Berufsschule – Analysen und Vorschläge zum Fachrechenunterricht*. Essen: Girardet.

Braun, H.-G. & Scholz, H. (1981). Dokumentation der Mathematik-Lehrpläne Berufliches Schulwesen (Stand: Juni 1980). *Schriftenreihe des IDM: Vol. 29*. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik (IDM), Universität Bielefeld.

Coben, D. (2002). Use value and exchange value in discursive domains of adult numeracy teaching. *Literacy and numeracy studies 11*(2), 25-35.

Duchhardt, C. & Vollstedt, M. (in diesem Band). Die Rolle von Selbstberichten zur Nutzung von Mathematik im Beruf.

Kaiser, H., Schelldorfer, R. & Winter, K. (2014). Mathematik fürs Leben: Von der Schule zum Beruf. *PM Praxis der Mathematik in der Schule 56*(57), 2-9.

Musch, M., Rach, S. & Heinze, A. (2009). Zum Spannungsverhältnis zwischen mathematischen Anforderungen im Schulunterricht und im Berufsleben. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung beim Mathematiklernen* (S. 217-227). Waxmann: Münster.

Noss, R., Hoyles, C., & Pozzi, S. (2002). Abstraction in expertise: A study of nurses' conceptions of concentration. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(3), 204-229.

Sträßer, R. (2010). *Mathematik im Beruf und in der beruflichen (Aus-)Bildung. Expertise für die Deutsche Telekom-Stiftung „Mathematik entlang der Bildungskette"*, Gießen.

Winter, K (2014). Die Stunde morgen: Regelsätze aus dem Berufsalltag in den Mathematik-unterricht holen. *PM Praxis der Mathematik in der Schule 56*(57), 39-40.

Winter, K. & Vollstedt, M. (2015) Von der schulischen Ausbildung in die Berufspraxis: Konkrete Anwendungen mathematischer Zusammenhänge im Berufsalltag. *Mathematik lehren 32*(192), 34-37.

Christoph DUCHHARDT, Maike VOLLSTEDT, Bremen

Die Rolle von Selbstberichten zur Nutzung von Mathematik im Beruf

Die Nutzung von Mathematik bei Erwachsenen ist aus verschiedenen Gründen ein relevanter Forschungsgegenstand: Aus ökonomischer Perspektive dient das Verhältnis von mathematischer Kompetenz und Nutzung von Mathematik im Beruf als Indikator für *skill mismatch*, von dem negative Auswirkungen auf Produktivität und Performanz angenommen werden (vgl. Allen, Levels & van der Velden, 2013; Perry, Wiederhold & Ackermann-Piek, 2014). Der Zusammenhang von mathematischer Kompetenz, Nutzung von Mathematik und Alter kann ferner in eine allgemeinere Debatte zum *cognitive aging* eingebettet werden, die die Entwicklung von kognitiven Fähigkeiten im Alter beschreibt (vgl. Hertzog, Kramer, Wilson & Lindenberger, 2008; Salthouse, 2006). Weiterhin kann die Nutzung von Mathematik als bedeutender Prädiktor mathematischer Kompetenz angesehen werden (vgl. Duchhardt, Jordan & Ehmke, 2015). Schließlich ist es eine grundlegende Herausforderung für die Mathematikdidaktik, die Nutzung von Mathematik am Arbeitsplatz zu beschreiben (vgl. Sträßer, 2015). Einen recht aktuellen Überblick über Forschung zu Mathematik im Beruf gibt auch die 20. ICMI-Studie (Damlamian, Rodrigues & Sträßer, 2013).

PIAAC

Im Rahmen des *Programme for the International Assessment of Adult Competencies* (PIAAC) der OECD wurde 2011-2012 in 24 Industrienationen, unter anderem in Deutschland, der *Survey of Adult Skills* durchgeführt. Bei Erwachsenen im erwerbsfähigen Alter (16-65 Jahre) wurden dabei auch die mathematische Kompetenz und – basierend auf Selbstberichten – deren Nutzung in Alltag bzw. im Beruf erfasst (OECD, 2013a). Die skalierten Daten sind als *public use file* frei verfügbar. Die beiden Skalen zur Nutzung von Mathematik werden sowohl auf einer kontinuierlichen Skala als auch in Kategorien („Wert liegt OECD-weit in den untersten 20%“ bis „… in den obersten 20%“) berichtet. Eine zusätzliche Kategorie („All Zero“) wurde für Teilnehmende eingeführt, die auf alle Fragen der entsprechenden Skala mit „Nie“ antworteten. Diesen Personen wurde auf der kontinuierlichen Skala ein fehlender Wert zugewiesen (siehe OECD, 2013b).

Fragen

Anknüpfend an die allgemeine Frage, wie reliabel Selbstberichte zur Nutzung von Mathematik sind (vgl. Sträßer, 2015) wird im Folgenden der spezielleren Frage nachgegangen, ob und wie mit Hilfe der PIAAC-Daten entschieden werden kann, wie mit der „All Zero“-Kategorie bei der Prädiktion mathematischer Kompetenz umzugehen ist. Verschiedene Ansätze sind theoretisch denkbar: Man betrachtet sie ohne inhaltliche Annahmen als statistisches Phänomen (vgl. Modell *Kat* unten), man sieht die entsprechenden Personen als repräsentative Teilstichprobe an (*CC*), man nimmt an, dass die Selbstberichte korrekt sind (*Min*) oder dass sie es nicht sind (*Im*).

Stichprobe und Methoden

Der deutsche PIAAC-Datensatz enthält 5.465 Fälle, von denen in den folgenden Analysen nur diejenigen 4.070 berücksichtigt wurden, die zum Zeitpunkt der Testung berufstätig waren und Mathematik-Kompetenzwerte aufwiesen. Als Prädiktoren mathematischer Kompetenz wurden Geschlecht (Referenzkategorie: männlich), Alter (35-39), Bildungsstand (ISCED 3), Bildungsstand der Eltern (Max $\text{ISCED}_{\text{Eltern}} \in \{3,4\}$), Migrationshintergrund (beide Eltern in Deutschland geboren), Berufsklassifikation (qualifiziert) sowie die Nutzung von Mathematik in Alltag bzw. Beruf (entweder als kontinuierliche Variable oder mit Referenzkategorie „40-60%") verwendet. Abgesehen von den kontinuierlichen Nutzungs-Skalen traten dabei maximal 6,3% fehlende Werte auf, die vor den Analysen mittels multipler Imputation ersetzt wurden. Die kontinuierlichen Nutzungs-Skalen wiesen 6,1% (Alltag) bzw. 17,3% (Beruf) fehlende Werte auf. Der Umgang mit diesen wurde in den Analysemodellen variiert: Im Modell *Kat* wurden die kategoriellen Nutzungs-Skalen verwandt, in *Min* wurden die fehlenden Werte durch sehr kleine Skalenwerte (zurück-)ersetzt, in *Im* wurden sie durch Imputation ersetzt. Im Modell *ImMin* wurden zunächst wurden die fehlenden Werte ersetzt, danach ein fester Wert abgezogen. In *CC* schließlich wurden Fälle mit fehlenden Werten gelöscht. Bei alldem wurden die typischen Large-Scale-Techniken verwandt: multiple Imputationen, plausible values sowie Populations- und Replikations-Gewichte.

Ergebnisse

Eine erste deskriptive Analyse zeigt, dass die *All Zero*-Kategorie der Nutzung von Mathematik im Beruf besonders bei Personen mit niedrigem Bildungsstand (59,1% der Personen mit ISCED 1; im Vergleich nur 3,8% der Personen mit ISCED 5A/6) und niedriger Berufsklassifikation (73,5% der Personen mit elementaren Berufen; im Vergleich nur 5,6% der Personen mit qualifizierten Berufen) verbreitet ist. Tabelle 1 zeigt die vollständigen Ergebnisse des Regressionsmodells *Kat*. Es zeigt sich, dass vor allem der Bildungsstand, aber auch Geschlecht, Berufsklassifikation, Migrationshintergrund und die extremen Altersgruppen einen deutlichen Zusammenhang mit mathematischer Kompetenz aufweisen.

Tabelle 1

Regressionsmodell Kat *zur Vorhersage mathematischer Kompetenz*

Prädiktor		Prädiktor	
Geschlecht ♀	**-12,24**	Max $ISCED_{Eltern} < 3$	**-8,33**
Alter 16-19	**12,56**	Max $ISCED_{Eltern} \geqslant 5$	**4,63**
Alter 20-24	5,34	MigHint 2	**-15,69**
Alter 25-29	-0,66	MigHint 1	-0,25
Alter 30-34	-6,23	semi-qualifiziert: $(ISCO)_1 \in \{4,5\}$	**-8,28**
Alter 40-44	-0,44	semi-qual.: $(ISCO)_1 \in \{6,7,8\}$	**-14,13**
Alter 45-49	**-7,89**	elementar: $(ISCO)_1 = 9$	**-10,23**
Alter 50-54	**-12,47**	Nutzung im Alltag All Zero	**-21,92**
Alter 55-59	**-11,58**	Nutzung im Alltag < 20%	**-13,72**
Alter 60-65	**-19,58**	Nutzung im Alltag 20-40%	**-8,06**
ISCED 1	**-30,37**	Nutzung im Alltag 60-80%	**5,89**
ISCED 2	**-25,08**	Nutzung im Alltag > 80%	**14,49**
ISCED 4	**22,65**	Nutzung im Beruf All Zero	**-14,73**
ISCED 5B	**14,70**	Nutzung im Beruf < 20%	**-8,43**
ISCED 5A	**15,56**	Nutzung im Beruf 20-40%	**-9,35**
ISCED 5A/6	**29,76**	Nutzung im Beruf 60-80%	0,51
		Nutzung im Beruf > 80%	0,45

Anmerkungen. Statistisch signifikante Koeffizienten sind fett gedruckt; MigHint 1/2 = ein Elternteil / beide Eltern im Ausland geboren; $(ISCO)_1$ = erste Stelle des ISCO-Codes.

Tabelle 2

Vergleich verschiedener Regressionsmodelle

	Modell				
Prädiktor	*Kat*	*Min*	*Im*	*ImMin*	*CC*
Nutzung im Alltag		**10,09**	**11,40**	**10,92**	**10,56**
Nutzung im Beruf		**3,68**	**3,17**	**3,51**	**3,45**
Alter 16-19	**12,56**	**11,27**	10,69	10,24	3,37
Alter 60-65	**-19,58**	**-19,63**	**-20,99**	**-19,52**	**-25,27**
ISCED 1	**-30,37**	**-29,84**	**-33,92**	**-29,71**	-19,89
Elementare Tätigkeit	**-10,23**	**-10,92**	**-17,51**	**-11,37**	**-9,22**
Nutzung im Alltag All Zero	**-21,92**				
Nutzung im Alltag > 80%	**14,49**				
Nutzung im Beruf All Zero	**-14,73**				
Nutzung im Beruf > 80%	0,45				
R^2	0,410	0,410	0,392	0,408	0,348

Anmerkung. Statistisch signifikante Koeffizienten sind fett gedruckt.

Nutzung im Alltag hängt enger mit mathematischer Kompetenz zusammen als Nutzung im Beruf. Tabelle 2 zeigt die verschiedenen Analysemodelle im Vergleich. In den nicht angegebenen Variablen zeigen sich keine bedeutsamen Unterschiede zum Modell *Kat*. Das Modell *CC* weist im Vergleich sowohl das deutlich kleinste R^2 als auch stark abweichende Koeffizienten (Altersgruppen, Bildungsstand) auf. Die übrigen Modelle klären annähernd gleich viel Varianz auf. Hier werden in der Prädiktion mathematischer Kompetenz im Wesentlichen 10-15 Kompetenzpunkte zwischen Nutzung, Alter, Bildungsstand und Berufsklassifikation verschoben, wobei *Im* die extremsten Zusammenhänge feststellt. Die zu der „All Zero“-Kategorie geschätzten Parameter im Modell *Kat* erlauben die vorsichtige Interpretation, dass *Min* der Wahrheit näher kommt als *Im*.

Diskussion

Auf die rein inhaltliche Frage, wie mit der „All Zero“-Kategorie umzugehen ist, liefern Daten allein keine klare Antwort, die untersuchten Modelle unterscheiden sich nur in wenigen Koeffizienten substantiell. Einzig *CC* scheint unangemessen. Vertiefende (qualitative) Analysen scheinen nötig, um die allgemeine Frage der Validität von Selbstberichten zu klären.

Literatur

Allen, J., Levels, M. & van der Velden, R. (2013). Skill mismatch and skill use in developed countries: evidence from the PIAAC study. Maastricht: ROA Research Memorandum.

Damlamian, A., Rodrigues, J. F. & Sträßer, R. (Hrsg.). (2013). Educational Interfaces between Mathematics and Industry. Report on an ICMI-ICIAM-Study (Vol. 16). Heidelberg: Springer.

Duchhardt, C., Jordan, A-K. & Ehmke, T. (2015). Adults' Use of Mathematics and its Influence on Mathematical Competence. International Journal for Science and Mathematics Education. Online-Vorabpublikation.

Hertzog, C., Kramer, A. F., Wilson, R. S., & Lindenberger, U. (2008). Enrichment effects on adult cognitive development can the functional capacity of older adults be preserved and enhanced? Psychological science in the public interest, 9(1), 1-65.

OECD (2013a). OECD Skills Outlook 2013: First Results from the Survey of Adult Skills. OECD Publishing.

OECD (2013b). Technical Report of the Survey of Adult Skills (PIAAC). OECD Publishing.

Perry, A., Wiederhold, S. & Ackermann-Piek, D. (2014). How Can Skill Mismatch be Measured? New Approaches with PIAAC. methods, data, analyses, 8(2), 137-174.

Sträßer, R. (2015). „Numeracy at work“: a discussion of terms and results from empirical studies. ZDM Mathematics Education, 47, 665-674.

Salthouse, T. (2006). Mental Exercise and Mental Aging. Evaluating the Validity of the “Use It or Lose It” Hypothesis. Perspectives on Psychological Science, 1(1), 68-87.

Hansruedi KAISER, Zollikofen/Bern

Mit Lernenden die rechnerisch/mathematische Bewältigung von beruflichen Alltagssituationen erarbeiten

1. Handlungsfähigkeit: Ein Ziel der beruflichen Grundbildung

In Bezug auf Mathematik kann man im Rahmen der Berufsbildung im schulischen Unterricht verschiedenste Ziele verfolgen: Man kann versuchen, den Jugendlichen anhand von Beispielen aus dem Berufsalltag die Bedeutung von Mathematik im modernen Leben verständlicher zu machen; man kann versuchen, ihre mathematischen Kenntnisse im Hinblick auf spätere Weiterbildungen zu entwickeln; etc. Da es aber in der Berufsbildung auch darum geht, die Lernenden zu befähigen, einen bestimmten Beruf auszuüben, ist **ein** Ziel ganz bestimmt gesetzt: Den Lernenden helfen, die rechnerisch/mathematischen Anforderungen ganz konkreter beruflicher Handlungssituationen zu bewältigen.

2. Gebrauch vs. Analyse

Um zu klären, was damit genau gemeint ist, ist ein Blick in einen anderen Bereich hilfreich – in den des Sprachlernens (Abbildung 1): Will man eine Sprache lernen, dann geht es typischerweise darum, deren Gebrauch in alltäglichen Situationen zu erlernen. Moderne Sprachkurse gehen entsprechend von Situationen aus wie „Ankommen am Flughafen“ etc. Neben diesem alltäglichen Sprachgebrauch gibt es eine Wissenschaft – die Linguistik –, welche die verwendeten sprachlichen Strukturen analysiert und theoretisch durchdringt. Kaum jemand, der einen Sprachkurs besucht, erwartet, zum Linguisten ausgebildet zu werden.

	Gebrauch	Analyse
Sprache	Sprachverwendung (Hören, Sprechen, Lesen, Schreiben)	Linguistik (Grammatik, Sprachtheorie etc.)
Mathematik	Alltagsmathematik (Zählen, Messen, Verorten)	(Akademische) Mathematik (Analysieren, Modellieren etc.)

Abbildung 1: Sprache und Mathematik

Parallel dazu gibt es im Bereich Mathematik einen Gebrauch von Zahlen etc. zum Zählen, Messen, Verorten (Bishop 1988) in alltäglichen Situationen und daneben eine Wissenschaft, welche die dabei auftretenden Strukturen analysiert und theoretisch durchdringt – also Mathematik gebrauchen neben Mathematik betreiben (Basendowski 2013). Nur gibt es leider auf der mathematischen Seite keine saubere begriffliche Unterscheidung analog der Unterscheidung Sprache/Linguistik – was die Diskussion über die Beziehung zwischen (Alltags-)Mathematik und (akademischer) Mathematik erschwert. Aber auch hier gilt, dass Lernende, welche die rechnerisch/mathematische Bewältigung bestimmter beruflicher Handlungssituationen erlernen wollen, nicht erwarten, zu Mathematikern ausgebildet zu werden.

3. Vorwissen

Genauso wie auf Seite der Sprache gewisse Kenntnisse grammatikalischer Strukturen nützlich sind, sind im beruflichen Handlungskontext gewisse Kenntnisse mathematischer Strukturen nützlich. Wie schon Heymann (1996) vermutet und auch Untersuchungen zu einzelnen Berufen bestätigen (bspw. Smith 1999, Kaiser 2011), genügt dabei in den allermeisten Fällen das mathematische Wissen, welches die Lernenden aus den ersten neun Schuljahren mitbringen. In der Berufsbildung geht es daher kaum je darum, neue mathematische Konzepte aufzubauen. Vielmehr müssen die Lernenden lernen, wie sie vorhandenes Wissen auf professionelle Art und Weise in konkrete Handlungssituationen einsetzen können.

4. Eine Didaktik des Gebrauchs

Um den Lernenden dabei zu helfen, haben wir einen didaktischen Ablauf in acht Schritten entwickelt. Dieser beginnt mit den Erfahrungen der Lernenden bezüglich einer bestimmten Handlungssituation sowie ihrem mathematischen Vorwissen und schlägt dann den Bogen bis hin zu neuen Erfahrungen im Gebrauchsalltag. Die zentrale theoretische Annahme hinter diesem Ablauf ist, dass Mathematikgebrauch stark im jeweiligen Gebrauchskontext verankert ist und daher aus diesem heraus und auf diesen hin entwickelt und erlernt werden muss (bspw. Coben & Hutton 2010, Kaiser 2011).

Die acht Schritte sind:

1. Vorher: Warten, bis die Lernenden schon Erfahrungen mit der entsprechenden Handlungssituation gemacht haben.
2. Die Lernenden schildern diese Erfahrungen möglichst breit und anschaulich.
3. Die Lernenden lösen gruppenweise ein mittelschweres Problem, wie es in der entsprechenden Handlungssituation typischerweise auftritt.
4. Im Plenum werden die Lösungen der Lernenden vorgestellt und kritisch besprochen; vorhandene gute Ansätze werden gewürdigt und weiterer Lernbedarf wird herausgearbeitet.
5. Die Lehrperson führt eine für die betreffende Handlungssituation typische professionelle Problemlösung anhand eines realistischen Beispiels modellhaft vor.

6. Die Lernenden üben das professionelle Vorgehen mittels selbst erfundener Beispiele.
7. Die Lernenden erarbeiten je einen persönlichen Spickzettel zum Gebrauch im betrieblichen oder privaten Alltag.
8. Später: Gemeinsam werden die Erfahrungen beim Gebrauch im Alltag besprochen und dabei aufgetretene Probleme geklärt.

Mehr Details zu den einzelnen Schritten finden sich auf www.fachrechnen.ch unter „Hintergründiges / Grundmodell".

5. Erfreuliche Resultate eine Pilotstudie

In der Schweiz sind die Lehrpersonen für den schulischen Teil der Berufsbildung im Allgemeinen gut ausgebildete Fachleute des jeweiligen Berufs mit einer zusätzlichen zweijährigen berufsbegleitenden pädagogischen Ausbildung. Diese Lehrpersonen reagieren nach unseren bisherigen Erfahrungen sowohl während ihrer Ausbildung wie auch später in Weiterbildungen sehr positiv auf unser didaktisches Modell. Setzen sie es versuchsweise in ihrem Unterricht ein, sind sie oft überrascht, wie viel Vorwissen die Lernenden mitbringen und wie gut sie mitarbeiten (bspw. auf www.fachrechnen.ch unter „Beispiele / Haustechnik").

In einem Pilotversuch haben wir versucht abzuklären, inwiefern auch (oder vor allem) schulisch schwächere Lernende von diesem Vorgehen profitieren (Wüthrich 2015). Involviert waren 35 Lernende aus drei Klassen in der Ausbildung zur *Assistentin Gesundheit und Soziales*, eine zweijährige Ausbildung für eher schulisch schwache Lernende. Um abzuklären, welche Grundkompetenzen sie mitbringen, wurden zu Beginn der Ausbildung alle 35 Lernenden einzeln mittels des *BASIS-MATH 4-8* (Moser Opitz et al. 2010) getestet. 29 der 35 Lernenden erreichten die kritische Grenze von 67 Punkten nicht, müssen laut Test also als rechenschwach gelten.

Etwa drei Monate nach Ausbildungsbeginn bearbeitete die Lehrperson mit den Lernenden dann klassenweise die Situation *Lohnabrechnung kontrollieren*. Da im Gesundheitsbereich der ausbezahlte Betrag sich auf Grund von geleisteten Nacht- und Wochenenddiensten von Monat zu Monat ändert, hat die kritische Sichtung der monatlichen Lohnabrechnung eine gewisse Bedeutung. Zur Unterstützung von Schritt 2 des didaktischen Modells brachten die Lernenden ihre persönlichen Abrechnungen der letzten beiden Monate mit. Für den Schritt 8 versuchten sie die nächste, kurz nach dem Unterricht eintreffende Lohnabrechnung zu analysieren.

In der anschließenden Klassenarbeit erreichten 31 der 35 Lernenden ein genügendes Resultat, waren also erfreulicherweise in der Lage, ihre Lohnabrechnungen zu kontrollieren. Dies hatten wir erwartet. Völlig überrascht waren wir hingegen, dass sich zwischen den Resultaten im *BASIS-MATH* und den Resultaten in der Klassenarbeit praktisch eine Null-Korrelation ergab (r = 0.05). Der *BASIS-MATH* war in diesem Fall also nicht einmal andeutungsweise in der Lage, den Lernerfolg vorherzusagen (mehr dazu: www.fachrechnen.ch unter „Hintergründiges / Einbettung im Umfeld").

Wir planen eine Replikation dieser Pilotstudie mit ca. 500 Lernenden aus verschiedenen Berufen. Angesichts der Nullkorrelation in der Pilotstudie sind wir aber zuversichtlich, dass sich auch hier zeigen wird, dass die Mehrheit der Lernenden sehr wohl genügend Grundkompetenzen in die Berufsbildung mitbringen, wenn man didaktisch geeignet darauf aufbaut.

Literatur

Basendowski, S. (2013). Die soziale Frage an (mathematische) Grundbildung: eine empirische Studie zu dem Wesen, der Funktion und der Relevanz mathematischer Kompetenzen in einfachen Erwerbstätigkeiten sowie Analysen für didaktische Implikationen. Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt Verlag.

Bishop, A. J. (1988). Mathematical Enculturation: a cultural perspective on Mathematics Education. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Coben, D., & Hutton, M. (2010). Mathematics in a safety-critical work context: the case of numeracy for nursing. In A. Araújo et al. (Hrsg.), Proceedings of the EIMI 2010. Lisbon, Portugal, 167-176.

Heymann, H. W. (1996). Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim: Beltz.

Kaiser, H. (2011). Fachrechnen vom Kopf auf die Füsse gestellt – innovative Ansätze in der Ausbildung zum Koch/ zur Köchin. In G. Niedermair (Ed.), Aktuelle Trends und Zukunftsperspektiven beruflicher Aus- und Weiterbildung. Linz: Trauner, 225-242.

Moser Opitz, E., Reusser, L., Müller, M. M., Anliker, B., Wittich, C., Freesemann, O., & Ramseier, E. (2010). BASIS-MATH 4–8. Basisdiagnostik Mathematik für die Klassen 4–8. Bern: Huber.

Smith, J. P. (1999). Tracking the Mathematics of Automobile Production: Are Schools Failing to Prepare Students for Work? American Educational Research Journal, 36(4), 835-878.

Wüthrich, R. (2015). Lernende mit Schwächen in Rechnen/Mathematik in der zweijährigen Grundbildung – Können durch die Arbeit mit realen Alltagssituationen mathematische Defizite behoben werden? Masterarbeit, Technische Universität Kaiserslautern, Kaiserslautern.

Ulrike SIEBERT, Aiso HEINZE, Kiel

Modellierung mathematischer Kompetenzen von Industriekaufleuten am Übergang in die berufliche Erstausbildung

Mathematik hat für viele Berufe eine große Bedeutung, da in vielen Branchen mathematische Anforderungen Teil der beruflichen Anforderungen sind. Entsprechend zeigte sich in Studien, dass mathematische Kompetenz ein zentraler Prädiktor für berufliche Fachkompetenz ist (z.B. Nickolaus et al., 2010). Gleichzeitig wurde in den vergangenen 20 Jahren immer wieder aufgezeigt, dass Auszubildende in der beruflichen Erstausbildung Schwierigkeiten mit der Bewältigung mathematischer Anforderungen in beruflichen Kontexten aufweisen (z.B. Sträßer, 1996; Minnameier, 2008). Die Probleme umfassen dabei nicht nur technische Rechenfertigkeiten, sondern auch mathematische Tätigkeiten, die unter das rechnerische und begriffliche Modellieren gefasst werden können.

Bei der Frage nach den Ursachen für die Probleme der Auszubildenden gibt es zwei Möglichkeiten. Zum einen kann es sein, dass die betreffenden Auszubildenden die Ziele des Mathematikunterrichts der allgemeinbildenden Schule nicht erreichen und die Probleme in der Ausbildung auf die Schulbildung zurückzuführen sind. Zum anderen kann es aber auch sein, dass die Ziele des Mathematikunterrichts sehr wohl erreicht werden, die dort erworbene mathematische Kompetenz aber nicht kongruent mit den mathematischen Anforderungen in der Ausbildung ist. Je nach Ursache wären unterschiedliche Konsequenzen zu ziehen. Während die erste Ursache durch eine Verbesserung der Unterrichtsqualität im Regelschulsystem zu adressieren wäre, würden bei der zweiten Ursache eher Maßnahmen im Berufsschulwesen oder in der Ausbildung notwendig sein. Letzteres würde insbesondere bedeuten, dass der Übergang von der allgemeinbildenden Schule in die berufliche Bildung im Falle der Entwicklung der mathematischen Kompetenz nicht als Kontinuum, sondern eher als Bruch anzusehen ist, bei dem Übergangsmaßnahmen notwendig sind.

Um einen Beitrag zur Klärung der Frage nach den möglichen Ursachen zu leisten, ist zunächst einmal notwendig, die Kongruenz oder Nichtkongruenz von mathematischen Anforderungen im Mathematikunterricht der allgemeinbildenden Schule und in der Ausbildung zu untersuchen. Nimmt man an, dass sich die Kompetenzanforderungen deutlich ändern, so müssten sich unterschiedliche Kompetenzkonstrukte nachweisen lassen. In diesem Beitrag stellen wir die theoretische Grundlegung des Konstrukts „berufsfeldbezogene mathematische Kompetenz“ vor, das auf der Annahme der o.g. Nichtkongruenz basiert. Zudem verweisen wir am Ende kurz auf empirische Ergebnisse, die diese Trennbarkeit bestätigen.

Mathematikdidaktische Erklärungsansätze

Betrachtet man die mathematikdidaktischen Arbeiten in dem Themenfeld „Berufliche Mathematik“, so finden sich dort seit den 1970er Jahren vielfältige Arbeiten, die Analysen aus fachlicher und kognitiver Perspektive berichten. So wurden beispielsweise Inhaltsbereiche identifiziert, die für verschiedene Berufsbranchen von Bedeutung sind (z.B. Bardy, 1985). Wesentliches Ergebnis war dabei, dass Mathematik im Beruf eine Hilfswissenschaft darstellt, deren Aufgabe darin besteht, zu einer effizienten Bewältigung beruflicher Anforderungssituationen beizutragen (Sträßer, 1996). Gleichzeitig wurde in der kognitiven Perspektive herausgearbeitet, dass mathematische Inhalte für die Berufstätigen oftmals unsichtbar bleiben. Die Kontextuierung der mathematischen Anforderungen bewirkt zudem, dass die Mathematik in einer Situation durch den Kontext bestimmt wird und damit auch berufliche Kompetenzen und mathematische Kompetenzen kognitiv verschmelzen (vgl. Sträßer, 1996; Winther et al., 2013).

Diese mathematikdidaktischen Arbeiten geben wertvolle Hinweise für unsere Fragestellung, lösen sie allerdings nicht. Einerseits sind viele Arbeiten sehr alt und andererseits basieren die empirischen Ergebnisse oft auf Fallstudien mit beschränkter Aussagekraft für die Systemebene. Zudem wurden zumeist Berufstätige betrachtet und keine Auszubildenden. Entsprechend stellt sich die Frage, ob nicht die Adaption allgemeiner Erklärungsansätze gewinnbringend ist. So könnte man überlegen, dass etwa Schwierigkeiten bei technischen Anforderungen (Termumformungen, Rechnen) im Wesentlichen auf nicht erreichte Ziele des Mathematikunterrichts zurückzuführen sind, da die Anforderungen kontextunabhängig sind. Schwierigkeiten beim Modellieren in beruflichen Situationen könnten dagegen sehr wohl auf die Nichtkongruenz der im Mathematikunterricht erworbenen mathematischen Kompetenz und der mathematischen Anforderungen in beruflichen Situationen zurückzuführen sein. Dabei könnten Modelle wie etwa Grundvorstellungsumbrüche oder träges Wissen hilfreiche Erklärungsansätze darstellen. Grundsätzlich kann man für Anforderungen, die über das technische Arbeiten hinausgehen, folgern, dass die im Mathematikunterricht erworbene mathematische Kompetenz ggf. nur eingeschränkt funktional für berufliche Situationen sein kann.

Hinweise aus der Wirtschaftspädagogik

Nicht aus Sicht der allgemeinbildenden Schule, aber aus Sicht der beruflichen Bildung beschäftigt sich die Berufs- und Wirtschaftspädagogik mit vergleichbaren Fragen. Wir beschränken unsere Darstellung auf die Wirtschaftspädagogik und hier auf den Beruf der Industriekaufleute, da dieser im Fokus unserer exemplarischen Betrachtung steht.

Winther, Sangmeister und Schade (2013) haben für die kaufmännische Domäne ein Kompetenzmodell entwickelt, das nicht nur generische und berufliche Kompetenzen modelliert, sondern insbesondere auch sog. domänenverbundene Kompetenzen beschreibt. Werden als generische Kompetenzen aus der allgemeinen Bildung noch die allgemeine Numeralität genannt, so wird dies in der beruflichen Bildung durch die domänenverbundene Facette der ökonomischen Numeralität ergänzt. Diese wird beschrieben als schulisch erworbene mathematische Kompetenzen, die in spezifischen beruflichen Anforderungssituationen funktional angewendet werden. Damit stellen sie eine fachspezifische Konkretisierung der beruflichen Grundbildung dar. Insbesondere deutet die Trennung von allgemeiner und ökonomischer Numeralität darauf hin, dass es sich (theoretisch) um trennbare Konstrukte handelt. Inhaltlich bieten die domänenverbundenen Kompetenzen die Möglichkeit der Verbindung von allgemeinbildender und beruflicher Bildung bezogen auf ein Fach – in unserem Fall Mathematik.

Berufsfeldbezogene mathematische Kompetenz

Ausgehend von der bisherigen Betrachtung erscheint es plausibel, das Konstrukt der ökonomischen Numeralität mathematikdidaktisch zu charakterisieren. Wesentlich dafür ist die Analyse der 12 Lernfelder in der Industriekaufleute-Ausbildung im Hinblick auf mathematikhaltigen Anforderungen. Dabei kann als Framework das Kompetenzmodell der Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss (KMK, 2003) herangezogen werden, welches unmittelbar für die Anschlussfähigkeit des Konstrukts an die mathematische Bildung der Regelschule sorgt.

Zusammenfassend lässt sich zeigen (vgl. Siebert & Heinze, 2015), dass primär die Leitideen *Zahl*, *Messen*, *Funktionaler Zusammenhang* und in geringem Rahmen auch der Umgang mit Daten eine Rolle spielen. Hinsichtlich der allgemeinen mathematischen Kompetenzen kann vor allem das *Mathematische Modellieren*, der *Umgang mit mathematischen Darstellungen* und *mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik* sowie das *Kommunizieren* identifiziert werden. Das Anforderungsniveau liegt zumeist im unteren bzw. mittleren Bereich, da ein Verallgemeinern oder Reflektieren kaum gefordert ist.

Wie in Siebert und Heinze (2015) erläutert, wurde das Konstrukt der berufsfeldbezogenen mathematischen Kompetenz operationalisiert und in Testaufgaben umgesetzt. In einer empirischen Studie mit 653 Industriekaufleuten in Ausbildung ließ sich zeigen, dass sich die berufsfeldbezogene mathematische Kompetenz vom Konstrukt der allgemeinbildenden mathematischen Kompetenz – erhoben durch Testaufgaben der Bildungsstandards Mathematik – empirisch trennen lässt. Zudem zeigen längsschnittliche Daten von Ausbildungsbeginn bis zur Zwischenprüfung, dass die berufsfeldbezogene mathematische Kompetenz im Gegensatz zur mathematischen Kompetenz gemäß Bildungsstandards differenziell gefördert werden kann. Ausgehend von der Fragestellung unseres Beitrags gibt es damit Hinweise, dass der für einige Auszubildende schwierige Übergang in die berufliche Erstausbildung nicht allein durch Defizite beim Kompetenzerwerb im Mathematikunterricht der Regelschule erklärbar sein muss. Es kann auch sein, dass die im schulischen Rahmen ausreichend erworbenen mathematischen Kompetenzen für die beruflichen Anforderungssituationen nicht hinreichend funktional sind und einer spezifischen Förderung in der Berufsausbildung bedürfen.

Literatur

Bardy, P. (1985). Mathematische Anforderungen in Ausbildungsberufen. In P. Bardy, W. Blum, & H. G. Braun (Hrsg.), Mathematik in der Berufsschule. Analysen u. Vorschläge zum Fachrechenunterricht (1st ed., S. 37–48). Essen: Girardet.

KMK (2003). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss: [Beschluss vom 4.12.2003]. München: Wolters Kluwer Deutschland GmbH.

Minnameier, G. (2008). Zur empirischen Analyse des Umgangs mit Fehlern im wirtschaftskundlichen Unterricht. In D. Münk, P. Gonon, K. Breuer, & T. Deißinger (Hrsg.), Modernisierung der Berufsbildung. Neue Forschungserträge und Perspektiven der Berufs- und Wirtschaftspädagogik (S. 120–130). Opladen [u.a.]: Budrich.

Nickolaus, R., Rosendahl, J., Gschwendtner, T., Geißel, B. & Straka, G. A. (2010). Erklärungsmodelle zur Kompetenz- und Motivationsentwicklung bei Bankkaufleuten, KFZ-Mechatronikern und Elektronikern. Zeitschrift für Berufs- und Wirtschaftspädagogik, (Beiheft 23), 73–87.

Siebert, U. & Heinze, A. (2015). Validität eines Instruments zur Erfassung berufsfeldbezogener mathematischer Kompetenzen von Industriekaufleuten. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten, C. Streit (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2015 (S. 860-863). Münster: WTM-Verlag.

Sträßer, R. (1996). Professionelles Rechnen? Zum mathematischen Unterricht in Berufsschulen. mathematica didactica, 19(1), 67–92.

Winther, E., Sangmeister, J. & Schade, A. K. (2013). Zusammenhänge zwischen allgemeinen und beruflichen Kompetenzen in der kaufmännischen Erstausbildung. In R. Nickolaus, J. Retelsdorf, E. Winther, & O. Köller (Eds.), Zeitschrift für Berufs- und Wirtschaftspädagogik Beihefte: Vol. 26. Mathematisch-naturwissenschaftliche Kompetenzen in der beruflichen Erstausbildung (S. 139–157). Stuttgart: Steiner.

Moderierte Sektion:

Mathematik und Sprachkompetenz

Helmut LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN, Brugg-Windisch

Sektion „Mathematik und Sprachkompetenz“

Birgit Werner skizzierte in ihrem Beitrag Befunde über einen inklusiven Mathematikunterricht aus sonderpädagogischer Perspektive und die daraus resultierenden Entwicklungs- und Forschungsaufgaben. Plädiert wurde für einen sprach- und kommunikationsfördernden Fachunterricht, der sich durch folgende Merkmale auszeichnet: Anerkennung der Dialogfähigkeit aller Beteiligten, Kompetenzorientierung im Sinne der Bildungsstandards, barrierefreie Angebote im sprachlich-kommunikativen Bereich, Berücksichtigung zieldifferenter Bildungsangebote.

Der Vortrag von Taha Kuzu und Alexander Schüler-Meyer ging der Frage nach, welche Auswirkungen der Sprachwechsel auf Vorstellungsentwicklungsprozesse zu Brüchen in einer bilingualen türkisch-deutschen Lernumgebung hat. Anhand von qualitativen Analysen wurde ein Einblick gegeben, wie erstsprachliche türkische Ressourcen im Mathematikunterricht in einer Lernumgebung gezielt aktiviert und von Lernenden genutzt werden können.

Marc Schäfer erkundete in seinem Vortrag das Konzept des autonomen Lernens im Kontext des Forschungsprojekts VITALmathsLIC, welches u.a. erforscht, wie junge Teilnehmende, die sich via Smartphone mit mathematischen Inhalten beschäftigt haben, einen informellen mathematischen Diskurs für andere in einen Diskurs für sie selbst transformieren, und wie sie durch dieses Tun ein Stück interessante Mathematik erlernen.

Ein Fokus des VITALmathsLIC-Projekts ist die Förderung sprachlich-kommunikativer Kompetenzen im Mathematikunterricht mit Hilfe kurzer Videoclips, ein weiterer Fokus der Gebrauch von „Manipulatives“ im Zusammenspiel mit diesen Videoclips. Im Vortrag von Selina Pfenniger, Andreas Richard und Helmut Linneweber-Lammerskitten wurden Konzepte der Implementierung dieser Videoclips vorgestellt.

Im Zusammenhang mit dem Argumentieren wird die Produktion von Texten im Mathematikunterricht immer wichtiger. Der schreibdidaktische Ansatz profilierter Aufgaben zielt darauf ab, Schreibprozesse so zu situieren, dass Lernende mit einer sinnvollen Textform auf die Aufgabenstellung reagieren können. Sebastian Rezat stellte eine qualitative Studie vor, die untersucht, welchen Einfluss die Profilierung von Aufgaben auf schriftliche mathematische Argumentationen von Lernenden in der Grundschule hat.

Textsortenwissen als Kompetenz der Lehrperson bildet eine Grundlage für einen sprachsensiblen Mathematikunterricht. Ausgehend von Gruppendiskussionen mit Lehrkräften der Sekundarstufe I erläuterte Sabrina Janzen die Rolle von Textsortenwissen für einen sprachsensiblen Unterricht am

Beispiel von Kästen mit Merkwissen zum Thema „Brüche“. Als Grundlage hierfür wird exemplarisch erläutert, wie Textsorten anhand des Mathematikschulbuchs mit Hilfe eines inhaltsanalytischen Zugangs definiert werden können.

Darstellungsvernetzung ist ein wichtiges Mittel zur Begriffsbildung. Diese Aktivität kann für Lernende aber auch eine Herausforderung darstellen, insbesondere wenn die vielfältige verbale Darstellung einer funktionalen Abhängigkeit mit berücksichtigt werden soll. Carina Zindel stellte eine Entwicklungsforschungsstudie aus dem Dortmunder MuM-Projekt vor, die Einblicke gibt, wie unter dieser Herausforderung Begriffsbildung 'zusammen mit' und 'mithilfe von' sprachlichen Mitteln wie "...in Abhängigkeit von..." erfolgen kann.

Die Arbeit mit digitalen Werkzeugen beeinflusst nicht nur die Art und Weise, wie Schüler mit mathematischen Objekten handeln, sondern auch die Sprache, die sie dabei verwenden. Gerade in Dokumentationen nutzen Schüler eine werkzeugbezogene Sprache mit Verweisen auf Tasten, Befehle oder die Menüführung. Im Vortrag von Florian Schacht wurden Ergebnisse einer empirischen Studie vorgestellt, die sprachliche Phänomene am Beispiel von Konstruktionsbeschreibungen untersucht, die bei der Arbeit mit GeoGebra entstehen.

Sektionsvorträge

Werner, B.: Inklusiver Mathematikunterricht aus sonderpädagogischer Perspektive - Befunde und Konsequenzen für die Unterrichtsgestaltung.

Kuzu, T., Schüler-Meyer, A.: Vorstellungsentwicklungsprozesse unter Nutzung der Erstsprache Türkisch

Schäfer, M.: Autonomes Lernen - die Rolle einer geeigneten Sprache und Diskurses

Pfenniger, S., Richard, A., Linneweber-Lammerskitten, H.: Implementierung mathematischer Videoclips zur Förderung der Sprachkompetenz

Rezat, S.: Argumentationen von Grundschulkindern durch profilierte Aufgaben anregen?

Janzen, S.: „In solche Kästen würde ich so wenig wie möglich reinmachen, was aber möglichst viel abdeckt." - Textsortenwissen im sprachsensiblen Mathematikunterricht

Carina Zindel, C.: "Was heißt 'in Abhängigkeit von'?' - Fach- und sprachintegrierter Förderansatz zum Umgang mit funktionaler Abhängigkeit

Schacht, F.: Sprache im Mathematikunterricht mit digitalen Werkzeugen am Beispiel von Konstruktionsbeschreibungen

Sabrina JANZEN, Paderborn

„In solche Kästen würde ich so wenig wie möglich reinmachen, was aber möglichst viel abdeckt.“ - Textsortenwissen im sprachsensiblen Mathematikunterricht

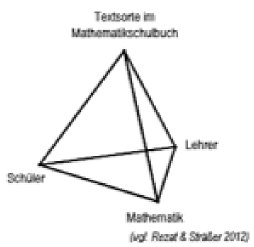
Die allgemeine Forderung eines sprachsensiblen Fachunterrichts bildet die Grundlage dieses Beitrags. Inwiefern sich im Mathematikunterricht der Textebene hinsichtlich des Leitgedanken eines sprachsensiblen Fachunterrichts genähert werden kann, wird im Folgenden mit Hilfe eines inhaltsanalytischen Zugangs an Textsorten des Mathematikschulbuchs konkretisiert.

Sprachsensibler Mathematikunterricht auf Textebene

Sprachsensibilität wird definiert als bewusster und einem Zweck dienlicher Umgang mit der besonderen Sprache des Faches durch Lehrende und Lernende im Unterricht (vgl. Leisen 2015 u.v.m.). Innerhalb der mathematikdidaktischen Forschung sind sprachlich-strukturelle Besonderheiten des Mathematikunterrichts auf Wort- und Satzebene bereits erforscht (für einen Überblick siehe Janzen 2015). Die Textebene erfährt hingegen noch wenig Beachtung. Nach Thürmann und Vollmer (2013) kann jedoch davon ausgegangen werden, dass Sprache sich immer als Text ereignet und „damit unweigerlich eine bestimmte generische Form [annimmt], die einerseits in Struktur und sprachlicher Ausführung von ihrem Zweck und den damit verbundenen kognitiven Operationen/ Funktionen, andererseits von den Konventionen der jeweiligen Diskursgemeinschaft geprägt ist“ (Thürmann & Vollmer 2013, S. 52). Mathematikunterricht kann folglich nur sprachsensibel gestaltet werden, wenn eine besondere Berücksichtigung der Textebene erfolgt. Das heißt, es bedarf des Wissens um die spezifischen strukturellen und funktionalen Eigenschaften des Textes, des Wissens um den Gebrauch des Textes entsprechend seiner Funktion sowie schließlich der Vermittlung der strukturellen und funktionalen Eigenschaften des Textes an Lernende (entsprechend deren jeweils kognitiver Entwicklungsniveaus).
Neben genuin mathematischen Textsorten wie *Definitionen*, *Sätzen* und *Beweisen* werden Lernende auch durch das Mathematikschulbuch mit einer Vielzahl an Texten unterschiedlicher Art konfrontiert.

Analyse schulmathematischer Texte

Um im Mathematikunterricht eine Berücksichtigung der Textebene zu erreichen, muss zunächst geklärt werden, inwiefern spezifische strukturelle und funktionale Eigenschaften schulmathematischer Texte beschrieben werden können. Hierfür wurde die Textsorte „Kasten mit Merkwissen“ des Schulbuchs auf ihre kennzeichnenden Eigenschaften hin untersucht. Als Grundlage für die Analyse dient das Modell über Textmusterwissen von Sandig (1997), welches sich vor allem durch die Vereinigung nichtsprachlicher und sprachlicher Bestandteile auszeichnet. Dies zeigt sich durch die Aufteilung des Textmusters in den *Handlungstyp*, der die funktionalen Aspekte der Textsorte umfasst, und das *Handlungsmittel* in Form von strukturellen Textsorteneigenschaften. *Der Handlungstyp* umfasst Angaben über den *gesellschaftlichen Zweck*, die *Situationsbeteiligten* und die *Situationseigenschaften*. Er beschreibt somit die Textfunktion als dominierenden Sinn, der durch den Text in einer Kommunikationssituation erfüllt wird. Das *Handlungsmittel* besteht aus der Beschreibung prototypischer Textsorteneigenschaften mittels der Kategorien *Handlungshierarchie*, *Formulierungsmuster*, *materielle Textgestalt* und *Durchschnittsumfang.* Trotz dieser Aufteilung betont Sandig (1997), dass Textfunktion und Textstruktur in wechselseitiger Abhängigkeit stehen und demzufolge nicht als voneinander getrennte Bereiche betrachtet werden können.

Textmuster(wissen) **„Kasten mit Merkwissen"**	
Handlungstyp	**Handlungsmittel: Textsorte** **Prototypische Textsorteneigenschaften**
Gesellschaftlicher Zweck • Sozialer Sinn: *wichtiges Wissen konsolidieren*	**Handlungshierarchie** • konstitutive Teilhandlung: *ERKLÄREN (97,27 %)* • fakultative Teilhandlung: *BESCHREIBEN (55,45 %)* → *structure (semantisch)*
• Art der Problemlösung: *durch visuell hervorgehobenes Strukturelement „Kasten mit Merkwissen" (vgl. Rezat 2009)*	**Sequenzmuster** • textmusterspezifische Sequenzmuster ➢ *multiple Darstellungen (Duval 2006 u.v.m.) (70,61 %)* ➢ Verknüpfungstypen von Sprache und bildlicher Darstellung (nach Stöckl 2010): ➢ *räumlich-syntaktische Muster: linearisiert (100 %)* ➢ *informationsbezogene Muster: elaborativ (100 %)* ➢ *rhetorisch-semantische Muster: koordiniert (100 %)* → *structure (syntaktisch)*
Situationseigenschaften & **Situationsbeteiligte (Rollen)**  	**Formulierungsmuster** • allgemeine Textherstellungsmuster ➢ *„es gilt" als Einleitung einer bedeutungstragenden Aussage* • fachspezifische Textherstellungsmuster ➢ **vocabulary & precision:** *fachliches Vokabular (96,36 %), Begriffe mit ambivalenter Bedeutung (36,36 %)* ➢ **compactness:** *komplexe Nominalphrasen (31,82 %), Nominalisierungen (77,58 %), Prägnanz durch fachliche Symbole (54,55 %)* ➢ **relations:** *Präpositionen (58, 18%), Konjunktionen (32,42 %), Nebensatzkonstruktionen (58,79 %) (vor allem uneingeleitete Konditionalgefüge, Konditional, Relativ- und Finalsätze)* ➢ **style & persons:** *Passivverwendung (53,94 %), im Speziellen das Passivsynonym „man" (45,76 %)*
	Materielle Textgestalt ➢ *Umrandung (97,27 %), wichtige Begriffe hervorgehoben (97,27 %)* ➢ Darstellungsebenen (nach Prediger & Wessel 2011):*verbale Darstellung (100 %), symbolisch-algebraische Darstellung (38,18 %), symbolisch-numerische Darstellung (47,88 %), bildliche Darstellung (35,45 %)*
	Durchschnittsumfang ➢ *36 Wörter, 21 math. Zeichen und Symbole*

Angelehnt an Sandig 1997

Um dieses Modell auf schulmathematische Texte anzuwenden, bedarf es bezüglich der Ausprägungen der dargestellten Kategorien jedoch fachspezifischer Erweiterungen. Innerhalb des *Sequenzmusters* erfolgt eine zusätzliche Berücksichtigung der für den Mathematikunterricht typischen *multiplen Darstellungsebenen* (vgl. Duval 2006 u.v.m.), von denen die Beziehungen der verbalen und bildlichen Darstellungen mit Hilfe der *Verknüpfungs-*

typen von Sprache und Bild nach Stöckl (2010) näher analysiert werden. Das bloße Vorhandensein der unterschiedlichen *Darstellungsebenen* (nach Wessel & Prediger 2011) wird innerhalb der *materiellen Textgestalt* erfasst. Angelehnt an die Ergebnisse der Metaanalyse über sprachliche Charakteristika mathematischer Texte von Österholm und Bergqvist (2013) werden die *fachspezifischen Formulierungsmuster* mit Hilfe der Ausprägungen *vocabulary & precision, compactness, style & persons, relations* und *structure* beschrieben (vgl. Janzen 2015).

Anhand einer qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring 2010) von insgesamt 330 „Kästen mit Merkwissen“ für die Klassenstufen 5-6, 7-8 und 9-10 aus den Inhaltsbereichen Arithmetik & Algebra, Geometrie und Stochastik wurde das Textmuster „Kasten mit Merkwissen“ ausdifferenziert. Dabei zeigt sich folgendes Ergebnis.

Der *gesellschaftliche Zweck* besteht darin, wichtiges Wissen durch das visuell hervorgehobene Strukturelement „Kasten mit Merkwissen“ zu konsolidieren (Rezat 2009). Die *Situationseigenschaften* lassen sich durch den *Handlungsbereich* des Unterrichts, das *Medium* Mathematikschulbuch und den monologisch schriftlichen *Kanal* beschreiben. Entsprechend können Schülerinnen und Schüler sowie Lehrkräfte als *Situationsbeteiligte* bezeichnet werden. *Situationseigenschaften* und *-beteiligte* lassen sich mit Hilfe des didaktischen Tetraeders darstellen, da dieses Modell die wesentlichen Aspekte des Kontextes der Textsortennutzung des Schulbuchs berücksichtigt (vgl. Rezat & Sträßer 2012). Bezüglich der strukturellen Eigenschaften von „Kästen mit Merkwissen“ zeigen sich sowohl konstitutive als auch fakultative Ausprägungen. Die Struktur dieser Textsorte zeichnet sich grundlegend durch erklärende Teilhandlungen, fachliches Vokabular, welches durch eine veränderte Schreibweise betont wird, die Nutzung von Nominalisierungen, einer Umrandung sowie einem durchschnittlichen Umfang von 36 Wörtern und 21 mathematische Zeichen und Symbolen aus. Diese Ausprägungen können als konstitutiv beschrieben werden, da sie sich in mindestens 75% der analysierten Kästen zeigen, und unterliegen der Funktion, also dem *Handlungstyp*, dieser Textsorte, indem neues mathematisches Wissen für Lernende kompakt in einem optisch hervorgehobenen Kasten dargestellt wird. Die erklärenden Teilhandlungen werden dabei fast ausschließlich auf der verbalen Darstellungsebene realisiert, wobei von dieser in etwa 70% der analysierten Kästen ein Bezug zu einer anderen Darstellungsebene (bildlich, symbolisch-numerisch, symbolisch-algebraisch) hergestellt werden muss. Sofern die bildliche Darstellungsebene in einem Kasten vertreten ist, liegt ein linearisiertes, elaboratives, korrdiniertes Verknüpfungsmuster zwischen diesem und der verbalen Darstellungsebene vor. Entsprechend sind Bild und Sprache positional voneinander getrennt, während das Bild der Sprache folgt und deren Bedeutung illustriert. Bildliche, symbolisch-numerische und symbolisch-algebraische Darstellungen entsprechen insgesamt beschreibenden Teilhandlungen, indem sie den Lernenden eine konkrete Vorstellung von dem erklärten Inhalt geben. Diese beschreibenden Teilhandlungen und auch die Erreichung von Prägnanz durch fachliche Symbole und die Nutzung von Präpositionen, Nebensatzkonstruktionen und Passivformulierungen befinden sich in mindestens 55% aller analysierten Kästen und sind daher als fakultative Ausprägungen dieser Textsorte einzustufen.

Zusammenfassend kann die Textsorte „Kasten mit Merkwissen" des Mathematikschulbuchs durch die dargestellten funktionalen sowie konstitutiven und fakultativen strukturellen Eigenschaften beschrieben werden. Das weitere Forschungsvorhaben besteht nun daraus zu erörtern, welcher dieser Eigenschaften sich Mathematiklehrkräfte bewusst sind und inwiefern sie dieses Wissen zur Vorbereitung schulmathematischer Textsorten für den Einsatz im Unterricht nutzen.

Literatur

Duval, R. (2006): A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103 −131.

Janzen, S. (2015). Sprachliche Charakteristika der Textsorten im Mathematikschulbuch am Beispiel des Strukturelements „Kasten mit Merkwissen". In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM Verlag.

Leisen, J. (2015). *Handbuch Sprachförderung im Fach. Sprachsensibler Fachunterricht in der Praxis*. Stuttgart: Klett.

Österholm, M. & Bergqvist, E. (2013). What is so special about mathematical texts? Analyses of common claims in research literature and of properties of textbooks. *ZDM the international journal on mathematics education, 45 (5)*, 751–763.

Prediger, S. & Wessel, L. (2011): Relating registers for fractions - Multilingual learners on their way to conceptual understanding. In M. Setati, et al. (Hrsg.), *Proceedings of the ICMI Study 21- Mathematics and Language Diversity*, Sao Paulo, Brazil, 324-333.

Rezat, S. (2009): *Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers. Eine Studie zur Schulbuchnutzung in den Sekundarstufen.* Wiesbaden: Viehweger + Teubner.

Rezat, S. & Sträßer, R. (2012): From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM: the international journal on mathematics education 44 (5)*, 641-651.

Sandig, B. (1997): Formulieren und Textmuster. Am Beispiel von Wissenschaftstexten. In Jakobs, E.-M. & Knorr, D. (Hrsg.), *Schreiben in den Wissenschaften* (S. 25-44). Frankfurt am Main: Europäischer Verlag der Wissenschaften.

Thürmann, E. & Vollmer, H. J. (2013). Sprachbildung und Bildungssprache als Aufgabe aller Fächer der Regelschule. In M. Becker-Mrotzek et al. (Hrsg.), *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S.41-57). Münster: Waxmann Verlag GmbH.

Alexander SCHÜLER-MEYER, Taha KUZU, Dortmund

Vorstellungsentwicklungsprozesse zu Brüchen unter Nutzung der Erstsprache Türkisch

1. Theoretische Hintergründe zu mehrsprachigen Lernangeboten

In einigen Ländern wird der Einbezug der Familiensprachen in mehrsprachige Lernangebote bereits seit vielen Jahren gefordert und seit der Jahrtausendwende bezüglich möglicher Wirkungen auf mathematische Lernprozesse analysiert. Alltagskontexte, die Mehrsprachigen erlauben, an ihr mehrsprachiges und lebensweltliches Vorwissen anzuknüpfen, bieten Möglichkeiten für reichhaltige mathematische Diskurse in der Erstsprache (Moschkovich 2002; 2007; Planas & Setati 2009; Dominguez 2010 etc.). Unklar ist, unter welchen Bedingungen eine Anknüpfung an erstsprachliche Ressourcen systematisch in Lerngelegenheiten gelingen kann (Civil & Planas 2015) und wie dies die Vorstellungsentwicklung der Lernenden befördert. Auch im deutschsprachigen Raum steigt das Interesse an mehrsprachigen Förderungen, sowohl in der allgemeinpädagogischen Forschung (Gogolin 2011), als auch in der Mathematikdidaktik (Meyer & Prediger 2011).

Ziel der hier vorzustellenden Lernprozessstudie ist es zu untersuchen, inwiefern die bilingualen Ressourcen von Lernenden in Vorstellungsentwicklungsprozesse eingebunden werden können (Dominguez 2010), und welche Rolle dabei eine an soziolinguistischen Erkenntnissen über Bilingualismus – Erst- und Zweitsprache werden als ganzheitliches Sprachvermögen angesehen und weisen eine Gebundenheit zu Situationen und Sprecherabsichten auf – orientierte kompetenzorientierte Lernumgebung (Moschkovich 2002) spielen kann.

2. Forschungskontext und Methode der qualitativen Analyse

Forschungskontext und Sampling: Die Lernprozessstudie wird im Rahmen des BMBF-Projekts MuM-Multi (unter Leitung von Susanne Prediger und Angelika Redder, gefördert unter dem Förderkennzeichen 01JM1403A) durchgeführt. In der hier vorgestellten Teilstudie wurden 39 türkisch-deutsche, mathematisch schwache Siebtklässlerinnen und Siebtklässler gefördert, und zwar in ein- und zweisprachigen fach- und sprachintegrierten Förderungen in fünf Sitzungen zu je 90 Minuten zum Thema Brüche.

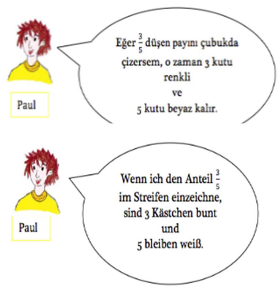
Förder-Design: Zentrale Design-Prinzipien der Förderung sind Darstellungsvernetzung und das fokussierte Angebot von bedeutungs- und formalbezogenen Sprachmitteln (Prediger & Wessel 2013). In der Adaption zur zweisprachigen Förderung werden die Sprachmittel in zwei Sprachen angeboten und die Vernetzung beider Sprachen auch durch sprachverbindende mündliche Impulse immer wieder angeregt.

Wirksamkeit: Die zweisprachige Förderung zeigt sich trotz der notwendigen Anfangsinvestitionen in die türkische Fachsprache in der quantitativen Studie als ebenso wirksam bezüglich des Brücheverständnisses wie die einsprachige Förderung (Wessel, Prediger, Schüler-Meyer, Kuzu 2016).

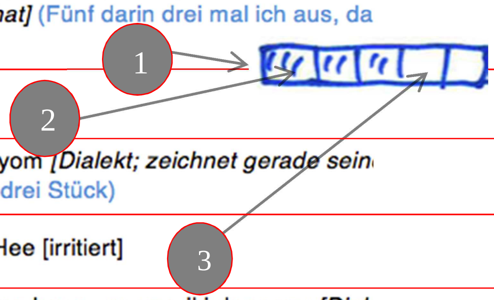
Datenauswertung für diesen Beitrag: Dieser Beitrag fokussiert auf qualitative Video-Analysen zur zweisprachigen Förderung. Analysiert wurden die Sprachmittelnutzung, Sprachentwicklung und die Vorstellungsentwicklung. Als Analyseinstrument zur Erfassung der Vorstellungsentwicklungen wurde ein interaktionales semiotisches Modell gewählt (epistemologische Dreiecke nach Steinbring 2005), um Begriffsrelationen und Referenzen in den Interaktionen schrittweise sequentiell zu analysieren. Das Instrument ermöglicht die Untersuchung der Frage, wie Sprachwechsel als "Ressourcen" im mathematischen Vorstellungsentwicklungsprozess fungieren können. Denkbar wäre beispielsweise, dass die türkische Brüchekonzeptualisierung als "3 darin 1" förderlich wirken könnte.

3. Exemplarische Analyse am Fallbeispiel „Hakans Bruch-Erklärung "

Erste Analyseergebnisse werden am Fallbeispiel von Hakans Bruch-Erklärung aus der ersten Fördersitzung verdeutlicht. Die Erklärung gehört zur Diskussion einer fiktiven falschen Schüleräußerung zur "Teil eines Ganzen"- Vorstellung von Brüchen zwischen Hakan, Halim und Ilknur.

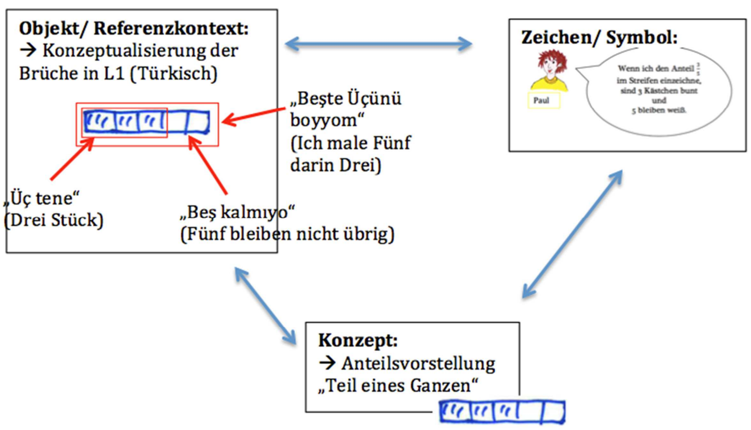


1	Halim		*[Liest Paul's Antwort erneut]* Ey ist richtig!
2	Hakan		Was laberst du?
3	FL		Genau, wenn du sagst, das ist richtig, dann mal m
4	Illknur		Hä? Wenn man drei anmalt, wie bleiben fünf übrig
5	Hakan		Beşte üçünü boyyom beş kalmıyo o zaman *[verwe er gezeichnet hat]* (Fünf darin drei mal ich aus, da übrig).
6	Halim		Ach fu- oh shi-
7	Hakan		Al, üç tene boyyom *[Dialekt; zeichnet gerade sein* (Hier, ich male drei Stück)
8	Halim		Nein ist doch! Hee [irritiert]
9	Hakan	00:05:05	Al, daha beş tane beyaz mı var, iki dene var *[Dial Zeichnung]* (Hier, es gibt doch nicht noch fünf wei gibt zwei)



Halim bewertet die Aussage des fiktiven Schülers als richtig, womit die anderen nicht einverstanden sind. Hakan greift auf die türkische Konzeptualisierung von 3/5 als „5 darin 3“ zurück und verweist schrittweise auf die einzelnen Denkprozesse beim Artikulieren des Bruches auf Türkisch. So begründet er, warum die fiktive Antwort falsch ist. In Schritt 1 (Z. 5 im Transkript) verweist er auf den Streifen als Ganzes, den er bei seiner Erklärung bereits zu zeichnen anfängt, anschließend zeichnet und verweist er auf den Teil (Schritt 2, Z. 7) sowie auf die „übrig-bleibenden“ “zwei” statt “fünf” weißen Stücke (Schritt 3, Z. 9). Der Verweis auf die „Übrig-Bleibenden“ zeigt eine noch nicht tragfähig entwickelte Vorstellung zum Bruch als Anteil, trotzdem entspricht die Reihenfolge der graphischen Realisierung der Konzeptualisierung auf Türkisch, so dass die Vorstellung von Teil-eines-Ganzen auf Türkisch entwickelt zu sein scheint. Die multimodale Erklärung unter (nicht durch den Lehrer forcierter) Nutzung der türkischen Bruchleseart zeigt, dass ein Wechsel zur Erstsprache mit einer gezielten Nutzung dieser Erstsprache als kognitive Ressource einhergehen kann. Halim äußert seine Unsicherheit auf Deutsch, Hakan hingegen greift auf das Türkische zu, um zu überzeugen und nutzt dabei vermutlich die konzeptuelle Nähe der Sprache zur artikulierten Vorstellung. Dies korrespondiert mit der soziolinguistischen Funktionalität der Erstsprache.

Zur Sprachnutzung und -entwicklung zeigt die Szene, dass nach fokussierter Förderung auch fachsprachliche Termini in Interaktionen genutzt werden (“Beşte üçünü boyyom”, Fünf darin drei male ich aus), sodass das Türkische hier – trotz spätem und kurzem Kontakt mit türkischer Schulsprache – produktiv im Lernprozess genutzt wird.



Zur Vorstellungsentwicklung zeigt die Analyse mit dem *epistemologischen Dreieck*, dass die Erstsprache der Aktivierung kognitiver Prozesse im *Referenzkontext* dient, um so das *Symbol* (hier: die falsche Aussage zu Brüchen) unter Berücksichtigung des konzeptuellen Gehalts zu interpretieren und zur *Konzept*konsolidierung beizutragen.

4. Diskussion und Ausblick

Die hier am Fallbeispiel dargestellten allerersten Ergebnisse aus der noch laufenden Analyse können Ergebnisse der mathematikdidaktischen Forschung insofern reproduzieren, als dass bilinguale Ressourcen für mathematische Aushandlungen aktiviert werden konnten. Darüber hinaus zeigte sich, wie diese Ressourcennutzung koordiniert wurde: Die Nutzung von Erst- und Zweitsprache war gekoppelt an die Schrittigkeit der Konzeptualisierung des Bruches in der Erstsprache.

Dies muss in den folgenden Analysen am breiteren Datenmaterial ebenso weiter untersucht werden wie die Vermutung, dass insbesondere in Situationen, in denen Schülerinnen und Schüler gemeinsam mathematische Inhalte aushandeln, die Mehrsprachigkeit argumentativ und produktiv genutzt werden kann.

Literatur

Civil, M. & Planas, N. (2015). Bilingual Mathematics Teachers and Learners: The Challenge of Alternative Worlds. In Beswick, K. et al. (Hrsg.), Proceedings of PME 39, (Vol. 4, S. 41-48). Hobart (Australia): PME.

Dominguez, H. (2010). Using what matters to students in bilingual mathematics problems. Educational Studies in Mathematics, 76(3), 305-328.

Gogolin, I. (2011). Multikulturalität als Herausforderung. In Faulstich-Wieland, H. (Hrsg.), Umgang mit Heterogenität & Differenz (S. 49-72). Zürich: Pestalozzianum.

Meyer, M. & Prediger, S. (2011). Vom Nutzen der Erstsprache beim Mathematiklernen. In Prediger, S., Özdil, E. (Hrsg.), Mathematiklernen unter Bedingen der Mehrsprachigkeit (S. 185-203). Münster: Waxmann.

Moschkovich, J. (2002). A Situated and Sociocultural Perspective on Bilingual Mathematics Learners. Mathematical Thinking and Learning, 4(2&3), 189-212.

Moschkovich, J. (2007). Using Two Languages When Learning Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 64 (2), 121-144.

Planas, N. & Setati, M. (2009). Bilingual Students using their Languages in the Learning of Mathematics. Mathematics Education Research Journal, 21(3), 36-59.

Prediger, S. & Wessel, L. (2013). Fostering German-language learners´ Constructions of Meanings for Fractions – Design and Effects of a Language- and Mathematics- Integrated Intervention. Mathematics Education Research Journal, 25(3), 435-456.

Steinbring, H. (2005). The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective. New York: Springer.

Wessel, L., Prediger, S., Schüler-Meyer, A., Kuzu, T. (2016, im Druck). Is grade 7 too late to start with bilingual mathematics courses? An intervention study. Paper presented in TSG 32 at ICME 13, Hamburg: ICME.

Selina PFENNIGER, Andreas RICHARD, Helmut LINNEWEBER-LAMMERKITTEN, Brugg-Windisch

Implementierung mathematischer Videoclips zur Förderung der Sprachkompetenz

Ein Fokus des VITALmathsLIC-Projekts ist die Förderung sprachlich-kommunikativer Kompetenzen im Mathematikunterricht mit Hilfe kurzer Videoclips (Linneweber-Lammerskitten, 2015). Im Folgenden werden zwei Teilprojekte zur Implementierung dieser Videoclips vorgestellt.

Förderung sozial-kommunikativer Kompetenzen im Fach Mathematik durch kooperatives Problemlösen, Explorieren und Erforschen

Kooperatives Problemlösen sowie kooperatives Explorieren und Erforschen bietet für Schüler und Schülerinnen die Möglichkeit, im Mathematikunterricht fachspezifische kommunikative Kompetenzen zu erwerben.

Im Rahmen eines Forschungsprojekts im Zusammenhang mit VITALmaths Videoclips wird untersucht, wie sich diese Kompetenzen erfassen und fördern lassen. Dabei geht es in erster Linie um diejenigen sozial-kommunikativen Kompetenzen, die benötigt werden, um erfolgreich mit anderen Mathematik zu betreiben. Schüler und Schülerinnen müssen einerseits ihre Gedanken, Überlegungen und Ideen nachvollziehbar formulieren um verstanden zu werden, andererseits sollten sie bereit und fähig sein, auf die Äusserungen von anderen in der Gruppe einzugehen um zur kooperativen Lösung eines mathematischen Problems etwas beizutragen.

Ausgangspunkt der untersuchten Lernsequenz sind VITALmaths Videos, die besonders geeignet sind, Explorationsphasen in binnendifferenziertem Unterricht zu initiieren. Schülern und Schülerinnen wird darin ein relativ offen formuliertes mathematisches Problem gestellt, welches sie erforschen sollen (vgl. Linneweber-Lammerskitten, 2009, 2014). Die Lernenden arbeiten dabei in Gruppen, so dass sie miteinander kommunizieren und sich insbesondere sprachlich verständigen müssen. In diesem Arrangement werden mathematisch relevante sprachliche Kompetenzen über die Indikatoren «mathematical discussion», «exploratory talk» und «interaction» modelliert (vgl. Pirie, 1991; Mercer & Hodgkinson, 2008; Webb, 1991).

Im Zusammenhang mit Sprachförderung im Fach gilt «scaffolding» als ein wichtiges Konzept. Darunter fallen auf bestimmte Sprachaktivitäten fokussierte Hilfestellungen und Sprachangebote, mit dem Ziel, holistisch die Sprache zu fördern. Wichtig ist dabei, dass Sprache aktiv produziert werden soll, und die Schüler und Schülerinnen durch die Problemstellung dazu aufgefordert werden.

In der Untersuchung werden Schüler und Schülerinnen während den oben beschriebenen Explorationen gefilmt. Eine erste Sitzung ist ohne sprachförderliche Massnahmen geplant. Für die weiteren Sitzungen ist die Verwendung von sprachförderlichem Zusatzmaterial vorgesehen. Solches Material soll ein niederschwelliges Scaffolding bieten, indem den Lernenden beispielsweise «diskursrelevante Strukturwörter» oder wichtige Fachbegriffe zur Verfügung gestellt werden.

In einer Pilotuntersuchung wurden Satzbausteine bereitgestellt, die die Lernenden dabei unterstützen sollten, ihre Gedanken zu formulieren und auf andere Gruppenteilnehmer einzugehen.

Die Videoaufnahme aus diesem Pilot wurde darauf untersucht, ob die Schüler von den niederschwellig im Aufgabenblatt vorgeschlagenen «prompts» Gebrauch machen. Eine repräsentative Auswahl dieser diskursrelevanten Satzbausteine lautet: «Wieso probieren wir nicht einmal dies aus?», «Seid ihr einverstanden?», «Was denkt ihr, was mir machen sollten?», «Stimmt das?», »Was könnten wir sonst noch tun?» und «Ich bin nicht sicher, könnt ihr mir helfen?» (vgl. Murphy, 2015). Die Resultate waren eher unbefriedigend. In einer weiteren Forschungsetappe des Pilots soll nun untersucht werden, wie die Sprachförderung ausgestaltet werden kann, damit sie ihr Ziel erreicht.

Förderung sprachlich-linguistischer Kompetenzen im Fach Mathematik – Erklären lernen mit mathematischen Kurzfilmen

Zum Aufbau fachsprachlicher Fähigkeiten als integrierter Bestandteil mathematischer Kompetenz (Linneweber-Lammerskitten, 2013) sollen die Klärung eines mathematischen Problems angeregt und mit Kurzfilmen unterstützt, sowie die Bewusstheit in Bezug auf die verwendete Sprache gefördert werden.

Ausgehend von einem allgemeinen linguistischen Kommunikationsmodell (Roelcke 2010, S.13; Schmidt-Thieme, 2010, S.272) interessiert die kommunikative Situation, in welcher die fachlichen Äußerungen vollzogen werden, sowie der dabei produzierte und rezipierte Text und dessen fachsprachliche Qualität. Die Art der verwendeten Sprache ist bestimmt durch ihre Funktion. Sie stellt einen besonderen Sprachgebrauch dar zwischen reiner Alltags- und Fachsprache (Schmidt-Thieme 2010, 292; Prediger 2013, S.175).

Zur Erfassung der Sprachkompetenzen sollen präskriptive und deskriptive Modelle herangezogen werden. Die präskriptiven Modelle entstammen dem mathematischen Kompetenzmodell der Schweizer Bildungsstandards (EDK 2011) und der Beschreibung der Sprachkompetenz für den Mathematikunterricht des Europarates (Linneweber-Lammerskitten 2012), die deskriptiven entstammen linguistischen Fachsprachenbeschreibungen von Varietäten (Roelcke, 2010; Schmidt-Thieme, 2010) und Registern (Prediger, 2013).

In beiden Fällen ist die Standardsituation des Erklärens im Mathematikunterricht fokussiert, welche sich besonders zur Förderung fachsprachlicher Kompetenzen eignet (z.B. Jörissen&Schmidt-Thieme, 2015, S.401). Im Kontext des Erklärens lassen sich unterschiedliche Aspekte einbeziehen: 1) verschiedene Redeabsichten (Erklären was, wie, warum), 2) Erklären als Diskursfunktion und Vorstufe zum Argumentieren und Beweisen, 3) Erklären als kommunikative Fähigkeit zum Austausch von Wissen, zum eigenen Verständnis oder zur Schaffung von Klarheit, 4) Erklären als differenzierende Sprachhandlung auf unterschiedlichen Abstraktionsniveaus.

Gemäss Roelcke (2010, S.177) eignet sich für die Sprachförderung im Fachsprachenunterricht eine «produktionsorientierte und eigenverantwortliche Lehr- und Lernmethode, die sich im Hinblick auf eine Individualisierung des fachkommunikativen Spracherwerbs auch moderner Medien bedient.» Diesem Anspruch wird ein Untersuchungsdesign nach dem Scaffolding-Modell gerecht, das gezielt den Aufbau sprachlicher Fähigkeiten über das Beobachten, Aufnehmen, Erproben und Reflektieren fördert. Die Arbeit in Kleingruppen ermöglicht Individualisierung. Die Beispiele mathematischer Probleme, welche der Beobachtung dienen, werden in Form von Videoclips mit idealisierten Diskurssequenzen dargeboten. Die Schülerinnen und Schüler können dem fingierten Gespräch zweier Figuren folgen, das präskriptiven Anforderungen an Formulierungen genügt und als Modell – im Sinne Banduras Theorie des Lernens am Modell (Bandura 1976) dient.

Ziel des Projekts ist herauszufinden, ob sich mit den eingesetzten Methoden eine Verbesserung der sprachlichen Fähigkeiten beim Erklären im Mathematikunterricht erreichen lässt. Das Projekt ist als Interventionsstudie geplant. Die Datenerhebung stützt sich primär auf Unterrichtsvideos von Kleingruppen bei der Bearbeitung von Videoclips vor und nach der Intervention. Zusätzlich werden Daten erhoben, welche den Prozess dokumentieren. Die Auswertung erfolgt mit linguistischen Methoden und analysiert drei Sprachebenen: 1) Sprachhandlung/Redeabsicht, 2) Satzebene, 3) Wortebene.

Bereits haben sich in einer ersten Testphase deutliche Unterschiede im Sprachgebrauch, sowohl auf der Satz- wie auf der Wortebene ergeben. Zum Klären der Bedeutung eines Ausdrucks zeigen sich längere Frage-Antwortsequenzen und es werden öfter Relativsätze sowie Attribute zur Deutlichkeitserhöhung verwendet.

Literatur

Bandura, A. (1976). Die Analyse von Modellierungsprozessen. In A. Bandura (Hrsg.), *Lernen am Modell. Ansätze zu einer sozial-kognitiven Lerntheorie* (S. 9-67). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Jörissen, S. & Schmidt-Thieme, B. (2015). Darstellen und Kommunizieren. In R. Bruder u.a. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 385-408). Heidelberg: Springer.

Linneweber-Lammerskitten, H. (2009). Der Einsatz von Kurzfilmen als Einstieg in Experimentier- und Explorationsphasen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*, (S. 743-746). Münster: WTM-Verlag.

Linneweber-Lammerskitten, H. (2012). *Items for a description of linguistic competence in the language of schooling necessary for learning / teaching mathematics (end of compulsory education). An approach with reference points.* Strasbourg: Council of Europe. Abrufbar unter: https://www.coe.int/t/dg4/linguistic/Source/Source2010_ForumGeneva/4_LIS-Mathematics2012_EN.pdf

Linneweber-Lammerskitten, H. (2013). Sprachkompetenz als integrierter Bestandteil der mathematical literacy? In M.Becker-Mrotzek u.a. (Hrsg.), *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S. 151-166). Münster: Waxmann.

Linneweber-Lammerskitten, H. (2014). Der Einsatz mathematischer Kurzfilme als Mittel der Binnendifferenzierung. In I. Bausch, G. Pinkernell & O. Schmitt (Hrsg.), *Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung. Festschrift für Regina Bruder* (S. 257–266). Münster: WTM Verlag.

Linneweber-Lammerskitten, H. (2015). Mathematische Videoclips zur Förderung der Sprachkompetenz In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten, C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. 596-599). Münster: WTM-Verlag.

Mercer, N. & Hodgkinson, S. (Hrsg.) (2008). *Exploring talk in schools: inspired by the work of Douglas Barnes* (1. Auflage). Los Angeles: SAGE.

Murphy, Carol (2015). Changing Teachers' Practices through Exploratory Talk in Mathematics: A Discursive Pedagogical Perspective. *Australian Journal of Teacher Education 40/5*, 61–84.

Pirie, S.E.B. (1991). Peer discussion in the context of mathematical problem solving. In K. Durkin & B. Shire (Hrsg.), *Language in mathematical education: Research and practice* (S. 143–161).

Roelcke, Th. (2010). *Fachsprachen*. Berlin: Erich Schmidt.

Schmidt-Thieme, B. (2010). Fachsprache oder: Form und Funktion fachlicher Varietäten im Mathematikunterricht. In G. Kadunz (Hrsg.), *Sprache und Zeichen* (S. 271-304). Berlin: Franzbecker.

Schweizerische Konferenz der Erziehungsdirektoren (EDK) (2011). *Grundkompetenzen für die Mathematik während der obligatorischen Schulzeit.* Bern. Abrufbar unter: http://edudoc.ch/record/96784/files/grundkomp_math_d.pdf

Webb, N.M. (1991). Task-Related Verbal Interaction and Mathematics Learning in Small Groups. *Journal for Research in Mathematics Education, 22 (5)*, 366–389.

Sebastian REZAT, Paderborn

Argumentationen von Grundschulkindern durch profilierte Aufgaben anregen?

Die argumentative Stützung und Begründung des Wissens ist ein wesentliches Merkmal mathematischer Tätigkeit und ein zentrales Anliegen jeglichen Mathematikunterrichts. Darüber hinaus kann das Argumentieren als Mittel der Sprachproduktion im Mathematikunterricht dienen. In der Primarstufe wird insbesondere Forscheraufgaben, bei denen das Erkunden von Mustern und Strukturen im Mittelpunkt steht, ein Potential zur Förderung des Argumentierens zugeschrieben (vgl. Bezold 2012, Steinweg 2003). Um die Argumentation zu initiieren werden häufig Impulse wie „Was fällt Dir auf?“, „Begründe!“ oder „Erkläre!“ eingesetzt. Dabei ist unklar, welche Wirkung diese Impulse auf das Argumentationsverhalten der Kinder haben. Noch allgemeiner ist der spezifische Einfluss des Aufgabensettings auf das schriftliche Argumentationsverhalten von Lernenden bislang nicht geklärt. In einer Pilot-Studie wurde daher exploriert, welche Auswirkungen die spezifische Formulierung der Argumentationsanlässe auf das schriftliche Argumentationsverhalten von Grundschulkindern hat.

Theoretischer Rahmen

Die Schreibforschung weist darauf hin, dass ein entscheidender Aspekt der Förderung der Schreibkompetenz darin besteht, dass Schreibprozesse für Lernende in einem klar nachvollziehbaren Handlungszusammenhang stehen. Um dies zu erreichen schlagen Bachmann & Becker-Mrotzek (2010) vor, Aufgaben entsprechend zu profilieren. Aufgaben mit Profil müssen dabei folgende Kriterien erfüllen:

– Die kommunikative Funktion des Textes muss bekannt sein (incl. Ziel und Adressat)
– Das Wissen, worüber geschrieben wird, muss vorhanden sein.
– Die Textproduktion findet im Kontext sozialer Interaktion statt.
– Die Wirkung des Textes auf den Leser muss überprüfbar sein.

Im Rahmen der vorliegenden Studie erfolgt dabei eine Konzentration auf die ersten beiden Kriterien, da nur diese unmittelbar in die Aufgabenstellung selbst zu integrieren bzw. in der Konzeption der Aufgabenserie zu berücksichtigen sind. Die anderen Aspekte sind vielmehr im umgebenden Schreibsetting zu berücksichtigen.

Fetzer (2011) analysiert Argumentationen von Grundschulkindern auf der Grundlage des Ansatzes von Toulmin. Ihre Charakterisierung von Kinderargumenten wird in dieser Studie aufgegriffen, um die im Zusammenhang mit den profilierten und nicht profilierten Schreibaufgaben produzierten Argumentationen der Kinder zu analysieren. Dabei werden folgende Typen von Argumenten unterschieden:

- einfache Schlüsse, die lediglich aus einer Behauptung (Konklusion) bestehen;
- heuristische Argumente, bei denen Kinder Aussagen mit Hilfe ihrer Handlungen bzw. Vorgehensweisen stützen
- analytische Argumente, bei denen Kinder mathematische Garanten für ihre Schlüsse anführen
- subjektive Argumente, bei denen nicht objektivierbare Garanten angeführt werden

Design der Studie

Eine vierte Klasse mit 26 Kindern hat ein Forscherheft zum Thema „ANNA-Zahlen" bearbeitet. Dabei wurden zwei verschiedene Versionen des Forscherheftes eingesetzt, anhand derer die Klasse in zwei gleich große Gruppen eingeteilt wurde. Jedes Forscherheft enthielt jeweils profilierte und nicht profilierte Aufgaben. Die Aufgaben waren so gestaltet, dass eine profilierte Aufgabe jeweils ein nicht profiliertes Gegenstück im anderen Forscherheft hatte. Auf diese Weise war sowohl eine intra- als auch intersubjektive Analyse der Auswirkung profilierter Aufgaben auf die Argumentationen der Kinder möglich. Die folgenden beiden Aufgaben geben einen exemplarischen Eindruck der Aufgabenprofilierung:

Aufgabe 4)	Aufgabe 5)
Gruppe A	
Profiliert: Peter behauptet: „Es gibt ungefähr 20 ANNA-Zahlen." Kann seine Behauptung stimmen? Was glaubst du? **Begründe** deine Antwort und **überzeuge** Peter von deiner Vermutung!	**Nicht Profiliert: Beschreibe** dein Vorgehen bei der Suche nach allen ANNA-Zahlen. Warum kannst du dir sicher sein, dass du alle ANNA-Zahlen gefunden hast? **Begründe**!
Gruppe B	
Nicht Profiliert: Gib eine erste Schätzung ab. Was glaubst du wie viele ANNA-Zahlen es insgesamt gibt? **Begründe** deine Vermutung!	**Profiliert:** Wenn du alle Zahlen gefunden hast sollst du deinen Mitschülern dein Vorgehen **beschreiben**. Warum bist du dir sicher, dass du alle ANNA-Zahlen gefunden

	hast? Schreibe einen Brief, in dem du deine Mitschüler davon **über-zeugst**, dass du alle ANNA-Zahlen gefunden hast!

Dabei sollte die Aufteilung in Schätzen (Aufgabe 4) und Ermitteln der tatsächlichen Zahl (Aufgabe nicht abgebildet) mit anschließender Begründungen (Aufgabe 5) die Rolle des Vorwissens näher in den Blick nehmen.

Ergebnisse

Die qualitative Inhaltsanalyse (Mayring 2010) der Kinderargumentationen auf der Grundlage des oben dargestellten Kategoriensystems bezüglich der beiden weiter oben wiedergegebenen Aufgaben 4 und 5 ergibt folgendes Bild:

Kategorie	**Gruppe A n=13**		**Gruppe B n=13**		∑
Argumentationstyp	**4 (p)**	**5 (op)**	**4 (op)**	**5 (p)**	
• Behauptung	8		4	1	**13**
• Heuristisches Argument	1	8		5	**13**
• Analytisches Argument	2	5	8	3	**19**
• Subjektives Argument	1		1	3	**5**
• Rest	1 un-best.			1 n.b.	**2**
Adressatenbezug	3			6	**9**
Bezug zur strittigen These	7	-	-	-	

In dieser sehr kleinen Stichprobe zeigen sich folgende Tendenzen:

- Die Profilierung führt bei nicht einmal der Hälfte der Antworten (9 von 26) dazu, dass ein Adressatenbezug in der Antwort erkennbar ist.
- Die Profilierung hat keinen erkennbaren Einfluss auf den Typ der Argumente. Ein Viertel der Antworten besteht aus einer einfachen Behauptung, ein weiteres Viertel benutzt heuristische Argumente. Immerhin zeigen 19 von insgesamt 52 Antworten analytische Argumente. Jedoch ist der Anteil analytischer Argumente bei nicht profilierten Aufgaben mit insgesamt 13 von 19 höher als bei den profilierten Aufgaben. Hier scheint sich eher ein negativer Effekt der Profilierung zu zeigen als ein positiver.

Insgesamt lässt sich in diesen Ergebnissen kein klarer Einfluss der Profilierung auf die Argumentation erkennen. Dieser nicht erkennbare Effekt der Profilierung lässt sich in zweierlei Richtung interpretieren:

1) Die vorgenommene Profilierung der Aufgaben reicht nicht aus. Möglicherweise sind gerade die Aspekte der Aufgaben mit Profil, die sich nicht in der Aufgabenformulierung niederschlagen (Aspekte 3 und 4), zentral für den Effekt profilierter Aufgaben.
2) Alternativ besteht die Möglichkeit, dass die soziomathematischen Normen (Yackel & Cobb, 1996) des Argumentierens, die im Klassenzimmer etabliert sind, die Profilierung überdecken. Lernende reagieren demnach gar nicht auf die spezifische Aufgabenformulierung, sondern diese wird nur als Aufgabentyp wahrgenommen und löst ein im Klassenzimmer etabliertes Argumentationsverhalten aus.

Aufgrund der sehr kleinen Stichprobe können diese Interpretation nur im Sinne von Hypothesen aufgefasst werden, die weiter zu prüfen sind.

Literatur

Bachmann, T., & Becker-Mrotzek, M. (2010). Schreibaufgaben situieren und profilieren. In T. Pohl & T. Steinhoff (Eds.), *Textformen als Lernformen* (S. 191-209). Duisburg: Gilles & Francke.

Bezold, A. (2012). Förderung von Argumentationskompetenzen auf der Grundlage von Forscheraufgaben. Eine empirische Studie im Mathematikunterricht der Grundschule. *mathematica didactica, 35,* 73-103.

Fetzer, M. (2011). Wie argumentieren Grundschulkinder im Mathemathematikunterricht? Eine argumentationstheoretische Perspektive. *Journal für Mathematik-Didaktik, 32*(1), 27-51. doi:10.1007/s13138-010-0021-z

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Weinheim, Basel: Beltz.

Steinweg, A. S. (2003). Gut, wenn es etwas zu entdecken gibt - Zur Attraktivität von Zahlen und Mustern. In S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Eds.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 56-74). Offenburg: Mildenberger.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Florian SCHACHT, Essen

Sprache im Mathematikunterricht mit digitalen Werkzeugen am Beispiel von Konstruktionsbeschreibungen

Konstruktionen und Konstruktionsbeschreibungen sind zentrale Gegenstände des Geometrieunterrichts. Konstruktionsbeschreibungen dienen dabei unterschiedlichen Zwecken, die insbesondere für den Unterricht von großer Relevanz sind: Sie bieten im Geometrieunterricht vielfältige Reflexionsanlässe, nicht nur hinsichtlich der zu konstruierenden mathematischen Objekte, sondern auch aus sprachlicher Sicht (vgl. etwa Rezat et al. 2015). Wenn im Unterricht digitale Werkzeuge genutzt werden, lassen sich Veränderungen beobachten, hier genauer empirisch untersucht werden.

Konstruktionsbeschreibungen erfüllen im unterrichtlichen Alltag in der Regel den Zweck, die jeweiligen Konstruktionsschritte nachvollziehbar zu beschreiben, wenngleich sie eigentlich aus mathematischer Sicht Existenzbeweise der zu konstruierenden Objekte sind (vgl. Rezat et al. 2015). Im Unterricht entwickelt sich das sprachliche Niveau zunehmend im Spannungsfeld von Umgangs- und Fachsprache. Hierin können demnach wesentliche Potentiale von Konstruktionsbeschreibungen gesehen werden (vgl. Weigand et al. 2014, S. 66-67).

Gegenstand des vorliegenden Beitrags ist eine Untersuchung zu sprachlichen Veränderungen von Konstruktionsbeschreibungen, die sich ergeben, wenn Schülerinnen und Schüler digitale Werkzeuge nutzen. So weist etwa Hölzl (1996) im Zusammenhang mit geometrischen Arbeiten darauf hin, dass die genutzte Sprache der Schüler die Arbeit mit dem Zugmodus bei *Cabri* spiegelt: „Pupils' language of mathematical experience in Cabri reflects the dynamics of the drag-mode. Situated descriptions, abstractions or theorems tend to be expressed with active verbs, in particular ones of movement.“ (Hölzl 1996, S. 183) Auch Kaur (2015) beobachtet bereits bei Kindern im Alter von 7-8 Jahren Veränderungen in Begründungsformen, die durch dynamische und temporale Eigenschaften des DGS hervorgerufen werden: Students „reason in terms of motion when comparing different types of triangles, which was clearly initiated by the dynamic and temporal elements of DGE“ (Kaur 2015, S. 418). Schließlich weisen Sinclair & Yurita (2008) darauf hin, inwiefern sich im Mathematikunterricht durch die Nutzung von DGS generell neue Diskursformen herausbilden können: „In terms of vocabulary, named shapes were discussed as if they were a multitude of objects, changing over time, rather than as a single object, and being available to human agency.“ (Sinclair & Yurita 2008, S. 24)

Während die hier dargestellten Studien zwar weitgehend detaillierte sprachliche Prozesse analysieren, zeigt sich bei genauerer Betrachtung, dass der Fokus dabei hauptsächlich auf der sprachlichen Referenz zur Mathematik selbst liegt. Die in dieser Studie vorgelegten Beispiele weisen im Gegensatz dazu darauf hin, dass sich die Sprache von Schülerinnen und Schülern darüber hinaus in dem Sinne verändert, dass sie ebenfalls auf das Werkzeug verweist. Insofern besteht einer der wesentlichen Forschungsbedarfe, denen die zugrunde liegende Studie Rechnung trägt, darin, sprachliche Veränderungsprozesse im Spannungsfeld von Fachsprache und werkzeugbezogener Sprache zu untersuchen. Demgemäß liegen der vorliegenden Studie die folgenden Forschungsfragen zugrunde: Welche sprachlichen Phänomene zeigen sich bei der Arbeit mit DGS unter besonderer Berücksichtigung von Konstruktionsbeschreibungen hinsichtlich...

1. der Beschreibung von Objekten und Handlungen?
2. der Verweise auf die Mathematik und auf das Werkzeug?

Design der Studie

Zur Bearbeitung der Forschungsfrage wurden klinische Einzel- und Partnerinterviews (N=20) durchgeführt. Alle Schülerinnen und Schüler haben mit GeoGebra gearbeitet. Die Daten wurden qualitativ ausgewertet, indem eine induktive Kategorienbildung mittels eines offenen Codierungsverfahrens (Strauss et al. 1990) vorgenommen wurde. Dazu wurden auch empirisch entwickelte Kategorien zur Beschreibung von Sprache genutzt, die im Rahmen entsprechender Vorarbeiten zur Sprachprozessen bei der Arbeit mit CAS entwickelt wurden (Schacht 2015a).

Exemplarisch seien im folgenden zwei ausgewählte Aufgaben der Studie genauer vorgestellt, die bei der Diskussion der Ergebnisse relevant sind. Zunächst wurde den Schülerinnen und Schülern die Abbildung einer ebenen Figur mit folgenden Arbeitsaufträgen vorgelegt. Daraufhin haben die Lernenden an folgenden Aufträgen gearbeitet: (1) der Konstruktion mit Zirkel und Lineal und erstellen einer Konstruktionsbeschreibung (Einzelarbeit), (2) der Konstruktion mit DGS und erstellen einer Konstruktionsbeschreibung (Partnerarbeit) sowie (3) dem Vergleich der Konstruktionsbeschreibungen mit Zirkel und Lineal und mit DGS.

Im Rahmen einer zweiten Aufgabe (vgl. R. Schmidt in Heintz et al. i.V.) haben die Schülerinnen und Schüler anhand einer vorgefertigten Datei Eigenschaften von Achsensymmetrien erkundet. Dabei sind zunächst zwei Vierecke zu sehen, wobei sich nur eines der beiden Vierecke verändern lässt. Weil das zweite Viereck aus dem ersten durch eine Achsenspiegelung hervorgeht, ändert sich das zweite Viereck entsprechend mit.

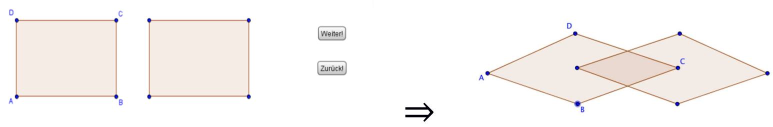


Abb. 1: Eigenschaften von Achsensymmetrien erkunden (Idee: Reinhard Schmidt in Heintz et al. i.V.).

Die Schülerinnen und Schüler haben dann in Partner- und Einzelarbeit an den unterschiedlichen Arbeitsaufträgen gearbeitet, wie etwa der explorativen Untersuchung der Vierecke und der Konstruktion einer geometrischen Figur sowie dem Verfassen einer Konstruktionsbeschreibung.

Die beiden Aufgaben begegnen somit unterschiedlichen Anforderungen und Funktionen von Konstruktionsbeschreibungen. Während die erste Aufgabe insbesondere auf Veränderungsprozesse von der Arbeit mit Zirkel und Lineal hin zur Arbeit mit DGS fokussiert, steht bei der zweiten Aufgabe die Verstehbarkeit im Mittelpunkt.

Ergebnisse

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung verweisen einerseits auf unterschiedliche Varianten der Verweise auf die Benutzeroberfläche der DGS.
Die folgenden Beispiele aus Konstruktionsbeschreibungen verdeutlicht die sprachliche Vielfalt von Verweisen auf die Benutzeroberfläche des DGS.

	Schülerbeispiel	Benutzeroberfläche
a	Vielech auswählen	Vieleck
b	Oben auf das Feld „Kreis mit Mittelpunkt und Radius klicken	Kreis mit Mittelpunkt und Radius
c	oben dieses [AA] ~~Simp~~ Simbol	ABC

Abb. 2a-c: Verweise auf die Benutzeroberfläche des DGS in Konstruktionsbeschreibungen (Beispiele aus Wesselbaum (2015) und Hagemann (2015))

Dabei fällt einerseits auf, dass die Schülerinnen und Schüler auf gewisse Objekte der Benutzeroberfläche verweisen und diese auch explizit benennen, etwa „Vieleck“ (Abb. 2a), „Feld ‚Kreis mit Mittelpunkt und Radius’“ (Abb. 2b) sowie „$\boxed{\text{AA}}$ Simbol“ (Abb. 2c). Dies ist für sich schon ein interessanter Befund, verdeutlicht er doch, dass die Schülerinnen und Schüler den Konstruktionsbeschreibungen eine sehr naheliegende Funktion zuweisen: So soll die Leserin bzw. der Leser eine genaue Protokollierung über die einzelnen Bedienungsschritte erhalten. Daneben verweisen die drei Beispiele auf unterschiedliche Kategorien der sprachlichen Gestaltung der Benutzeroberfläche (vgl. Hagemann 2015). So dokumentiert der Schüler in Abb. 2a den Verweis auf die Funktion (bzw. Feld / Taste) „Vieleck“, d.h. auf ein Feld mit *konkreten (mathematischen) Begriffen*. Demgegenüber verweist das die Funktion (bzw. Feld / Taste) „Kreis mit Mittelpunkt und Radius“ (Abb. 2b) auf einen *mathematischen Begriff und Konstruktionshinweise*. Schließlich verweist der Schüler in Abb. 2c auf eine Funktion (bzw. Feld / Taste) mit *nicht-mathematischen Begriffen*. Es wird deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler Elemente der Benutzeroberfläche mit ganz unterschiedlichen semantischen Gehalten und mit vielfältigen Verweisen auf mathematische und nicht-mathematische Objekte und Handlungen in die Konstruktionsbeschreibungen integrieren. Dabei wird aber auch deutlich, dass selbst mathematische Begriffe z.T. nur als bloße Bezeichner von Feldern bzw. Tasten der Benutzeroberfläche in die Sprache integriert werden (Abb. 2b) ohne begriffliche Bezüge zu weiteren mathematischen Begriffen.

Darüberhinaus konnten sprachliche Elemente identifiziert werden, die werkzeugbezogene Funktionalitäten beschreiben (*Vieleck auswählen*), bei denen werkzeugbezogene und mathematikspezifische Referenzen miteinander verknüpft werden, die an dieser Stelle aber nicht weiter dokumentiert werden. Die empirischen Beispiele verweisen dabei auf die Notwendigkeit einer hohen sprachlichen Sensibilität gerade im Fachunterricht mit digitalen Werkzeugen.

Literatur

Hagemann, Marie (2015): *Ein empirisches Projekt zu sprachlichen Phänomenen bei geometrischen Erkundungen mit GeoGebra im Mathematikunterricht der Jahrgangsstufe 7*. Unveröffentlichte Abschlussarbeit. TU Dortmund.

Heintz, G.; Elschenbroich, H.-J.; Laakmann, H.; Langlotz, H.; Poethke, M.; Rüsing, M.; Schacht, F.; Schmidt, R.; Schmidt, U.; Tietz, C. (in Vorbereitung). *Digitale Werkzeugkompetenzen von Klasse 5 bis zum Abitur.* (Erscheint bei Seeberger, Neuss)

Hölzl, R. (1996). How does ‘dragging’ affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1(2), 169–187.

Kaur, H. (2015). Two aspects of young children’s thinking about different types of dynamic triangles: prototypicality and inclusion. *ZDM, 47(*3), 407–420. http://doi.org/10.1007/s11858-014-0658-z.

Rezat, S., Rezat, S., & Janzen, S. (2015): Sprachsensibler Umgang mit Textmustern im Mathematikunterricht am Beispiel von Konstruktionsbeschreibungen. BzMU 2015.

Sinclair, N., & Yurita, V. (2008). To be or to become: How dynamic geometry changes discourse. *Research in Mathematics Education, 10*(2), 135–150.

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B. & Wittmann, G. (Hrsg.). (2014). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (2., verb. Aufl). Berlin: Springer Spektrum.

Wesselbaum, A. (2015). *Eine empirische Erhebung in einer 7. Klasse eines Gymnasiums zur Nutzung von werkzeugbezogener Fachsprache bei geometrischen Erkundungen mit GeoGebra.* Unveröffentlichte Abschlussarbeit. TU Dortmund.

Marc SCHÄFER, Grahamstown, South Africa.

Autonomous learning - the role of appropriate language and discourse

Introduction and background

The notion of autonomous learning is key to the objectives of the VITAL-mathsLIC project which *inter alia* produces short video clips specifically designed for the autonomous learning of Mathematics (www.vitalmaths.com). The VITALmathsLIC project is a multilingual collaborative research and development project between the University of Applied Sciences Northwestern Switzerland (FHNW) and Rhodes University in South Africa. As Schäfer (2015) reported the VITALmathsLIC project produces, disseminates and researches silent and multilingual mathematics video clips that aim to expose mathematical ideas and concepts by using every-day material animations, as opposed to computer generated animations, in such a way that it makes these ideas accessible, inspiring, visual and motivating. The use of the growing databank of freely downloadable video clips is underpinned by different imperatives in the two countries. The South African imperative recognises the need for disseminating mathematical ideas to learners and teachers who do not have access to mathematical materials due to the geographical remoteness of their schools, poverty and general state neglect in providing appropriate learning materials and supporting both teachers and learners. The continued production and use of the video clips are informed by a research agenda that critically reflects on the pedagogical and epistemological implications of the individual video clips. Although the project does not necessarily prescribe a particular pedagogical approach, but promotes the autonomous use of the videos, it is interested in how the video clips are used in and out of the classroom. This paper specifically focusses on the notion of autonomous learning within the VITALmathsLIC project and reports on a research study that explored how selected learners in South Africa used some of these video clips outside the confines of the classroom. The main purpose of the study in question was to „ascertain how eleven Grade 10 learnes experience the autonomous use of selected VITALmaths video clips, which incorporated animated manipulatives, in their study of the Pythagorean Theorem and the addition and subtraction of fractions“ (Haywood, 2016).

Theoretical considerations

Broadly speaking autonomous learning is about an individual taking charge of his/her own learning. Haywoord’s (2016) study was inspired by Holec (1981) citing Benson and Voller (1997) who described autonomy as:

- situations in which learners study entirely on their own;

- a set of skills which can be learned and applied in self-directed learning;
- learners' taking responsibility for their own learning
- the right of learners to determine the direction of their own learning" (Benson & Voller, 1997, p1).

Learning autonomously is however more nuanced that simply working independently – it is also about the capacity and desire to think for oneself. Thanasoulas (2000, p.4) makes the interesting observation that a person does not simply „become" autonomous, but that autonomoy is a „process [and] not a product". In this process, learners should develop a „metacognitive capacity" which is an awareness of their own knowledge and an ability to understand, control and manipulate their own mental processes (St. Louis, 2003). Haywood (2016) cites Sfard's (2007) observation that autonomous learners explore the discourse of others to make the discourse-for-others into a discourse-for-oneself. This resonated strongly with this research study, not only from a theoretical perspective, but also from an empirical perspective and informed the research design significantly. Haywood (2006) writes that a discourse-for-oneself is that which a learner would spontaneously turn to whenever it may assist the learner in solving his/her own problems, whereas a discourse-for-others would be one that is perhaps more formal, has community legitimacy and is accepted. In the context of learning mathematics, Wood (2008) makes the interesting observation that learners continuously engage with a mathematical discourse by ascertaining whether his/her own mathematical discourse/communication/ aligns with that of others who are seen to be proficient in the specific discourse. This corroboration ensures that the learner's discourse is consistent with that of others (a teacher, the text book or another learner). In order for us to start documenting what a discourse-for-oneself might look (sound) like, after being exposed to an autonomous learning situation, Haywood (2016) conducted a research project which asked selected learners to engage on their own with specific VITALmaths video clips in their free time and then reflect on their experience.

Research design

The challenge for the research design was to craft an authentic research environment whereby the participating learners could engage with mathematical materials in as an autonomous manner as possible, and then for us to capture and analyse their experiences in terms of their adopted discourse-for-oneself. The basic research design consisted of five phases. The initial phases consisted of purposefully selecting 11 Grade 10 learners and familiarising the participants with VITALmaths video clips that were accessed through the VITALmaths.com website. The aim of the subsequent pilot phase of the research design was to download a few video clips onto the mobile phones of the participants. The participants were then asked to engage with the video clips in their free time over a two week period. The participants were then asked to share their experiences in informal dicussions and feedback sessions. The next few phases, the more formal phases of the research project, entailed the participants completing a baseline questionnaire seeking information about the nature of the particpants‘ use of mobile phones and their engagement with mathematics in their free time. The participants were also asked to complete two pre-tests on the mathematical content of the final video clips that were downloaded on their mobile phones. They were then asked to engage with these video clips over a two-week period after which they each presented a formal presentation where they shared their experiences of engaging with the video clips and what they learnt as a result of this experience. They were also required to write two post-tests on the mathematical content of the video clips. There were two mathematical fociis, namely the Pythagoras‘ theorem and operating with fractions. Each participant did two presentations which were all videorised.

Research instruments and analysis

The videos of the presentation were transcribed and analysed in terms of a discourse-for-oneself. The following analytical framework was used to find evidence of:

- Words used – accuracy of articulation of objects
- Visual mediators – use of visual objects and manipulatives
- Endorsed narratives – spoken words that are framed as a description of objects, or relation between objects, or processes with or by objects
- Discursive routines – words used to generalize and justify.

(adapted from Sfard, 2008 and Berger, 2013)

Through this analysis it was then possible to obtain an overall picture of the extent to which the participants adopted a discourse-for-oneself as a result of interacting with the said video clips as illustrated in the table below.

Comparison of how the learners were classified according to their mathematical discourse and hence as an autonomous learner						
Pythagorean Theorem			Learner	Fraction work		
Completely	Partially	Not at all		Completely	Partially	Not at all
			1			
			2			
			3			
			4			
			5			
			6			
			7			
			8			
			9			
			10			
			11			

Conclusion

Autonomous learning is a process of transforming a discourse-for-others into a discourse-for-oneself. This study showed that engaging with VITALmaths video clips in an autonomous manner does faciliate this transformation to a degree.

References

Benson, P., & Voller, P. (1997). *Autonomy and independence in language leaning.* Essex: Longman.

Berger, M. (2013). Examining mathematical discourse to understand in-service teachers' mathematical activities. *Pythagoras* 34(1), 1 – 10.

Haywood, T. (2013). *An exploration of learners'autonomous learning of mathematics by using selected Visual Technology for Autonomous Learning of Mathematics (VITALmaths) video clips: A case study.* Masters Research Proposal, Rhodes University, Education Department, Grahamstown.

Holec, H. (1981). *Autonomy and foreign language learning.* Oxford: Pergamon Press.

Schäfer, M. (2015). Researching reasoning and the autonomous learning when interacting with video clips. Abstract in Proceedings of 49. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM). Basel. Switzerland.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commocognitive standpoint. Retrieved 28 July 2014 from http://lchc.ucsd.edu/mca/Mail/xmcamail.2009_04.dir/pdfLBjRfSfwm2.pdf.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* New York: Cambridge University Press.

St Louis, R. (2003). Helping students become autonomous learners: Can technology help? http://home.learningtimes.net/learningtimes?go=104216.

Wood, S.B. (2008). Mathematizing, identifying and autonomous learning. http://books.googlr.co.za/boooks?id=0L9wJuHFnIC&pg=PR3&lpg=PR3&dq=mathematizing.

Birgit WERNER Heidelberg

Inklusiver Mathematikunterricht aus sonderpädagogischer Perspektive - Befunde und Konsequenzen für die Unterrichtsgestaltung

Inklusion

Zwei Aspekte aus dem gegenwärtigen Diskurs um Inklusion sollen herausgestellt werden:

- Inklusion i.w.S. meint die Maximierung an **Teilhabe** in allen gesellschaftlichen Teilsystemen und die **Minimierung von Diskriminierung** (Werning und Arndt 2015; Wansing 2015).
- Das Individuum wird im Kommunikationsprozesse eines sozialen Systems (Schule resp. Unterricht) berücksichtigt bzw. adressiert, d.h. jeder Schüler ist innerhalb der Schule/Klasse relevant und wird **gleichwertig** und **gleichberechtigt** berücksichtigt (Stichweh 2013; Kronauer 2010: Luhmann 1995; Terfloth 2010).

Die Gestaltung inklusiver Bildungsangebote erfordert die Wahrnehmung von Differenzen, aus denen sich die Notwendigkeit, sowohl individualisierter, als auch gruppenspezifischer Herangehensweisen ergibt. Schul- und verwaltungsrechtlich spiegeln sich diese Differenzen für die Sonderpädagogik in dem zentralen Begriff „sonderpädagogischer Förderbedarf“ wider (KMK 1994). Sonderpädagogischer Förderbedarf ist eine relationale Kategorie, die Abweichungen von der curricular definierten Schulleistungsnorm analysiert und kategorisiert. Diese Abweichungen i.w.S. mit ihren je spezifischen Ausformungen charakterisieren derzeit acht Förderschwerpunkte (KMK 1994). Für sechs Förderschwerpunkte sind die Bildungspläne und -abschlüsse der allgemeinen Schulen verbindlich. Die Bildungsziele in den Förderschwerpunkten Lernen und geistige Entwicklung sind zieldifferent, d.h. diese Bildungsangebote fokussieren jenseits von Bildungsstandards eher auf gesellschaftliche resp. berufliche Teilhabe.

Mathematikdidaktische Überlegungen in der Sonderpädagogik

Im Primarbereich finden vor allem entwicklungstheoretisch begründete und evaluierte Förderkonzepte wie MARKO-T (Gerlach, Fritz und Leutner 2013), „Mengen, zählen, Zahlen“ (Krajewski, Nieding und Schneider, 2007) als auch das Frühförderprogramm der Grundschulkonzeption „mathe 2000“ (Wittmann und Müller 2009) breite Anwendung. In nahezu allen Förderschwerpunkten wird die Grundschulkonzeption „mathe 2000“ eingesetzt, deren Effektivität gerade in den Förderschwerpunkten Lernen (Scherer 1995; Walter, Suhr und Werner 2001), geistige Entwicklung (Ratz

2009) und Sehen (Leuders 2012; Lang, Hofer und Beyer 2011) belegt werden konnte.

All diese Konzepte jedoch bedürfen der je förderschwerpunktspezifischen Adaptionen und Modifikationen.

Wenig erforscht, entwickelt und ausdifferenziert ist eine sonderpädagogische Fachdidaktik in Sekundarbereich I. In dieser Schulstufe muss sich der Fokus der Inklusion auf den Übergang Schule - Beruf bzw. Berufsausbildung erweitern. Gerade für die zieldifferenten Bildungsgänge liegt die Herausforderung darin, die Teilhabe an Ausbildung und Alltagsbewältigung sichern. Empfohlen wird, sich an kompetenzorientierten fachdidaktischen Überlegungen zu orientieren, die bewusst den Bezug zu mathematischen Anforderungen in Beruf und Alltag suchen.

Teilhabe am Unterricht basiert auf Kommunikation

Kommunikation resp. Sprache muss in diesem Zusammenhang in seiner Doppelfunktion als Unterrichtsmedium, aber auch als Lerngegenstand (Fach- und Bildungssprache) analysiert werden. Im inklusiven Unterricht sind daher kommunikations- und sprachbedingte Barrieren zu identifizieren, zu minimieren bzw. abzubauen, um allen Schülern die Teilhabe am Unterricht zu ermöglichen. Art und Umfang diese Barrieren sind jedoch förderschwerpunktspezifisch äußerst unterschiedlich. Dies sei exemplarisch an drei Förderschwerpunkten skizziert.

Im Förderschwerpunkt Geistige Entwicklung sind es die „eingeengten Möglichkeiten der psychisch-geistigen Entwicklung, die veränderten Ausdrucks-, Kommunikations- und Handlungsformen“ (KMK 1998, 3), die die unterrichtliche Kommunikation massiv beeinflussen. Eine besondere Herausforderung stellen Schüler mit einer schweren Mehrfachbehinderung dar. Sie können häufig nicht lautsprachlich kommunizieren, so dass z.B. alternative Kommunikationsformen wie Unterstützte Kommunikation (Willken 2002) zur Anwendung kommen müssen.

Im Förderschwerpunkt Lernen sind es mehrheitlich soziale Randständigkeit und Ausgrenzungsprozesse, prekäre Lebenswelten und brüchige Bildungsbiografien, die die Teilhabe am Unterricht erschweren. Sprachlich-kulturell bedingte Differenzen, sowie psychologische Momente wie Misserfolgsorientierung, lernhinderliche Selbst- und Begabungskonzepte, müssen berücksichtigt werden.

Schüler im Förderschwerpunkt Sprache bedürfen der besonderen Unterstützung in der Entwicklung ihrer Kompetenzen im rezeptiven und expressiven Bereich auf allen Sprachebenen, bei der Entwicklung sprachtragender Funktionen, sowie in der Ausbildung kognitiver Strukturen und metasprachlicher Fähigkeiten. Hier spielen sprach-, musik-, bewegungstherapeutische Maßnahmen zur Hör- und Sprachförderung eine wesentliche Rolle.

Wesensmerkmale eines inklusiven (Fach-)Unterrichts

Inklusiver Unterricht geht von uneingeschränkten Lern- und Entwicklungsmöglichkeiten jedes Menschen aus. Jeder Mensch kann - unabhängig von seinen Lern- und Entwicklungsmöglichkeiten (nicht nur mathematische) Kompetenzen erwerben. Unter der Anerkennung, der ‚Normalität in der Verschiedenheit' sind die unterschiedlichen Differenzlinien z.B. Behinderung, aber auch Herkunft, Ethnie, Sprache, Geschlecht usw. zu thematisieren und mit der jeweiligen Fachexpertise subsidiär zu begleiten, zu modifizieren oder auch zu kompensieren.

Ein inklusiver Unterricht ist so zu gestalten, dass kommunikations- resp. sprachbedingte Barrieren vermindert bzw. ausgeglichen werden. Diese Prämissen begründen ***inklusiven Unterricht als einen kommunikationsfördernden und sprachsensiblen Fachunterricht*** mit folgenden Wesensmerkmalen:

- Anerkennung einer grundsätzlichen Lern- und Kommunikationsfähigkeit aller Beteiligten
- Kompetenzorientierung im Sinne der Bildungsstandards als inhaltliche Rahmung
- sprachlich-kommunikative Barrierefreiheit zur Sicherung der Teilhabe am Unterricht
- Curriculare Berücksichtigung von außer- und nachschulischer (ausbildungs- und berufsbezogener) Teilhabe.

Literatur

Gerlach, M., Fritz, A. & Leutner, D. (2013). MARKO-T. Mathematik-und Rechenkonzepte im Vorschul-und Grundschulalter. Göttingen: Hogrefe.

KMK (1994). Empfehlungen zur sonderpädagogischen Förderung in den Schulen in der Bundesrepublik Deutschland. Abrufbar unter: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/1994/1994_05_06-Empfehlung-sonderpaed-Foerderung.pdf

KMK (1998). Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. Empfehlungen zum Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. Abrufbar unter: http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/PresseUndAktuelles/2000/geist.pdf

Krajewski, K., Nieding, G. & Schneider, W. (2007). Mengen, zählen, Zahlen: die Welt der Mathematik verstehen. Förderkonzept. Berlin: Cornelsen.

Kronauer, M. (2010). Inklusion – Exklusion. Eine historische und begriffliche Annäherung an die soziale Frage der Gegenwart. In Kronauer, M. (Hrsg.). Inklusion und

Weiterbildung. Reflexionen zur gesellschaftlichen Teilhabe in der Gegenwart, 24–58.

Lang, M., Hofer, U. & Beyer, F. (2011). Didaktik des Unterrichts mit blinden und hochgradig sehbehinderten Schülerinnen und Schülern. Band 2: Fachdidaktiken. Stuttgart: Kohlhammer.

Leuders, J. (2012). Förderung der Zahlbegriffsentwicklung bei sehenden und blinden Kindern. Wiesbaden: Springer.

Luhmann, N. (1995). Inklusion und Exklusion. In Soziologische Aufklärung 6. Die Soziologie und der Mensch. Opladen (Westdeutscher Verlag), 237 –264.

Ratz, C. (2009). Aktiv-entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht bei Schülern mit geistiger Behinderung. Eine qualitative Studie am Beispiel von mathematischen Denkspielen. Oberhausen: Athena.

Scherer, P. (1995). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Heidelberg: Winter.

Stichweh, R. (2013). Inklusion und Exklusion in der Weltgesellschaft – am Beispiel der Schule und des Erziehungssystems. In Zeitschrift für Inklusion, Nr. 1 (2013). Abrufbar unter: http://www.inklusion-online.net/index.php/inklusion/article/view/206/187

Terfloth, K. (2010). Inklusion und Exklusion im Kontext geistiger Behinderung. In Balgo, R. (Hrsg.): Dokumentation der Fachtagung „Systemtheorie – eine hilfreiche Perspektive für Behinderung, Gesundheit und Soziales?“ Blumenhardt-Verlag: Hannover, 47 –61.

Walter, J., Suhr, K. & Werner, B. (2001). Experimentell beobachtbare Effekte zweier Formen von Mathematikunterricht in der Förderschule. In Zeitschrift für Heilpädagogik 52; 4 (2001), 143–151.

Wansing, G. (2015). Was bedeutet Inklusion? Annäherungen an einen vielschichtigen Begriff. In Degener, T. & Diehl, E. (Hrsg.). Handbuch Behindertenrechtskonvention. Teilhabe als Menschenrecht – Inklusion als gesellschaftliche Aufgabe. Bundeszentrale für Politische Bildung: Bonn. 43–54.

Werning, R., & Arndt, A. (2015). Unterrichtsgestaltung und Inklusion. In Kiel, E. (Hrsg.). Inklusion im Sekundarbereich. Stuttgart: Kohlhammer, 53–96.

Wittmann, E. & Müller, G. (2009). Das Zahlenbuch – Handbuch zum Frühförderprogramm. Stuttgart: Klett.

Willke, E. (2002). Unterstütze Kommunikation. Stuttgart: Kohlhammer.

Carina ZINDEL, Dortmund

„Was heißt ‚in Abhängigkeit von‘?“ – Fach- und sprachintegrierter Förderansatz zum Umgang mit funktionaler Abhängigkeit

Theoretischer Hintergrund und Forschungsinteresse

Für den tragfähigen Umgang mit funktionaler Abhängigkeit sind u.a. ihre Darstellungen (symbolisch, tabellarisch, graphisch, verbal) und deren Vernetzung zentral (vgl. z.B. Duval 2006). Diese sind bereits breit erforscht, wobei die verbale Darstellung (bzw. auch generell die Rolle der Sprache) in vielen Studien unberücksichtigt bleibt. Es konnten allerdings sprachliche Besonderheiten in der Mathematik herausgearbeitet (vgl. Maier & Schweiger 1999) sowie Zusammenhänge zwischen sprachlichen und konzeptuellen Hürden nachgewiesen (vgl. z.B. Prediger et al. 2015) werden. Dies liegt insbesondere an themenspezifischen Sprachmitteln, die bedeutungstragend für den mathematischen Inhalt sind (bei Funktionen z.B. „in Abhängigkeit von“, „wird zugeordnet“, usw.).

Eingebettet in das Dortmunder MuM-Projekt (Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit) wird in dem Teilprojekt MuM-Funktionen daher u.a. der Frage nachgegangen: Wie kann konzeptuelles Verständnis *zusammen mit*, aber auch *mithilfe von* sprachlichen Mitteln gefördert werden?

Abbildung 1 (ähnlich in Zindel 2015) zeigt, welche Facetten das Konzept funktionale Abhängigkeit ausmachen. Insbesondere wird hier davon ausgegangen, dass sich konzeptuelles Verständnis in der flexiblen, situationsangemessenen Adressierung und Kombination von Facetten zeigt. Lernende sollten also dazu angeregt werden, diese Facetten mathematisch tragfähig zu verknüpfen und z.B. beim Erschließen von Aufgabentexten gezielt zu adressieren. Dies ist der Ausgangspunkt für den im Folgenden vorgestellten fach- und sprachintegrierten Förderansatz. Der Fokus wird in diesem Beitrag auf dem situativen Potenzial der Formulierungsvariation, also der gezielten Auseinandersetzung mit variierten verbalen Darstellungen, liegen.

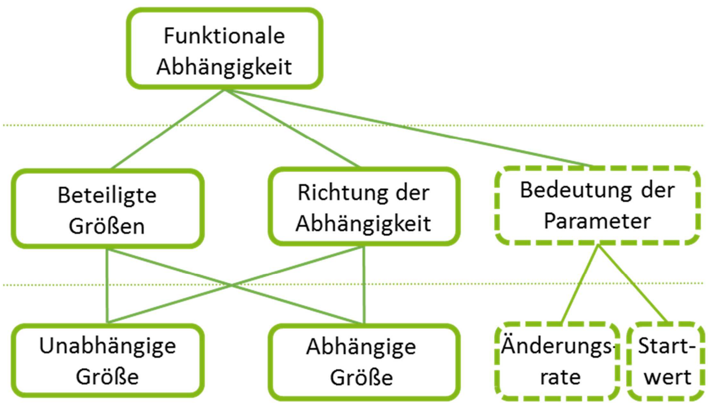


Abbildung 1: Facetten des Konzepts Funktionale Abhängigkeit

Methodischer Rahmen

Den methodologischen Rahmen dieses Teilprojekts bildet die Fachdidaktische Entwicklungsforschung mit ihrer iterativen Verknüpfung von Entwicklung und Forschung (Prediger et al. 2012). In 4 Zyklen wurden insgesamt 24 Designexperimente mit je zwei Lernenden (der Jahrgangsstufen 8-11) im Laborsetting und 4 Designexperimente im Klassensetting (Jahrgangsstufen 9 und 10) durchgeführt. Diese wurden videographiert, partiell transkribiert und qualitativ analysiert bzgl. der adressierten Facetten (vgl. Abbildung 1, im Folgenden markiert durch ||...||).

Einblick in das Design des Lehr-/Lernarrangements

DREAMSTREAM	STREAMOX3
Bei uns in der Online-Videothek DreamStream können Sie eine Film-Flat für nur 20€ im Monat buchen. Dafür kann man sich im Monat so viele Filme ausleihen, wie man möchte. Für die Anmeldung muss zusätzlich einmalig 5€ bezahlt wer-	Schauen Sie unbegrenzt unser komplettes Film- und Serienangebot bequem an Ihrem Fernseher mit unserem neuen Streamox3 – TV! Für die TV-Box zahlen Sie einmalig 49€, die zugehörige Film- Flat erhalten Sie bereits zu einem monatlichen Festpreis von nur 10€!

Abbildung 2: Streaming- Angebote DreamStream und Streamox3

Die Funktionsgleichung gibt den Preis in einem Monat in Abhängigkeit von der Anzahl der gekauften Filme an.

Die Funktionsgleichung gibt die Anzahl der gekauften Filme in Abhängigkeit von dem Preis in einem Monat an.

Mit der Funktionsgleichung kann ich in Abhängigkeit vom Gesamtpreis die Anzahl der Monate berechnen.

Abbildung 3: Beispiele für variierte verbale Darstellungen

Zu den beiden Angeboten (Abbildung 2) wird jeweils zunächst für ein, zwei, drei, vier, fünf und sechs Monate der Gesamtpreis in einer Tabelle festgehalten und anschließend jeweils eine Funktionsgleichung aufgestellt. Zu diesen Funktionsgleichungen werden aus variierten verbalen Darstellungen die für diese Funktionsgleichung passenden Formulierungen zugeordnet (Abbildung 3). Zunächst wird bei allen Formulierungen ausschließlich das Sprachmittel „in Abhängigkeit von" verwendet. Variiert wird entweder rein sprachlich oder auch hinsichtlich der ||*Beteiligten Größen*|| oder der ||*Richtung der Abhängigkeit*||. Da hier bei beiden Angeboten dieselben funktionalen Abhängigkeiten zugrunde liegen und somit ||*Beteiligte Größen*|| und ||*Richtung der Abhängigkeit*|| übereinstimmen, passen auch dieselben Formulierungen. Zum Vergleich gibt es noch ein drittes (hier nicht dargestelltes) Angebot, zu dem die anderen Formulierungen passen.

Empirie: Situatives Potenzial der Formulierungsvariation

Im Folgenden wird exemplarisch ein Transkriptausschnitt von Svenja (Schülerin der Jahrgangsstufe 9) vorgestellt, der illustriert, welches situative Potenzial die Auseinandersetzung mit variierten verbalen Darstellungen haben kann. Sie hat bereits passend Formulierungen zum DreamStream-Angebot zugeordnet und erklärt nun, dass zum Streamox3-Angebot dieselben passen.

S: „Weil da *[zeigt auf etwas im Streamox3-Angebot]* einmal dieses Einmalige so wie hier diese einmaligen 5 Euro *[schaut auf DreamStream]*, die man bezahlt. Deswegen für beide die gleichen [Formulierungen].“

Zunächst schaut sie auf den ||*Startwert*|| und begründet über diesen Parameter die Passung derselben Formulierungen. Diese Fokussierung ist hier nicht tragfähig. Entscheidender wäre es, die Übereinstimmung der ||*Beteiligten Größen*|| und der ||*Richtung der Abhängigkeit*|| zu erkennen.

S: „Sagen wir mal, wir nehmen 5 Monate, *[zeigt auf Streamox3]* dann rechnet man 5 mal diesen Betrag, den man pro Monat bezahlen muss. Plus diesen Startbetrag, den man generell bezahlt, wenn man diese Box kauft. Das ist ja wie hier *[DreamStream]*, wenn man sich anmeldet (…) Dann (…) diesen Monatspreis mal 5 plus diese einmaligen fünf Euro. Das ist sozusagen genau das gleiche wie da.“

Dann setzt sie über die Rechenvorschrift ||*Startwert*||, ||*Änderungsrate*|| sowie die ||*Unabhängige Größe*|| in Beziehung und begründet damit die Passung derselben Formulierungen. Die ||*Unabhängige Größe*|| wird hier aber noch nicht als ein Teil der zwei ||*Beteiligten Größen*|| mit einer bestimmten ||*Richtung der Abhängigkeit*|| betrachtet. Dazu fehlt der Bezug zur ||*Abhängigen Größe*||. Auf Nachfrage der Förderlehrerin betrachtet sie die Tabellen:

S: „Hier haben wir ja einmal die Monate *[zeigt auf die linke Spalte der DreamStream-Tab.]* und hier haben wir den Gesamtpreis *[zeigt auf die rechte Spalte der DreamStream-Tab.]*(…) Das heißt, wir haben sozusagen dann hier *[rechte Spalte]* schon den Preis ausgerechnet.“

Durch die ausgefüllten Tabellenköpfe wird der Fokus mehr auf die *beiden* ||*Beteiligten Größen*|| gelenkt. Insbesondere reflektiert sie erstmals, dass der Gesamtpreis hier die ||*Abhängige Größe*|| darstellt.

S: „Und hier ist es ja auch *[zeigt auf die Streamox3-Tab.]* das Gleiche. Man hat dann hier Gesamtpreis, wenn man 5 Monat bezahlen würde. Deswegen passt das irgendwie so, weil ist ja auch in Abhängigkeit der Monate. Wenn man zwei oder fünf Monate nimmt, ist ja da immer der Gesamtpreis.“

Sie nutzt das Sprachmittel „in Abhängigkeit von“, um die Passung derselben Formulierungen über die identische ||*Richtung der Abhängigkeit*|| zu begründen. Außerdem adressiert sie dadurch die ||*Beteiligten Größen*|| bzw. konkret die ||*Unabhängige Größe*|| sowie die ||*Abhängige Größe*||.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Svenja bei ihrer Begründung der Passung von Formulierungen erst durch den Bezug zur Tabelle alle Facetten des Modells adressiert und damit zu angemessenen Zuordnungen kommt. Dieses Zusammenspiel der Fokussierung auf alle relevanten Facetten zeigte sich auch in anderen analysierten Prozessen als auschlaggebend, um die Situationen mathematisch tragfähig zu vergleichen.

Fazit und Ausblick

Im vorigen Abschnitt konnte exemplarisch das situative Potenzial des Designprinzips Formulierungsvariation aufgezeigt werden: Zum einen kann die Auseinandersetzung mit variierten Formulierungen die Adressierung verschiedener bzw. die kombinierte Adressierung von Facetten anregen. In diesem Fall wird also konzeptuelles Verständnis *mithilfe von* den entsprechenden Sprachmitteln gefördert. Zum anderen deutet der Ausschnitt an, inwiefern auch die Sprachproduktion der Lernenden angeregt werden kann. In anderen Szenen zeigt sich die Förderung von Sprachproduktion auch in einer zunehmenden sprachlichen Präzision. Hier wird also *zusammen mit* den Sprachmitteln gefördert.

In diesem Beitrag lag der Fokus auf der Förderung konzeptuellen Verständnisses durch Formulierungsvariation und der dabei verwendeten Sprachproduktion. Inwiefern dies bei den folgenden Fördersitzungen die Sprachbewusstheit, die Sprachrezeption und damit den Umgang mit Textaufgaben fördern kann, wird Gegenstand weiterer Analysen sein.

Literatur

Duval, R. (2006): A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. In: Educational Studies in Mathematics, 61(1-2), 103–131.

Maier, H., & Schweiger, F. (1999): Mathematik und Sprache - Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht. Wien: öbv & hpt.

Prediger, S.; Link, M.; Hinz, R.; Hußmann, S.; Thiele, J.; Ralle, B. (2012): Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen – Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dort-munder Modell. MNU, 65(8), 452-457.

Prediger, S.; Wilhelm, N.; Büchter, A.; Gürsoy, E.; Benholz, C. (2015): Sprachkompetenz und Mathematikleistung - Empirische Untersuchung sprachlich bedingter Hürden in den Zentralen. In: Journal für Mathematik-Didaktik 36(1), 77–104.

Zindel, C. (2015): „Wenn ich wüsste, was davon was ist…“ – konzeptuelle und sprachliche Hürden bei funktionalen Abhängigkeiten. In: F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2015, 1024-1027. Münster: WTM-Verlag.

Moderierte Sektion:

Mathematisches Modellieren im projektorientierten Unterricht

Martin BRACKE, Kaiserslautern, Hans-Stefan SILLER, Koblenz

Mathematisches Modellieren im projektorientierten Unterricht

Mathematisches Modellieren in realen und sinnhaften Kontexten ermöglicht das aktive Betreiben von Mathematik (vgl. Siller, 2015, S. 2). Als Ausgangspunkt dienen reale Fragestellungen, die von Lernenden eigenaktiv und selbstständig bearbeitet werden. Die Beiträge der Sektion zeigen ganz unterschiedliche Möglichkeiten einer umfassenden und umfangreichen Diskussion mit Hilfe mathematischer Werkzeuge Vorgänge in der realen Welt zu untersuchen und in gleicher Weise zu reflektieren. Dabei zeigt sich in besonderer Weise, dass sich durch den bewussten Verzicht auf detailliert ausgearbeitete Lösungsansätze oder gar komplette Lösungsbeschreibungen die Rolle der Lehrkräfte als Begleiter von Modellierungsprozessen ändert. Es ist nicht ihre vordringliche Aufgabe, die Lernenden schon vorab beim Erlernen bestimmter fachlicher Inhalte zu unterstützen oder sie durch konkreten Hinweise auf Lösungswege zu führen, welche vorab festgelegt wurden. Vielmehr sollten die Lernenden zu selbständigem Arbeiten und Lernen ermutigen und dabei unterstützt werden wie sie bei den in diesem Prozess auftretenden Schwierigkeiten beraten und vordringlich das Finden eigener Lösungsansätze und Strategien zur Lösung von Problemen -– fachlicher wie außerfachlicher Natur – angeregt werden können (vgl. Bracke, Friedewold & Schnieder, 2015). Auf diese Weise können als Ausgangsbasis sehr allgemein und offen formulierte Fragestellungen verwendet werden, die erst durch die Entscheidung der Bearbeiterinnen und Bearbeiter für bestimmte Modelle und mathematische Methoden konkret werden. Nicht vorab gewählte Inhalte, die im Rahmen eines Modellierungsprozesses angewandt, gelernt oder wiederholt werden sollen, lenken die Überlegungen in eine bestimmte Richtung. Es sind vielmehr die Vorkenntnisse der Modellierenden, die durch bewusste (Aus)Wahl und den zur Verfügung stehenden Zeitrahmen zu einem sehr individuellen Lösungs- und Lernprozess führen.

Die Konsequenz ist, dass tatsächlich vorab nicht mehr sicher gesagt werden kann, welche mathematischen Überlegungen und Werkzeuge von den Lernenden zur Lösung eines Problems verwendet werden. Auf der anderen Seite fällt dadurch die Einschränkung auf eine relativ enge Zielgruppe bzw. die Voraussetzung bestimmter Kenntnisse. In den Sektionsbeiträgen zeigt sich, dass dadurch die beschriebenen Fragestellungen von einer sehr breiten Altersgruppe und in ganz unterschiedlichen Zeitrahmen erfolgreich bearbeitet werden können – die Spanne reicht oft von Lernenden der Mittelstufe bis hin zu fortgeschrittenen Studierenden bzw. von wenigen Stunden bis zu mehreren Wochen oder sogar Monaten. Obwohl die verwendeten mathematischen Inhalte von den Lehrkräften weitgehend offen gelassen werden, kann man beobachten, dass ausgehend von den realitätsbezogenen Fragestellungen mathematische Begriffe, Werkzeuge und Abläufe besser fassbar und verständlicher werden – und damit in derartig durchgeführten Modellierungsprozessen die Definition von Blomhoj und Jensen (2003, S. 126) sehr lebendig wird: „By mathematical modelling [...] we mean being able to autonomously and insightfully carry through all aspects of a mathematical modelling process in a certain context.“

Abschließend möchten wir feststellen, dass die bei der ersten Durchführung dieser Sektion im Jahr 2014 formulierte These (vgl. Siller & Bracke, 2014, S. 86) wiederum durch die Beiträge und ihre anschließende Diskussion bestärkt wird:

Modellbilden besitzt eine allgemeinbildende gesellschaftliche Relevanz über die Mathematik und den Mathematikunterricht hinaus, eignet sich als Strukturierungsmaßnahme im bzw. für den Mathematikunterricht und kann v.a. im projektorientierten Unterricht umgesetzt werden.

Sektionsvorträge

Grafenhofer, I. & Klöckner, V.: Der KOblenzer Modelling-Trail (KOMT) – Ein Online-Lehr-Lern-Portal für Schülerinnen/Schüler und Studierende

Frank, M. & Roeckerath, C.: Wie funktioniert die Torlinientechnik beim Fußball?

Bracke, M. & Neßler, K.: Das Math Talents Programm – Forschendes Lernen in Langzeitprojekten

Literatur

Blomhøj, M.; Højgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. In *Teaching Mathematics and its applications*. 22 (3), 123–139.

Bracke, M., Friedewold, D. & Schnieder, J. (2015). Forschendes Lernen und Problemlösen im MINT-Bereich selbständigkeitsorientiert begleiten – ein fächerübergreifendes Ausbildungskonzept. Tagungsband zum 2. HDMINT Symposium 2015, 58-63.

Siller, H.-St., Bracke, M. (2014). Mathematisches Modellieren im projektorientierten Unterricht. In Roth, J.; Ames, J. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Münster: WTM, 85–86.

Siller, H.-St. (2015). Realitätsbezug im Mathematikunterricht. In Siller, H.-St. (Hrsg.), *Der Mathematikunterricht*, 5/2015, 2 - 7.

Martin BRACKE, Katherine NEßLER, Kaiserslautern

Das Math Talents Programm - Forschendes Lernen in Langzeitprojekten

Im Programm arbeiten Schülerteams nach dem Prinzip des Forschenden Lernens über einen Zeitraum von 2.5 Jahren an interdisziplinären MINT-Projekten und werden dabei von Experten begleitet. Der Austausch erfolgt in sechs Workshops und über elektronische Medien. Wir stellen die Idee des Programms, Erfahrungen und einen Ausblick auf die weitere Entwicklung vor. Die Ergebnisse einer Teilnehmerbefragung zum Einfluss auf Interesse und Verständnis für MINT-Fächer werden präsentiert.

1. Einführung

Unsere Gesellschaft ist stark abhängig von Wissenschaft und Technologie, wobei Mathematik als Grundlagen- und Querschnittswissenschaft viele wissenschaftliche und technologische Fortschritte maßgeblich prägt. Eine große Zahl von Hochschulabsolventen[7] der MINT[8]-Fächer mit sehr guten Fähigkeiten in Mathematik ist unbedingt erforderlich, damit wir weiterhin den großen Herausforderungen unserer Gesellschaft begegnen können (Niss, 2012). Aber die aktuelle Zahl der Schüler in Europa, die sich für ein Studium der MINT-Fächer entscheiden, wird als nicht ausreichend angesehen, um den zukünftigen Bedarf unserer Gesellschaft zu decken (AECEA, 2011a,b, IET, 2014). Obwohl es kaum Langzeitstudien dazu gibt, deutet die Forschung darauf hin, dass Schüler die Mathematik, die sie in der Schule lernen, für ihr weiteres Leben oder ihren späteren Beruf nicht als hilfreich erachten (Boaler, 1998, 2001). Es zeigt sich auch, dass das Verständnis vom Wert der Mathematik und die Freude an diesem Fach durch das Heranführen an mathematische Modellierung und Problemlöseaufgaben erhöht werden können (Boaler, 2001, Curtis, 2006). Weiterhin ist in den MINT-Fächern eine hohe Studienabbrecherrate zu verzeichnen, die teilweise auf die Schwierigkeiten des Übergangs Schule–Hochschule zurückgeführt werden kann (Williams et al., 2008, AECEA, 2011a,b, Quinn, 2013).

2. Das Math Talents Programm

Unsere Hypothese ist, dass Schüler durch das Heranführen an authentische, interdisziplinäre, offene und unstrukturierte Problemstellungen bei ihrem erfolgreichen Übergang von der Schule zur Hochschule unterstützt werden. Außerdem glauben wir, dass die Bearbeitung solcher Problemstellungen das Verständnis von und die Neigung für die mathematisch geprägten Fächer erhöht. Anfang 2014 haben wir mit dem zweiten Durchgang eines

[7] Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung weiblicher und männlicher Sprachformen verzichtet; die weibliche Form ist jeweils – wenn nicht anders angegeben – mitgemeint.
[8] MINT = Mathematik, Informatik Naturwissenschaft und Technik

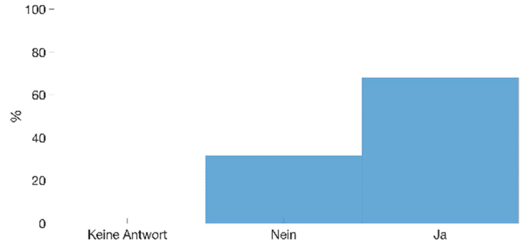
Programms für begabte Schüler, die sich für MINT-Fächer interessieren, begonnen. Dieses Programm wird vom Fraunhofer Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik finanziell unterstützt, in Kooperation mit dem Verein MINT-EC durchgeführt und endet im Sommer 2016. Schüler aus MINT-EC Schulen ganz Deutschlands wurden eingeladen sich zu bewerben. Von 58 Bewerbern wurden nach einem dreitägigen Assessment-Center 23 Schüler – davon 8 weiblich – für das Programm ausgewählt. Insgesamt besteht das Programm aus sechs jeweils einwöchigen Workshops (Montag bis Freitag), welche über die gesamte Laufzeit verteilt stattfanden. Im ersten Workshop haben die Schüler in vier Teams MINT-Projekte gewählt, an denen sie die ganze Zeit über arbeiten wollten. Dabei entstanden die folgenden Projekten (Anzahl der Teilnehmer jeweils in Klammern).

- Eine ferngesteuerte **Quadkopter-Drohne** soll so modifiziert werden, dass sie autonom fliegen und z.B. Suchaufträge ausführen kann (10).
- Entwicklung eines **E-Mountainbikes**, das besondere Möglichkeiten der intelligenten Unterstützung und Trainingssteuerung bietet (5).
- Ein **Outdoor-Roboter** soll entworfen und konstruiert werden, welcher seine Umgebung erfasst und in der Lage ist, sich autonom von einem Startpunkt zu einer gegebenen Zielposition zu bewegen (3).
- Eine Software soll aus Fotos/Videos einer **Spielsituation beim Billard** Hinweise zur Schwierigkeit verschiedener Stöße geben und dabei die Fähigkeiten der Spieler berücksichtigen (5).

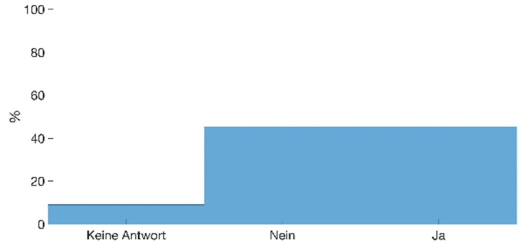
Die Schüler haben selbst ihre Projektziele definiert, wobei sie sehr dosiert mit Fragen und Anregungen unterstützt wurden. Während der Workshops waren sie gemeinsam mit den betreuenden Wissenschaftlern untergebracht und konnten in lockerer Atmosphäre ihre Arbeit frei gestalten und einteilen. Dabei waren die Experten jederzeit verfügbar und standen den jungen Talenten für Fragen und wissenschaftlich-technische Unterstützung zur Verfügung. So weit möglich wurde das Prinzip der minimalen Hilfe verfolgt, um das eigenständige Lernen der Schüler zu entfalten. Zusätzlich zu dieser freien Arbeitszeit gab es in jeder Workshopwoche ein oder zwei meist halbtägige Seminare, z.B. „Einführung in LaTeX“, „Wissenschaftliches Programmieren mit MATLAB/Simulink“, „Motion Capturing“ oder „Arbeiten mit dem Raspberry Pi“.

3. Ergebnisse

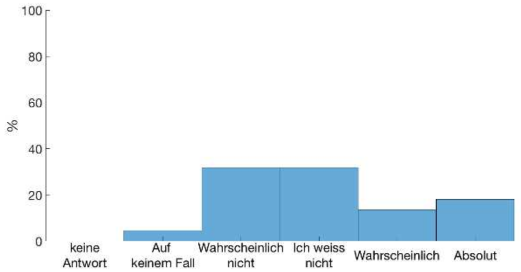
Jedes Team hat innerhalb der Laufzeit des Programms erstaunliche Ergebnisse erzielt, weit über das hinaus, was man von Schülern üblicherweise erwarten kann. Der Enthusiasmus der Teilnehmer war immer spürbar und oft arbeiteten sie während der Workshops bis spät am Abend oder sogar in die Nacht – zwischen den gemeinsamen Zeiten dann mittels elektronischer Medien wie Skype und E-Mail. Wir konnten beobachten, dass das Verständnis und Wissen der Schüler für die MINT-Fächer während dieser Zeit deutlich gestiegen ist. Im November 2015 haben 22 Teilnehmer einen kurzen Fragebogen ausgefüllt. Einige der Ergebnisse sind in Abbildung 1 dargestellt.



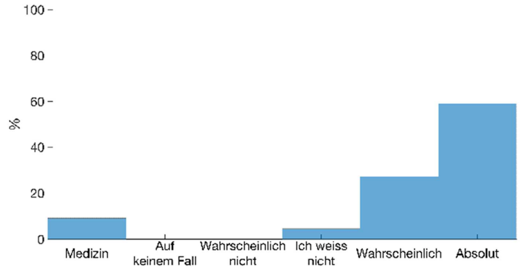
a) Hat das Math Talents Programm deine Vorstellung von Mathematik verändert?



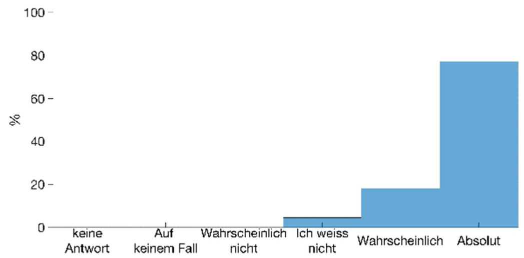
b) Hat das Math Talents Programm deine Vorstellung von MINT verändert?



c) Wirst du Mathematik studieren?



d) Wirst du ein MINT-Fach studieren?



e) Denkst du, dass Mathematik in der Zukunft für deinen Beruf hilfreich sein wird?

Abbildung 1: Auszug der Ergebnisse eines Fragebogens von November 2015 (n = 22)

15 von 22 Schülern sagen, dass das Programm ihre Vorstellung von Mathematik *geändert hat* (ein statistisch signifikanter Einfluss mit einem Konfidenzniveau von 95%). In Gegensatz dazu meinen 50% der Schüler, dass das Programm ihre Vorstellung über die MINT-Fächer verändert hat. Diese Ergebnisse deuten darauf hin, dass die Art der Mathematik, die in der Schule unterrichtet wird, den Wert und die fundamentale Rolle des Fachs in den MINT-Fächern nicht deutlich genug aufzeigt. Fast alle Schüler planen ein MINT-Fach (oder Medizin) zu studieren, ein ordentlicher Anteil von ihnen möchte Mathematik studieren. Fast alle Teilnehmer (21 von 22) denken, dass Mathematik in der Zukunft für ihren Beruf hilfreich sein wird.

4. Fazit

Zusammenfassend können wir sagen, dass aus unserer Sicht das Math Talents Programm begabten Schülern zeigt, wie wichtig Mathematik für die Lösung vieler Fragestellungen und Probleme unserer Gesellschaft ist.

Wir planen aktuell den Start eines neuen Programms Mitte 2016, innerhalb dessen wir weitere empirische Forschung durchführen werden um zu sehen, ob die Wahrscheinlichkeit für die Wahl von Mathematik bzw. einem anderen MINT-Fach als Studienfach durch das Programm erhöht wird. Außerdem möchten wir dann unsere Schüler auch nach Ende des Programms weiter begleiten um zu sehen, wie sie den Übergang von der Schule zur Hochschule bewältigen und ob die Erfahrungen des Talentprogramms sie dazu im Vergleich mit einer Kontrollgruppe in besserer Weise befähigen.

Literatur

The Institution of Engineering and Technology (IET) (2014). Engineering and technology skills & demand in industry annual survey. Technical report.

Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. Journal for Research in Mathematics Education, 29(1):41–62

Boaler, J. (2001). Mathematical Modelling and New Theories of Learning. Teaching Mathematics and its Applications, 20(3):121–128.

Curtis, K. M. (2006). Improving Students Attitudes: A study of a mathematics curriculum innovation. PhD thesis, Kansas State University.

Audiovisual Education and Culture Executive Agency (2011a). Mathematics education in europe: Common challenges and national policies. Technical report, European Commission.

Audiovisual Education and Culture Executive Agency (2011b). Science education in europe: National policies, practices and research. Technical report, European Commission.

Niss, M. A. (2012). Models and modelling in mathematics education. European Mathematical Society. Newsletter, (86):49–52.

Quinn, J. (2013). Drop-out and completion in higher education in europe among students from under-represented groups. Technical report, European Commision.

Williams, J., Black, L., Davis, P., Hernandez-Martinez, P., Hutcheson, G., Nicholson, S., Pampaka, M. & Wake, G. (2008). Keeping open the door to mathematically demanding programmes in further and higher education. Teaching and Learning Research Briefing, (38).

Irene GRAFENHOFER, Vanessa KLÖCKNER, Koblenz

Der KOblenzer Modelling-Trail KOMT
Ein Online-Lehr-Lern-Portal für Schülerinnen/Schüler und Studierende

Der Koblenzer Modelling-Trail ist ein internetbasierter Lernpfad zur mathematischen Modellierung, der aufeinander abgestimmte Arbeitsaufträge (vgl. Eirich & Schellmann 2008) zum Thema Sehenswürdigkeiten in Koblenz beinhaltet und Lernende zum selbsttätigen und eigenverantwortlichen Arbeiten außerhalb des Klassenraums animiert (vgl. Ludwig, Jesberg, Weiß, 2014). Schülerinnen und Schüler erhalten dabei über einen Wiki-Lernpfad Arbeitsaufträge, die individuell je nach Interesse, Niveauanspruch und Zeitbudget gewählt werden können und damit für heterogene Lerngruppen besonders geeignet sind. Über abrufbare Hilfen und differenzierte Aufgabestellungen können für schwächere und leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler Lernzuwächse vor allem im Bereich Operieren, Modellieren, Kommunizieren und Begründen möglich werden (vgl. Roth 2014). Die internetbasierten Dokumentations- und Protokollgelegenheiten im Lernpfad (vgl. Roth 2013) werden für Lehramtsstudierende als Material zur Diagnose verwendet, indem zum einen Schülerlösungen analysiert und zum anderen Arbeitsabläufe der Lernenden näher untersucht werden.

1. Aufbau des Koblenzer Modelling-Trails

Der Modellierungslernpfad ist auf der Internetseite „ZUM-Wiki" verankert und damit jedem zugänglich. (unter: wikis.zum.de/zum /Koblenzer_Modelling-Trail_(KOMT)). Damit die entsprechenden Sehenswürdigkeiten in Koblenz auch vor Ort besichtigt werden können, gibt es zu jeder Fragestellung einen Ausschnitt von Google-Maps samt Koordinaten. Inhaltlich sind die Aufgabenstellungen für Lernende in drei Interessensgebiete zusammengefasst: „*Rhein in Flammen: immer ein großes Spektakel*", „*Geschichtliches in Koblenz*" und „*Möglichkeiten zur Energiegewinnung durch Koblenzer Sehenswürdigkeiten*". Zu jedem dieser drei Interessensgebiete gibt es mehrere Fragen. Diese gliedern sich in drei Kategorien: Aufgaben zur Vorbereitung der Modellierung (z.B. „Mit wie vielen Besuchern kann die Eisdiele während dieses Events rechnen?"), Aufgaben zur Hinführung zur Modellierung (z.B. „Wie viel Geld nimmt die Eisdiele während des Spektakels ein?") und Modellierungsaufgaben (z.B. „Wie lange kann Koblenz mit Strom versorgt werden, wenn es dafür auf der Balduinbrücke eine Solaranlage gäbe?"). Diese Einteilung wurde vorgenommen, um den Lernpfad in allen Jahrgangstufen und Schulformen einsetzen zu können. Für die Grundschulen werden somit Aufgaben bereitgestellt, um mit dem Aufbau der Modellierungskompetenz zu beginnen und in der Sekundarstufe I und II werden Modellierungsaufgaben zur Verfügung gestellt, um die Modellierungskompetenz zu erweitern. Die Struktur einzelner Aufgaben ist immer gleich: es gibt eine Fragestellung, dazu bis zu vier Tipps, ein Arbeitsblatt und einen Fragebogen, der im Anschluss an die Bearbeitung ausgefüllt werden soll. Dabei sind die Tipps impulsgesteuert und geben keine Lösungsrichtung direkt vor.

2. Einsatz des Lernpfades in Schulen und an Universitäten

Der Lernpfad wurde in der Pilotstudie in erster Linie zum Einsatz an der Universität für die Lehramtsausbildung verwendet. Schulen im Raum Koblenz bekamen ebenfalls Zugang zu den Modellierungsaufgaben. An der Universität arbeiten Mathematiklehramtsstudierende (GS, RS+, Gym, BBS) in fachdidaktischen Seminaren und in Übungen mit dem Modellierungslernpfad mit unterschiedlichen didaktischen Hintergründen (vgl. Siller & Roth 2016):

- Aufbau von Grundwissen und –fertigkeiten in Bezug auf Modellierungsaufgaben
- Differenzierendes Angebot durch die Möglichkeit fachdidaktische Inhalte selbständig zu erschließen und interaktiv in Gruppen arbeiten zu können, Differenzierung durch interessensgesteuerte Auswahl von Aufgaben
- Eigene Erfahrungen mit Selbstdiagnose durch selbstregulierende Maßnahmen (z.B. Tipps, Fragebögen)
- Praxiserfahrung durch Diagnose von erstellten Modellen von Lernenden (dies muss noch empirisch erforscht werden)

3. Evaluation des Lernpfades

Es wurde zur Evaluation des Lernpfades ein Fragebogen zu jeder Fragestellung entwickelt und pilotiert. Jeder Fragebogen beinhaltet vier Subtests. Ein Schwerpunkt liegt dabei auf den Subtests „Bearbeitung des KOMT“ und „Motivation in Bezug auf KOMT“. Es wurde mit einer 6-stufigen Lickert-Skala gearbeitet, um von den Teilnehmern zumindest eine Tendenz zu fordern. Bisher haben im Rahmen unserer Pilotstudie 14 Studierende (GS, RS+, Gym, BBS) sowohl den Lernpfad bearbeitet als auch den Fragebogen ausgefüllt. Dabei sind nicht alle Fragestellungen gewählt und bearbeitet worden. Es lässt sich darüber hinaus erkennen, dass eine Fragestellung (Beliebte Eisdiele grün) besonders häufig gewählt wurde (vgl. Abb. 1). Aufgaben zur Vorbereitung der Modellierung (grün) wurden am häufigsten (neunmal) gewählt und Aufgaben zur Hinführung zur Modellierung (gelb) viermal. Eine Modellierungsaufgabe wurde tatsächlich nur einmal gewählt (rot).

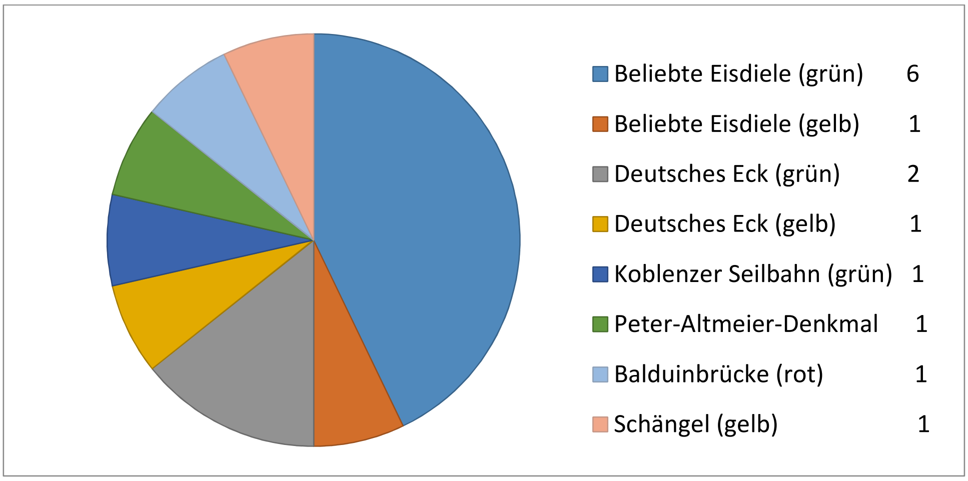


Abbildung 1: Wahl der Aufgabenstellungen

Es ist zu vermuten, dass aufgrund der Auswahl der Aufgaben, die im Fragebogen angegebene Bearbeitungszeit häufig sehr gering war (unter einer Stunde 8-mal, 1-2 Stunden 4-mal, 2-6 Stunden 2-mal, mehr als 6 Stunden niemand). Darüber hinaus wurden die Aufgaben als nicht sehr schwierig eingeschätzt (vgl. Abb. 2). Auch an dieser Stelle liegt die Vermutung nahe, dass die Auswahl der Aufgaben einen Einfluss auf die Beurteilung der Schwierigkeit der Problemstellungen hat. Genaue Aussagen können wegen des geringen Stichprobenumfangs aber nicht gemacht werden.

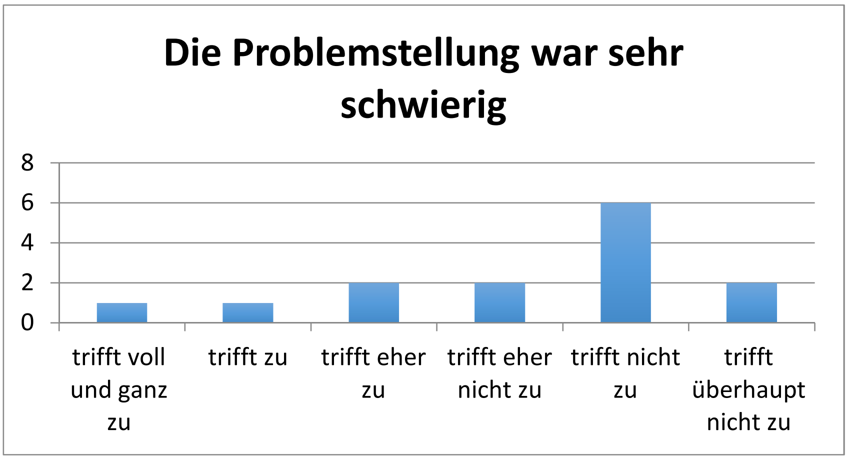


Abbildung 2: Ergebnisse zur Schwierigkeit der Problemstellungen

4. Fazit und Ausblick

Mit dem Koblenzer Modelling-Trail als Pilotprojekt kann sehr vorsichtig eine erste positive Bilanz gezogen werden. Der Modellierungslernpfad wirkte auf die Studierenden motivierend, weil die Probleme aus der unmittelbaren Umwelt der Lernenden kommen und auch immer wieder für Diskussionsstoff unter den Betreffenden sorgen. Der Lernpfad wurde von den Lehramtsstudierenden gut als Übungswerkzeug genützt, was in den durchgeführten Übungsveranstaltungen bei den Besprechungen der Ergebnisse festgestellt werden konnte. Leider wurden zur Erstellung der Lösungen nicht immer die zur Verfügung stehenden Online-Arbeitsblätter bzw. Feedbackbögen genutzt, weil die Studierenden bei der Lösungserstellung oft lieber zu Papier und Bleistift greifen. Bei der Diagnose von erstellten Modellen fällt es Studierenden oft sehr schwer, Rückmeldung zu geben und Schwächen bzw. Stärken von Modellen zu hinterfragen. Um diese Kompetenzen bei den Studierenden noch weiter zu verbessern, sollen die zahlreichen Modellergebnisse in Zukunft noch stärker eingesetzt werden. Als nächsten Schritt soll die Arbeit an Kooperationsschulen verstärkt werden, um dort noch mehr den positiven Beitrag von Lernpfaden an Differenzierung zu erforschen bzw. aufzuzeigen.

Ziel des Modellierungslernpfades ist, die Studierenden an der Universität und die Schülerinnen und Schüler im Rahmen des Lernpfades stärker zu vernetzen und ein Lehr-Lern-Labor an der Universität Koblenz-Landau, Campus Koblenz zu implementieren (vgl. Käpnick et al. 2016).

Literatur

Eirich, M.; Schellmann, A. (2008). Entwicklung und Einsatz interaktiver Lernpfade. mathematik lehren, (146), 59–62.

Käpnick, F.; Komorek, M.; Leuchter, M., Nordmeier, V.; Parchmann, I.; Priemer, B.; Risch, B.; Roth, J.; Schulte, C.; Schwanewedel, J.; Upmeier zu Belzen, A.; Weusmann, B. (2016). Schülerlabore als Lehr-Lern-Labore. In: Maurer, Christian (Hrsg.). Authentizität und Lernen − das Fach in der Fachdidaktik. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Band 36, Jahrestagung in Berlin 2015. Regensburg: Universität Regensburg, S. 512-514.

Ludwig, M.; Jesberg, J.; Weiß, D. (2014). MathCityMap- eine faszinierende Belebung der Idee mathematischer Wanderpfade, In: Praxis der Mathematik. 14–19.

Roth, J. (2013). Verfügbare Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht richtig nutzen. Bericht über die 29. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 23. bis 25. September 2011 in Soest. (A. Lambert, Hrsg.). Hildesheim: Verlag Franzbecker, S. 10.

Roth J. (2014). Lernpfade – Definition, Gestaltungskriterien, Unterrichtseinsatz. In: Roth, J.; Süss-Stepancik, E.; Wiesner, H. (Hrsg.): Medienvielfalt im Mathematikunterricht − Lernpfade als Weg zum Ziel. Springer Spektrum, Heidelberg, S. 3-25

Siller, H.-St.; Roth, J. (2016). Herausforderung Heterogenität - Grundvorstellungen als Basis und Bezugsnorm. In Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 70, 58. Jg., Hallbergmoos: Aulis, S. 2 - 10.

Moderierte Sektion:

Münstersche Studien zu mathematisch begabten Kindern in verschiedenen Altersbereichen

Friedhelm KÄPNICK, Münster

Münstersche Studien zu mathematisch begabten Kindern in verschiedenen Altersbereichen

In der Arbeitsgruppe „Käpnick“ an der WWU Münster wird seit 2004 der Themenkomplex „Mathematische Begabungen“ systematisch erforscht. Theoretische Basis hierfür sind insbesondere vier sich wechselseitig bedingende Grundpositionen, die das Resultat eigener langjähriger Forschungsarbeit sind und die zugleich einen mehrheitlichen Konsens in der deutschsprachigen Begabungsforschung widerspiegeln (vgl. z.B. Käpnick, 2009):

- Das Themenfeld hat einen hochkomplexen Charakter, dem nur aus einer interdisziplinären wissenschaftlichen Sicht und einer ganzheitlichen Perspektive auf die Entwicklung kindlicher Persönlichkeiten entsprochen werden kann.
- Mathematische Begabungen sind bereichsspezifisch.
- Sie entwickeln sich auf der Basis vor-, geburtlich und nachgeburtlich bestimmter Potenziale in einem wechselseitigen Zusammenwirken von inter- und intrapersonalen Katalysatoren in dynamischer Weise individuell verschieden.
- Es ist sinnvoll und notwendig, mathematische Begabungen möglichst frühzeitig zu erkennen und sie zielgerichtet zu fördern.

Hiervon ausgehend wird unter einer mathematischen Begabung ein sich dynamisch entwickelndes Potenzial verstanden, das aufgrund seiner hohen Komplexität und seiner individuellen Ausprägung zwar quantitativ nicht genau angebbar bzw. vergleichbar ist, aber bzgl. bestimmter mathematikspezifischer Begabungsmerkmale und begabungsstützender bereichsspezifischer Persönlichkeitseigenschaften ein weit überdurchschnittliches Niveau aufweist. Für die Entwicklung mathematischer Begabungen im Grundschulalter konnte ein altersspezifisches Modell entwickelt werden (s. Abb. auf der nächsten Seite; ebd.). In drei Beiträgen dieser Moderierten Sektion werden aktuelle Promotionsvorhaben zu besonderen Ausprägungen mathematischer Begabungen in anderen Altersbereichen vorgestellt. So präsentiert Bugzel Untersuchungen zum Übergang kleiner Matheasse von der Kita zur Grundschule, Sjuts widmet sich der spezifischen Entwicklung mathematischer Begabungen im 5. und 6. Schuljahr und Körkel thematisiert das „informelle Mathematiklernen“ begabter Sechst- und Siebtklässer/innen.

Literatur

Käpnick, F. (2009): Mathe für kleine Asse. Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder im 3. und 4. Schuljahr. Band 2. Berlin: Cornelsen.

Jana BUGZEL, Münster

„Sie hat das Mathebuch gesehen und war total enttäuscht.“ - Untersuchungen zum Übergang mathematisch begabter Kinder von der Kita in die Grundschule

1. Problemlage, Ziele und Anlage der Untersuchung

Besondere Begabungen stellen in der Übergangsgestaltung von der Kita in die Grundschule für alle Beteiligten auch besondere Herausforderungen dar. Allein schon das Erkennen der Potenziale ist insbesondere in dieser Phase sehr schwierig, da die individuellen Ausprägungen mathematischer Begabungen im Vorschul- und im frühen Grundschulalter stark variieren (vgl. Meyer, 2015). Problematisch ist hierbei ebenso die häufig traditionell „arithmetische Ausrichtung“ des mathematischen Anfangsunterrichts, der zudem vielfach an der Kompensation möglicher Defizite der Schulanfänger orientiert ist (vgl. Wittmann et al., 2016). Den Vorkenntnissen und Erwartungen kleiner Matheasse wird hingegen selten Beachtung geschenkt, was wiederum Unterforderung, aber auch sozial-emotionale Schwierigkeiten zufolge haben kann. Außerdem fühlen sich Eltern zunächst von Seiten der Lehrkräfte oft nicht ernst genommen, wenn sie diese frühzeitig auf das besondere mathematische Potenzial ihres Kindes hinweisen: „*Und dann haben sie mir damals gesagt: ‚Oh, das ist ja eine wichtige Information und wir werden darauf achten.‘ Und es wurde echt nichts gemacht. Beim ersten Elternsprechtag hatte ich es dann angesprochen, weil Luca nämlich zuhause gesagt hat: ‚Mathe ist voll langweilig, da hatte ich im Kindergarten mehr zu überlegen als jetzt in der Schule.‘ Und dann sagte die eine Lehrerin aus dem Team: ‚Naja, es geht uns ja auch darum, dass er erstmal die Zahlen gut schreiben kann.‘*“ (Auszug aus einem Interview mit einer Mutter).

Ziel meiner explorativen Studie ist deshalb die Kennzeichnung individueller Entwicklungsverläufe dieser Kinder im Übergang aus ganzheitlicher Perspektive. Ausgangspunkte liefern komplexe Längsschnittstudien, bei denen Indikatoraufgaben, Kinder- und Elterninterviews im letzten Kita- und nach dem ersten Schuljahr und Befragungen zu Lehrkräften eingesetzt werden. Im Sinne einer prozessbegleitenden Diagnostik werden Kinder im Vorschulalter beim Bearbeiten mathematischer Spiel- und Lernfelder beobachtet, während nach dem ersten Schuljahr die Lernmaterialien aus dem Mathematikunterricht analysiert werden. Basierend auf den Besonderheiten dieser sensiblen Entwicklungsphase sollen zudem Impulse für eine den Bedürfnissen kleiner Matheasse angemessenere Gestaltung des Übergangsprozesses sowie Diagnostik und anschlussfähige Förderung abgeleitet werden.

2. Theoretische Grundlagen

Die theoretische Ausgangsposition für das der Untersuchung zugrundeliegende Begabungsverständnis liefert das Modell zur mathematischen Begabungsentwicklung im Vorschulalter nach Fuchs, Käpnick & Meyer (vgl. Meyer, 2015). Hinsichtlich der Transitionsforschung stellt das von Griebel & Niesel (z.B. 2003) entwickelte Modell einen wichtigen Anhaltspunkt dar, das den Übergang von der Kita in die Grundschule als dynamischen und ko-konstruktiven Prozess aller beteiligten Akteure beschreibt. Die beträchtliche Bedeutung sozialer Prozesse wird hier betont, Transitionsbewältigung als Kompetenz des gesamten sozialen Systems verstanden und nicht mehr einseitig am Kind festgemacht, indem hierzu benötigte Kompetenzen und Faktoren identifiziert werden. Einschätzungen zum Gelingen können erst retrospektiv getroffen werden: „Von einem erfolgreichen Übergang wird gesprochen, wenn das Kind sich emotional, psychisch, physisch und intellektuell angemessen in der Schule präsentiert […], wenn es sich in der Schule wohlfühlt, die gestellten Anforderungen bewältigt und die Bildungsangebote für sich optimal nutzt“ (ebd.). Aufgrund der fehlenden inhaltlichen Spezifik des Ansatzes für kognitive Aspekte und curriculare Anforderungen werden unter dem Terminus „Anschlussfähigkeit“ aktuell u.a. auch inhaltlich-didaktische Dimensionen der Übergangsgestaltung diskutiert. Bezüglich des Mathematiklernens im Übergang lassen sich hierbei jedoch Spannung verzeichnen (vgl. hierzu Wittmann et. al., 2016).

3. Fallbeispiel Jule: Ein kleines Matheass im Übergang

Abb.1: Jules Haus vom Nikolaus

Jule besuchte vor Schulanfang zwei Jahre ein Projekt zur Förderung mathematisch interessierter Kinder. Ihr besonderes mathematisches Potenzial zeichnete sich hier vor allem in einer stark ausgeprägten mathematischen Sensibilität in Form eines besonderen Gefühls für geometrische Formen, Muster sowie mathematisch ästhetische Aspekte, aber auch hohe Kreativität und Strukturierungskompetenzen aus, was u.a. bei dem von ihr gestalteten Haus vom Nikolaus deutlich wird (vgl. Abb. 1). Ihre Zahl- und Rechenkompetenzen waren hingegen im Vergleich zu anderen kleinen Matheassen unauffällig. Typprägende Erstindikatoren waren zudem ihre Eigenwilligkeit, ihr Perfektionismus und hoher Gerechtigkeitssinn sowie ihre Sensibilität (u.a. emotional und gegenüber Lärm).

Vor allem aufgrund der durchweg positiven Erfahrungen des Bruders an derselben Schule standen die Eltern dem Übergang positiv gegenüber. Für Jule war insbesondere der Statuswechsel zum Schulkind Grund zur Freude. Bis auf ihre beste Freundin wechselten außerdem viele Kinder aus der Kita in ihre Klasse. Die Kooperationsmaßnahmen zwischen dieser Schule und

Kitas sind vergleichsweise hoch einzuschätzen. So tauschten sich die Schul- und Kitaleitung vor Schulbeginn neben einem gemeinsamen Vorleseprojekt über die Schulanfänger aus. Offen bleibt allerdings, inwieweit die Informationen an die unterrichtenden Lehrkräfte weitergegeben werden. Jules Eltern informierten jedoch die Klassenlehrerin selbst über die Projektteilnahme.

Der Übergang verlief für Jule zunächst problemlos. Eine Woche nach Schulbeginn wurde jedoch das Fahrrad ihres Bruders gestohlen, während sich Mutter und Tochter auf diesen wartend mit einer Lehrerin unterhielten. Das Ereignis hat Jule emotional, aber auch sozial so belastet, dass ihr Schulalltag nun von Gefühlen der Angst und Unsicherheit begleitet war, es morgendlich zu starken Ablöseschwierigkeiten von der Mutter kam und sie den Schulbesuch verweigerte. Außer diesem sogenannten Risikofaktor kann die traditionell arithmetische, kaum differenzierende und anschlussfähige Gestaltung des Mathematikunterrichts als interpersonal hemmend betrachtet werden. Die Lernmaterialien lassen wenig Platz für eigene Ideen oder Kreativität. Zudem spielten im ersten Schuljahr geometrische Themen keine Rolle, so dass Jules eher geometrisch-strukturell ausgeprägtes Potenzial unentdeckt blieb. Die anspruchsvolle und instabile Klassensituation, bedingt durch einen hohen Anteil an Flüchtlingskindern und an Kindern mit speziellen Förderbedarfen, mag das Erkennen und Entfalten ihres Potenzials zusätzlich erschweren, da Förderschwerpunkte demgemäß vor allem auf Kinder mit Lernproblemen gesetzt wurden. Die Rechendreiecke (vgl. Abb. 2), bei denen Jule zu mathematisch ästhetischen Zahlanordnungen greift, stellen eine der wenigen Gelegenheiten des Unterrichts dar, die ihren Interessen und Kompetenzen entgegen kamen. Jule gibt an, dass sie sich oft im Mathematikunterricht langweilt, was auch die vielen Zeichnungen in Heft und Buch widerspiegeln. Ihre selbstgemalten Stempel und lobenden Worte sind zudem möglicherweise Ausdruck des eher schwierigen Verhältnisses zur Lehrerin, da Jule das Gefühl hat, dass die Lehrerin sie nicht besonders möge und deshalb selten lobe. Im Zusammenhang mit Jules Bedürfnis nach Alltagsstrukturierung fehlen ihr zudem in der Schule klare und transparente Regeln.

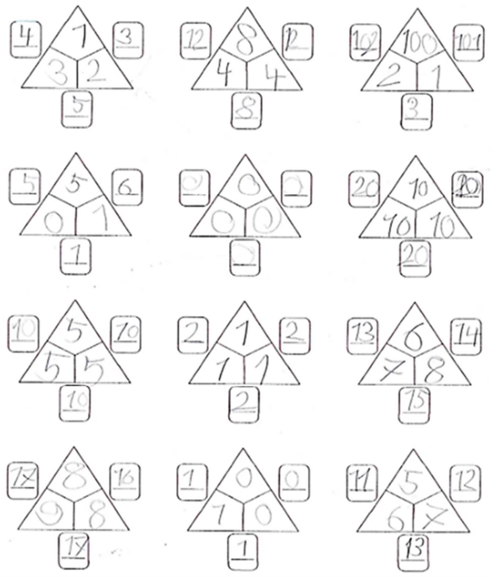


Abb. 2: Jules Rechendreicke

Bezogen auf fördernde intrapersonale Einflüsse, können ihre zunächst hohe Schul- und Lernfreude sowie die Ausprägung begabungsstützender Persönlichkeitseigenschaften, wie ihre Konzentrations- und Ausdauerfähigkeit, genannt werden. Durch ihre zurückhaltende und sensible Art neigt sie jedoch dazu, ihr Potenzial zu „verstecken". Zudem hat sie Angst davor, Fehler zu machen und dann von der Lehrerin „ausgeschimpft" zu werden. Im Zusammenhang mit Jules hohem Gerechtigkeitssinn empfindet sie die Lehrerin häufig als ungerecht ihr, aber auch anderen Kindern gegenüber. Bedingt durch chronische Ohrenprobleme fällt es ihr weiterhin häufig schwer, sich im Unterricht zu konzentrieren, „wenn drum herum so viel ist", sodass ihre Leistungen häufig nicht ihrem Potenzial entsprechen. Sie wünscht sich deshalb einen geringeren Lärmpegel in der Klasse. Der Lehrerin ist Jules Sensibilität gegenüber Lärm nicht aufgefallen. Auch die Pausen nimmt Jule nicht als Erholung von der Lernzeit wahr, sondern als weiteren Stressfaktor, da für sie hier zu viele Kindern herumtoben und sich z.T. ärgern. Im Gegensatz zu ihrem frühen, ausgeprägten Willen nach Selbstständigkeit vor Schulbeginn steht Jule nun leider ihrem Können kritisch gegenüber und entwickelte ausweichende Verhaltensweisen. Auf die Frage, was sie gut kann, konnte sie anders als alle anderen befragten Kinder keine Antwort geben.

4. Fazit und Ausblick

Ihr individuelles Persönlichkeits- und Begabungsprofil wirkt sich bezüglich einiger Anforderungen im Schulalltag demnach v.a. auf emotionaler und sozialer Ebene hemmend aus. Risikofaktoren, wie das Erlebnis zu Schulanfang, und weitere hemmende Einflussfaktoren, wie hier u.a. die schwierige Klassensituation, können nicht verhindert werden. Auf Seiten der Umwelteinflüsse kann jedoch die fehlende Identifizierung von Jules Potenzial sowie der wenig anschlussfähige Anfangsunterricht, der ihren Bedürfnissen kaum gerecht wird, kritisiert werden. Ein gründliches und sensibles Erfassen und Analysieren der Vorkenntnisse und Interessen aller Kinder, aber auch die Einbeziehung dieser bei Lernentscheidungen wären wünschenswert. Von einer potenzialorientierten und -wertschätzenden Übergangsgestaltung durch z.B. (natürlich) differenzierende Aufgaben und Materialien mit einem gewissen mathematischen Potenzial zum Forschen und Entdecken sowie offene Lernformaten (z.B. Forscherwerkstätte, Projekte, Mathekonferenzen, offene Spiel- und Lernfelder) profitieren erfahrungsgemäß im Übrigen nicht nur kleine Matheasse, sondern alle Schulanfänger (vgl. Fuchs, 2015).

Literatur

Die verwendeten Literaturquellen können bei der Autorin erfragt werden.

Vera KÖRKEL, Münster

Mathematik in der Freizeit - informelles Mathematiklernen mathematisch begabter Sechst- und SiebtklässlerInnen

1. Problemlage, Ziele und Anlage der Untersuchung

Dass ein sportlich oder musikalisch begabtes Kind erst durch jahrelanges Training oder Unterricht in einem Musikinstrument zu einem erfolgreichen Sportler oder Musiker wird, ist allgemein bekannt und wissenschaftlich begleitet (vgl. z.B. Hoffmann, 2010). Bei mathematisch begabten Kindern nimmt die Förderung in Enrichmentprogrammen einen zeitlich wesentlich geringeren Raum ein. Dennoch besteht Einigkeit darüber, dass sich aus einer günstigen genetischen Disposition erst bei „langfristiger, systematischer Anregung, Begleitung und Förderung" (IPEGE, 2009, S. 17) eine hohe Begabung entwickeln kann. Es bleibt somit offen, ob und wie kleine Matheasse in ihrer Freizeit bereichsspezifische Kompetenzen erwerben.

Das Ziel meiner Promotion besteht demgemäß darin zu untersuchen, inwiefern mathematisch begabte Sechst- und Siebtklässler auch in ihrer Freizeit selbstbestimmt mathematisch tätig sind. Aus einer Charakterisierung dieses informellen Mathematiklernens unter einer ganzheitlichen Perspektive sollen dann Schlussfolgerungen für eine angemessene Förderung in Schule und Angeboten der Nachmittagsbetreuung abgeleitet werden. Im Zentrum der empirischen Untersuchung stehen komplexe Einzelfallstudien zu mathematisch begabten Kindern, anhand derer analysiert werden soll, bei welchen Freizeittätigkeiten die Kinder Mathematik lernen, welche mathematischen Kompetenzen sie so erwerben und inwiefern sie selbstgesteuert handeln. Eine Analyse der Tagesabläufe unter einer ganzheitlichen Perspektive kann außerdem mögliche Zusammenhänge zwischen der Persönlichkeit, den spezifischen Begabungsmerkmalen der begabten Kinder und der Art des Mathematiklernens in der Freizeit aufzeigen.

2. Theoretische Positionierung zum Mathematiklernen in der Freizeit

Das Mathematiklernen bei selbst gewählten Freizeitbeschäftigungen lässt sich als informelles Lernen charakterisieren, weil es außerhalb institutionalisierter Bildungseinrichtungen stattfindet (vgl. Overwien, 2010). Einerseits kann es in Form selbstgesteuerten Lernens vom Schüler aktiv und konstruktiv unter Einbeziehung kognitiver, meta-kognitiver und motivational-volitionaler Strategien gesteuert werden (vgl. Pintrich, 2000). Andererseits kann es beiläufig in Form inzidentellen Lernens bei Handlungen geschehen, die ein anderes Ziel verfolgen als einen Wissenszuwachs auf dem betreffenden Gebiet (vgl. Marsick & Watkins, 2001, siehe Abbildung).

Der Analyse der erworbenen mathematischen Kompetenzen liegt eine begriffliche Festlegung bezüglich der Spezifik mathematischer Tätigkeiten zugrunde, die sich aus aus einem Studium der Teildisziplinen (vgl. z.B. Devlin, 2002), aus Selbsteinschätzungen bekannter Mathematiker und mathematikhistorischen Interpretationen (vgl. z.B. Käpnick, 1998) zusammensetzt. Demnach können mathematische Tätigkeiten den Merkmalen Struktur, Intuition, experimentelle und anwendungsorientierte Arbeitsweisen und Ästhetik und Spiel im Zusammenhang mit Mathematik zugeordnet werden.

3. Beispielhafte Ergebnisse der empirischen Untersuchung

Grundlage der empirischen Untersuchung bilden strukturierte Beobachtungen im Projekt „Mathe für kleine Asse“ für SechstklässlerInnen[9], Ergebnisse eines Indikatoraufgabentests, ein detaillierter Wochenplan und eine inhaltsanalytische Auswertung von Interviews zum Freizeitverhalten mit den Kindern selbst und ihren Eltern. Im Folgenden sollen exemplarisch die Ergebnisse der Einzelfallstudien zu zwei mathematisch begabten Kindern, Justus und Mia, vorgestellt und verglichen werden.

Einzelfallstudie zu Justus:
Justus zeichnet sich bei mathematischen Problemen durch kreative Lösungswege aus, die er dank eines guten Gespürs für Zahlen und Zusammenhänge und einer guten mathematischen Intuition findet. Aufgrund autistischer Züge baut er nur schwer soziale Kontakte auf und beschreitet individuelle Wege. In seiner Freizeit geht er hauptsächlich seinem größten Interesse nach, dem Konstruieren und Programmieren von Robotern aus Fischertechnik. Durch seine fundierten Kenntnisse in Elektronik ergänzte er den Bausatz um zwei selbst entwickelte Neigungssensoren und stattete ihn mit insgesamt 17 Sensoren aus, die er in einem hochkomplexen Programm ansteuert. In der Entwicklung des Roboters lassen sich viele Merkmale mathematischer Tätigkeiten finden: Beim Programmieren ist strukturiertes, abstraktes und mehrschrittiges Denken gefordert. Aus widerspruchsfrei definierten Variablen muss in einer logisch korrekten Syntax ein Programm aufgebaut werden. Beim Durchdringen eines Geflechts verschiedener syntaktischer Strukturen ist formales Denken und eine hohe Gründlichkeit und Genauigkeit im Denken und Tun gefordert. Experimentelle Arbeitsweisen sind durch die technische Anwendung naheliegend, z.B. muss die Repräsentationsebene von der verbalen Aufgabenstellung in eine technische Umsetzung im Aufbau des Roboters überführt und in ein Programm umgesetzt werden. Weil Justus meist alleine arbeitet und kreativ eigene Ideen umsetzt, führt er all diese Schritte selbstgesteuert unter Nutzung kognitiver, meta-kognitiver und motivational-volitionaler Strategien aus.

---

[9]Dies ist ein Enrichmentprojekt zur Förderung mathematisch begabter Kinder an der WWU Münster.

Einzelfallstudie zu Mia:
Mia zeichnet sich durch ihre ruhige, zurückhaltende Art und ihr strukturiertes und systematisches Vorgehen aus, das gepaart mit fördernden Persönlichkeitseigenschaften, wie hoher Konzentrationsfähigkeit und Anstrengungsbereitschaft, sowohl in mathematischen als auch in anderen Bereichen zu sehr guten Leistungen führt. In ihrer Freizeit ist sie extrem organisiert und erledigt ihre Pflichten gründlich und schnell, so dass ihr Zeit für vielfältige Freizeittätigkeiten gemeinsam mit ihren zwei besten Freundinnen bleibt: Sie reitet und tanzt, spielt Saxofon privat und in einem Orchester, besucht eine Geschichts-AG. Zu Hause häkelt sie, puzzelt, spielt Gesellschaftsspiele, liest und verbringt viel Zeit mit Handyspielen. In ihrer momentanen Entwicklungsphase sind spezifische Interessen noch nicht gefestigt, vielmehr probiert sie aus und lässt sich von intrinsischer Motivation am Tätigkeitsvollzug leiten. Aus diesem Grund besuchte sie bis zur 6. Klasse das Projekt „Mathe für kleine Asse", das sie dann aber zugunsten anderer Hobbies und aus fehlendem Interesse an mathematisch-technischen Fragestellungen aufgab. In ihrer Freizeitgestaltung lassen sich wenig konkrete Anlässe für informelles Mathematiklernen finden, bei denen aber im Detail mathematische Denkweisen vorkommen, was am Beispiel des Häkelns dargestellt werden soll: Wenn Mia häkelt, überlegt sie sich selbst eine Herausforderung, z.B. ein Kissen zu häkeln, für die sie sich aus Anleitungen entsprechende Muster heraussucht. Dabei muss sie verbale oder ikonische Darstellungen verstehen und auf die enaktive Ebene wechseln. Wenn sie eine andere Wolle verwendet, muss sie Maschenzahlen und Größenangaben umwandeln. Somit können auch beim Häkeln kleine Anlässe für mathematische Tätigkeiten, wie das Wechseln der Repräsentationsebene und das Analysieren und Strukturieren von Sachverhalten, gefunden werden. Bei Mia sind in der Vielzahl ihrer Interessen solche kleinen mathematischen Tätigkeiten wiederholt feststellbar. Mehr aber zeigt sich ihre mathematische Denkweise in der Strukturierung ihres Tagesablaufs und in der Systematik und Gründlichkeit bei all ihren Handlungen.

4. Zusammenfassung und Fazit

Bei beiden Kindern ist ein Einfluss der mathematischen Begabung auf das Freizeitverhalten feststellbar. Die gewählten Tätigkeiten führen zu informellem Mathematiklernen, wie insbesondere beim Analysieren und Strukturieren, beim gründlichen Vorgehen oder bei experimentellen Arbeitsweisen. Vergleicht man aber die Einzelfallstudien, so finden wir bei Justus durch seine technischen Interessen ein stark ausgeprägtes informelles Mathematiklernen, bei Mia hingegen ein vergleichsweise schwaches. Wenn wir die Unterschiede auch bei anderen Einzelfallstudien im Detail betrachten, so wird der Zeiteinsatz, die Intensität und die Art des informellen Mathematiklernens von verschiedenen Persönlichkeitseigenschaften beeinflusst: vom individuellen Begabungsstil, von sozialen Bindungen, von Interessen und intrinsischer Motivation und von externen Einflüssen, wie der Verfügbarkeit von anregenden Büchern und dem Erziehungsstil der Eltern. Diese Ergebnisse eröffnen Möglichkeiten zur Beeinflussung des informellen Mathematiklernens, z.B. durch die Schaffung adäquater Enrichmentangebote, die soziale Kontakte und Mathematiklernen auch in technikfreien Settings verbinden.

Literatur

Devlin, K. J. (2002). *Muster der Mathematik.* Heidelberg, Berlin: Spektrum.

Hoffmann, K. (2010). Alltagsbelastungen von hochgeforderten Kindern. In H. Gembris (Hrsg.), *Begabungsförderung und Begabungsforschung in der Musik* (S. 211-228), Berlin: LIT.

IPEGE (2009). *Professionelle Begabtenförderung. Empfehlungen zur Qualifizierung von Fachkräften in der Begabtenförderung*. Salzburg: ÖZBF.

Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder*. Frankfurt am Main: Peter Lang.

Marsick, V. J. & Watkins, K. E. (2001). Informal and Incidental Learning. *New Directions for Adult and Continuing Education, 89*, 25–34.

Overwien, Bernd (2010). Zur Bedeutung informellen Lernens. In N. Neuber (Hrsg.), *Informelles Lernen im Sport* (S. 35-51), Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.

Pintrich, P. (2000). The Role of Goal Orientation in Self-Regulated Learning. In M. Boekaerts, P. Pintrich & M. Zeidner (Hrsg.), *Handbook of self-regulation* (S. 451-502), San Diego: Academic Press.

Britta SJUTS, Münster

Untersuchungen zu mathematisch begabten Fünft- und Sechstklässler/innen[10]

In den vergangenen Jahrzehnten gewann die Hochbegabungsforschung zunehmend an Relevanz. Bezüglich einer bereichsspezifischen mathematischen Begabung entwickelte Käpnick (1998) in seiner Habilitation ein Merkmalssystem zur Erfassung von Dritt- und Viertklässlern mit einer potentiellen mathematischen Begabung, das später von ihm und Fuchs (2006) zum Modell mathematischer Begabungsentwicklung im Grundschulalter weiterentwickelt wurde. Zudem gelang es, verschiedene Spezifika der Entwicklung mathematischer Begabungen in unterschiedlichen Altersbereichen noch differenzierter zu erfassen (Berlinger 2015, Ehrlich 2013, Benölken 2011). Dennoch fehlt bislang eine wissenschaftlich begründete Kennzeichnung mathematischer Begabungen bei Fünft- und Sechstklässlern. Untersuchungen zu diesem Forschungsdesiderat sowie erste Ergebnisse sollen im vorliegenden Beitrag vorgestellt werden.

Theoretische Hintergründe

Als wesentliche theoretische Basis hinsichtlich der Spezifik einer mathematischen Begabung im fünften und sechsten Schuljahr kann das Modell von Käpnick & Fuchs (2006) betrachtet werden. Es bedarf jedoch einer Ergänzung hinsichtlich einiger Aspekte, die die Besonderheiten dieser Altersgruppe berücksichtigen. Dazu zählt nicht zuletzt der Übergang vom konkret-operationalen zum formal-operationalen Denken (Siegler, DeLoache & Eisenberg 2011), der sich in einer neuen Qualität der Fähigkeit zum deduktiven Schlussfolgern oder der Fähigkeit zum Nutzen von Variablen widerspiegelt. Weiterhin müssen das Verfestigen von Interessen, das zunehmende Bestreben nach Selbstständigkeit oder der Übergang zur weiterführenden Schule berücksichtigt werden, da diese Faktoren Veränderungen in den begabungsstützenden Persönlichkeitseigenschaften sowie den intra- und interpersonalen Katalysatoren bewirken.

Anlage der Untersuchungen

Basierend auf einer umfassenden Literaturanalyse zu den Themenfeldern mathematische Begabungen und Entwicklungsbesonderheiten von Fünft- und Sechstklässlern wird eine hypothetische Modellierung zur mathematischen Begabungsentwicklung bei Fünft- und Sechstklässlern vorgenommen. Diese wird anschließend durch empirische Untersuchungen, die sich in qualitative und quantitative Untersuchungen aufgliedern, überprüft und tiefergehend erkundet. Das Ziel der quantitativen Untersuchungen, in de-

[10] Im Text wird zur besseren Lesbarkeit nur die maskuline Form verwendet.

nen Indikatoraufgaben[11] zum Einsatz kommen, ist das Feststellen von Niveauunterschieden hinsichtlich spezieller mathematischer Fähigkeiten zwischen mathematisch begabten und weniger begabten Fünft- und Sechstklässlern. Ziel der qualitativen Untersuchungen, die in Form von komplexen Einzelfallstudien durchgeführt werden, ist es, aus einer ganzheitlichen Perspektive ein umfassendes Bild über die mathematische Begabungsentwicklung bei Fünft- und Sechstklässlern zu gewinnen. Dazu gehören Erkenntnisse bezüglich mathematikspezifischer Begabungsmerkmale, begabungsstützender Persönlichkeitseigenschaften, fördernder bzw. hemmender intra- und interpersonaler Katalysatoren sowie Informationen zur Vor- und Grundschulzeit und zur gesamten Persönlichkeitsentwicklung. Die Erhebungsinstrumente umfassen dabei Ergebnisanalysen der Indikatoraufgaben, Leitfadeninterviews mit den Kindern und Eltern sowie eine prozessorientierte Beobachtung im Rahmen des Projekts „Mathe für kleine Asse“.

Erste Ergebnisse der Untersuchungen

Im Rahmen quantitativer Untersuchungen nahmen am Indikatoraufgabentest 62 als mathematisch begabt identifizierte (mbi) Schüler und 62 Vergleichsschüler (n-mbi) teil. Die als mathematisch begabt identifizierten Schüler wurden im Rahmen einer prozessorientierten Diagnostik (Käpnick 2008) als solche identifiziert, während die Vergleichsgruppe aus heterogen zusammengesetzten fünften und sechsten Schulklassen besteht. 33 mbi-Schüler sowie 33 n-mbi-Schüler bearbeiteten die Aufgaben zum logischen Schlussfolgern. Die Verteilung der Gesamtpunktzahlen ist sowohl beim Indikatoraufgabentest als auch bei den Indikatoraufgaben zum logischen Schlussfolgern annähernd normalverteilt, was auf einen angemessenen Schwierigkeitsgrad der Aufgaben hinweist. Die bisherigen statistischen Analysen der Daten zeigen, dass zwischen der Gruppe der mbi- und der n-mbi-Schüler jeweils signifikante Unterschiede mit einem mittleren oder großen Effekt hinsichtlich der Gesamtpunktzahl des Indikatoraufgabentest sowie hinsichtlich aller hypothetisch angenommenen mathematikspezifischen Begabungsmerkmale (z.B. „Speichern akustisch oder visuell gegebener mathematischer Sachverhalte im Arbeitsgedächtnis unter Nutzung erkannter Strukturen“) bestehen. Gleiches gilt für die Gesamtpunktzahl der Aufgaben zum logischen Schlussfolgern. Es konnten keine signifikanten Unterschiede zwischen Mädchen und Jungen sowie zwischen Fünft- und Sechstklässlern festgestellt werden.

[11] Die Indikatoraufgaben teilen sich auf in einen Indikatoraufgabentest, in dem die mathematikspezifischen Begabungsmerkmale aus dem Grundschulmodell (Käpnick & Fuchs 2006) überprüft werden sowie in Indikatoraufgaben zum logischen Schlussfolgern.

Hinsichtlich der qualitativen Untersuchungen wird an dieser Stelle überblicksartig eine Einzelfallstudie zu einem mathematisch begabten Jungen (Niko) vorgestellt. Niko ging zur Zeit der Fallstudie in die fünfte Klasse eines Münsteraner Gymnasiums. Seit der dritten Klasse nimmt er regelmäßig am Projekt „Mathe für kleine Asse“ teil. Er verfügt über ein sehr hohes mathematisches Begabungspotential: Im Indikatoraufgabentest für die fünften und sechsten Klassen erreichte er 75% der Gesamtpunkte (Rang 3 in der Gruppe der mbi-Schüler) und in den Aufgaben zum logischen Schlussfolgern sogar 94% der Gesamtpunkte (Rang 2 in der Gruppe der mbi-Schüler). Neben diesen sehr gut ausgeprägten mathematikspezifischen Begabungsmerkmalen wird Nikos mathematisches Begabungspotential durch eine Vielzahl gut bis sehr gut ausgeprägter begabungsstützender Persönlichkeitseigenschaften ergänzt. Diese zeigen sich in seiner großen Freude am Bearbeiten mathematischer Problemfelder sowie in seiner hohen Anstrengungsbereitschaft beim Problemlösen und Knobeln. Ausbaufähig sind hingegen Nikos Gründlichkeit beim Aufschreiben und Kontrollieren seiner Lösungen. Er verfügt über viele intrapersonale Katalysatoren, die sich förderlich auf seine Begabungsentwicklung auswirken. Zu nennen sind hier sein großer Ehrgeiz, sein sehr genaues und differenziertes Denkvermögen, Vertrauen in die eigene Leistungsfähigkeit, Freude an Herausforderungen u.v.m. Eher hemmend wirkt sich aus, dass er teilweise schnell die Geduld verliert, er manche Aufgaben zu leicht nimmt und dadurch zu Flüchtigkeitsfehlern neigt. Zu Nikos Gesamtpersönlichkeit bleibt festzuhalten, dass er laut seiner Eltern einige Schwierigkeiten im Sozialverhalten aufweist: Er hat bisher kaum tragfähige Freundschaften entwickelt, was sein Vater zum Teil darin begründet sieht, dass Niko über eine recht expressive Art verfügt und er wenig Geduld für Kinder aufbringt, die deutlich langsamer sind als er. In seiner derzeitigen Klasse ist er dennoch recht gut integriert. Nikos Eltern spielen eine wichtige Rolle bei der Entwicklung seiner mathematischen Begabung. Bereits im Kindergarten, den sie als sehr anregend betrachten, entdeckten sie seine besondere Faszination für die Welt der Zahlen. Seitdem nehmen sie sich viel Zeit, ihn auch zu Hause angemessen in seinen Interessen und seiner Entwicklung zu fördern. Bei der Auswahl des Gymnasiums war das entscheidende Kriterium für die Eltern, dass die Schule eine spezielle Förderung für mathematisch begabte und interessierte Kinder anbietet. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass sich Nikos hohes mathematisches Begabungspotential unter dem Einfluss vieler fördernder intra- und interpersonaler Katalysatoren zu einer weit überdurchschnittlichen Performanz entwickelt hat.

Ausblick

Im vorliegenden Beitrag wurden erste Erkenntnisse zu einer wissenschaftlich begründeten Kennzeichnung einer mathematischen Begabung bei Fünft- und Sechstklässlern dargestellt. Die Ergebnisse der Untersuchungen bestätigen die basierend auf einer theoretischen Analyse zunächst hypothetisch angenommenen mathematikspezifischen Begabungsmerkmale. Die Analysen der Indikatoraufgaben zum logischen Schlussfolgern verdeutlichen, dass diese Kompetenz als ein „neues“ mathematikspezifisches Begabungsmerkmal angesehen werden kann, das im Grundschulbereich noch keine derartige Bedeutung besitzt.

Es bleibt noch im Detail zu klären, wie im Schulalltag eine angemessene Identifizierung und Förderung mathematisch begabter Fünft- und Sechstklässler aussehen kann. Zu berücksichtigen ist in jedem Fall, dass eine Diagnose ein theoriebasierter und komplexer Prozess ist (Käpnick 2009), der den Einsatz von u.a. Indikatoraufgaben, Beobachtung und Befragungen einschließt. Als Anregungen für eine angemessene Förderung mathematisch begabter Schüler im Regelunterricht können der Einsatz offener Aufgabenfelder, die dem Anspruch der natürlichen Differenzierung genügen, oder die Nutzung der Begabung zur Bereicherung des Mathematikunterrichts z.B. durch Kurzvorträge oder Lernpatenschaften gelten.

Literatur

Benölken, R. (2011): Mathematisch begabte Mädchen. Untersuchungen zu geschlechts- und begabungsspezifischen Besonderheiten im Grundschulalter. Münster: WTM.

Berlinger, N. (2015): Die Bedeutung des räumlichen Vorstellungsvermögens für mathematische Begabungen bei Grundschulkindern. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchungen. Münster: WTM.

Ehrlich, N. (2013): Strukturierungskompetenzen mathematisch begabter Sechst- und Siebtklässler – Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchungen zu Niveaus und Herangehensweisen. Münster: WTM.

Fuchs, M. (2006): Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen. Empirische Untersuchungen zur Typisierung spezifischer Problembearbeitungsstile. Berlin: LIT.

Käpnick, F. (2009): Mathe für kleine Asse. Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder im 3. und 4. Schuljahr. Band 2. Berlin: Cornelsen.

Käpnick, F. (2008): Mathematisch begabte Kinder. Frankfurt am Main: Peter Lang.

Käpnick, F. (1998): „Mathe für kleine Asse“ – Das Münsteraner Konzept zur Förderung mathematisch begabter Kinder. In Käpnick, F. (Hrsg.), *Mathematisch begabte Kinder – eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft*, 138-150. Berlin: LIT.

Siegler, R.; DeLoache, J. & Eisenberg, N. (2011): Entwicklungspsychologie im Kindes- und Jugendalter. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Moderierte Sektion:

PriMaMedien
- Lernen, Lehren und Forschen
mit digitalen Medien

Christof SCHREIBER, Gießen & Silke LADEL, Saarbrücken

Sektion ‚PriMaMedien‘

Die Arbeitsgruppe ‚PriMaMedien – Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien im Mathematikunterricht in der Primarstufe‘ tagt seit 2007 regelmäßig und ist Teil des Arbeitskreises Grundschule der GDM. Die Mitglieder der Arbeitsgruppe teilen das Interesse an der Entwicklung, der Konzeption, dem Einsatz und der Bewertung digitaler Medien für den Mathematikunterricht in der Primarstufe. Dabei wird auch die Lehrerbildung für diesen Bereich berücksichtigt.

Die selbstmoderierte Sektion war sehr gut besucht. Für die GDM 2016 in Heidelberg konnten als Vortragende in der Sektion Christof Schreiber (Mathematik in Ton und Bild darstellen), Daniel Walter (Potentiale von Tablet-Apps und wie ‚rechenschwache’ SchülerInnen sie nutzen), Yves Kreis zusammen mit Amina Kafai-Afif, Ben Haas und Alexandra Reinert (Die personalisierte und mehrsprachige mathematische Lernumgebung MathemaTIC) sowie Carole Dording mit Romain Martin, Yves Kreis und Thibaud Latour (GeoGebraTAO - eine dynamische Software für ein niveauangemessenes selbstständiges Arbeiten in Geometrie?) gewonnen werden.

Die Vorträge im Einzelnen

Christof Schreiber aus Gießen zeigte die besonderen Möglichkeiten des Darstellens mathematischer Inhalte mit digitalen Medien in Schule und Lehrerbildung auf, die sich bei der Dastellung von Mathematik ‚in Ton und Bild‘ eröffnen. Dazu wurde zunächst die Erstellung von Audio-Podcasts zur Vertiefung und Reflexion mathematischer Inhalte thematisiert und dazu insbesondere die Verbindung von Schriftlichkeit und Mündlichkeit thematisiert in diesem Prozess thematisiert. Die bildliche Darstellung von didaktischen Materialen und deren Verwendung als Stop-Motion Filme wurden vorgestellt. Die beiden Nutzungsmöglichkeiten wurden dann in Bezug auf unterschiedliche Dimensionen des Erklärens eingeordnet.

Daniel Walter aus Dortmund stellte die Potentiale von Tablet-Apps vor und wie diese von ‚rechenschwachen’ Schülerinnen und Schülern genutzt werden. Er ging auf die Forderung vieler Institutionen nach dem Einsatz von Tablet-Apps im Mathematikunterricht der Grundschule ein, schilderte ne-

Beiträge zum Mathematikunterricht 2016, hrsg. v. Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg. Münster: WTM-Verlag

ben den unterrichtsorganisatorischen auch besonders mathematikdidaktische Potentiale. Im Vortrag wurden jene Potentiale illustriert, die einen Beitrag zum Aufbau mathematischen Verständnisses leisten können. Anschließend wurden Ergebnisse einer Studie bei ‚rechenschwachen' Lernenden präsentiert, die der eingangs gestellten Frage nach der Nutzung der Potentiale durch Kinder nachgeht.

Aus Luxemburg trug Yves Kreis stellvertretend für die Gruppe mit Amina Kafai-Afif, Ben Haas und Alexandra Reinert über eine personalisierte und mehrsprachige mathematische Lernumgebung unter dem Namen MathemaTIC vor. MathemaTIC ist eines der Vorzeigeprojekte der Strategie Digital (4) Education des luxemburgischen Ministeriums für Bildung, Kinder und Jugendliche. Es basiert auf dem nationalen Lehrplan, ermöglicht verschiedene pädagogische Ziele (Differenzierung, Individualisierung, Förderung und Bestätigung) und ist in vier Sprachen verfügbar. Die Entwicklung passiert in Zusammenarbeit mit den Lehrern, die in Echtzeit die Lernfortschritte ihrer Schüler, die in der Schule oder zu Hause arbeiten, verfolgen können.

Carole Dording stellte stellvertretend für die Gruppe mit Romain Martin, Yves Kreis und Thibaud Latour die Frage, ob GeoGebraTAO sich als eine dynamische Software für ein niveauangemessenes selbstständiges Arbeiten in Geometrie eignet. Durch die verschiedenen Leistungsniveaus in einer Klasse, sei es eine große Herausforderung, alle Kinder individuell zu fördern. Um den Lehrern dabei zu helfen, hat die Gruppe eine Sequenz von Lernaktivitäten mit einem GeoGebra Stimulus erstellt, bei der die Reihenfolge anhand der jeweiligen Schülerantwort bestimmt wird. Nach dem Prinzip der Binnendifferenzierung werden die Kinder mit Hilfe von Scaffolds durch die Aktivitäten geführt, um selbstständig neue geometrische Konzepte zu erforschen.

Sektionsvorträge

Schreiber, Ch.: Mathematik in Ton und Bild darstellen

Walter, D.: Potentiale von Tablet-Apps und wie ‚rechenschwache' SchülerInnen sie nutzen

Kreis, Y., Kafai-Afif, A., Haas, B. & Reinert, A.: Die personalisierte und mehrsprachige mathematische Lernumgebung MathemaTIC

Dording, C., Martin, R., Kreis, Y. & Latour, T.: GeoGebraTAO - eine dynamische Software für ein niveauangemessenes selbstständiges Arbeiten in Geometrie?

Christof SCHREIBER, Gießen

Mathematik in Ton und Bild darstellen

Der Beitrag soll einen Einblick in die besonderen Möglichkeiten bei der Verwendung digitaler Medien für das Darstellen von Mathematik geben. Es wird dazu einerseits auf das Darstellen ‚in Ton' mit der Erstellung von Audio-Podcasts (Schreiber 2011; Schreiber & Klose 2014) und andererseits auf das Darstellen ‚im Bild' als Stop-Motion Filme zu Materialien für den Mathematikunterricht eingegangen. Beides erfährt eine theoretische Einordnung über das Darstellen hinaus in Bezug auf das ‚Erklären'.

Mit Audio-Podcasts darstellen

Das mündliche Darstellen mathematischer Themen mit Audio-Podcast hat sich im Bereich der Primarstufe als Methode zur Vertiefung und Reflexion sowie zur Unterstützung von Begriffsbildungs- und Lernprozessen (Klose & Schreiber 2014) aber auch für gezielte Forschungsinteressen (Klose 2016; 2014) bewährt. Der Erstellungsprozess (s. Abb. 1) in kleinen Gruppen beginnt mit einer spontanen Audio-Aufnahme zu einem vorgegebenen Impuls, dem die Recherche zur Erstellung von Drehbuch I und eine Rohfassung zum Thema folgen. Diese Rohfassung wird in einer Redaktionssitzung mit anderen Gruppen gemeinsam mit der Lehrperson besprochen und es werden Hinweise zur Überarbeitung gegeben. Auf Grundlage des überarbeiteten Drehbuchs wird die Endfassung der Audio-Podcast erstellt. (Beispiele unter: www.uni-giessen.de/primapodcast)

Abb. 1: Erstellungsprozess der Audio-Podcasts

Auch in der Lehrerbildung wird die Methode zum forschenden Lernen genutzt, indem Studierende Audio-Podcasts mit Schülerinnen und Schülern mit Blick auf eine Forschungsfrage erstellen. Zur Vertiefung von Vorlesungsthemen wird die Methode seit einigen Semestern erfolgreich eingesetzt (Klose, Teebartz, Schreiber & Lengnink, 2014). (Beispiele unter: www.uni-giessen.de/mathepodcast)

Mit Stop-Motion Filmen darstellen

Der auf der Tagung vorgestellte Stop-Motion Film stammt aus einem Seminar, in dem der Auftrag gegeben wurde, zu einem Material für den Mathematikunterricht zwei Stop-Motion Filme zu erstellen: Einen Film, der das Material vorstellt und einen weiteren Film, der den Einsatz des vorgestellten Materials beschreibt. Ziel des Seminars war es, das Thema ‚mathematikdidaktische Materialien' zu vertiefen. Die digitalen Medien sollten so genutzt werden, dass das gewählte Material optimal in Szene gesetzt wird. Schrittweise soll so eine Sammlung entstehen, in der die Materialien aus der Lernwerkstatt präsentiert werden. Auch hierzu wurde – teilweise analog zu den Audio-Podcasts – ein Erstellungsprozess vorgegeben (s. Abb. 2):

Abb. 2: Erstellungsprozess der Stop-Motion Filme

Zunächst legen die Studierenden in Absprache mit der Seminarleitung den Inhalt der beiden Filme (das Material und den Einsatz) fest. Es folgt die Erstellung einer Sachanalyse, die auch didaktische Aspekte aufgreifen soll. Nun wird mit einer Vorlage ein Drehbuch erstellt, in dem außer den Werkzeugen und Materialien für den Film auch der grobe Verlauf dargestellt wird. Schlüsselszenen sollen dazu bereits als einzelne Fotos in der geplanten Anordnung gezeigt werden. Es folgt ein offenes Peer-Review, in dem positive Aspekte, kritische Hinweise und weitere Anmerkungen gegeben werden. Mit diesen Anregungen kann das Drehbuch überarbeitet werden und die Vorlage für den Stop-Motion Film entstehen (Beispiele unter: www.uni-giessen.de/mathstopmotion)

Ton und Bild zum Erklären

Sehr ausführlich und auf die Praxis in der Lehrerbildung bezogen wird das Erklären bei Wagner & Wörn (2011) behandelt, die sich auf Kiel (1999) beziehen. Dort wird das Erklären gegenstandsbezogen in folgende Kategorien unterteilt: *Was-Erklärungen* sind eine Art ‚Beschreibung' von Begriffen, Material etc. *Wie-Erklärungen* zeigen, wie etwas gemacht werden soll, z.B. die Anwendung von Algorithmen. *Warum-Erklärungen* besitzen nach Wagner & Wörn (2011) Parallelen zum mathematischen Beweisen und sollen etwas begründen, wie zum Beispiel einen strittigen Sachverhalt im Unterricht.

Wenn im Stop-Motion Film Material erläutert wird, findet *Erklären-was* statt. Aber auch *Erklären-wie* kommt in den Filmen zum Tragen, wenn gezeigt wird, wie mit dem Material umgegangen werden soll. Das *Erklären-warum* spielt in den Filmen kaum eine Rolle. Dies kommt hingegen in einigen von Studierenden erstellten Audio-Podcast vor, wie z.B. dem im Vortrag präsentierten zum Verhältnis von Dreieckszahlen zu Quadratzahlen (s. www.uni-giessen.de/mathepodcast/2015/02/23/mathe-mit-matt).

Dimensionen des Erklärens

Kiel, Meyer & Müller-Hill (2015, S.3) erläutern vier verschiedene Dimensionen zum Erklären, von denen ich hier beispielhaft zwei aufgreife und mit den oben beschriebenen Methoden in Beziehung setze.

Die ‚Verstehensdimension' wird als ‚Adressatenorientierung' bezeichnet (ebd.). Anders als beim Erklären in der Klasse ist der Adressat der Stop-Motion Filmen und der Audio-Podcasts nicht anwesend. Man muss sich hier einen Adressaten vorstellen. In Bezug auf den bzw. die Adressanten ist zu beachten, welches Ziel die Erklärung verfolgt und ob dieses Ziel auch für den oder die Adressaten transparent wird. Die Erwartungen der Adressaten sind abzuschätzen und es stellt sich die Frage, ob eine eher fachlich-formale oder eine eher anschauliche Erklärung gegeben werden soll. Der oder die Adressaten der Audio-Podcasts sind ‚selbst erdacht', wobei in einigen Beispielen, wie auch dem präsentierten, durch eine rahmende Geschichte ein ‚fiktiver' Adressat als sprechende Figur mit einbezogen wird. Für die Stop-Motion Filme wurden die Adressaten von mir bestimmt: Die Zielgruppe für die Stop-Motion Filme sind Personen, die sich für die Materialien in der Lernwerkstatt interessieren, also in der Regel Studierende oder Lehrkräfte.

Die ‚inhaltliche Dimension' steht für die ‚Erklärkraft im inhaltlichen Sinne' und hängt von folgenden Faktoren ab: Trägt das gewählte Beispiel über das Beispiel hinaus und kann allgemein überzeugen? Kann die herangezogene Erklärung über das gewählte Beispiel hinaus zur Systematisierung und zur Vernetzung von Wissen beitragen? Ist das Erklärte anschlussfähig zu Inhalten, die später – z.B. im Sinne eines Spiralcurriculums – vorkommen? In Bezug auf die Audio-Podcasts können die genannten Faktoren von den Erstellenden erzeugt werden. So kann z.B. für die Frage ‚Was ist Symmetrie?' zunächst die Achsensymmetrie erläutert werden, mit dem Hinweis auf andere symmetrische Abbildungen, die in weiteren Episoden aufgegriffen werden. In Bezug auf die Stop-Motion Filme sind Vernetzungspotential und Anschlussfähigkeit bereits angelegt: Die *Was-Erklärungen* sind gewissermaßen Vorgänger von *Wie-Erklärungen*, die wiederum in sich aufeinander aufbauen können.

Abschließende Hinweise

Gezeigt werden sollten in diesem Beitrag die besonderen Möglichkeiten, die digitale Medien in Bezug auf das Erklären von Schülerinnen und Schülern sowie Studierenden bieten:

Bei der Erstellung von Audio-Podcasts durch Schülerinnen und Schüler der Primarstufe werden Lernprozesse durch das Erklären angeregt und unterstützt. Der Adressat ist nicht wichtig, da nicht *mit* den Erklärungen sondern *durch* die Erklärungen gelernt werden soll. „Erklären zum Entwickeln von Wissen“ (Kiel 1999, S. 226) ist eines der Ziele bei der Erstellung. Auch „Erklären als Aushandeln von Wissen“ (ebd., S. 263) hat seinen Platz und vollzieht sich z.B. bei der Erstellung des Drehbuches.

In der Lehrerbildung können digitale Medien genutzt werden, um ‚in Ton und Bild‘ Mathematik darzustellen, Mathematik uns so zu erklären. Dabei kann neben der Vertiefung der mathematischen Inhalte auch das Erklären selbst mit unterschiedlichen Darstellungsmitteln fokussiert werden, nämlich nur als Ton oder mit Bild.

Literatur

Kiel, E. (1999). *Erklären als didaktisches Handeln.* Würzburg: Ergon Verlag.

Kiel, E., Meyer, M. & Müller-Hill (2015). Erklären - Was? Wie? WARUM? *Praxis der Mathematik in der Schule, 64*, 2-9.

Klose, R. (2016). Use and development of mathematical language in bilingual learning settings. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.). *CERME9. Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Prague: Charles University / ERME, in press.

Klose, R. (2014). PriMaPodcasts im bilingualen Mathematikunterricht. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht.* (S. 619–622). Münster: WTM.

Klose, R.; Tebaartz, P.; Schreiber, Ch. & Lengnink, K. (2014). *Audio-Podcasts zu fachmathematischen Inhalten.* Verfügbar unter http://www.lehrer-online.de/podcast-fachmathematik.php [1.3.2016]

Schreiber, Ch. & Klose, R. (2014). Audio-Podcasts zu mathematischen Themen – Begriffsbildung mit digitalen Medien. In S. Ladel & Ch. Schreiber (Hrsg.), *Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien in der Primarstufe.* (2. Band). (S. 31-60). Münster: WTM.

Schreiber, Ch. (2011). *PriMaPodcasts – Podcasts zur Mathematik in der Primarstufe.* Verfügbar unter http://www.lehrer-online.de/mathe-podcasts.php [1.3.2016]

Wagner, A. & Wörn, C. (2011). *Erklären lernen - Mathematik verstehen: Ein Praxisbuch mit Lernangeboten.* Seelze: Kallmeyer.

Daniel WALTER, Dortmund

Potentiale von Tablet-Apps und wie ‚rechenschwache' SchülerInnen sie nutzen

Digitalen Medien können nicht nur unterrichtsorganisatorische, sondern auch mathematikdidaktische Potentiale eingeräumt werden. Stellvertretend für die Gesamtheit digitaler Medien werden in diesem Beitrag zentrale mathematikdidaktische Potentiale von Tablet-Apps illustriert und ausgewählte Ergebnisse eines Forschungsprojekts dargelegt, das der Frage nachgeht, ob und wie ‚rechenschwache' Kinder diese Potentiale nutzen.

Mathematikdidaktische Potentiale von Tablet-Apps

Die folgenden fünf Potentiale können auf der Grundlage bisheriger mathematikdidaktischer Forschungsarbeiten für das Mathematik*lernen* identifiziert werden und bieten Chancen zur Überwindung zentraler konzeptueller Hürden ‚rechenschwacher' Kinder:

– *Passung von Handlung und mentaler Operation*

Tablet-Apps bietet die Chance, eine engere Passung zwischen durchgeführter Materialhandlung und intendierter mentaler Operation zu schaffen. So ist es bspw. möglich, eine virtuelle Zehnerstange *direkt* in zehn Einerwürfel aufzuspalten oder zehn Einerwürfel zu einer Zehnerstange zusammenzufassen (vgl. Sarama & Clements 2006). Vergleichbares wäre am Dienes-Material lediglich über aufwändige Tauschprozesse realisierbar.

– *Kognitive Entlastung*

‚Rechenschwache' Kinder haben häufig Schwierigkeiten, arithmetische Zusammenhänge zu entdecken, begründen und zu beschreiben. Durch das Delegieren der hierfür sekundären Aufgaben - wie das bloße Berechnen einzelner Berechnungen - können Lernende kognitiv entlastet werden, um Ressourcen für allgemeine mathematische Tätigkeiten zu schaffen. In diesem Sinne kann sich der Nutzer explizit auf operative Zahl- und Aufgabenbeziehungen fokussieren, weil die Berechnung der Ergebnisse einzelner Aufgaben an eine Software ausgelagert ist (vgl. Bezold & Ladel 2014).

– *Synchronität und Vernetzung der Darstellungsebenen*

Tablet-Apps bieten das Potential, verschiedene Repräsentationen eines mathematischen Objekts räumlich simultan und synchron darzustellen. Darüber hinaus können die miteinander vernetzten Repräsentationen auf verschiedenen Wegen virtuell-enaktiv verändert werden. Die Veränderung der ikonischen Darstellung (z.B. Hinzufügen von zehn Plättchen) kann die Anpassung des Zahlwertes erwirken. Analog kann auf die Veränderung der symbolischen Repräsentation (+10) die Anpassung der ikonischen Darstellung folgen. Dieses Potential kann Lernende dabei unterstützen, den Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsebenen nachvollziehen zu können (vgl. Schmidt-Thieme & Weigand 2015).

– *Strukturierungshilfen*

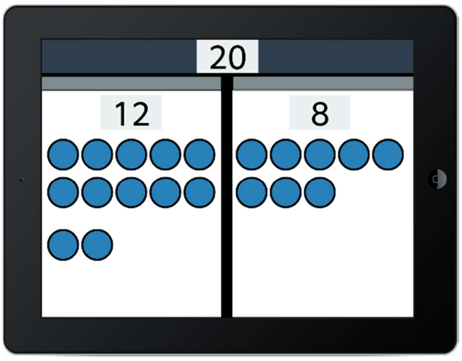
Die computergestützte Strukturierung von Plättchenmengen stellt ein weiteres Potential von Tablet-Apps dar. Dabei kann zwischen zwei Varianten von Strukturierungshilfen unterschieden werden: 1) Plättchen können per ‚Knopfdruck' geordnet werden, was durch den Lernenden *veranlasst* werden *muss*. 2) Hingegen ist es auch möglich, Plättchen *automatisch* durch die Software strukturiert darbieten zu lassen. Beide dargelegten Varianten sind an physischen Arbeitsmitteln nur schwer realisierbar (vgl. Urff 2014).

– *Multi-Touch Technologie*

Im Gegensatz zur traditionellen Mausbedienung von Software, ist es an Tablets möglich, Zahlen nicht nur sequentiell mit einzelnen, sondern simultan, mittels mehrerer Finger darzustellen. Daraus erwächst die Chance, kardinale Zahlvorstellungen zu dem bei vielen ‚rechenschwachen' Kindern präsenten einseitig ordinalen Zahlaspekt zu ergänzen, um damit einen Beitrag zur Überwindung ihrer Rechenschwierigkeiten zu leisten (vgl. Ladel & Kortenkamp 2014).

Ziel und Design der empirischen Untersuchung

Obwohl die beschriebenen mathematikdidaktischen Potentiale von Tablet-Apps vielversprechend erscheinen, mangelt es an empirischen Befunden darüber, ob und wie sie vor allem von ‚rechenschwachen' Kindern genutzt werden. Das erklärte Ziel, der vom Autor durchgeführten empirischen Untersuchung, ist es, diese Forschungslücke zu schließen.



Um das Forschungsziel erfüllen zu können, wurden zunächst ‚rechenschwache' Kinder zu Beginn ihres zweiten Schuljahres auf der Grundlage eines Diagnoseinterviews ermittelt. Anschließend folgten zwei Interviewserien, die aus jeweils drei, an unmittelbar aufeinanderfolgenden Tagen, durchgeführten Sitzungen, bestanden. Während in der ersten Interviewserie (08/09 2014, *n=19*) das *virtuelle Zwanzigerfeld* eingesetzt wurde (siehe Walter 2015a; Walter 2015b), war das *Rechentablett* (siehe Abb.) Gegenstand der zweiten Interviewserie (08/09 2015, *n=14*). Darüber hinaus wurden in beiden Interviewserien zunächst die jeweiligen physischen Entsprechungen der virtuellen Arbeitsmittel genutzt, um somit echt-enaktive Primärerfahrungen vor virtuell-enaktiven Operationen sicherstellen zu können. Zu Beginn jeder Interviewsitzung erfolgten zudem jeweils Einführungsphasen, in denen die Funktionsweisen und Potentiale der Software *gemeinsam* erarbeitet (und nicht belehrend thematisiert) wurden.

Ausgewählte Ergebnisse

Im Folgenden werden ausgewählte Ergebnisse der zweiten Interviewserie dargelegt. Exemplarisch wird dabei auf eine Aufgabe der dritten Sitzung eingegangen, in der den Kindern die Aufgabe gestellt wurde, so viele Plusaufgaben wie möglich mit dem Ergebnis ‚6' zu ermitteln und in ein Zahlenhaus einzutragen. Anschließend wurde erfragt, ob die Kinder alle möglichen Aufgaben notiert haben. Den Kindern wurde dabei freigestellt, das *Rechentablett* zu nutzen. Ferner ist zu berücksichtigen, dass die Zahlenhausvorlage Platz für mehr Aufgaben ließ als es möglichen Zerlegungen gibt. Auf diese Weise sollten die Kinder angeregt werden, ihre Bearbeitung auf Vollständigkeit zu prüfen. Von Interesse ist, ob und wie Lernende dabei den Potentialen der App Gebrauch machen.

Insgesamt konnten bei obiger Aufgabe drei Nutzungstypen identifiziert werden:

- *Explorierende Nutzung des Rechentabletts*

Dieser Nutzungstyp zeichnet sich dadurch aus, dass Lernende - auf der Basis bereits automatisierter Aufgaben - durch das i.d.R. unsystematische verschieben von (einzelnen oder mehreren) Plättchen neue Zerlegungen einer Zahl am Rechentablett entdecken. So konnte beobachtet werden, dass Lernende zunächst die Aufgabe 3+3 legen und unter Berücksichtigung der Mengeninvarianz weitere, jedoch nicht immer alle Aufgaben ermittelten.

- *Nutzung des Rechentabletts als Überprüfungsmedium*

Kinder, die diesem Typus zugeordnet wurden, nutzten die Synchronität der Darstellungsebenen geschickt aus, um die Ergebnisse von zuvor mental hergeleiteten Aufgaben zu überprüfen. Zerlegungen wurden dabei zunächst dargestellt, woraufhin das Ergebnis *ohne* eine Berechnung abgelesen und die Summanden ins Zahlenhaus eingetragen wurden.

- *Ergänzende Softwarenutzung zu subjektiv sicheren Strategien*

Aufgrund dessen, dass es den Kindern freigestellt war, das Rechentablett zu nutzen, nahmen einige Kinder den Gebrauch der Software *nicht* wahr. Stattdessen griffen sie primär auf die in ihrem bisherigen Unterricht erfolgreichen und subjektiv sicheren Zählstrategien zurück. Die Software wurde erst dann genutzt, wenn sie zählend keine weiteren Aufgaben generieren konnten. Zudem war es auffällig, dass es diesen Kindern zum Teil sehr schwer fiel, die Vollständigkeit der Zerlegungen zu begründen.

Schlussbemerkungen

Die beschriebenen Nutzungstypen zu obiger Aufgabe machen deutlich, dass Lernende das Rechentablett auf sehr unterschiedlichen Wegen, die aus mathematikdidaktischer Perspektive nicht immer adäquat erscheinen, verwenden. Potentiale digitaler Medien bleiben dabei entweder häufig ungenutzt (v.a.

Strukturierungshilfen) oder werden geschickt zum Lösen von Aufgaben ausgenutzt (Synchronität der Darstellungsebenen). Ferner fiel es den Kindern aller Nutzungstypen schwer, die Vollständigkeit der Zerlegungsaufgaben zu begründen.

Gleichwohl gilt es zu berücksichtigen, dass die gestellte Aufgabe Einfluss auf das Nutzerverhalten der SchülerInnen haben kann. So konnte im Zuge einer weiteren Aufgabe, bei der den Kindern ein systematischeres Vorgehen bei der Zerlegung der Zahl ‚7' mittels der Strategie ‚Gegensinniges Verändern' nahegelegt wurde, beobachtet werden, dass Lernende einerseits gehaltvollere Begründungen zur Vollständigkeit formulierten und tendenziell eher auf die beschriebenen Potentiale digitaler Medien zurückgriffen.

Literatur

Bezold, A. & Ladel, S. (2014). Reasoning in primary mathematics - An ICT-supported environment. *Bildung und Erziehung, 67,* 409-418.

Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2014). Number concepts - processes of internalization and externalization by the use of multi-touch technology. In C. Benz et al. (Hrsg.), *Early Mathematics Learning. Selected Papers of the POEM 2012 Conference* (S. 237-256). New York: Springer.

Sarama, J. & Clements, D. H. (2006). Mathematics, Young Students, and Computers: Software, Teaching Strategies and Professional Development. *The Mathematics Educator, 9*(2), 112-134.

Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (2015). Medien. In R. Bruder et al. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 461-490). Berlin und Heidelberg: Springer.

Urff, C. (2014). *Digitale Lernmedien zur Förderung grundlegender mathematischer Kompetenzen*. Berlin: Mensch und Buch Verlag.

Walter, D. (2015a). Wie 'rechenschwache' Kinder Tablet-Apps nutzen. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Entwicklung mathematischer Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter* (S. 95-98). Bamberg: University of Bamberg Press.

Walter, D. (2015b). Nutzungsverhalten rechenschwacher Kinder im Umgang mit Tablet-Apps. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten, C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag.

Moderierte Sektion:

Psychologische Theorien zur Erklärung von Strategien beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben

Andreas OBERSTEINER, Jana BEITLICH, München

Psychologische Theorien zur Erklärung von Strategien beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben

Die Psychologie ist eine wichtige Bezugsdisziplin der Mathematikdidaktik. Um mathematisches Lernen besser zu verstehen, sind Kenntnisse der dabei wirksamen kognitiven Mechanismen von großer Bedeutung. Dies trifft auch und besonders für die Anwendung von Strategien beim Bearbeiten von Mathematikaufgaben zu. Viele Aufgaben können nämlich durch ganz unterschiedliche Strategien gelöst werden, die wiederum unterschiedliche kognitive Anforderungen stellen.

In dieser Sektion wird der Frage nachgegangen, inwiefern Theorien und Modelle der kognitiven Psychologie hilfreich sind, Strategien beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben zu erklären. Die Studien decken eine Breite an mathematischen Inhaltsbereichen ab. Sie reichen von der Anzahlerfassung im Grundschulalter bis zum Lesen mathematischer Beweise bei Studierenden. In allen Beiträgen wird die Bedeutung der verwendeten psychologischen Theorien oder Modelle explizit diskutiert.

Der Beitrag von Vogel geht vom psychologischen Konstrukt der mentalen Modelle (z. B. Dutke, 1994) aus und stellt einen Bezug zu mathematischen Themen der Sekundarstufe her. Mit mentalen Modellen versucht man, die Struktur mentaler Abbilder realer oder imaginärer Objekte zu beschreiben. Mittlerweile ist theoretisch und zunehmend auch empirisch belegt, dass es eine strukturelle Analogie zwischen mentalen Modellen und den repräsentierten Objekten gibt. Auf Grund dieser Annahme ist die Betrachtung mentaler Modelle für die Mathematikdidaktik hoch relevant. Vogel stellt eigene Studien vor, in denen versucht wird, mentalen Modellen von Lernenden empirisch näher zu kommen.

Obersteiner und Kollegen berichten zunächst über die Strategien von Grundschulkindern bei der Analyse von Vierfeldertafeln. Sie setzen schriftliche Tests und individuelle Interviews ein, um zu analysieren, ob diese Strategien durch psychologische Theorien über Bias und Intuition erklärt werden können. Bei der Analyse von Vierfeldertafeln ist nämlich aus früheren Studien bekannt, dass Personen zu systematischen Fehleinschätzungen kommen, welche mit einem kognitiven Bias begründet werden können (Batanero, Estepa, Godino & Green, 1996). Für manche Aufgabentypen ist die Inhibition eines Bias notwendig, was sich in typischen Verhaltensmustern äußert. Obersteiner und Kollegen bestätigen diese Annahmen durch quantitative Analysen von Lösungsraten sowie durch qualitative Betrachtungen von Schüleräußerungen.

Im Beitrag von Lindmeier und Kollegen geht es um die empirische Prüfung theoretischer Annahmen zur Anzahlerfassung bei strukturierten Mengendarstellungen. Die Verwendung von Strukturen sollte es Personen ermöglichen, Anzahlen quasisimultan wahrzunehmen (Clements, 1999). Bislang ist aber kaum belegt, dass dies tatsächlich der Fall ist. Lindmeier und Kollegen messen mit Eye-Tracking die Blickbewegungen von Erstklässlern und Erwachsenen, um auf die angewendeten Strategien zu schließen.

Beitlich und Reiss setzen ebenfalls Eye Tracking ein, um Blickbewegungen von Studierenden beim Lesen mathematischer Beweise zu erfassen. Den theoretischen Rahmen der Studie stellen psychologische Theorien zum Lernen aus Text und Bild dar (z. B. Schnotz, 2005). Obwohl das Lernen aus unterschiedlichen Modalitäten hilfreich sein sollte, ist bisher kaum untersucht, ob Lernende speziell beim mathematischen Lernen Visualisierungen überhaupt nutzen. Beitlich und Reiss gehen auch der Frage nach, ob Lernende versuchen, die Information aus Text und Bild zu integrieren, indem sie zwischen beiden Darstellungsmodalitäten hin und her springen. Erste Ergebnisse deuten darauf hin, dass dies tatsächlich der Fall ist.

Sektionsvorträge

Vogel, M.: Mentale Modelle als Mittel der Beschreibung in der Mathematikdidaktik.

Obersteiner, A. Bernhard, M. & Reiss, K.: Strategien bei der Analyse von Vierfeldertafeln in der Grundschule: Die Rolle von Intuition und Bias.

Lindmeier, A., Dunekacke, S. & Heinze, A.: Strategien bei der Anzahlerfassung in strukturierten Zahldarstellungen – eine vergleichende Eye-Tracking Studie.

Beitlich, J. & Reiss, K.: Blickbewegungen von Studierenden auf Text und Bild beim Lesen mathematischer Beweise.

Literatur

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. D., & Green, D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 151–169.

Clements, D. H. (1999). Subitizing: what is it? Why teach it? *Teaching Children Mathematics, 5*, 400–405.

Dutke, S. (1994). *Mentale Modelle: Konstrukte des Wissens und Verstehens: kognitionspsychologische Grundlagen für die Software-Ergonomie*. Göttingen: Verlag für Angewandte Psychologie.

Schnotz, W. (2005). An Integrated Model of Text and Picture Comprehension. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (pp. 49-69). Cambridge: Cambridge University Press.

Markus VOGEL, Heidelberg

Mentale Modelle – Ausgewählte Aspekte mathematikdidaktischer Adaptionen

In diesem Beitrag werden theoretische Grundlagen des psychologischen Konstrukts der mentalen Modelle umrissen, zum in der Mathematikdidaktik häufig gebrauchten Begriff der Grundvorstellung in Beziehung gesetzt und Adaptionen von empirischen Forschungsansätzen skizziert.

Motivation

Wenn die im Unterricht verwendeten Darstellungen eines Lerngegenstandes selbst bei „noch so guter Illustrierung und sprachlicher Vermittlung" (Winter, 1983) der wesentlichen mathematischen Strukturen nicht an das Denk- und Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler anknüpfen können, wird die unterrichtliche Vermittlung wenig Aussicht auf Erfolg bei dem haben, was Vogel und Wittmann (2010) den (sukzessiven) Aufbau tragfähiger Vorstellungen nennen. Dabei ist zu fragen, was dieser – aus praktisch-intuitiver Sicht womöglich klare – terminus technicus von tragfähigen Vorstellungen zu mathematischen Begriffen oder Verfahren meint. Tragfähige Vorstellungen werden in der Mathematikdidaktik häufig über Grundvorstellungen beschrieben, die ihrerseits mit dem kognitionspsychologischen Konstrukt der mentalen Modelle konnotiert werden.

Theorie

Grundvorstellungen: Die Frage, was im Mathematikunterricht an Strukturen mathematischer Begrifflichkeiten oder Verfahren gelernt werden soll, lässt sich durch stoffdidaktische Untersuchungen, d. h. fachlich-epistemologische Analysen von Lerninhalten beantworten. In diesem Zusammenhang wird häufig von den *Grundvorstellungen* mathematischer Begriffe und Verfahren gesprochen (Vom Hofe, 1995). Grundvorstellungen konkretisieren mathematische Strukturen überwiegend anhand von Sachkontexten und darin stattfindenden Handlungen. Sie stellen wesentliche mathematische Strukturen eines Begriffs oder Verfahrens auf eine Art und Weise dar, die für Schülerinnen und Schüler nachvollzogen werden können und daraus ihr didaktisches Potential entfalten. Zu einem mathematischen Begriff oder Verfahren gibt es häufig mehrere passende Grundvorstellungen, Beispiele sind: Grundvorstellungen zur Division als Verteilen und als Aufteilen (vgl. z. B. Vogel & Wittmann, 2010), Grundvorstellungen zu Funktionen (Zuordnung, Kovariation und Vorstellung als Ganzes, vgl. z. B. Vollrath, 2003) oder Grundvorstellungen bei Brüchen als „Bruch als Teil eines Ganzen" einerseits und „Bruch als Teil mehrerer Ganzer" andererseits (vgl. Padberg, 1978). In diesem Sinn werden Grundvorstellungen als instruktionale Modelle im Sinne von Seel (2003) verstanden, die nach didaktischen

Gesichtspunkten gestaltet sind und in einer normativen Weise als Vorlagen für tragfähige Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler dienen. Grundvorstellungen werden jedoch auch in deskriptiver Weise für Erklärungsmodelle von Schülerinnen und Schülern verwendet, die in dem System individueller Erfahrungsbereiche verankert aktivierbar sind (Vom Hofe, 1995). Diese Doppelbedeutung hat dem Konzept der Grundvorstellungen verschiedentlich auch Kritik eingebracht (vgl. Weber, 2007) und macht die Klärung der begrifflichen Verwendung nötig, wenn damit gearbeitet wird (z. B. Prediger, 2008).

Mentale Modelle: Grundvorstellungen werden unter Rückgriff auf das Konstrukt der mentalen Modelle definiert: „Unter Grundvorstellungen werden mentale Modelle mathematischer Begriffe und Verfahren verstanden, die ausgebildet werden müssen, um zwischen Mathematik, Individuum und Realität zu vermitteln." (Bruder, Hefendehl-Hebeker, Schmidt-Thieme, & Weigand, 2015) oder „'Grundvorstellungen' are mental models of mathematical content." (Kleine, Jordan, & Harvey, 2005). Dieser Rückgriff auf das psychologische Konstrukt macht eine (zumindest in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik selten aufzufindende) begriffliche Klärung notwendig.

Mentale Modelle dienen in ihrer kognitiven Funktion dem Verstehen eines Ausschnitts der realen Welt und bilden eine Grundlage für die Planung und Steuerung von Handlungen (vgl. Dutke, 1994). In der weithin akzeptierten Definition von Schnotz und Bannert (1999) gehen alle konstitutiven begrifflichen Eigenschaften ein: „Ein mentales Modell [...] ist ein internes Quasi-Objekt, das in einer Struktur- oder Funktionsanalogie zu dem dargestellten Gegenstand steht und diesen aufgrund bestimmter inhärenter Struktureigenschaften repräsentiert." Mentale Modelle sind entweder wahrnehmungsnahe Analogien oder als Ergebnisse von Denkvorstellungen abstrakte Analogien (physical models vs. conceptual models, Johnson-Laird, 1983). Welche Eigenschaften eines Originals in die mentale Modellkonstruktion eingehen, hängt vom Vorwissen und von der Intention des modellbildenden Subjekts ab (Seel, 1991). Entscheidendes Merkmal ist die Prozessfähigkeit eines mentalen Modells (Seel, 2003), d.h. es erlaubt, ohne physischen, oder externen Rückgriff auf das Original mit dem dargestellten Inhalt qualitativ gedanklich zu arbeiten (z. B. einen Vorgang gedanklich zu simulieren und Vorhersagen zu treffen). Auf diese Weise kann auf der Basis vorhandenen Wissens über mentale Modelle neues Wissen durch Schlussfolgerungen aktiv erzeugt werden. Die Fähigkeit hierzu hängt außer von den individuellen Voraussetzungen noch von der Situation und der Problemkontextualisierung ab (vgl. Dutke, 1994). Mentale Modelle sind ein zentrales Element aktueller Theorien der Informationsverarbeitung multipler Repräsentationen (vgl. Schnotz & Bannert, 1999).

Bereits aus dieser sehr groben Zusammenfassung geht hervor, dass mentale Modelle in nicht normativer, sondern deskriptiver Weise das subjektive Wissen von Personen repräsentieren (vgl. Seel, 2003). Bezogen auf das begrifflich Verhältnis von Grundvorstellungen, mentalen Modellen und tragfähigen Vorstellungen lässt sich zusammenfassen: Grundvorstellungen (im normativen Sinn verstanden, s. o.) beschreiben als Teil einer didaktisch aufbereiteten instruktionalen Welt (vgl. Seel, 2003) aus einer fachlich-epistemologischen Perspektive, was in die Entwicklung mathematischer mentaler Modelle als Teil einer subjektiven Welt (vgl. Seel, 2003) eingehen soll: Wenn sie wesentliche mathematische Strukturen widerspiegeln (Strukturanalogie), sich beim mathematischen Arbeiten als flexibel und übertragbar erweisen (Funktionsanalogie) und deshalb eine Argumentationsgrundlage für belastbare Schlussfolgerungen bilden können, kann man von Tragfähigkeit sprechen (vgl. Vogel & Wittmann, 2010). Ob eine Vorstellung tragfähig ist oder nicht, entscheidet sich letztlich am Erfolg in einer konkreten Situation des Mathematikunterrichts.

Adaptionen im empirischen Forschungsfeld

Die Eigenschaften der Struktur- und Funktionsanalogie haben sich als nützlich erwiesen, um zum Zweck der Diagnose von primären statistischen Vorstellungen von jungen Schülerinnen und Schülern theoriegeleitet schwierigkeitsgestufte Aufgaben zu konstruieren, die darauf zielen, hinsichtlich zugrundeliegender Grundvorstellungen unterschiedlich elaborierte mentale Modelle aufzurufen: Eine Entscheidungssituation, deren Problemhaltigkeit sich einerseits aus der Analyse von gegebenen Daten sowie involvierten Personen und Objekten ergibt (Struktur) und andererseits der Erfordernis ergab, probabilistische mentale Simulationen anzustellen (Funktion) und darauf basierend prognostische Entscheidungen zu treffen (Schlussfolgerungen). Theoriegeleitet ließ sich eine Abstufung von vier Schwierigkeitsgraden ableiten, die sich im gegebenen Informationsgehalt zu verfügbaren Daten (gegeben: ja/nein) und Objekten (gegeben: ja/nein) einerseits sowie den Erfordernissen von mentaler Simulation (erforderlich: ja/nein) und Datengenerierung (sichtbar: ja/nein) andererseits bemisst. Die die so erfolgte Aufgabenkonstruktion ließ sich durch (auf 5%-Niveau) signifikant unterschiedliche Lösungshäufigkeiten und interpretative Evidenz von Transskriptanalysen als empirisch validiert betrachten (vgl. Eichler & Vogel, 2012). Während es sich im vorgenannten Fall eher um den Typus von wahrnehmungsnahen mentalen Modellen (s. o.) handelt, sind momentane interdisziplinäre Forschungsaktivitäten bei der strukturellen Adaption des Aufgabenkonstruktionsprinzips in den Themenfeldern der Aussagenlogik und der (Schul-)Algebra eher im Bereich der Denkvorstellungen anzusiedeln. Langfristiges Ziel sind theoriegeleitete und empirisch validierte

Konstruktionsprinzipien, die für gezielte Aufgabenstellungen in themenspezifischen Diagnoseinstrumenten Verwendung finden können.

Literatur

Dutke, S. (1994). Mentale Modelle: Konstrukte des Wissens und Verstehens : kognitionspsychologische Grundlagen für die Software-Ergonomie. Arbeit und Technik: Bd. 4. Göttingen: Verlag für Angewandte Psychologie.

Kleine, M., Jordan, A., & Harvey, E. (2005). With a focus on 'Grundvorstellungen' Part 1: a theoretical integration into current concepts. ZDM, 37(3), 226–233.

Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H. G. (2015). Handbuch der Mathematikdidaktik: Springer Berlin Heidelberg.

Schnotz, W., & Bannert, M. (1999). Einflüsse der Visualisierungsform auf die Konstruktion mentaler Modelle beim Text- und Bildverstehen. Experimental Psychology (formerly \"Zeitschrift für Experimentelle Psychologie\"), 46(3), 217–236.

Eichler, A., & Vogel, M. (2012). Basic modelling of uncertainty: Young students' mental models. ZDM, 44(7), 841–854.

Seel, N. M. (1991). Weltwissen und mentale Modelle. Göttingen, Zürich [u.a.]: Hogrefe, Verl. für Psychologie.

Johnson-Laird, P. N. (1983). Mental models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness. Cognitive science series: Vol. 6. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. Learning and Instruction, 18(1), 3–17.

Vom Hofe, R. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Texte zur Didaktik der Mathematik. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum, Akad. Verl.

Vogel, M., & Wittmann, G. (2010). So wird's klar - tragfähige Vorstellungen erarbeiten. Praxis der Mathematik in der Schule, 52(32), 1–8.

Winter, H. (1983). Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematilkunterricht. Journal für Mathematikdidaktik, 4(3), 175–204.

Vollrath, H.-J. (2003). Algebra in der Sekundarstufe (2., Aufl.). Mathematik Primar- und Sekundarstufe. Heidelberg, Berlin: Spektrum, Akad. Verl.

Weber, C. (2007). Mathematische Vorstellungen bilden: Praxis und Theorie von Vorstellungsübungen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II (1. Aufl.). Bern: Hep verl.

Seel, N. M. (2003). Psychologie des Lernens. München, Basel: Reinhardt.

Padberg, F. (1978). Didaktik der Bruchrechnung. Studienbücher Mathematik Didaktik. Freiburg: Herder.

Anke LINDMEIER, Aiso HEINZE, IPN Kiel

Strategien bei der Anzahlerfassung in strukturierten Zahldarstellungen – eine vergleichende Eye-Tracking Studie

Im Mathematikunterricht werden Arbeitsmittel genutzt, um mentale Modelle zu abstrakten mathematischen Begriffen zu entwickeln, so dass mathematische Probleme schnell, flexibel und effektiv gelöst werden können. Die berichtete Studie nutzt Eye-Tracking Methoden, um Strategien bei der Bearbeitung von Anzahlerkennungsaufgaben in verschiedenen Darstellungen zugänglich zu machen.

Nutzung strukturierter Zahldarstellungen beim Zahlerwerb

Während der Phase des Zahlerwerbs werden strukturierte Zahldarstellungen genutzt, um die natürlichen Zahlen und deren Struktur zugänglich zu machen. Sie bestehen zum einen aus Zählobjekten, mit deren Hilfe konkrete Anzahlen abstrakt repräsentiert werden können. Darüberhinaus werden spezielle Arbeitsmittel wie der 20er Rahmen oder das 10er Feld empfohlen, wobei hier Begründungen auf Basis psychologischer Erkenntnisse fachliche und fachdidaktische ergänzen (z.B. Benz, 2014). Die Präferenz für eine 10er Strukturierung fußt z.B. auf der Verwendung des Dezimalsystems als kulturabhängiges System der Darstellung natürlicher Zahlen, eine fachlichen Begründung. Die weitere Strukturierung in 5ern lässt sich durch die generische Fähigkeit, eine kleine Anzahl von Dingen ohne Zählen zu erfassen rechtfertigen (subitizing, Mandler & Shebo, 1982). Diese Fähigkeit kann durch gelernte Strukturierungen zum sogenannten conceptual subitizing (z.B. Clements, 1999) ausgebaut werden, so dass die Strukturierung der Arbeitsmittel die Anwendung dieser Fähigkeiten ermöglicht. In diesem Sinne kann eine Strategie zur schnellen Anzahlerfassung (z.B. von fünf Objekten), die auf conceptual subitizing statt auf einem vollständigen Zählprozess basiert als komplexe Strategie bezeichnet werden. Sie ist zudem als schneller und weniger fehleranfällig einzustufen als die universelle Zählstrategie (zsf. s.a. Obersteiner et al., 2014).

Forschungsfragen

Der umfassenden theoretischen Begründung für strukturierte Arbeitsmittel stehen wenige Nachweise gegenüber, dass Lernende diese Arbeitsmittel wie beschrieben nutzen (s. aber Obersteiner et al., 2014). Zudem ist unklar, ob verschiedene aber strukturell äquivalente Arbeitsmittel spezifische Vor- oder Nachteile für den Erwerb mentaler Modelle haben. Es gibt Hinweise darauf, dass der Transfer zwischen unterschiedlichen strukturell äquivalenten Arbeitsmitteln nicht automatisch angenommen werden kann (z.B. Radatz, 1991). Empirische Belege aus vergleichenden Untersuchungen sind aber rar. Es ist zudem eine offene Frage, ob Methoden wie Eye-Tracking und Reaktionszeitexperiment, die in der Kognitionspsychologie für ähnlichen Fragestellungen genutzt werden, hier angewendet werden können.

Anlage der Studie und Forschungsfragen

In dieser Studie sollte entsprechend untersucht, ob mit Hilfe von Eye-Tracking verschiedene Strategien bei der Lösung von Aufgaben an strukturierten Darstellungen (10er Feld, Fingerbilder, 20er Feld, 20er Rahmen) sichtbar gemacht werden können. Dazu wurden Aufgabenreihen zu einem basalen Aufgabentyp (Anzahlerkennung) entwickelt, die bei theoriekonformer Nutzung der Arbeitsmittel für Gruppen mit unterschiedlicher Expertise zu charakteristischen Mustern bezüglich der Blickbewegungen und des Lösungsverhalten (Geschwindigkeit und Korrektheit) führen sollten. Bei der Konzeption der Eye-Tracking Studie wurden entsprechend weitere kognitionspsychologische Theorien über das Verhältnis von objektiv messbaren Verhaltensdaten (Blickbewegung, Geschwindigkeit, Korrektheit, zsf. Funke, 1996) zu kognitiven Prozessen genutzt. Insgesamt leiten sich die folgenden Forschungsfragen ab:

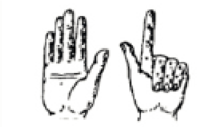
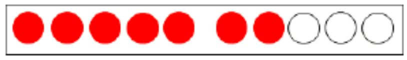
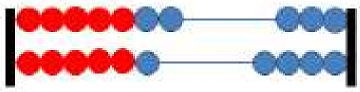
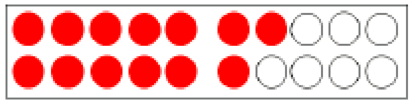
1. Können mit Hilfe von Eye-Tracking bekannte Strategien bei der Anzahlerkennung in strukturierten Zahldarstellungen identifiziert werden?

2. Können Erwachsene mit starkem mathematischen Hintergrund die zugrundeliegenden Strukturen besser nutzen als Lernende der ersten Jahrgangsstufe? Insbesondere: Lösen die Erwachsenen Anzahlerkennungsaufgaben schneller, mit einer höheren Lösungsrate und nutzen sie stärker strukturbasierte Strategien?

3. Zeigen sich Unterschiede in der Strategienutzung bei Vergleich zwischen strukturell ähnlichen Darstellungen?

Stichprobe und Instrumente

Insgesamt nahmen 9 Kinder (2 Mädchen) der ersten Jahrgangsstufe im Alter von M = 6;9 (SD = 0;5) Jahre;Monate und 11 MINT-Studierende (5 Frauen; Alter M = 25;0, SD=1;1) an der Studie teil. Insgesamt wurden zwei Aufgabensets entwickelt, wobei die acht Aufgaben des Sets A aus dem Zahlenraum bis 10, die acht Aufgaben aus dem bis 20 (Set B) waren und je in zwei Bedingungen vorgelegt wurden. Die Aufgaben aus Set A wurden als Fingerbilder (Bedingung a) sowie im 10er Feld (Bedingung f), die aus Set B im 20er Rahmen (Bedingung a) sowie im 20er-Feld (Bedingung f) repräsentiert (vgl. Tab. 1). Neben Darstellungen im Standardformat (Auffüllen von Zeilen, vgl. Tab. 1 Beispiel Set A) wurden auch andere Formate genutzt (z.B. Doppelstrukturen, vgl. Tab. 1 Beispiel Set B).

	Bedingung a	*Bedingung f*
Set A *(8 Aufgaben)*		
Set B *(8 Aufgaben)*		

Tab. 1: Genutzte strukturierte Zahldarstellungen in den vier Aufgabensets der Studie

Die Aufgaben wurden am Computer in einer Kombination aus Eyetracking mit Reaktionszeitexperiment bearbeitet. Alle Studienteilnehmenden bearbeiteten die Aufgaben in allen vier Bedingungen. Dazu wurde eine Darstellung gezeigt und die Teilnehmenden mussten eine Taste drücken sobald sie die Anzahl erkannt hatten (Erkennungsphase). Im Anschluss wurde eine Zahl vorgeschlagen und sie mussten per Tastendruck entscheiden, ob die vorgeschlagene Zahl der repräsentierten Anzahl entspricht. Blickbewegungen sowie Bearbeitungszeiten wurden dabei vollständig aufgezeichnet.

Strategisches Element	*Ankerbeispiel*
Nutzung der 5	z.B. Erkennung von ••••• •◦◦◦◦ Fokus auf Position 5 / Sakkade zur Pos. 6
Nutzung der 10	z.B. Erkennung von 9 ••••• ••••◦ Fokus auf Pos. 10 / Sakkade zur Pos. 9
Nutzung von Doppelstrukturen	z.B. Erkennung von •••◦◦ ◦◦••• Fokus auf Pos. 3 / Sakkade zur Pos. 10 / Sakkade zur Pos. 1 / Sakkade zur Pos. 8
Kombination der oben genannten strategischen Elemente kann zusätzlich Elemente des Subitizings enthalten (bis zur Anzahl von 3)	

Tab. 2: Ausschnitt aus Kodiermanual, Gruppe 4: “rein strukturbasierte Strategien”

Um aus den Rohdaten auf genutzte Strategien schließen zu können, wurde auf Basis einer Literaturrecherche ein Kodierschema entwickelt, das Blickbewegungspfadmuster (scanpathes), bestehend aus Fixationen und Sakkaden als schnellen Übergangsbewegungen (vgl. Holmqvist et al., 2011), Strategien zuordnet. Dazu wurden 4 Gruppen von Strategien unterschieden: Zwei Gruppen werden dabei als nicht-strukturbasiert charakterisiert (Gruppe 1: Zählstrategien, Gruppe 2: Subitizing bis zur Anzahl von 3), zwei weitere Gruppen von Strategien nutzen hingegen Strukturen (Gruppe 3: strukturbasierte Strategien kombiniert mit Zählstrategien, Gruppe 4: rein strukturbasierte Strategien, vgl. Auszug aus dem Kodiermanual in Tab. 2).

Ergebnisse

Insgesamt konnten in 80% der Fälle (von maximal 32 Aufgaben x 20 Probanden) Nutzungsstrategien identifiziert werden. Die Erwachsenen zeigten im Vergleich zu den Kindern der ersten Jahrgangsstufe komplexere Strategien und lösten die Aufgaben schneller (chi^2- bzw. t-Test mit $p < 0{,}001$). Für die eher basale Aufgabe der Anzahlerkennung war die elaboriertere Nutzung nicht in unterschiedlichen Lösungsraten zu erkennen (Deckeneffekt, t-Test $p < 0{,}5$). In einer explorativen Analyse zeigten sich unterschiedliche Nutzungsstrategien zwischen verschiedenen aber strukturgleichen Arbeitsmitteln, so dass beispielsweise weniger komplexe Strategien bei Fingerbildern als beim Zehner-Feld sichtbar wurden.

Zusammenfassend zeigten sich also theoriekonforme Ergebnisse in Bezug auf das Nutzungsverhalten der kontrastierten Gruppen, was das weitere Potenzial dieses Forschungszugriffs erkennbar macht. Zudem gibt es Hinweise darauf, dass durch die vergleichende Betrachtung von strukturell äquivalenten aber in Bezug auf andere Merkmale unterschiedlichen Arbeitsmittel durch die genutzten Methoden Hinweise auf eine unterschiedliche Wirkung der Arbeitsmittel gewonnen werden können. Dies kann zu einer differenzierten Bewertung weiterer Merkmale führen, die unter einem mathematikdidaktischen Blickwinkel zunächst vielleicht weniger wichtig erscheinen.

Literatur

Benz, C. (2014). Identifying quantities – Children's constructions to compose collections from parts or decompose collections into parts. In U. Kortenkamp, B. Brandt, C. Benz, G. Krummheuer, S. Ladel, & R. Vogel (Hrsg.). *Early Mathematics Learning* (S. 189-203). Springer: New York.

Clements, D. H. (1999). Subitizing: what is it? Why teach it? *Teaching Children Mathematics, 5*, 400–405.

Funke, J. (1996). Methoden der Kognitiven Psychologie. In E. Erdfelder, R. Mausfeld, T. Meiser, & G. Rudinger (Hrsg.), *Handbuch Quantitative Methoden* (S. 515-528). Beltz PVU: Weinheim.

Holmqvist, K., Nyström, M., Andersson, R., Dewhurst, R., Jarodzka, H., & Van de Weijer, J. (2011). *Eye tracking: A comprehensive guide to methods and measures*. Oxford University Press.

Johnson-Laird, P. (1983). *Mental models.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Mandler, G., & Shebo, B. J. (1982). Subitizing: An analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology: General, 111*(1), 1.

Obersteiner, A., Reiss, K., Ufer, S., Luwel, K., & Verschaffel, L. (2014). Do first graders make efficient use of external number representations? The case of the twenty-frame. *Cognition and Instruction, 32*, 353–373.

Radatz, H. (1991). Einige Beobachtungen bei rechenschwachen Grundschülern. In J.-H. Lorenz (Hrsg.) *Störungen beim Mathematiklernen* (S. 74-89). *Köln: Aulis*

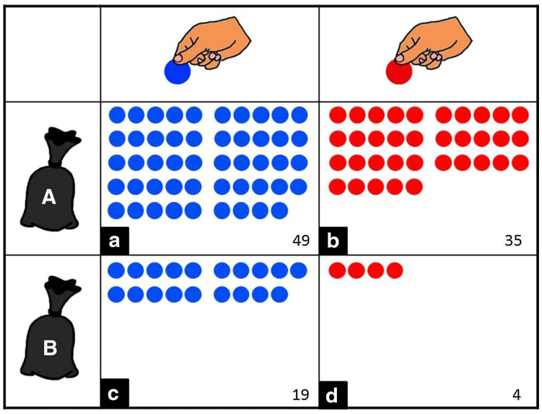
Andreas OBERSTEINER, Matthias BERNHARD, Kristina REISS, München

Strategien bei der Analyse von Vierfeldertafeln in der Grundschule: Die Rolle von Intuition und Bias

Die Leitidee Daten und Zufall beinhaltet die Fähigkeit, Entscheidungen auf der Basis vorliegender Daten zu treffen (KMK, 2005). Grundschulkinder können einfache Aufgaben zu Vierfeldertafeln erfolgreich bearbeiten, machen aber auch typische Fehler bei bestimmten Aufgabentypen (Shaklee & Paszek, 1985; Reiss, Barchfeld, Lindmeier, Sodian & Ufer, 2011). Psychologische Theorien lassen vermuten, dass diese Fehler nicht nur auf mangelndes konzeptuelles Wissen, sondern auch auf intuitive Herangehensweisen und damit verbundene kognitive Bias zurückzuführen sind. In diesem Beitrag untersuchen wir den Einfluss zweier Arten von Bias, nämlich des Base-Rate Bias und des Whole Number Bias. In zwei Studien gehen wir der Frage nach, ob das Lösungsverhalten von Schülerinnen und Schülern im zweiten beziehungsweise vierten Schuljahr unter Annahme dieser Bias erklärt werden kann.

1. Bias beim Arbeiten mit Vierfeldertafeln

Mit Vierfeldertafeln lassen sich Zusammenhänge zwischen zwei Variablen darstellen. Die Abbildung zeigt eine Vierfeldertafel, wie sie in der vorliegenden Studie verwendet wurde. Zwei Beutel A und B enthalten rote und blaue Chips unbekannter Anzahlen. In einem vorangegangenen (fiktiven) Experiment wurden mehrfach Chips mit Zurücklegen aus den Beuteln gezogen. Die Ergebnisse sind in der Vierfeldertafel dargestellt. Nun möchte man einen blauen Chip ziehen. Die Frage ist, ob es besser ist, aus Beutel A oder aus Beutel B zu ziehen oder ob es keinen Unterschied macht.



Um solche Aufgaben korrekt zu lösen, müssen im Allgemeinen die Anteile der blauen Chips an der Gesamtzahl der Chips (oder die Verhältnisse aus blauen und roten Chips) in beiden Beuteln verglichen werden.

Der *Base-Rate Bias* beschreibt das Phänomen, dass Information über die Grundgesamtheit ignoriert wird. Im Fall von Vierfeldertafelanalysen würde dies bedeuten, dass Personen lediglich Zellen mit positiver Information betrachten, die übrigen Zellen aber außer Acht lassen. Dies würde sich in einer „a-versus-c-Strategie“ äußern, bei der man sich für den Beutel entscheidet, der mehr blaue Chips enthält. Der *Whole Number Bias* beschreibt das Phänomen, dass beim Vergleich von Verhältnissen nicht der Quotient zwischen den entsprechenden Häufigkeiten, sondern deren Differenz betrachtet wird. Im vorliegenden Kontext würde man sich nicht auf das Verhältnis der Häufigkeiten in den Zellen, sondern auf deren Differenz stützen, also eine „additive Strategie“ statt einer „multiplikativen Strategie“ anwenden. Beispielsweise würde man sich in obigem Beispiel für Beutel B entscheiden (was in diesem Fall korrekt wäre), weil die Differenz zwischen blauen und roten Chips in Beutel B (15) größer ist als in Beutel A (14).

2. Forschungsfragen

Wir untersuchen die Frage, welche Strategien Schülerinnen und Schüler im zweiten und vierten Schuljahr anwenden, um Aufgaben mit Vierfeldertafeln zu bearbeiten. Unter der Annahme der oben genannten Bias ist zu vermuten, dass die Schülerinnen und Schüler häufig nicht eine (korrekte) multiplikative Strategie, sondern in systematischer Weise a-versus-c-Strategien und additive Strategien anwenden. Entsprechend ist zu erwarten, dass die Lösungsraten der Aufgaben davon abhängen, mit welchen Strategien sie lösbar sind. Für Aufgaben vom Typ a-versus-c (also für Aufgaben, bei denen eine a-versus-c-Strategie zur richtigen Entscheidung führt), sollten sich höhere Lösungsraten zeigen als für Aufgaben vom Typ additiv und für diese wiederum höhere als für Aufgaben vom Typ multiplikativ.

Wir fassen im Folgenden die Ergebnisse zweier Studien zusammen. Für Details verweisen wir auf Obersteiner, Bernhard und Reiss (2015).

3. Studie 1

Die erste Studie hatte das Ziel, Strategien bei Schülerinnen und Schülern im zweiten Schuljahr mit Hilfe von schriftlichen Tests zu erheben.

3.1 Methode

Die Stichprobe bestand aus 231 Schülerinnen und Schülern im zweiten Schuljahr, die im Unterricht noch keine Vorerfahrung mit Vierfeldertafeln gemacht hatten. Sie bearbeiteten einen schriftlichen Test mit acht Items vom Typ a-versus-c, additiv oder multiplikativ. Die Zuordnung der Strategien erfolgte mit dem so genannten Rule-Assessment Approach. Bei diesem Ansatz wird davon ausgegangen, dass eine Person konsequent eine bestimmte Strategie anwendet. Da die Aufgabentypen als hierarchisch angenommen werden, kann aus dem Antwortmuster über alle Aufgaben hinweg auf die individuelle Strategie geschlossen werden (s. Obersteiner et al., 2015).

3.2 Ergebnisse

Wie erwartet unterschieden sich die Lösungsraten der Aufgaben hoch signifikant voneinander und waren am höchsten für a-versus-c Items ($M = 94\%$), gefolgt von additiven Items ($M = 56\%$) und multiplikativen Items ($M = 21\%$). 89% der Schülerinnen und Schüler konnten mit dem Rule-Assessment Approach einer Strategie zugeordnet werden. Demnach wendeten 27% der Kinder konsequent a-versus-c Strategien an, 32% additive Strategien und 30% multiplikative Strategien. Der hohe Anteil an Kindern mit multiplikativen Strategien ist überraschend und kann dadurch erklärt werden, dass für die Zuordnung zur multiplikativen Strategien die Lösung eines Items mit einem besonders einfachen Zahlenverhältnis ausreichend war. Lediglich 1% der Kinder lösten darüber hinaus ein weiteres multiplikatives Item, bei dem das Zahlenverhältnis schwieriger zu bestimmen war.

4. Studie 2

In der zweiten Studie wurden Aufgaben mit Vierfeldertafeln in einer Interviewsituation präsentiert. Die Kodierung der Strategien erfolgte an Hand der verbal geäußerten Begründungen.

4.1 Methode

Die Teilnehmer an Studie 2 waren 24 Schülerinnen und Schüler im zweiten und 21 Schülerinnen und Schüler im vierten Schuljahr. Sie lösten neun Items der drei in Studie 1 verwendeten Typen (a-versus-c, additiv, multiplikativ). Die Kinder wurden zunächst nach ihrer Entscheidung gefragt und anschließend gebeten, ihre Entscheidung zu begründen.

4.2 Ergebnisse

Die Lösungsraten für die drei Aufgabentypen waren ähnlich zu denen in Studie 1, wobei sie für Schülerinnen und Schüler in Klasse 4 höher waren als in Klasse 2. Die Kodierung der von den Schülerinnen und Schülern gegebenen Begründungen ergab eine Vielzahl an Strategien (s. untenstehende Tabelle). Wie erwartet kamen in beiden Klassenstufen Strategien, in denen nur zwei der vier Zellen berücksichtigt wurden (in der Tabelle als „2-Zellen“ bezeichnet) und additive Strategien am häufigsten vor. Unter den 2-Zellen-Strategien war die a-versus-c-Strategie mit Abstand die häufigste. Bemerkenswert ist, dass multiplikative Strategien kaum eine Rolle spielten. Für die Viertklässler ist dies überraschend, da für diese die mittlere Lösungsrate für multiplikative Items bei 38% lag.

	Häufigkeit in %	
Strategie	Klasse 2	Klasse 4
2 Zellen	52.8	34.9
a-versus-c	36.6	18.5
b-versus-d	7.9	4.8
a-versus-b	3.7	4.2
c-versus-d	1.9	3.7
additiv	31.5	53.4
1 Zelle	4.6	2.1
multiplikativ	1.9	1.6
andere/fehlend	9.2	8.0

5. Diskussion

Bereits Grundschulkinder sind in der Lage, Aufgaben zu Vierfeldertafeln erfolgreich zu bearbeiten. Typische Fehlstrategien sind die a-versus-c-Strategie, bei der nur die Information aus zwei der vier Zellen berücksichtigt wird, sowie eine additive Strategie, bei der die additiven und nicht die multiplikativen Beziehungen zwischen den Zellhäufigkeiten betrachtet werden. Diese Strategien sind mit der Annahme vereinbar, dass Schülerinnen und Schüler bei ihrem Vorgehen von einem Base Rate Bias und einem Whole Number Bias geleitet werden. Obwohl weitere Ursachen für Fehlstrategien (etwa unzureichendes konzeptuelles Wissen) anzunehmen sind, legen Befunde für Bias selbst bei Erwachsenen (Lehner & Reiss, 2015) diese Interpretation nahe. Beim Unterrichten von Vierfeldertafeln könnte es deshalb vorteilhaft sein, neben dem konzeptuellen Wissen auch das Vorhandensein systematischer Bias explizit zu thematisieren.

Literatur

KMK=Kultusministerkonferenz (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*. KMK: Bonn.

Lehner, M. & Reiss, K. (2015). Eyetracking und Stochastik. Entscheidungsstrategien an Vierfeldertafeln analysiert mit Hilfe von Blickbewegungen. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. 556–559). Münster: WTM-Verlag.

Obersteiner, A., Bernhard, M., & Reiss, K. (2015). Primary school children's strategies in solving contingency table problems: the role of intuition and inhibition. *ZDM Mathematics Education, 47*, 825–836.

Reiss, K., Barchfeld, P., Lindmeier, A., Sodian, B., & Ufer, S. (2011). Interpreting scientific evidence: primary student's understanding of base rates and contingency tables. In B. Ubuz (Eds.): *Proceedings of the 35th Conference of the IGPME (Vol. 4)*, 33–40. Ankara, Turkey: PME.

Shaklee, H., & Paszek, D. (1985). Covariation judgments: systematic rule use in middle childhood. *Child Development, 56*, 1229–1245.

Jana BEITLICH, Kristina REISS, München

Blickbewegungen von Studierenden auf Text und Bild beim Lesen mathematischer Beweise

Theoretischer Hintergrund und Fragestellung

In vielen universitären Lehrbüchern im Fach Mathematik werden Abbildungen eingesetzt, die das Verständnis für die Inhalte erleichtern sollen. Kognitionspsychologische Theorien zum multimedialen Lernen geben Erklärungen, warum das sinnvoll sein kann (z. B. Mayer, 2001; Schnotz & Bannert, 2003). Schnotz und Bannert (2003) unterscheiden in ihrem Modell zum integrativen Text-Bild-Verständnis deskriptionale (z. B. Text, mathematische Formel) und depiktionale (z. B. Abbildung, Diagramm) Repräsentationen. Externe deskriptionale und externe depiktionale Repräsentationen führen beim Lesen respektive Betrachten zu beidem, internen depiktionalen und internen deskriptionalen Repräsentationen, es finden somit Interaktionen zwischen den Repräsentationsformen statt. Beim Lesen von Text, der ergänzende Abbildungen enthält, scheint es somit sinnvoll zu sein, Informationen aus dem Text und der Abbildung zu integrieren, das heißt zwischen den Repräsentationsformen hin und her zu springen.

Die Kombination aus Text und Abbildungen in Lernmaterial scheint besonders unter bestimmten Voraussetzungen für den Lernprozess förderlich zu sein (z. B. bei eher geringem Vorwissen der Lernenden). Unter bestimmten Bedingungen könnte diese Kombination aber eher hinderlich sein (z. B. wenn die Abbildung nachträglich, getrennt vom Text gezeigt wird). Im Bereich der Mathematik gibt es keine umfassende empirische Forschung zu Effekten der Text-Bild-Kombination (Atkinson, 2005), es ist also nicht klar, ob die Ergebnisse aus der Forschung zur Text-Bild-Kombination auf die Mathematik übertragen werden können.

Mathematik wird an der Universität oft gelehrt im Schema Definition – Satz – Beweis. Das Lesen und damit verbunden Verstehen von Beweisen sind somit (neben dem Führen von Beweisen) zentrale Aktivitäten im Mathematikstudium (Mejia-Ramos & Inglis, 2009). In den letzten Jahren ist das Forschungsinteresse am Lesen mathematischer Beweise gestiegen, dennoch gibt es in diesem Bereich relativ wenig Forschung. Insbesondere zum Lesen, um die Beweise zu verstehen (im Gegensatz zum Lesen, um zu prüfen, ob die Beweise gültig sind oder sie zu bewerten) zeichnet sich noch Forschungsbedarf ab. Hierauf liegt der Fokus dieses Beitrags.

Der Umgang mit mathematischen Beweisen ist für viele Studierende, insbesondere in der Studieneingangsphase, eine große Herausforderung. Eine interessante Fragestellung, die daraus resultiert, lautet, ob Abbildungen das Verständnis von mathematischen Beweisen unterstützen können und inwiefern Ergebnisse zum multimedialen Lernen auf die Mathematik bzw. den Teilbereich mathematische Beweise übertragen werden können. Da mathematische Objekte abstrakt sind und weil Visualisierungen zwar helfen können, Zusammenhänge zu verstehen, jedoch nicht ausreichend für einen formalen Beweis sind, ist diese Fragestellung von großer Relevanz. Um den Fragen nachzugehen, ist es sinnvoll, zuvor zu untersuchen, ob Studierende das Angebot der Abbildung tatsächlich annehmen, das heißt ob sie die Abbildung überhaupt beachten. Dass dies nicht trivial ist, zeigt eine Studie von Dewolf, Van Dooren, Hermens und Verschaffel (2015), in der Studierende die zusammen mit mathematischen Textaufgaben präsentierten Abbildungen kaum betrachteten.

Eine wachsende Zahl an Studien nutzt die Methode Eye Tracking erfolgreich, um Strategieanwendung bei mathematischen Aufgabenstellungen zu erforschen, auch im Zusammenhang mit multimedialem Lernen (Van Gog & Scheiter, 2010). Mithilfe von Eye Tracking können Blickbewegungen sichtbar gemacht werden. Der Auswertung und Interpretation von Blickbewegungen liegen zwei Hypothesen zugrunde: Die Immediacy Hypothese sagt aus, dass die Verarbeitung von Informationen unmittelbar stattfindet, die Eye-mind Hypothese besagt, dass Menschen hauptsächlich die Information verarbeiten, auf die sie gerade blicken (Just & Carpenter, 1980).

Die hier beschriebene Studie untersucht die Frage, ob Studierende Abbildungen betrachten, die gemeinsam mit mathematischen Beweisen dargeboten werden während die Studierenden die Beweise lesen, um sie zu verstehen. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer werden basierend auf ihren mathematischen Vorkenntnissen in zwei Gruppen eingeteilt, um zu untersuchen, ob die Blickbewegungen auf den Text und die Abbildung vom Vorwissen abhängen.

Methode

An der Studie nahmen 19 Studierende (6 weiblich) teil, deren Durchschnittsalter 23,3 Jahre betrug (SD = 3,3). Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer studierten in unterschiedlichen Studiengängen, jedoch belegten alle verpflichtende Mathematikvorlesungen. Nachdem sie einen Fragebogen zu demographischen Daten ausgefüllt hatten, lösten sie einen Mathematiktest. Anschließend lasen die Studierenden an einem Computerbildschirm, der mit einem Eye Tracker verbunden war, drei Items, mit dem Auftrag, den jeweiligen Beweis möglichst gut zu verstehen. Jedes Item bestand aus einem Satz, seinem Beweis und einer Abbildung, die zwischen Satz und Beweis platziert war und keine zusätzlichen Informationen außer den im Beweistext präsentierten enthielt. Die Items waren entnommen aus typischen Lehrbüchern für Studienanfängerinnen und -anfänger. Nach jedem Item beantworteten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer eine offene Frage zum jeweiligen Beweis und notierten die Hauptidee des Beweises (auf beides wird in diesem Beitrag nicht weiter eingegangen).

Analysiert wurde die an der Lesezeit relativierte Verweildauer der Studierenden auf die Bereiche Beweistext und Abbildung. Ferner wurde die Reihenfolge der Blicke auf die beiden Bereiche ausgewertet.

Basierend auf ihrem Studiengang, der Semesterzahl und der erreichten Punktzahl im Mathematiktest wurden die Studierenden der Gruppe mit geringem (12 Personen) oder hohem (7 Personen) Vorwissen zugeteilt.

Ergebnisse

Die beiden Bereiche Beweistext und Abbildung wurden von allen Studierenden betrachtet, insbesondere die Abbildung wurde also von allen Personen beachtet. Der Beweistext wurde länger betrachtet als die Abbildung: Durchschnittlich verbrachten die Studierenden 18% ihrer Lesezeit auf der Abbildung und 71% auf dem Beweistext.

Alle Studierenden lasen zuerst den Satz. Die meisten betrachteten anschließend die Abbildung und fingen dann an, den Beweistext zu lesen, was der Anordnung der Items entspricht. Die übrigen Personen fingen nach dem Satz zunächst an den Beweistext zu lesen bevor sie das erste Mal die Abbildung betrachteten. Fast alle Studierenden (bis auf eine Person) sprangen zwischen dem Beweistext und der Abbildung hin und her, was auf ein Integrieren der Informationen aus beiden Repräsentationsformen hindeuten kann.

Differenziert nach Vorwissen zeigten die Analysen lediglich eine sehr schwache Tendenz dahingehend, dass Studierende mit geringerem Vorwissen durchschnittlich etwas länger als Studierende mit höherem Vorwissen die Abbildung betrachten (19% vs. 16%), wohingegen sie den Beweistext kürzer betrachten (70% vs. 72%). Außerdem sprangen die Studierenden mit niedrigem Vorwissen öfter zurück zur Abbildung als diejenigen mit hohem Vorwissen.

Diskussion

Die Ergebnisse der hier beschriebenen Studie bestätigen die Ergebnisse einer Untersuchung von Beitlich und Reiss (2014) mit Akademikern mit hoher Expertise in Mathematik. Auch in weiteren Studien mit ähnlichem Design konnten übereinstimmende Ergebnisse gefunden werden. Die sehr schwache Tendenz, dass sich Studierende mit unterschiedlichem Maß an Vorwissen in ihren Blickbewegungen unterscheiden, muss in zusätzlichen Studien untersucht werden.

Die Studie liefert Einblicke in multimediales Lernen im Bereich der Mathematik. Die Frage, inwiefern Ergebnisse, die psychologische Theorien zum multimedialen Lernen liefern, auf die Mathematik übertragen werden können, insbesondere auf mathematische Beweise, kann an dieser Stelle nicht endgültig beantwortet werden und bedarf weiterer Forschung.

In einer zurzeit stattfindenden Studie werden zusätzlich zu Abbildungen (informale) Beweisideen in die Items integriert, das heißt vor dem eigentlichen, formalen Beweis wird die Hauptidee des Beweises beschrieben. Dieser Ansatz findet sich ebenfalls in Lehrbüchern, der Einfluss auf das Beweisverständnis ist aber ebenso unklar wie die Frage, ob Studierende diese Beweisideen überhaupt betrachten. Ferner wird analysiert, ob mathematische Symbole tatsächlich, wie von Schnotz und Bannert (2003) vorgeschlagen, wie Text verarbeitet werden oder hier separiert werden muss.

Langfristig kann diese Art von Studien dazu beitragen, das Design von universitären Lehrmaterialien zu verbessern.

Literatur

Atkinson, R. K. (2005). Multimedia Learning of Mathematics. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (pp. 49-69). Cambridge: Cambridge University Press.

Beitlich, J., & Reiss, K. (2014). Das Lesen mathematischer Beweise – Eine Eye Tra-cking Studie. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 157-160). Münster: WTM-Verlag.

Dewolf T., Van Dooren, W., Hermens, F., & Verschaffel, L. (2015). Do students attend to representational illustrations of non-standard mathematical word problems, and, if so, how helpful are they? *Instructional Science, 43*(1), 147-171.

Just, M. A., & Carpenter, P. A. (1980). A Theory of Reading: From Eye Fixations to Comprehension. *Psychological Review, 87*(4), 329-354.

Mayer, R. E. (2001). *Multimedia learning*. New York: Cambridge University Press.

Mejia-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2009). Argumentative and proving activities in mathematics education research. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 88-93). Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taipei.

Schnotz, W., & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representation. *Learning and Instruction, 13*(2), 141-156.

Van Gog, T., & Scheiter, K. (2010). Eye tracking as a tool to study and enhance multimedia learning. *Learning and Instruction, 20*(2), 95-99.

Heike KNAUBER, Laura MARTIGNON, Hannes SCHRAY, Jonathan NELSON & Björn MEDER, Ludwigsburg, Berlin

Informationssuche und Kodierung: Heuristiken von Viertklässlern

1. Einleitung

Informations- und Kommunikationstechnologien sind Teil unserer Gesellschaft und prägen den Alltag von Kindern und Jugendlichen nahezu täglich. Im Oktober 2015 kündigte bspw. Baden-Württembergs Ministerpräsident Winfried Kretschmann im Rahmen des MINT-Kongress der Baden-Württemberg Stiftung und der Wissensfabrik in Stuttgart an, dass zukünftig alle Baden-Württembergischen Schüler(innen) an allgemeinbildenden Schulen eine verbindliche Informatikgrundbildung bekommen sollen (vgl. Algöwer, 2015). In Anlehnung daran verfolgt der vorliegende Beitrag ein Desiderat zur Erstellung eines Vorschlags an das Kultusministerium in Baden-Württemberg für die Einführung von Information, Kodierung und Entropie in der Primarstufe bis hin zur Sekundarstufe 2.

Das Forschungsvorhaben ist eingegliedert in das Teilprojekt „Models of Information Search: A Theoretical and Empirical Synthesis", welches vom Schwerpunktprogramm 15-16 der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert wird. Ein Ziel ist es, den bestmöglichen Weg zu finden, wie Information, Shannon-Kodewörter und die Shannon-entropie an allgemeinbildenden Schulen eingeführt werden kann, basierend auf den zwei fundamentalen didaktischen Prinzipien von Jerome Bruner:

- *E-I-S Prinzip*: Wissen lässt sich durch Handlung (Enaktiv), Bilder (Ikonisch) und Zeichen (Symbolisch) präsentieren (vgl. Bruner et al., 1971).
- *Prinzip des Spiralcurriculums*: „Das Curriculum sollte bei seinem Verlauf wiederholt auf […] Grundbegriffe zurückkommen und auf ihnen aufbauen, bis der Schüler den ganzen formalen Apparat, der mit ihnen einhergeht, begriffen hat" (Bruner, 1980, S. 26).

2. Die Schulintervention

In einer ersten Studie nahmen N=451 Schüler(innen) (217 Jungen, 234 Mädchen) aus sechzehn 4. und 5. Klassen von allgemeinbildenden Schulen aus Baden-Württemberg teil. Die Schüler(innen) wurden in 12 Experimentalklassen aufgeteilt, davon besuchten fünf die 5. und sieben die 4. Klassenstufe. Die Kontrollklassen bestanden aus vier Klassen der fünften und zwei Klassen der vierten Klassenstufe. Dabei waren für die Teilnahme an der Untersuchung nicht die mathematischen Fähigkeiten der Schüler(innen) ausschlaggebend, sondern die Klassenstufe, die die Schüler(innen) zum Zeitpunkt der Studie besuchten. Des Weiteren haben Kinder der 4. Klassenstufe bereits ein Gespür für die relative Nützlichkeit von Fragen in sequentiellen Suchspielen (bspw. Nelson et al., 2014). Ziel der Untersuchung war es, die Intuitionen zu Information, Informationssuche, Kodierung, Dekodierung und Bit von Kindern spielerisch zu fördern und testen. Eine Formalisierung dieser Themen sollte im Sinne eines Spiralcurriculums in den Klassen 9 bis 11 stattfinden, wenn sich Schüler(innen) mit Wahrscheinlichkeiten befassen. Dies war kein Bestandteil der vorliegenden Untersuchung.

Abbildung 1 stellt den Projektverlauf dar.

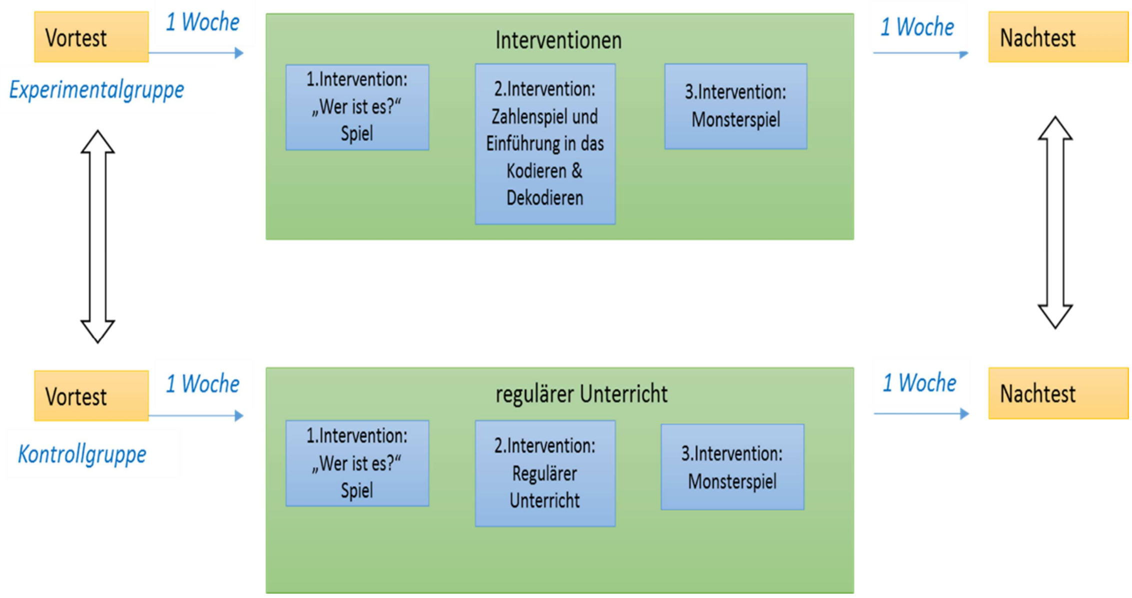


Abbildung 1: Projektverlauf

2.1 Der Vortest

Als Vortest wurde ein Wissenstest mit PISA-ähnlichen Proportionsaufgaben eingesetzt. Die PISA-Aufgaben wurden dabei leicht verändert und durch eine zusätzliche Bild- und Textaufgabe ergänzt. Diese Aufgaben stammen aus dem Gebiet der Stochastik und zielen auf ein Verständnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ab. Die Schüler(innen) sollten sich vorstellen, dass sie einen Preis gewinnen, wenn sie eine weiße bzw. schwarze Kugel aus einer von zwei Urnen ziehen. Sie sollten sich nun entscheiden welche Urne eher zum Erfolg führt, wenn sie blind aus einer der beiden Urnen ziehen müssten. In der Bild- und Textaufgabe sollten sich die Schüler(innen) entscheiden, in welchen Garten im Verhältnis mehr Salatköpfe von Schnecken gefressen wurden.

2.2 Die Unterrichtseinheiten

Die Schulintervention beinhaltete drei Unterrichtseinheiten. In der ersten Unterrichtseinheit ging es um das populäre Gesellschaftsspiel „Wer ist es?“. Hier spielten sowohl die Schüler(innen) der Experimentalklassen, als auch die Schüler(innen) der Kontrollklassen, jeweils in Zweierteams gegen ein anderes Zweierteam. Aufgabe war es, mit so wenig Ja/Nein-Fragen wie möglich eine von 24, zufällig aus einem Kartenstapel gezogene, Person zu finden. Die Personen unterscheiden sich in verschiedenen Merkmalen (z.B. Brille, Haarfarbe). Das allgemeine Ziel dieser Einheit war es, zu sehen, ob die Schüler(innen) bereits bestimmte Strategien während des Spielens verfolgen.

An der zweiten Unterrichtseinheit nahmen nur die Experimentalklassen teil, die Kontrollklassen besuchten den regulären Unterricht. In dieser Einheit ging es um ein Zahlenspiel im Zahlenraum 1 bis 8. Die Schüler(innen) sollten mit so wenig Ja/Nein-Fragen wie möglich die gesuchte Zahl identifizieren. Im Verlauf der Einheit wurden die Schüler(innen) an die „obere Hälfe"-Strategie (Halbierungsheuristik) herangeführt, welche in diesem Spiel optimal ist. Außerdem lernten die Schüler(innen) das Kodieren von Ja/Nein-Antworten mit Hilfe von grünen und roten Steckwürfelchen (enaktives Arbeiten mit Steckwürfeln). Später lernten sie dann das Dekodieren der kodierten Steckwürfeltürmchen.

Die dritte Unterrichtseinheit war einer Transferaufgabe gewidmet, dem „Monsterspiel". Forscher am Max-Planck-Institut für Bildungsforschung in Berlin haben 14 „Monster" entwickelt, um eine statistische Umgebung zu schaffen, in der die Halbierungsheuristik nicht optimal ist. Man kann somit sagen, dass diese Heuristik eine „eingeschränkt rationale" (boundedly rational) Heuristik ist, die z.B. im Zahlenspiel optimal ist, aber nicht generell mit so wenig Fragen wie möglich zum Ziel führt. An der dritten Einheit nahmen wieder die Experimental- und Kontrollklassen teil. Zu Beginn der Einheit sollten die Schüler(innen) alle Merkmale, in denen sich die Monster unterscheiden, finden und dokumentieren, wie häufig ein bestimmtes Merkmal auftritt. Im Anschluss daran spielten wieder jeweils zwei Zweierteams gegeneinander. Ziel war es, das gesuchte Monster mit so wenig Ja/Nein-Fragen zu identifizieren. Als Abschlussübung sollten die Schüler(innen) die verschiedenen Fragen nach den jeweiligen Merkmalen von 1 (beste erste Frage) bis 7 (schlechteste erste Frage) ordnen. Das allgemeine Ziel dieser Einheit war es zu sehen, ob Schüler(innen) einen „Transfer" der gelernten Strategie leisten und ob sie bereits sensibel dafür sind, was „gute" und was „schlechte" Fragen sind.

Eine Woche darauf bearbeiteten alle Schüler(innen) den Nachtest. Inhalt dieses Tests für die Experimentalklassen war:

- Proportionsaufgaben (ähnlich wie im Vortest)
- Kodierungs-&Dekodierungsaufgaben

- Monster: Eine Rangordnung zu 7 gegebenen Fragen bilden (siehe oben)
- Der Nachtest für die Kontrollklasse beinhaltete ausschließlich Teil 1 und 3.

3. Ergebnisse

Es war sehr erfreulich zu sehen, dass sich die anfänglichen teils unstrategischen Vorgehensweisen der Lernenden in bedachte und wohlüberlegte Strategien verwandelten. Die Schüler(innen) bekamen einen Sinn dafür, relevante von irrelevanten Informationen zu trennen und informative Fragen zu stellen. Im Bereich des Kodierens/Dekodierens lösten 40% der Experimentalgruppe (N=303) alle Kodierungsaufgaben richtig. Nur 8% konnten keine Aufgaben korrekt lösen. Beim Dekodieren gelang es 33% der Schüler(innen) der Experimentalklassen die Aufgaben richtig zu lösen. 12% hatten dagegen große Lösungsschwierigkeiten. Im Bereich der „Monster“ konnte immerhin ein Teil der Lernenden die Merkmale nach ihrem Informationswert entsprechend ordnen. Es fiel dem Großteil allerdings schwer einen Transfer zwischen dem Zahlenspiel und dem Monsterspiel herzustellen.

Dieses Projekt hat eine hohe Relevanz für die Bildung, denn der spielerische Ansatz in der Grundschule, erste Elemente der Informationstheorie und des Kodierens zu vermitteln, legt einen wichtigen Grundstein für spätere Untersuchungen in der Oberstufe. Die hier erworbenen, grundlegenden Erfahrungen können spätere Untersuchungen durchaus positiv beeinflussen, wenn es um das Lernen von Wahrscheinlichkeiten geht.

Literatur

Algöwer, R. (2015): *Kretschmann verspricht Informatik für alle* [http://www.stuttgarter-zeitung.de/inhalt.wirtschaftskongress-in-stuttgart-kretschmann-verspricht-informatik-fuer-alle.0a7246a4-205f-474f-aead-1713d559a440.html] (24.03.2016)

Bruner, J. S., Oliver, R. S. & Greenfield, P. M. (1971). *Studien zur kognitiven Entwicklung*. Stuttgart: Kohlhammer.

Bruner, J. (1980). Der Prozess der Erziehung (5. Auflage). In W. Loch (Hrsg.), Sprache und Lernen, Bd. 4. Düsseldorf: Schwann.

Nelson, J. D., Divjak, B., Gudmundsdottir, G., Martignon, L. & Meder, B. (2014). *Children's sequential information search is sensitive to environmental probabilities*. In: Cognition 130, S.74-80

Moderierte Sektion:

Theoriegeleitete und empirisch fundierte Kompetenzstufenmodelle

Torsten LINNEMANN, Basel

Matur (CH), Abitur (D) und Reifeprüfung (A) – Studierfähigkeit und die Festlegung basaler Kompetenzen

1. Studierfähigkeit und Allgemeinbildung

In Texten zu den Zielen des Gymnasiums in der Sekundarstufe 2 wird in Deutschland, Österreich und der Schweiz einheitlich die Vorbereitung auf eine Hochschulstudium und die persönliche Reife mit Bezugnahme auf die Rolle in der Gesellschaft genannt (vgl. z.B. EDK 1995, Hessisches Kultusministerium 2016 und Aue et al. 2016).

In der Schweiz wurde mit dem Bericht EVAMAR II zur schweizerischen Maturitätsreform (Eberle 2008) klar, dass es Handlungsbedarf bei der Erreichung der allgemeinen Studierreife gibt. Zwar stellt das Gymnasium insgesamt eine sehr gute Vorbereitung dar, insbesondere in den für viele Studienrichtungen wichtigen Schulfächern Erstsprache und Mathematik gibt es bei vielen Studierenden allerdings Defizite (vgl. Eberle 2008). Von der Eidgenössischen Erziehungsdirektorenkonferenz EDK wurde deshalb eine Studie in Auftrag gegeben, die in Erstsprache und Mathematik die basalen fachlichen Studierkompetenzen festlegen soll. „Es handelt sich dabei um jenes Fachwissen und -können, das nicht nur in einzelnen, sondern in einem Grossteil der Studienfächer vorausgesetzt wird“. (Eberle 2015)

2. Aufbau der Studie zu basalen Studierkompetenzen

In der Studie (Eberle 2015) wurden 20 Studienfächer ausgewählt, nach Häufigkeit und nach möglichst grosser Bandbreite an Anforderungen in Erstsprache und Mathematik.

Die ausgewählten Studierenden aus diesen Studienfächern wurden in Interviews befragt, welches Wissen aus der Gymnasialzeit wie eingesetzt wurde. Sie mussten einen Fragebogen ausfüllen, welche Inhalte oft vorkamen und wie wichtig diese waren. Ihre Studienunterlagen wurden analysiert. So sollte erreicht werden, dass trotz der minimalen Anzahl Studierenden (zwei pro Studienfach) eine valide Auswahl basaler Kompetenzen ermittelt werden konnte: „Weil die Anforderungen objektiv gegeben und für alle Studierenden einer Studienrichtung die gleichen sind, muss nicht angenommen werden, dass sich diese für andere Studierende abweichend dargestellt hätten.“ (Eberle 2015).

In den Katalog der basalen Kompetenzen wurden schliesslich die Ergebnisse der Studienfächer eingearbeitet, die von den mathematischen Anforderungen in der Mitte liegen, beispielsweise Psychologie und Biologie.

3. Diskussion einiger Themenbereiche

Bemerkenswert ist, dass insbesondere Elemente aus Arithmetik und Algebra von fast allen Studierenden für wichtig gehalten werden. In der Liste der Themenbereiche sind damit Inhalte vertreten, die eigentlich in der Sekundarstufe I behandelt werden, zum Beispiel Bruchrechnen und Proportionalität. Diese werden an der Universität weiterhin benötigt. Die Kritik von W. Kühnel und H.-J. Bandelt (2016) an den Sek-I-Themen in der zentralisierten österreichischen Reifeprüfung wird damit ein Stück weit relativiert.

Auch Ableitung und Integration sind nach Angaben der Studierenden wichtig. Da die Liste der Themenbereiche für den Fragebogen aus dem „Kanon Mathematik“ (KGU 2016) genommen wurden, gab es kein Item zur Integration wie „Bestand aus der Änderung berechnen“, wohl aber die Kurvendiskussion – bei der aber nicht differenziert wird, welcher Aspekt der Kurvendiskussion denn wichtig ist (allenfalls einfach Graphen zeichnen?). Hier besteht noch Bedarf für die Nachjustierung.

Die Stochastik hat keinen Eingang in die Themenliste gefunden, wobei sich die Autoren mehrfach rückversichert haben. Dies liegt wohl vor allem daran, dass in vielen Studienbereichen separate Statistikvorlesungen angeboten werden. So waren Kenntnisse in Statistik nicht Voraussetzung für ein erfolgreiches Studium. Daraus darf aber nicht geschlossen werden, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik keinen Platz in der Schule haben: der momentane Istzustand muss nicht der Idealzustand der Schnittstelle sein – und Statistik hat aus Gründen der Allgemeinbildung einen wichtigen Platz im Schulcurriculum, ebenso wie das Argumentieren, das in den basalen Kompetenzen nicht berücksichtigt wird. Hier muss in Erinnerung gerufen werden, dass die Liste der Themenbereiche von den Autoren bewusst als aktuelle Liste der benötigten Themen konzipiert wurde.

Bei der weiteren Analyse der Unterlagen und in den Interviews fiel auf, dass mathematische Darstellungen durchgehend wichtig sind, und zwar nicht nur das Lesen von Formeln, sondern dass insbesondere graphische Darstellungen interpretiert werden müssen.

4. Adaptivität, Grundlegendes Wissen und Können, und Feldorientierung

„Basale mathematische Kompetenzen für allgemeine Studierfähigkeit zu besitzen, bedeutet ganz allgemein, über ein bestimmtes mathematisches Wissen und Können nicht nur sicher, sondern auch flexibel und adaptiv zu verfügen.“ (Eberle 2015)

Den Autoren der Studie ist die Beobachtung sehr wichtig, dass es für eine erfolgreiche Bewältigung des Studiums keinesfalls ausreicht, dass die Studierenden ihr Handwerkszeug beherrschen. In den Interviews, und auch beim Studium der Unterlagen wird klar, dass die Mathematik meist eingebettet in Zusammenhänge auftritt. Sie müssen die Anwendungen einordnen können, also bei der Berechnung eines Bestands sofort an ein Integral denken. Dies entspricht in grossen Teilen der Feldorientierung, wie Sie beim O-M-A Kompetenzstufenmodell für die österreichische Reifeprüfung (Siller 2015) verwendet wird.

Auch in Deutschland wird beim Grundlegenden Wissen und Können (Bruder 2015) ein verständnisorientiertes Konzept verfolgt, wobei vier Aspekte des Verstehens betont werden: vertieftes Verstehen von Rechenverfahren und Begriffsanwendungen, Aktivierung von Grundvorstellungen, Wechsel zwischen Repräsentationsformen und Anwenden in inner- und aussermathematischen Kontexten (vgl. Bruder 2015).

Obwohl also die theoretischen Hintergründe der genannten Konzepte durchaus verschieden sind, ergänzen sie sich doch gut, um die basalen Kompetenzen so zu operationalisieren, dass tatsächlich mathematisches Verständnis gefordert und gefördert wird.

5. Umsetzung

In der Studie zu basalen Studierkompetenzen (Eberle 2105) wird nicht empfohlen, die Bestehensbedingungen bei der Abschlussprüfung (Matura) zu verschärfen, zum Beispiel indem eine genügende Mathematiknote verlangt wird. Vielmehr sollen die basalen Kompetenzen in Prüfungen getestet werden, die beliebig oft wiederholt werden können. Die Lehrpersonen können so Materialien anbieten, mit denen Lücken geschlossen werden können. Erreicht aber eine Schülerin oder ein Schüler die verlangten Leistungen nicht, so wird die Versetzung verweigert.

Im föderalen System der Schweiz kann eine solche Verordnung nicht zentral erlassen werden. Vielmehr hat die EDK den Kantonen empfohlen, die Empfehlungen der Studie umzusetzen. Beispielsweise wird im Kanton Thurgau an Online-Tests gearbeitet. Im Kanton Bern hat das Parlament die Regierung beauftragt, die Bestehensbedingungen in Mathematik anzupassen.

Gerade in Anbetracht dieser dezentral zu erwartenden Umsetzung ist es wichtig, zu den basalen Kompetenzen Materialien zu erarbeiten, die den fachdidaktischen Kriterien, die im vierten Abschnitt angedeutet wurden, genügen. Benötigt werden Übungstests, Tests und Nachlernmaterialien. Hier bietet die Zusammenarbeit in Deutschland, Österreich und der Schweiz ein grosses Potenzial.

Literatur

Aue, V., Frebort, M., Hohenwarter, M., Liebscher, M., Sattlberger, E., Schirmer, I., Siller, H.-S., Vormayr, G., Weiß, T., Willau, E. (2013). Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen (Stand: März 2013). Wien: BIFIE. https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_2013-03-11.pdf [04.03.2016]

Bruder, R., Feldt-Cäsar, N., Pallack, A., Pinkernell, G., Wynands, A. (2015): Mathematisches Grundwissen und Grundkönnen in der Sekundarstufe II. In: Blum, W., Vogel, S., Drüke-Noe, C., Roppelt, A.: Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II. Braunschweig: Westermann, Schroedel, Diesterweg.

Bundesinstitut Bildungsforschung, Innovation & Entwickung des österreichischen Schulwesens, BIFIE (2016): Standardisierte Reife- und Diplomprüfung. Prüfungsfächer schriftlich. Mathematik. https://www.bifie.at/node/80 [04.03.2016]

Eberle, F., Gehrer, K., Jaggi, B., Kottenau, J., Oepke, M. & Pflüger, M. (2008). Evaluation der Maturitätsreform 1995. Schlussbericht zur Phase II. Bern: Staatssekretariat für Bildung und Forschung SBF. http://edudoc.ch/record/29677/files/Web_Evamar-Komplett.pdf [24.03.2016]

Eberle, F., Brüggenstock, C., Rüede, C., Weber, C., Albrecht, U. (2015): Basale fachliche Kompetenzen für allgemeine Studierfähigkeit in Mathematik und Erstsprache. http://www.ife.uzh.ch/research/lehrstuhleberle/forschung/bfkfas/downloads/Schlussbericht_final_V7.pdf [04.03.2016]

Eidgenössische Erziehungsdirektorenkonferenz, EDK (1995): Maturitäts-Anerkennungsverordnung, MAV. https://www.admin.ch/opc/de/classified-compilation/19950018/201301010000/413.11.pdf [04.03.2016]

Hessisches Kultusministerium (2016): Kerncurriculum gymnasiale Oberstufe, Mathematik. https://kultusministerium.hessen.de/sites/default/files/media/kcgo-m.pdf [04.03.2016]

Kommission Gymnasium-Universität KGU (2016): Kanon Mathematik. http://www.math.ch/kanon [24.03.2016]

Kühnel, W., Bandelt, H.-J. (2016): Schöne neue Mathewelt der österreichischen Zentralmatura 2015. In Mitteilungen der GDM. Heft 100. 30-34.

Siller, H.-St.; Bruder, R.; Hascher, T.; Linnemann, T.; Steinfeld, J.; Sattlberger, E. (2015). Competency Level Modelling for School Leaving Examination. CERME 9, TWG 17, 194-204. Verfügbar unter: https://hal.archives-ouvertes.fr/CERME9-TWG17 [23.03..2016]

Eva SATTLBERGER, Wien, Jan STEINFELD, Wien Regina BRUDER, Darmstadt, Tina HASCHER, Bern, Torsten LINNEMANN, Basel, Hans-Stefan SILLER, Koblenz

Ergebnisse der Österreichischen Matura 2015 aus der Perspektive des Kompetenzstufenmodells O-M-A

Kompetenzstufen in Kompetenzmodellen im deutschsprachigen Raum sind bislang eher vage formuliert (vgl. AECC 2008; Ehmke et al. 2006; HarmoS 2011; KMK 2012) und werden üblicherweise anhand empirischer Aufgabenschwierigkeiten definiert. Das Projekt O-M-A-Kompetenzstufenmodellierung (vgl. Siller et al 2016a) wählte einen anderen Zugang: Es orientierte sich an fachdidaktischen Erkenntnissen und Kriterien. Zur „Vorab-Einschätzung" der Aufgabenschwierigkeiten einzelner Items für die standardisierte schriftliche Mathematik-Reifeprüfung (sRPM) an höheren Schulen in Österreich wurde hierzu ein theoretisch fundiertes Modell entwickelt. Im Folgenden werden erste Ergebnisse zur empirischen Validierung des Modells vorgestellt.

Das Modell

Die Konstruktion der Stufen im O-M-A-Kompetenzstufenmodell (vgl. Siller et al. 2013, 2014; Linnemann et al. 2015) erfolgte in Anlehnung an Meyer (2012) und in Verbindung mit Erkenntnissen der von Lompscher (1985) weiterentwickelten Tätigkeitstheorie zu Lernhandlungen. Das Modell unterscheidet drei Handlungsaspekte – Operieren, Modellieren, Argumentieren – und vier Niveaustufen (zum theoretischen Hintergrund vgl. Siller et al. 2016a). Die Einstufung gemäß dem O-M-A-Modell sei beispielhaft anhand einer Aufgabe aus der schriftlichen Reifeprüfung im Mai 2015 in Österreich verdeutlicht (für eine eingehendere Erläuterung der Aufgaben und ihrer Einstufung siehe auch Siller et al. 2016b):

Kredit

Ein langfristiger Kredit soll mit folgenden Bedingungen getilgt werden: Der offene Betrag wird am Ende eines jeden Jahres mit 5 % verzinst, danach wird jeweils eine Jahresrate von € 20.000 zurückgezahlt.

Aufgabenstellung:

y_2 stellt die Restschuld nach Bezahlung der zweiten Rate zwei Jahre nach Kreditaufnahme dar, y_3 die Restschuld nach Bezahlung der dritten Rate ein Jahr später.
Stellen Sie y_3 in Abhängigkeit von y_2 dar!

y_3 = ____________________________

Abbildung 1: Aufgabe 15 (vgl. BIFIE 2015) Einstufung M1, Lösungsquote 57,96 %, 12. Schulstufe

Diese Aufgabe wird im O-M-A-Modell der *Stufe M1* (vgl. Siller et al 2016b) zugeordnet. Diese Stufe wird durch das „Identifizieren bzw. Realisieren eines Darstellungswechsels zwischen Kontext und mathematischer Repräsentation und umgekehrt“ beschrieben.

Die Validierung

Derzeit wird an einer empirischen Validierung des Modells gearbeitet. Zur ersten Analyse dienten Daten, die im Rahmen von Pilotphasen zur österreichischen standardisierten schriftlichen Abschlussprüfungen gesammelt werden konnten (vgl. Siller et al. 2014). Die nachfolgenden Analysen basieren auf den Daten der ersten flächendeckenden sRPM, welche im Mai 2015 (Schuljahr 2014/15) durchgeführt wurde. Insgesamt liegen Daten von 17.450 Kandidatinnen und Kandidaten vor. In der Prüfung werden zwei Aufgabentypen unterschieden – sog. Teil-1-Aufgaben, die „auf die im Konzept zur schriftlichen Reifeprüfung angeführten Grundkompetenzen fokussieren“ (vgl. BIFIE 2013, S. 23), und Typ-2-Aufgaben, die „Anwendung und Vernetzung der Grundkompetenzen in definierten Kontexten und Anwendungsbereichen“ (vgl. BIFIE 2013, S. 23) berücksichtigen.

In einem ersten Schritt wurden sowohl Teil 1- als auch Teil 2-Aufgaben in einem gemeinsamen faktoranalytischen Modell analysiert. Da es sich um dichotome Daten handelt, wurde das klassische Modell mit tetrachorischen Korrelationsmatrizen berechnet. Alle Analysen wurden mit der freien Statistiksoftware R (R Core Team 2015) und dem Programmpaket lavaan (vgl. Rosseel 2012) mit Schätzungen nach Mplus durchgeführt. Das erste gemeinsame Modell zeigt, dass sich diese beiden Aufgabenarten nicht wie erwartet empirisch überzeugend zu den a priori definierten inhaltlichen Dimensionen zuordnen lassen. Aus diesem Grund wurden in einem nächsten Schritt die homogeneren Teil 1-Aufgaben in einem explorativen Modell näher betrachtet. Empirisch zeigte sich hierbei, dass ein Modell mit drei Faktorstufen am besten zu passen scheint (dies wurde sowohl anhand des Eigenwertkriteriums als auch dem klassischen Screeplot bestimmt).

Bei der Modellierung der Daten zeigte sich ein immer ähnliches Muster: Damit das Modell identifizierbar war, mussten entweder die Korrelationen zwischen den einzelnen O-M-A-Dimensionen zugelassen oder fixiert werden. Wurden die Korrelationen frei geschätzt, waren diese allerdings sehr hoch. Ein Grund könnte sein, dass die Aufgaben von der Struktur und dem Schwierigkeitsgrad (zu) ähnlich waren und für die empirische Modellierung zu wenig Varianz aufweisen. Ein anderer Grund ist darin zu sehen, dass diese Aufgaben nicht ursprünglich nach dem Modell entwickelt wurden und somit nicht den prototypischen Charakter aufweisen, der für eine empirische Validierung notwendig wäre.

Erste vielversprechende Ergebnisse konnten auf Basis der Teil 1-Aufgaben dennoch gesammelt werden. Für eine differenzielle Analyse wurden zunächst nur die Aufgaben der inhaltlichen Dimensionen Algebra und Analysis betrachtet. Hierbei zeigte sich, dass das explorative Modell fast vollständig den a priori zugeordneten Dimensionen entsprach (vgl. Abb. 2) – $\chi^2 = 189.223$ (43) , $p < .001$; CFI = .989; RMSEA = .014 [90% CI = 0.012, 0.016] – und somit Operieren von Modellieren getrennt werden konnte.

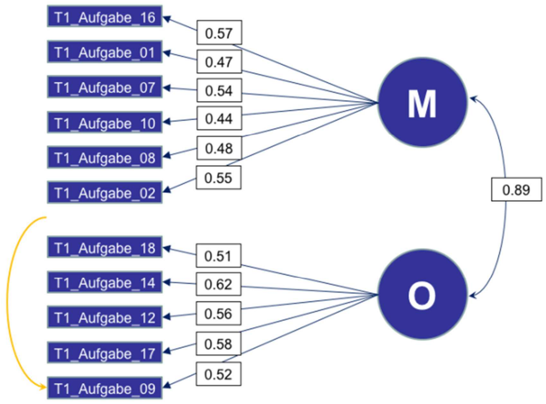


Abbildung 2: zweidimensionales Modell mit Zuordnung der Aufgaben zu den zwei Dimensionen Modellieren und Operieren. Im Datensatz lagen zur Aufgabenauswahl keine Aufgaben zum Argumentieren vor. Ausschließlich Aufgabe_09 (vgl. BIFIE 2015) wurde im explorativen Modell empirisch einer anderen Dimension (Modellieren) zugeordnet und nachträglich der Dimension Operieren zugeteilt.

Ausblick

Das O-M-A-Kompetenzstufenmodell wird weiter analysiert. Insbesondere ist die Stabilität der Faktorenstruktur zu überprüfen. Als empirische Grundlage dienen sowohl die Daten aus dem Haupttermin der sRPM im Jahr 2015 sowie die im Mai 2016 eingehenden Daten der nächsten sRPM. Das O-M-A-Modell soll künftig nicht nur Vergleichbarkeit der Prüfungsaufgaben ermöglichen sondern auch Orientierung sowohl für das Anspruchsniveau der Leistungsbeurteilung im Unterrichtsalltag als auch für ein breit gefächertes Lernangebot für den Unterricht liefern.

Literatur

AECC (Hrsg.) (2008). Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe. Version 4/07. Klagenfurt: Institut für Didaktik der Mathematik. Fakultät für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung der Alpen-Adria-Universität.

BIFIE (Hrsg.) (2013). Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen . Wien. Verfügbar unter: https://www.BIFIE.at/node/1442 [22.03.2016].

BIFIE (Hrsg.) (2015). Haupttermin 2014/15. Wien. Verfügbar unter: https://www.bifie.at/node/3014 [22.03.2016].

Ehmke, T., Leiss, D., Blum, W. & Prenzel, M. (2006). Entwicklung von Testverfahren für die Bildungsstandards Mathematik. In Unterrichtswissenschaft, 34(3), S. 220–238.

HarmoS (2011). Grundkompetenzen für die Mathematik. Nationale Bildungsstandards. Freigegeben von der EDK-Plenarversammlung.

KMK (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Verfügbar unter: http://www.kmk.org/fileadmin/ veroeffentlichungenbeschlu-esse/2012/20121018-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf [22.03.2016].

Linnemann, T., Siller, H.-S., Bruder, R., Hascher, T., Steinfeld, J., & Sattlberger, E. (2015). Kompetenzmodellierung am Ende der Sekundarstufe II. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten, C. Streit (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. S. 588–591. Münster: WTM.

Lompscher, J. (1985). Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit. Berlin: Volk u. Wissen.

Meyer, H. (2012). Leitfaden Unterrichtsvorbereitung. 6. Auflage, Berlin: Cornelsen Scriptor.

R Core Team (2015): R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Verfügbar unter: https://www.R-project.org/ [22.03.2016].

Rosseel, Y. (2012): lavaan: An R Package for Structural Equation Modeling. Journal of Statistical Software. Software, 48(2), S. 1–36. Verfügbar unter: http://www.jstatsoft.org/v48/i02/ [22.03.2016].

Siller, H.-S., Bruder, R., Hascher, T., Linnemann, T., Steinfeld, J., & Schodl, M. (2013). Stufenmodellierung mathematischer Kompetenz am Ende der Sekundarstufe II. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. S. 950–953. Münster: WTM.

Siller, H.-S., Bruder, R., Hascher, T., Linnemann, T., Steinfeld, J., & Sattlberger, E. (2014). Stufung mathematischer Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe II – eine Konkretisierung. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. S. 1135–1138. Münster: WTM.

Siller, H.-St.; Bruder, R.; Hascher, T.; Linnemann, T.; Steinfeld, J.; Sattlberger, E. (2016a). Competency level modelling for school leaving examination. K. Krainer; N. Vondrová (Eds.). CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic. S. 2716–2723. Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. <hal-01289473>

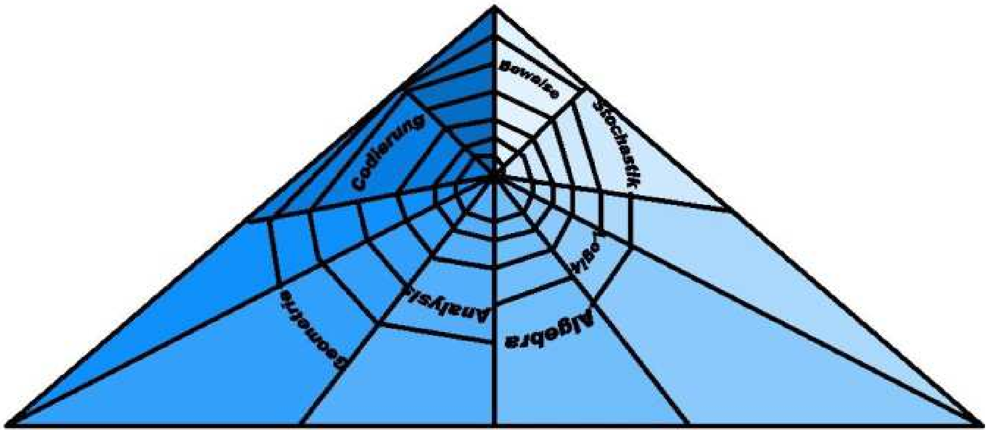
Siller, H.-S.; Bruder, R.; Hascher, T.; Linnemann, T.; Steinfeld, J.; Sattlberger, E. (2016b): Kompetenzstufenmodell zu Reifeprüfungsaufgaben und deren Eignung für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht. In: S. Keller & C. Reintjes (Hg.), Aufgaben als Schlüssel zur Kompetenz – Didaktische Herausforderung, wissenschaftliche Zugänge und empirische Befunde. im Druck. Münster: Waxmann-Verlag.

Moderierte Sektion:

Vernetzungen im Mathematikunterricht

Matthias BRANDL, Passau; Astrid BRINKMANN, Münster; Thomas BORYS, Karlsruhe

Sektion „Vernetzungen im Mathematikunterricht“



Die Sektion „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ befasst sich mit dem Anliegen des gleichnamigen GDM-Arbeitskreises, inner- und außermathematische Beziehungen zwischen den in der Schule üblicherweise zu unterrichtenden Teilgebieten aufzuzeigen und methodische Umsetzungsmöglichkeiten für den Unterricht bereitzustellen.

Die Vorträge im Rahmen der Sektion waren:

1. *Astrid Brinkmann*
   „Maps als Hilfe beim Problemlösen und beim Modellieren“

   Graphische Darstellungen von Vernetzungen, wie Mind Maps, Concept Maps und hiervon abgewandelte Map-Formen, können, bei passender inhaltlicher Gestaltung, eine Hilfe beim Problemlösen und beim Modellieren sein. Dies wird anhand von Beispielen aus der Sekundarstufe I verdeutlicht; Möglichkeiten und Grenzen werden aufgezeigt. Des Weiteren wird auf mögliche methodische Vorgehensweisen im Unterricht hinsichtlich der Nutzung von Maps zum Problemlösen bzw. zum Modellieren eingegangen.

2. *Wolfgang Pfeffer und Matthias Brandl*
   „Mentales Modell zum Abbildungsbegriff bei Studienanfänger/innen“

   Im Rahmen einer größeren Längsschnittstudie wurden Studienanfänger/innen zu ihrem Begriffsverständnis hinsichtlich ausgewählter Begriffe aus der Vorlesung befragt. Insbesondere stand die Entwicklung des mentalen Modells zu einzelnen Begriffen im Verlauf der ersten zwei Semester im Fokus. Im Rahmen des Vortrags wurde das mentale Modell zum Abbildungsbegriff von Mathematik-Studierenden nach ca. 7 Wochen Studium vorgestellt.

3. *Thomas Borys*
„Innovatives Lehrkonzept in der Lehramtsausbildung – Studierende entwickeln und betreuen einen interaktiven Stand auf einem Science-Festival“

   In diesem Vortrag wurde von einer erfolgreich evaluierten Konzeption für Lehramtsstudierende berichtet, deren Ziel es mitunter war, dass diese das Unterrichten auch außerhalb der Schule kennenlernen. Dabei probierten sie selbst entwickelte und zum Teil neuartige Lehr- und Lernarrangements aus, die meist von einer hohen außermathematischen Vernetzung geprägt sind. Diese Konzeption zeichnet sich vor allem durch eine starke Praxis- und Projektorientierung aus.

4. *Matthias Brandl*
„Narrative Mathematik-Didaktik mittels Elementen bildender Kunst“

   Traditionelle Lehr-Lern-Prozesse im Fach Mathematik konzentrieren sich häufig allein auf den inhaltlich-analytischen Aspekt. Narrative Didaktik ergänzt den logisch-diskursiven Prozess auf synergetische Art und Weise, indem sie abstrakte mathematische Lerninhalte mit Elementen aus Literatur und/oder bildender Kunst vernetzt und dadurch sinnstiftend-motivierend einbettet. Es wurden theoretische Hintergründe einer narrativen Didaktik sowie Beispiele thematisiert.

Ausführliche Artikel zu den Vorträgen sind in der Schriftenreihe „*Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht*“ (Reihenherausgeberin: Astrid Brinkmann, Aulis Verlag) zu finden.

Link: http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html

Sektionsvorträge

Brinkmann, A.: Maps als Hilfe beim Problemlösen und beim Modellieren

Pfeffer, W., Brandl, M.: Mentales Modell zum Abbildungsbegriff bei Studienanfänger/innen

Borys, T.: Innovatives Lehrkonzept in der Lehramtsausbildung – Studierende entwickeln und betreuen einen interaktiven Stand auf einem Science-Festival

Brandl, M.: Narrative Mathematik-Didaktik mittels Elementen bildender Kunst

Thomas BORYS, Karlsruhe

Innovatives Lehrkonzept in der Lehramtsausbildung - Studierende entwickeln und betreuen einen interaktiven Stand auf einem Science-Festival

Seit mehreren Jahren wird dieses Lehrkonzept an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe praktiziert. Im Folgenden wird dargestellt, welche zentralen pädagogischen und didaktischen Ausgangspunkte dem Konzept zu Grunde liegen. Danach wird das Konzept erläutert und ein kleiner Einblick in die Evaluation gegeben.

1. Pädagogische und didaktische Ausgangspunkte

Der erste Ausgangspunkt bildet die Idee des „Außerschulischen Lernens", welches in den letzten Jahren wieder ein aktuelles Thema in der pädagogischen Diskussion darstellt. Allerdings handelt es sich hierbei keineswegs um eine Neuerung, schon Johann Amos Comenius (1592 – 1670) schreibt in seinem berühmten Werk „Große Didaktik":

„In der Tat, wenn ich nur einmal Zucker gekostet, einmal ein Kamel gesehen, einmal den Gesang der Nachtigall gehört habe, nur einmal in Rom gewesen bin und es (natürlich aufmerksam) durchwandert habe, so haftet all das fest in meinem Gedächtnis und kann mir nicht wieder entfallen."

Neu ist, dass die Lernenden angesichts der Durchdringung des Alltags mit Smartphones & co. mehr und mehr sekundäre statt primäre Erfahrungen machen. „Kinder werden zunehmend nicht mehr mit den echten Objekten und Phänomenen konfrontiert, sondern bekommen die Welt mittels ... Multimedia künstlich präsentiert." (Schumann, 2010) Dem kann m.E. mit dem Bildungspotenzial des Unterrichts an außerschulischen Lernorten entgegengewirkt werden, diese bieten sehr oft die Möglichkeit, den Dingen direkt zu begegnen.

Mit der Idee des außerschulischen Lerners, ist eher von der Seite der Schule her gedacht, der spätere Haupteinsatzort der Studierendenden einer Pädagogischen Hochschule. Ein weiterer Ausgangspunkt ergibt sich aus der Hochschulperspektive: Studierende sollen einen Aspekt der mathematikdidaktischen Forschung selbstständig erfahren. In diesem Sinn soll an Erich Wittmann, der den Begriff Mathematikdidaktik als „design ence" (Wittmann, 1992) geprägt hat, angeknüpft werden. Dabei beruft er sich auf H. Simon: „In historischer Tradition ist es Aufgabe der Naturwissenschaften, Wissen über die Beschaffenheit und Funktion natürlichen Objekte zu erforschen und zu vermitteln. Die Ingenieurwissenschaften haben es dagegen mit künstlichen Dingen zu tun. Sie beschäftigen sich mit der Frage, wie man Artefakte mit gewünschten Eigenschaften entwirft und her-stellt. Design, so verstanden, ist der Kern jeder Ingenieurausbildung: ... Fachbereiche der Ingenieurdisziplin ebenso wie für Architektur, Wirtschaft, Pädagogik und Didaktik (education), Jura und Medizin sind allesamt auf Design ausgerichtet“ (nach Wittmann, 1998). Wittmann sieht in dem zweiten Abschnitt „die Mathematikdidaktik um einen praxisbezogenen Kernbereich zu organisieren, voll bestätigt, denn der Kernbereich konzentriert sich auf die Konstruktion künstlicher Objekte (Unterrichtskonzepte, Lernumgebungen, Curricula) und Erforschung ihrer möglichen Wirkungen in unterschiedlichen schulischen Ökologien.“ (Wittmann, 1998) Genau das ist eine Kernidee in diesem Lehrkonzept, die Studierenden entwickeln eigenständig eine eigene kleine Lernumgebung. Meistens handelt es sich dabei sogar um Neuentwicklungen, daher kann man m.E. von „didaktischem Engineering“ sprechen.

2. Vorstellung des Lehrkonzepts

Das methodische Vorgehen dieses Konzepts beruht auf den drei Schritten „Planung → Umsetzung → Reflexion“ (vgl. Borys, 2011) einer außerschulischen Unterrichtsmaßnahme durch die Studierenden. Es ist entliehen aus dem methodischen Dreischritt des außerschulischen Lernens. Dieses einfache Modell besteht aus der Vorbereitung, Durchführung und Nachbereitung des außerschulischen Lernens (vgl. Sauerborn, 2010). Übertragen auf die Hochschule heißt das: Die Planung findet an der Hochschule, die Umsetzung außerhalb der Hochschule und die Reflexion wieder an der Hochschule statt (vgl. Borys 2011). Diese einfach anmutende Struktur wird allerdings durch eine eingewobene Projektstruktur und der Zusammenarbeit mit anderen Institutionen (Veranstalter des Wissenschaftsfestivals und der beteiligten Schule) recht komplex.

In der Planungsphase findet die eigentliche didaktische und methodische Arbeit der Studierenden statt. Die Studierenden entwickeln gemeinsam, angelehnt an das vom Veranstalter des Science-Festivals vorgegebene Leitthema, passende Lehr- und Lernarrangements für Schülerinnen und Schüler jeden Alters. Dabei handelt es sich häufig um Neuentwicklungen, die u.a. die folgenden Prinzipien berücksichtigen:

- Differenzierung: Der Stand wird von Grundschüler/innen bis zu Erwachsenen besucht. So sind manche mathematisch komplexen Zusammenhänge entsprechend zu durchdringen und differenziert nach den Vorkenntnissen darzustellen.
- Besucherorientierung: Die Besucher/innen kommen angeregt durch den sehr hohen Aufforderungscharakter der Lehr- und Lernarrangements an den Ausstellungsstand. Daher müssen diese so gestaltet sein, dass die Besucher/innen von ihnen auch angesprochen werden. Damit verbunden ist sehr oft eine handlungsorientierte Aufarbeitung

der Lehr- und Lernmaterialien. Da die meisten Besucher/innen Schüler/innen sind, könnte man in diesem Zusammenhang auch von Schülerorientierung sprechen.

- Projektorientierung: Die Studierenden müssen ihre eigene Projektarbeit planen, durchführen und reflektieren. Das beginnt schon bei der Themenwahl, denn ihnen wird nur ein Motto vorgegeben.
- Fächerübergreifendes Arbeiten: Die Studierenden müssen im Sinne eines ganzheitlichen Lernkonzepts über ihre Fachgrenzen hinausdenken.

Schließlich werden die Lehr- und Lernarrangements zu einem gemeinsamen Standangebot zusammengefasst und es wird häufig eine CD als Materialsammlung für Lehrer/innen erstellt. So sind neben den Arbeiten in den einzelnen Projektgruppen auch projektgruppen-übergreifende Arbeiten zu erledigen, beispielsweise Ausschreibungstexte, Flyertexte, Logo, eine Rahmengeschichte, ein Film, Bühnenauftritte, Material-CD … zu gestalten.

Die Planungen finden üblicherweise in einem Sommersemester statt. Die sich anschließende Umsetzung erfolgt Mitte Oktober auf dem Science-Festival, den „Science Days“. Die Studierenden sind vier Tage vor Ort, wobei sie am ersten Tag ihren interaktiven Stand mit den selbsterstellten Lehr- und Lernarrangements aufbauen. An den drei folgenden Ausstellungtagen besuchen ca. 20.000 Besucher/innen das Festival, wobei ca. 900 an dem Stand durch die Studierenden betreut werden.

Da fast alle Studierende vor Ort übernachten, finden am Abend Reflexionsrunden über die Geschehnisse des Tages statt. Dabei werden vor allem Vermittlungsoptimierungen besprochen, die am nächsten Tag auch in die Tat umgesetzt werden. Auch beraten sich die Studierenden gegenseitig, wie die Sachzusammenhänge besser dargestellt werden können. Daneben entwerfen die Studierenden Dienst- und Arbeitspläne für die Betreuer/innen des Standes. Nach der Durchführung auf der Wissenschaftsmesse reflektieren die Studierenden im Rahmen einer schriftlichen Ausarbeitung und eines Kolloquiums die vergangenen Aktivitäten.

Das *Innovative* an diesem Konzept ist, dass Studierende sehr praxisorientiert und vernetzt an projektorientiertes, außerschulisches Lernen und Lehren herangeführt werden. Dabei lernen sie insbesondere: fachdidaktische Basiskompetenzen, Handlungskompetenzen und interdisziplinäres Arbeiten mit den Schwerpunkten in den Fächern Mathematik, Informatik, Physik und Technik. Die Studierenden arbeiten dabei auf ganz verschiedenen Ebenen mit unterschiedlichen Personengruppen zusammen, z.B. mit anderen Studierenden in der Projektgruppe, mit Schüler/innen, die den Stand besuchen bzw. bei der Standbetreuung mithelfen. Eine besondere Herausforderung für die Studierenden stellt die Beantwortung der Fragen von Lehrer/innen in Bezug auf die didaktischen und methodischen Überlegungen zu ihren Lehr- und Lernarrangements dar.

4. „Evaluation“

Die letzte „Evaluation“ hat ergeben, dass alle Studierenden tatsächlich ihr eigenes Projektthema im Rahmen des Mottos der Science-Festival durchführen konnten. Die Möglichkeit der eigenen Themenwahl ist m.E. sehr wertvoll, denn dieses ist sehr oft bei durchzuführenden Projekten nicht möglich. Die Studierenden gaben alle an, dass sie nach der praktischen Durchführung des Projekts jetzt wissen, was es bedeutet, ein Projekt durchzuführen. Außerdem fühlen sich die meisten gut vorbereitet, ein eigenes Projekt mit Schülerinnen und Schüler durchzuführen. Des Weiteren geben sie an, interdisziplinäres Arbeiten hautnah erfahren zu haben. Auf die Frage hin, ob sich die Studierenden trauen würden ein ähnliches Projekt auch mit Schüler/innen durchzuführen, wurde eher etwas zurückhaltend zugestimmt. Also insgesamt kann man festhalten, dass sich die Studierenden nun durchaus in der Lage sehen, Projekte mit ihren Schüler/innen durchzuführen.

Literatur

Borys, T. & Forkert, R. (2011): Außerschulisches Lernen — Lehren am Beispiel der „science days“. In Müller, P & Kosack, W. (Hrsg.): *Karlsruher Pädagogische Beiträge, 77, 139-146*

Comenius (2000): *Große Didaktik* (9. Auflage). Stuttgart: Klett-Cotta

Sauerborn, P. & Brühne, T (2010): *Didaktik des außerschulischen Lernens* (3. Auflage). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren

Schumann, S. (2010): *Bildungsprozesse verstehen - Bildungschancen erkennen*, Bd. 1: Naturerfahrung als Bildungsprozess. Aachen: Shaker Verlag

Wittmann, E. C. (1992): Mathematik als „design science“. *Journal für Mathematikdidaktik*, 13(1), 55-70

Wittmann, E. C. (1998): Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerbildung*, 16(3), 329-342

Matthias BRANDL, Passau

Narrative Mathematik-Didaktik mittels Elementen bildender Kunst

Traditionelle Instruktion ist auf das Aufspüren von potenziellen Wissenslücken fixiert und manifestiert sich folglich häufig in einer „teach-test-teach-test sequence“ (Klassen, 2006, S. 30). Die zugrunde liegende atomistische Definition von Wissen beruht auf den beiden zentralen Annahmen „decomposability“ (Zerlegbarkeit) und „decontextualization“ (Isolierbarkeit) von Lerninhalten (Resnick & Resnick, 1992). Dies widerspricht fundamental dem Vernetzungsgedanken moderner (Mathematik-) Didaktik, die z.B. in Form von forschend-entdeckenden Verfahren implizit und explizit den Vernetzungscharakter sowohl in Bezug auf fachliche Inhalte wie auch auf das Unterrichtsgeschehen widerspiegelt. Dabei erweist sich auf natürliche Weise die Berücksichtigung von Kontexten als notwendig und essentiell.

Historischer und affektiver Kontext im Sinne narrativer Didaktik

Klassen (2006) übt starke Kritik an der Dominanz des traditionellen Schulbuches: Whitehead (1929) bezeichne es gar als „an educational failure“. Durch eine starke curriculare Bindung und die Schulbuchzentrierung werde der Unterricht von den Schülerinnen und Schülern als langweilig und irrelevant wahrgenommen. Authentische Auszüge aus dem historischen Kontext der Mathematikgeschichte könnten helfen, das Lebendige der Wissenschaft, das sich in Forschung, Entdeckung und Kreativität zeige, wieder sichtbar werden zu lassen (Klassen, 2006, S. 48). Wenngleich sich ein schülergerechter Unterrichtseinsatz originaler historischer Artefakte als sehr schwierig erwiesen hat, berichtet Kubli (2002, 1999), dass Schülerinnen und Schüler wesentlich positiver auf historisches Material reagieren, wenn es in narrativer Form aufbereitet und eingesetzt wird. Bereits Bruner (1986) stellt der logisch-diskursiven Argumentation („logico-scientific mode”) den narrativen Denkmodus („narrative mode“) gegenüber. Um einen erfolgreichen Lernprozess zu generieren, müssen sich die Lernenden emotional auf die Narration einlassen – was bei didaktisch adäquat aufbereiteten Vorgehensweisen gemäß den Empfehlungen einer Narrativen Didaktik auch geschehen sollte. Demnach ist auch der affektive Kontext stets miteingebunden (Egan 1989a, b) und bei der Konstruktion narrativer Elemente zu berücksichtigen. Es geht dabei nicht darum, narrative Strukturen zur Analyse von Unterrichtsprozessen zu verwenden, sondern um eine narrative Methode, die dem Inhalt dient (vgl. z.B. Kubli, 2005).

„Einwurzelung“ und „Verstehens-Shift“ durch Vernetzung

In Brandl & Nordheimer (2013, 2011) findet sich ein adäquates Meta-Konzept in Form eines „Verstehens-Shifts durch Vernetzung“, das traditionelle Beschreibungen einer „Einwurzelung“ (Wagenschein, 1968, unter Bezug auf ‚Enracinement‘ bei S. Weil, 1956) oder den Gebrauch eines „Lerngerüsts“ (‚scaffolding‘ in Wood et al., 1976) aufgreift und neu interpretiert. Diese strukturelle Umschreibung eines effektiven Lernprozesses bildet eben jene didaktische Vorgehensweise ab, wie sie die narrative Methode beabsichtigt. Eine interessensbasierte „Stützstruktur“ im historischen und affektiven Kontext sorgt dabei für ein nachhaltiges Fundament der eigentlichen mathematischen Lerninhalte und Ziele.

Klassen’s Story-Driven Contextual Approach

Die für J. Bruner noch ungeklärte Frage, wie man narrative Elemente vor allem in den Naturwissenschaften und der Mathematik richtig einsetzt, versuchten u.a. Klassen (2006), Kubli (2005, 2002, 1999) und Norris et al. (2005) zu klären. Während sich in Norris et al. (2005) hilfreiche Transformationshilfen vom „logico-scientific mode“ in den „narrative mode“ finden, liefert Klassen (2006) mit seinem *Story-Driven Contextual Approach* ein praktikables Konzept für ein unterrichtliches Vorgehen.

Erweiterung auf Elemente bildender Kunst

Neben rein textgebundenen Vorgehensweisen bieten sich auch Bilder bzw. Elemente bildender Kunst als fruchtbarer Kern einer vernetzenden narrativen Unterrichtseinheit an. Gute Beispiele finden sich unter anderem in Zusammenhang mit der Wanderausstellung „Alles ist Zahl“ und den mathematisch inspirierten Bildern von Eugen Jost in Baptist et al. (2013) und Baptist (2008). Für den direkten Einsatz im Unterricht aufbereitete Lernumgebungen in Bezug auf denselben Kontext finden sich dazu in Affolter et al. (2012) z.B. im Kapitel „Zahlenfolgen“ (unter Verwendung von Eugen Josts Bild „You know my name (Look up the number)“) oder „Binome multiplizieren“ (unter Einbeziehung von Richard Paul Lohses Bild „Sechs vertikale systematische Farbreihen mit orangem Quadrat rechts oben“). Des Weiteren liefert Bocka (2011, 2010) unter dem inhaltlichen Sammelbegriff der magischen Quadrate eine schönes Beispiel für die Primarstufe und greift dabei neben historischen und literarischen Bezügen Albrecht Dürers „Melancolia“ und Eugen Josts „Centennium“ auf. Eine detaillierte Ausarbeitung einer Unterrichtseinheit rund um die „Schule von Athen“ von Raffael (siehe Abbildung 1) inklusive Arbeitsblatt und theoretischem Hintergrund findet sich in Brandl (2016a, b).

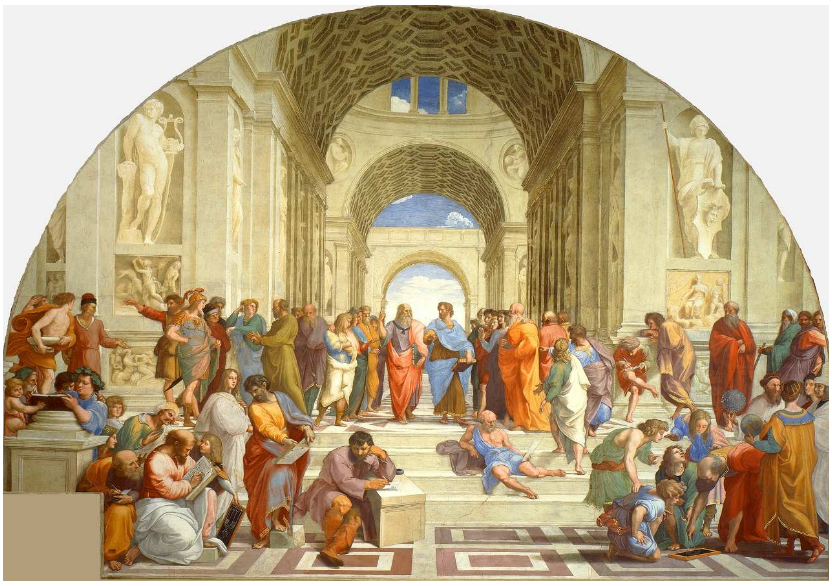


Abb.1 Die Schule von Athen (Quelle: wikipedia; public domain art)

Durch die konzentrierte Versammlung bedeutender Persönlichkeiten der Antike dient dieses Fresko aus dem 16. Jahrhundert als Aufhänger für eine reichhaltige Unterrichtseinheit, in deren Zentrum die Entdeckung der Irrationalität in Form von inkommensurablen Strecken bei den Pythagoräern steht (siehe hierzu auch Brandl, 2010).

Literatur

Affolter, W., Beerli, G., Hurschler, H., Jaggi, B., Jundt, W., Krummenacher, R., Nydegger, A., Wälti, B. & Wieland, G. (2012). *Das Mathematikbuch 4*. Titel der Originalausgabe: mathbu.ch 8 bzw. 9; bearbeitet von F. Auer, U. Bicker, M. Distel, C. Maitzen, F. Walzer. Bern, Zug: schulverlag blmv, Klett & Balmer. Stuttgart, Leipzig: Ernst Klett Verlag.

Baptist, P. (2008) (Hrsg.). *Alles ist Zahl*. Köln: Kölner Universitäts-Verlag.

Baptist, P., Jost, E. & Miller, C. (2013) (Hrsg./Bearb.). *Alles ist Zahl, Mathematik andersARTig*, Univ. Bayreuth, Bayreuth.

Bocka, D. (2011).Exploring Magic Squares. In V. Ulm (Ed.), *Inquiry-based mathematics education for gifted children in primary school* (pp. 10-21). Augsburg: The Fibonacci Project.

Bocka, D. (2010). Magische Quadrate erforschen. In V. Ulm (Hrsg.), *Mathematische Begabungen fördern* (S. 8-19). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Brandl, M (2016a). Narrative Didaktik als Vernetzungsinstrument: die Schule von Athen. In T. Borys et al. (Hrsg.), *Mathe vernetzt: Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. Band 4 der Schriftenreihe des GDM-Arbeitskreises ‚Vernetzungen im Mathematikunterricht', herausgegeben von A. Brinkmann* (S. 9-22). Aulis Verlag in der Stark Verlagsgesellschaft.

Brandl, M (2016b). Materialien und Kopiervorlagen: 05 Die Schule von Athen. In T. Borys et al. (Hrsg.), *Mathe vernetzt: Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. Band 4 der Schriftenreihe des GDM-Arbeitskreises ‚Vernetzungen im Mathematikunterricht', herausgegeben von A. Brinkmann* (S. 105–111). Aulis Verlag in der Stark Verlagsgesellschaft.

Brandl, M. (2010). Narrative Didactics in Mathematical Education: an innovative Didactical Concept. In T. Bianco & V. Ulm (Eds.), *Mathematics Education with Technology – Experiences in Europe*. Augsburg: University of Augsburg, S. 103 – 110.

Brandl, M. & Nordheimer, S. (2013). 'Verstehens-Shift' durch Vernetzung – exemplarische Darstellung anhand von Beispielen aus der Stochastik. In: M. Brandl et al. (Hrsg.): *Mathe vernetzt: Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. Band 3 der Schriftenreihe des GDM-Arbeitskreises ‚Vernetzungen im Mathematikunterricht', herausgegeben von A. Brinkmann* (S. 9-22). Aulis Verlag.

Brandl, M. & Nordheimer, S. (2011). Zufällig vernetzt? Vernetzungen mit Stochastik im Lehrplan und darüber hinaus. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (S. 143–146). Münster: WTM.

Bruner, J. (1986). *Actual Minds, Possible Worlds*. Cambridge (Mass.): Harvard University Press.

Egan, K. (1989a). The shape of the science text: A function of stories. In S. de Castell, A. Luke, & C. Luke, (Eds.), *Language, authority and criticism: Readings on the school textbook* (pp. 96–108). New York: The Falmer Press.

Egan, K. (1989b). Memory, imagination, and learning: Connected by the story. *Phi Delta Kappan, 70(6)*, 455–473.

Klassen, S. (2006). A theoretical framework for contextual science teaching. *Interchange, 37, 1-2*, 31-61.

Kubli, F. (2005). *Mit Geschichten und Erzählungen motivieren: Beispiele für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht*. Köln: Aulis Deubner.

Kubli, F. (2002). *Plädoyer für Erzählungen im Physikunterricht: Geschichte und Geschichten als Verstehenshilfen – Ergebnisse einer Untersuchung* (2nd ed). Köln: Aulis Deubner.

Kubli, F. (1999). Historical aspects in physics teaching: Using Galileo's work in a new Swiss project. *Science & Education, 8(2)*, 137–150.

Norris, S., Guilbert, M., Smith, M., Shahram, H. & Phillips, L. (2005). A theoretical framework for narrative explanation in science. *Science Education, 89, 4*, 535-554.

Resnick, L.B. & Resnick, D.P. (1992). Assessing the thinking curriculum: New tools for educational reform. In B. R. Gifford & M. C. O'Connor (Eds.), *Changing assessments: Alternative views of aptitude, achievement and instruction* (pp. 37–75). Boston: Kluwer.

Wagenschein, M. (1968). *Verstehen lernen.* Weinheim und Basel: Beltz Verlag, 8. erg. Aufl. 1989.

Weil, S. (1956). *Die Einwurzelung – Einführung in die Pflichten dem menschlichen Wesen gegenüber*. München: Kösel.

Whitehead, A.N. (1929). *The aims of education and other essays.* New York: McMillan.

Wood, D., Bruner, J. & Ross, G. (1976): The Role of Tutoring in Problem-Solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17,* 89-100.

Astrid BRINKMANN, Münster

Maps als Hilfe beim Problemlösen und beim Modellieren

Graphische Darstellungen von Vernetzungen wie Mind Maps, Concept Maps und hiervon abgewandelte Map-Formen können, bei passender inhaltlicher Gestaltung, eine Hilfe beim Problemlösen und beim Modellieren sein. Dies erreicht man zum einen mit Maps, die einen, zur gestellten Aufgabe passenden, gut strukturierten Überblick über mathematische Wissensinhalte in ihrem Zusammenhangsgefüge bereitstellen. Zum anderen können beim Problemlösen auch Maps dienlich sein, die Werkzeuge, wie Rechentechniken und Algorithmen, die beim Problemlösen genutzt werden, bereitstellen, oder Maps, die Metawissen zu Problemlöseprozessen liefern, indem sie z. B. eine Übersicht über heuristische Strategien und Prinzipien zeigen.

Einen ausführlichen Artikel hierzu findet man im *Band 4* der Schriftenreihe *„Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“* (Brinkmann 2016); die nachfolgenden Abschnitte geben einen Einblick in Kurzform.

1. Maps als Hilfe beim (innermathematischen) Problemlösen

1.1 Maps, die Basiswissen für Problemlöseprozesse abbilden

Mit Mind Maps, Concept Maps und hiervon abgewandelte Formen lassen sich vernetzte mathematische Wissensinhalte zu einem Thema visualisieren (vgl. z. B. Brinkmann 2011); die Maps liefern ein Bild der Vernetzung zum Thema. Beim Problemlösen werden mathematische Objekte aktiv in Beziehung zueinander gesetzt, es findet ein Prozess des Vernetzens statt, oder bildlich gesprochen: Man bewegt sich im Wissensnetz.

Es liegt daher nahe, dass die Nutzung von Maps in Problemlöseprozessen hilfreich sein kann. Ergebnisse einer Untersuchung (Brinkmann 2005) bestätigen diese These und zeigen obendrein, dass die Wissensdarstellung in Map-Form hilfreicher ist als die bloße textliche Darstellung in Schulbüchern.

Hat ein Problemlösender eine Map vorliegen, die vernetzte Wissensinhalte zum fraglichen Thema abbildet, so muss die Suche nach inhaltlichen Zusammenhängen nicht nur auf rein kognitiver Ebene des Problemlösenden erfolgen, die Zusammenhänge können in der Map gesehen werden und die Map erinnert an sie. Dabei muss die Map gar nicht alle Begriffe und Verbindungen aufzeigen, die dem Wissensnetz des Problemlösenden eigen sind, sie muss aber passende Assoziationen auf kognitiver Ebene hervorrufen.

Wie eine Map beim Lösen einer Problemaufgabe genutzt werden kann, wird am Beispiel des Themas „Quadratische Parabeln“ in Brinkmann (2012, 2016) detailliert ausgeführt, wobei Möglichkeiten und Grenzen deutlich werden. Zu den Grenzen gehört insbesondere, dass eine Map immer nur einen Wissens*ausschnitt* darstellt, der zudem in der Regel auf ein einziges Thema begrenzt ist, und damit nicht immer alle zum Lösen vernetzungsreicher Aufgaben nötigen Wissensbestandteile in ihrer Beziehungshaltigkeit repräsentiert. Dies betrifft insbesondere themenübergreifende und –verbindende Aufgaben.

Für die Unterrichtspraxis erweist es sich als besonders vorteilhaft, wenn zum Erstellen einer Map, die Basiswissen für das Lösen von Problemaufgabe bereitstellen soll, der Lehrende eine inhaltliche Eingrenzung, evtl. auch Vorstrukturierung der Map vorgibt, und die Map von den Schüler/-innen fertiggestellt wird. Solche Maps können passgenauer Wissensnetze für die zu lösenden Aufgaben darstellen, als es reine Schülerprodukte i. d. R. vermögen, und erfordern zudem zu ihrer Fertigstellung eine intensive Auseinandersetzung der Lernenden mit den Wissensinhalten. Mögliche methodische Vorgehensweisen sind im Band 3 von Mathe vernetzt beschrieben (Borys & Brinkmann 2013).

1.2 Maps mit Werkzeugen als Hilfe zum Problemlösen

Beim Problemlösen müssen häufig Rechenregeln und –techniken, Algorithmen oder Formeln angewandt werden. Solche Werkzeuge, rund um ein Thema, lassen sich in einer Werkzeug-Map zusammentragen, die dann als „Nachschlagewerk“, genauer: „Nach-schau-werk“, dient.

1.3 Map als Übersicht über Heurismen zum Problemlösen

Ein Problemlösender muss nicht nur über ein gut fundiertes Begriffswissen verfügen, sondern auch über Wissen um heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien, und diese zum Problemlösen passend auswählen und anwenden können. Solches Metawissen zum Problemlösen Heurismen betreffend lässt sich überblicksartig in Maps darstellen. Die Nutzung solcher Maps befähigt den Problemlösenden nicht unbedingt zum Handeln, erinnert aber an mögliche in Frage kommende Vorgehensweisen.

Ein solcher Einsatz von Maps im Unterricht ist vereinzelt schon in neueren Schulbüchern zu finden (MatheNetz 2008, Lambacher Schweizer 2010).

2. Maps als Hilfe beim Modellieren

Beim Modellieren erweist sich für Schüler/-innen insbesondere der Teilprozess des Mathematisierens als eine besondere Herausforderung. Es wird im Folgenden darauf eingegangen, wie Maps gestaltet werden sollten, um speziell beim Mathematisieren eine Hilfe bieten zu können.

Die zentrale Frage ist: „Wie findet man ein passendes mathematisches Modell zu einer gegebenen Sachsituation?"

Beispiel: Geometrische Modellierung

Kann man beispielsweise in der Sachsituation ein rechter Winkel erkennen, so kann eine geometrische Figur mit einem rechten Winkel, z. B. ein rechtwinkliges Dreieck oder ein Rechteck, Teil der Mathematisierung sein; Eigenschaften, Formeln, Sätze, die für diese geometrische Figur gelten, können passende mathematische Modelle sein, um die Sachsituation mathematisch zu bearbeiten. Eine Map, die Wissen rund um rechtwinklige Dreiecke bzw. Rechtecke darstellt, kann hier helfen, eine passende und nützliche Mathematisierung zu finden.

Beispiel: Funktionale Modellierung

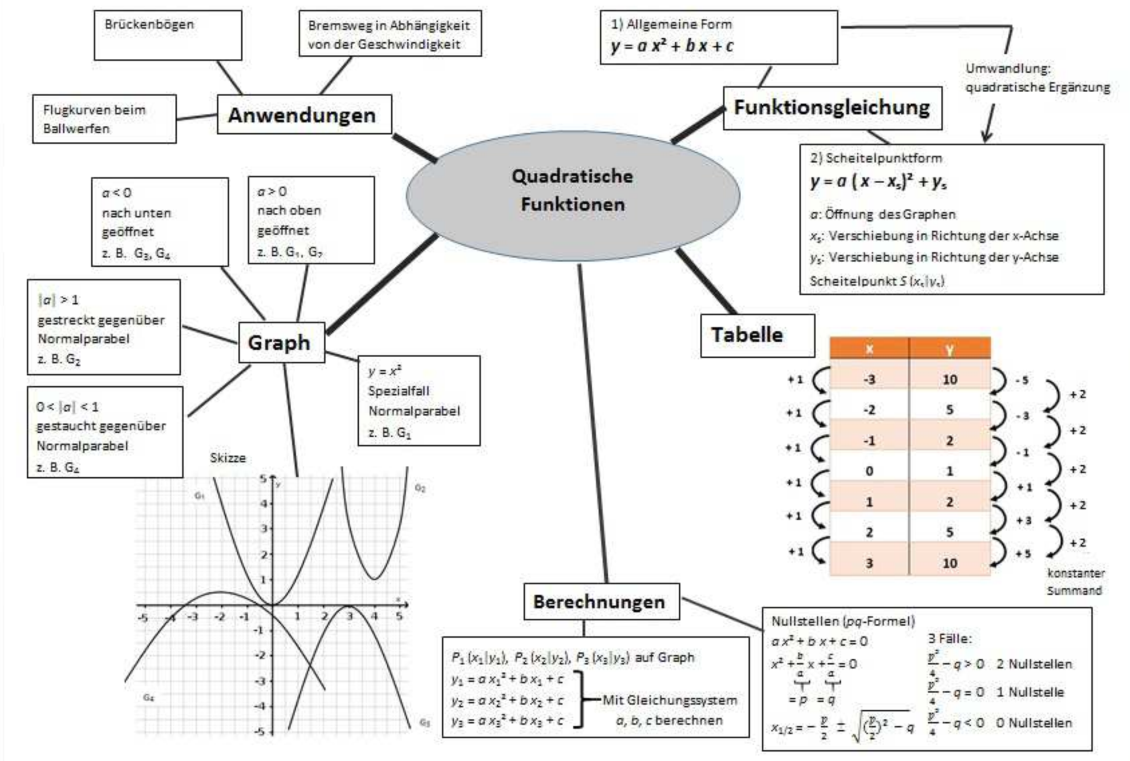
Werden in der Sachsituation zwei Größen betrachtet, wobei eine Veränderung der einen Größe eine Veränderung der anderen bewirkt, liegt eine funktionale Modellierung nahe, die dann aber noch konkretisiert werden muss. Einen passenden Funktionstyp findet man z. B., indem

- die spezielle Sachsituation als *typische Sachsituationsart* zu einem bestimmten Funktionstyp erkannt wird,
- in den gegebenen *Daten* (nummerische Darstellung, z. B. Messreihe) *Beziehungen zwischen den Zahlenwerten* erkannt werden, die typisch für eine bestimmte Funktionsart sind,
- eine vorgegebene *graphische Darstellung* als typisch für eine bestimmte Funktionsart erkannt wird.

Maps, die speziell Erkennungsmerkmale für bestimmte funktionale Mathematisierungsmuster zeigen, können beim Finden eines passenden mathematischen Modells zu einer Sachsituation helfen.

Da in funktionalen Modellierungsprozessen oft ein Darstellungswechsel nötig ist, erweist es sich als vorteilhaft, wenn die Maps verschiedene Darstellungsarten von Funktionen (nummerisch, algebraisch, graphisch) sowie zwischen diesen bestehende Zusammenhänge aufzeigen. Hilfreich ist ferner eine Ergänzung der Maps durch das Aufführen einiger wesentlicher Berechnungen, die beim Arbeiten mit den entsprechenden Funktionen durchführt werden können. Um diese vielen Informationen in Maps unterbringen zu können, sollte sich jede Map auf nur einen Funktionstyp beschränken.

Folgende Abb. zeigt eine Beispielmap zu quadratischen Funktionen.



3. Anmerkung

In der Schriftenreihe „Mathe vernetzt“ wurden sowohl im Band „*Kommentierte Arbeitsblätter und Kopiervorlagen zu den Bänden 1–3*“ als auch im *Band 4* etliche Unterrichtsmaterialien mit Maps und passenden Aufgaben zu verschiedenen mathematischen Schulthemen bereitgestellt.

Literatur

Borys, T.; Brinkmann, A. (2013). Strukturiertes Lehren und Lernen mit Maps – Methodische Vorgehensweisen zur inhaltlichen Eingrenzung. In A. Brinkmann (Reihenhg.) A. Brinkmann, M. Brandl, M. Bürker (Hg.). *Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. Band 3.* Aulis, S. 23–32.

Brinkmann, A. (2005). Können Concept Maps eine Hilfe beim Problemlösen sein? In: G. Graumann (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005*, S. 127–130.

Brinkmann, A. (2011). Visualisieren und Lernen von vernetztem mathematischen Wissen mittels Mind Maps und Concept Maps. In: A. Brinkmann (Reihenhrsg.). A. Brinkmann, J. Maaß, H.-S. Siller (Bandhrsg.). *Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. Band 1.* Aulis, S. 22–35.

Brinkmann, A. (2012). Wissensnetze nutzen. Vernetzende Aufgaben und Visualisierungen. *mathematik lehren* 173, S. 57–60.

Brinkmann, A. (2016). Maps als Hilfe beim Problemlösen und beim Modellieren. In: A. Brinkmann (Reihenhrsg.). A. Brinkmann, T. Borys, M. Brandl (Bandhrsg.). *Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. Band 4.* Aulis, S. 23–35. ISBN 978-3-7614-2960-0.

Link „Mathe vernetzt“: http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html

Wolfgang PFEFFER, Passau, Matthias BRANDL, Passau

Mentales Modell zum Abbildungsbegriff bei Studienanfängerinnen und –anfängern.

Dieser Beitrag behandelt einen Ausschnitt eines Forschungsprojekts an der Universität Passau. Ziel dieses Projekts ist es, mehr über die Schwierigkeiten im Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik herauszufinden, welche in den letzten Jahren sowohl national (vgl. etwa Dieter & Törner (2010)) als auch international (vgl. etwa Clark & Lovric (2009)) aufgezeigt wurden. Die in der Literatur geschilderten Probleme zeigen sich auch an der Universität Passau. In Pfeffer & Brandl (2015) haben wir bereits über erste Ergebnisse eines Fragebogens zum Hintergrundwissen Mathematik von Studienanfänger/innen berichtet. In diesem Artikel stellen wir Ergebnisse einer qualitativen Untersuchung der Begriffsbildung von Studierenden im ersten Semester vor. Wir beschränken uns hierbei auf den Abbildungsbegriff.

1. Concept-Image und Concept-Definition

Die theoretische Grundlage für unsere Untersuchung bilden die von Tall & Vinner (1991) eingeführten Begriffe Concept-Image und Concept-Definition. Im Wandel von der Schul- zur Hochschulmathematik und dem damit einhergehenden steigenden Abstraktionsgrad kommt der Begriffsbildung bzgl. mathematischen Definitionen und Konzepten eine wichtige Rolle zu. In diesem Zusammenhang meint Concept-Image die „(…) cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes“ (Tall & Vinner, 1981, S. 152). Unter dem Begriff Concept-Definition wird die formale mathematische Definition verstanden. Engelbrecht (2010) argumentiert in Anlehnung an Alcock & Simpson (1999), dass Studenten beim Argumentieren nicht nur auf die formalen Definitionen von Begriffen zurückgreifen, sondern ihr mentales Modell auf ihrem Concept-Image aufbauen, welches sich von der Definition unterscheiden kann. Folglich ist es umso wichtiger, sowohl die formale Definition zu kennen, als auch ein möglichst kohärentes Concept-Image dazu aufzubauen (vgl. Engelbrecht, 2010, S. 146). Für Rösken & Rolka ist vor allem die Entwicklung des Concept-Image entscheidend: „When working on problems, students do not consider any concept definition. They base their decisions on the concept image“ (Rösken & Rolka, 2007, S. 185). Demnach ist es besonders in der Studieneingangsphase wichtig, dass die Studierenden zu zentralen mathematischen Definitionen und Konzepten ein Concept-Image aufbauen und lernen, auf dieses zurückzugreifen.

2. Methode und Stichprobe

Zu Beginn des Wintersemesters 2014/2015 wählten wir unter den Studienanfängerinnen und -anfängern an der Fakultät für Informatik und Mathematik der Universität Passau eine möglichst heterogene Stichprobe von 31 Studierenden aus. Im Rahmen einer längsschnittlich angelegten qualitativen Interviewstudie (EMMA) wurden diese Studierenden im Lauf der ersten beiden Semester zu drei unterschiedlichen Zeitpunkten befragt. Bei den Befragungen stand vor allem das mentale Modell (insbesondere Concept-Image) zu ausgewählten, zentralen Begriffen aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und Analysis I und dessen Entwicklung im Fokus. Wir möchten etwa herausfinden, was sich Studienanfängerinnen und -anfänger nach rund 7 Wochen Studium unter den Begriffen Abbildung, Injektivität sowie Surjektivität vorstellen und wie sich diese Vorstellung im Laufe der ersten beiden Semestern verändert. In diesem Artikel beschränken wir uns auf einen Interviewausschnitt zum Abbildungsbegriff nach rund 7 Wochen Mathematikstudium.

3. Funktion und Abbildung

Abbildungen sind ein zentraler Bestandteil der ‚Linearen Algebra I'-Vorlesung. Diese ist zugleich die einzige Mathematikvorlesung im ersten Semester für Studiengänge mit vertieftem Mathematikanteil. Nach der Definition von Abbildungen werden weiter Eigenschaften von Abbildungen (z.B. Injektivität, Surjektivität) sowie insbesondere lineare Abbildungen behandelt. Diese Eigenschaften werden von den Studierenden in den Übungsveranstaltungen eingeübt und vertieft. Der Abbildungsbegriff nimmt an dieser Stelle eine Sonderrolle ein, da er im Gegensatz zu vielen anderen Begriffen bereits in der Schule unter dem Funktionsbegriff vorkommt.

Zuordnungen und Funktionen

Eine **Zuordnung** weist jedem Wert aus einer Menge einen Wert oder mehrere Werte aus einer anderen Menge zu.
Wird stets genau ein Wert aus der anderen Menge zugewiesenen, so spricht man von einer **eindeutigen Zuordnung** bzw. von einer **Funktion**.

Die **Zuordnungsvorschrift** einer Funktion f gibt an, wie zu jedem Wert x der **Definitionsmenge** D_f der zugehörige Wert y der anderen Menge gefunden wird.
Kurz: $f: x \mapsto y$

Eine **Abbildung** $\varphi : M \to N$ ist eine Zuordnung, die jedem Element von M genau ein Element von N zuordnet (φ: Abbildungsname, M: Definitionsbereich, N:Zielbereich, $\to$: Abbildungspfeil).
Ist $a \in M$, so schreiben wir $\varphi(a)$ für **Bildelement** von a unter φ (oder kurz das **Bild** von a unter φ).
Schreibweise:

$$\begin{aligned} \varphi : M &\to N \\ a &\mapsto \varphi(a) \end{aligned}$$

M heißt **Definitionsbereich** von φ. N heißt **Zielbereich** von φ. $\mathrm{Bild}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in M\}$ heißt das **Bild** von φ und wird mit $\mathrm{Im}(\varphi)$ bezeichnet.

Abb. 1: Gegenüberstellung der Definition einer Funktion im Schulbuch (Fokus Mathematik 8 - Gymnasium Bayern) und der Definition einer Abbildung im Vorlesungsskript zur ‚Linearen

Wir stellen an dieser Stelle der Definition einer Funktion im Schulbuch (Fokus Mathematik 8) die Definition einer Abbildung im Lineare-Algebra-Skript (Uni Passau, WS 14/15) gegenüber (Abb. 1).

4. Ergebnisse

Von den 27 Teilnehmer/innen am zweiten Interviewtermin wiesen lediglich fünf Studierende ein konsistentes und vollständiges Abbildungskonzept auf. Hierzu exemplarisch die Antwort von S21 auf die Frage, was für ihn eine Abbildung ist:

S21: Also eine Abbildung ist für mich erst einmal eine Relation, das heißt man hat (.)/ ja wir haben das eingeführt mit Mengen ((Mhm))) und dann wird die eine Menge auf die andere abgebildet ((Mhm)). Das heißt wir haben hier sowas und dann ordnet man ein Element x (.)/ ahm/ einem Element von Y zu. Das ist so der erste Teil und irgendwann hab ich dann festgestellt, dass das mit Funktionen auch zusammenhängt. Also eine Abbildung ist eine Funktion, mit Funktion mein ich jetzt, wie in der Schule. Da haben wir das nicht Abbildung genannt. Das verstehe ich unter Abbildung und Funktion. [...] Ja ich habe eine Vorstellung, dass in einer Abbildung eine bestimmte Wertemenge, also Werte einer bestimmten Menge einer anderen Menge zugeordnet werden und das in einem bestimmten Raum ((Mhm)). Wenn es eine Funktion sein soll, dann darf nur jedem x genau ein y zugeordnet werden ((Mhm)). [...] Ja Abbildung ist äquivalent zu einer Funktion ((Mhm)), aber nicht zur Relation.

Die Antwort von S21 enthält alle wesentlichen Inhalte. Er spricht zwar zunächst von einer Relation auf zwei Mengen – ein Indiz dafür, dass er sich zunächst auf die Definition einer Abbildung als Teilmenge des kartesischen Produkts zweier Mengen bezieht. Weiter bezeichnet er eine Abbildung als Zuordnung von Elementen einer Menge X zu Elementen einer Menge Y, stellt dann allerdings den Bezug zu Funktionen her, die ihm aus der Schule bekannt sind. Über den Funktionsbezug leitet er sich die Eigenschaften einer Abbildung ab, dass jedem x genau ein y zugeordnet wird. Der Großteil der Studierenden hatte lediglich ein fragiles und zudem unvollständiges Verständnis des Abbildungskonzepts.

S17: Oh Gott, das wird nichts. [...] (...) Hmm hmm hmm. Oh Gott in so was bin ich schlecht. Ahm/ (..) ja (..) das ist eine gute Frage ja. Eine Abbildung (..) ich weiß jetzt nicht, wie ich das erklären soll. [...] Ahm/ (..) ich weiß nicht, man hat da irgendwelche/ irgendwie/ ahm/ ich weiß jetzt nicht, wie ich das sagen soll (..). Ja hmm. Ich sag jetzt mal Grundlage ((Mhm)). Und (.) die wird halt dann mit Hilfe irgendeiner Vorschrift auf/ ahm/ ja auf irgendwas Neues in Anführungszeichen abgebildet ((Mhm)). Ja ((S17: lacht)) ich weiß nicht, was ich noch sagen soll.

S28: Ne/ ahm/ okay. Eine Abbildung ist eigentlich zwischen zwei Mengen/ klar die Definition ist halt/ die jedem Element aus der einen Menge/ ahm/ ein Element aus der anderen Menge zuordnet und/ ahm/ das kann so eine, so eine so eine ganz hingebogene Abbildung sein sag ich mal so. Das Element bekommt das und das das und so. Oder halt so eine lineare oder so was, die dann irgendwie einen Zusammenhang haben, die dann eine Formel quasi abbildet ((Mhm)). Also ja, also ich kann halt hier so Pfeile und so.

Bei S17 liegt ein sehr vages Bild von einer Abbildung vor. Er erwähnt den Begriff „Vorschrift“, ohne diesen näher zu spezifizieren. Weiter spricht er von einer „Grundlage“ sowie von „irgendwas Neues“. Es ist ihm (in diesem Moment) nicht möglich, diese beiden Begriffe näher zu charakterisieren. Eine mathematische Beschreibung mit Mengen und Elementen ist somit nicht möglich. In diesem Punkt ist S28 mit seiner Vorstellung deutlich weiter. Für ihn ist eine Abbildung „zwischen zwei Mengen“, die „jedem

Element aus der einen Menge ein Element aus der anderen Menge zuordnet“. Während er die Linkstotalität einer Abbildung erwähnt, fehlt die Rechtseindeutigkeit, welche auch auf Nachfragen hin nicht genannt wird.

Vier Teilnehmer wiesen überhaupt keine Vorstellung zu einer Abbildung auf. Gleichzeitig fehlte ihnen die Verbindung zur Funktion aus der Schule.

5. Ausblick

Das mentale Modell von Studienanfänger/innen zu zentralen Begriffen aus den Anfängervorlesungen soll charakterisiert und beschrieben werden. Ähnlich zu einer vergleichbaren Studie von Hänisch (2011) wird dabei besonders Wert auf vorhandene Fehlvorstellungen sowie formale Fertigkeiten gelegt. Darüber hinaus steht insbesondere die Entwicklung des mentalen Modells im Laufe der ersten beiden Semester im Forschungsfokus.

Literatur

Alcock, L. & Simpson, A. (1999). The rigour prefix. In O. Zaslavsky (Hrsg.): *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 17-24.

Clark, M. & Lovric, M. (2009). Understanding secondary-tertiary transition in mathematics. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 40(6)*, 755-776.

Dieter, M. & Törner, G. (2010). *Zahlen rund um die Mathematik.* Preprint der Fakultät für Mathematik (Universität Duisburg-Essen). Nr. SM-DU-716.

Engelbrecht, J. (2010). Adding structure to the transition process to advanced mathematical activity. In *International Journal of Mathematical Education*, 41(2), 143-154.

Hänisch, C. (2011). Denkformen des formalen Denkens – Eine qualitative empirische Studie zur spezifischen Kognition von Studienanfängern im Fach Mathematik. *Dissertation.*

Pfeffer, W. & Brandl, M. (2015). Schwierigkeiten beim Übergang Schule – Hochschule in Mathematik. Eine qualitative Längsschnittstudie. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015.*

Rösken, B. & Rolka, K. (2007). Integrating Intuition: the Role of Concept Image and Concept Definition for Students‘ Learning of Integral Calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3, 181-204.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(7), 151-169.

Moderierte Sektion:

Videobasierte Erhebung von fachdidaktischem Noticing bei angehenden und praktizierenden Mathematiklehrkräften

Marita FRIESEN und Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg

Videobasierte Erhebung von fachdidaktischem Noticing bei angehenden und praktizierenden Mathematiklehrkräften

Im komplexen Unterrichtsgeschehen müssen Lehrkräfte in der Lage sein, auf der Basis professionellen Kriterienwissens lernrelevante Beobachtungen zu machen und diese zu interpretieren (Sherin, Jacobs & Philipp, 2011). Damit gilt Noticing als Expertisemerkmal von Lehrkräften, welches Expertenlehrkräfte gegenüber von Novizen auszeichnet (van Es, 2011). Um die Erhebung von Noticing nahe an anforderungshaltigen professionellen Kontexten von Lehrkräften zu ermöglichen, wird der Einsatz von Videovignetten als besonders geeignet betrachtet (Kaiser et al., 2015). Hierbei können ganz unterschiedliche fachdidaktische Perspektiven eingenommen werden, es ergeben sich jedoch auch eine Vielzahl an methodischen Fragen und Herausforderungen: So können Videovignetten z.B. authentische Unterrichtsmitschnitte sein oder auf Grundlage eines Drehbuchs erstellt werden, es können offene und geschlossene Frageformate eingesetzt werden und es muss entschieden werden, ob die Probanden ein Zeitlimit gesetzt bekommen (vgl. Kuntze, 2015). Die moderierte Sektion zeigt durch das breite Spektrum der vorgestellten Forschungsansätze verschiedene Möglichkeiten, diesen methodischen Herausforderungen zu begegnen. Neben unterschiedlichen fachdidaktischen Fokussierungen werden in der Sektion auch verschiedene theoretische Konzeptualisierungen von Noticing vorgestellt.

Kim-Alexandra Rösike stellt aus dem Projekt do math! eine qualitativ angelegte Studie zur Professionalisierung von praktizierenden Lehrkräften vor, bei der die Hebung mathematischer Potenziale und Interessen von Schülerinnen und Schülern im Mittelpunkt stehen. Die teilnehmenden Lehrkräfte erhalten die Gelegenheit, Videosequenzen aus dem eigenen sowie aus fremdem Unterricht zu analysieren, um ihre professionelle Wahrnehmung von Potenzialen in Bearbeitungsprozessen von Lernenden zu fördern und entsprechende Handlungsoptionen zu entwickeln.

Julia Ollesch, Markus Vogel und Tobias Dörfler geben Einblick in das Projekt EKoL 10 aus dem Forschungs- und Nachwuchskolleg „Effektive Kompetenzdiagnose in der Lehrerbildung“. Im Mittelpunkt des Projekts steht die Beurteilung von computergestützten Materialien für den Mathematikunterricht. Hierzu werden Studierenden Videovignetten mit kurzen Unterrichtsszenarien zum Einsatz von dynamischer Geometriesoftware in einem online-basierten Testinstrument vorgelegt.

Gabriele Kaiser und Jessica Hoth stellen im Rahmen der Follow-Up-Studie der internationalen Lehrerbildungsstudie TEDS-M die videobasierte Untersuchung des Zusammenhangs zwischen professionellen Kompetenzen und Förderung von Kreativität und mathematischer Begabung von Lernenden vor. In einem online-basierten Test wurden Videovignetten eingesetzt, um u.a. das Noticing von Lehrkräften in der Berufseinstiegsphase zu erheben. Im Mittelpunkt stand die Identifikation von Fehlern, Interpretation durch strukturbezogene Reflektionen und Entwicklung von Handlungsoptionen.

Im Projekt EKoL 11 von Marita Friesen, Sebastian Kuntze und Markus Vogel wird die fachdidaktische Analysekompetenz zum Umgang mit Darstellungen von angehenden und praktizierenden Lehrkräften untersucht. Um unterschiedliche Situierungsformate für die Erhebung fachdidaktischer Analysekompetenz zu vergleichen, kamen neben Videos auch Texte und Comics zum Einsatz. Die verschiedenen Vignettenformate werden bezüglich ihrer Bedeutung z.B. für die wahrgenommene Authentizität und die Analyseergebnisse zum Umgang mit Darstellungen untersucht.

Sektionsvorträge

Rösike, K.-A.: Wahrnehmung von Potenzialen in Bearbeitungsprozessen von Lernenden – eine qualitative Studie zur Professionalisierung von Lehrkräften

Ollesch, J., Vogel, M., Dörfler, T.: Noticing auf der Mikroebene zwischen Computer und Schüler/innen

Kaiser, G., Hoth, J.: Videobasierte Erfassung professioneller Kompetenzen von Lehrkräften bei der Förderung von Kreativität und mathematischer Begabung – Detailergebnisse aus TEDS-FU

Friesen, M., Kuntze, S., Vogel, M.: Videos, Comics oder Texte? Vergleich verschiedener Vignettenformate bei der Erhebung fachdidaktischer Analysekompetenz von Lehrkräften in Ausbildung und Praxis

Literatur

Kaiser, G., Busse, A., Hoth, J., König & J., Blömeke, S. (2015). About the Complexities of Video-Based Assessments: Theoretical and Methodological Approaches to Overcoming Shortcomings of Research on Teachers’ Competence. *International Journal of Science and Mathematics Education 13*(2), 369-387.

Kuntze, S. (2015). Expertisemerkmale von Mathematiklehrkräften und anforderungshaltige Situierungen – Fragen an Untersuchungsdesigns. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. 528-531). Münster: WTM-Verlag.

Sherin, M., Jacobs, V. & Philipp, R. (2011). *Mathematics Teacher Noticing. Seeing Through Teachers’ Eyes.* New York: Routledge.

Van Es, E. (2011). A framework for learning to notice student thinking. In M.G. Shering, V.R. Jacobs & R.A. Philipp (Hrsg.), *Mathematics Teacher Noticing. Seeing Through Teachers’ Eyes (S. 134-151).* New York: Routledge.

Marita FRIESEN, Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg und Markus VOGEL, Heidelberg

Videos, Comics oder Texte? Vergleich verschiedener Vignettenformate zur Erhebung fachdidaktischer Analysekompetenz von Lehrkräften in Ausbildung und Praxis

Der Einsatz kurzer Unterrichtssituationen in Form von Vignetten ermöglicht eine unterrichtsnahe Erhebung von Kompetenzen bei Lehrkräften, wobei Vignetten im Videoformat eine besondere Eignung zugeschrieben wird. Trotz des oftmals großen Aufwands zur Herstellung von Videovignetten wird bei der Testkonstruktion selten ein Vergleich zu möglichen anderen Vignettenformaten vorgenommen. Die vorgestellte Studie greift dieses Forschungsdesiderat auf: Zur Erhebung fachdidaktischer Analysekompetenz zum Umgang mit Darstellungen wurden sechs Unterrichtssituationen jeweils in drei Formaten (Video, Comic und Text) eingesetzt. Um einen Vergleich der Vignettenformate zu ermöglichen, schätzten die teilnehmenden Lehrkräfte zusätzlich zum Umgang mit Darstellungen in den Unterrichtssituationen die wahrgenommene Authentizität, Motivation, Immersion und Resonanz zu jeder Vignette ein.

Fachdidaktische Analysekompetenz zum Umgang mit Darstellungen

Ohne Darstellungen ist das Lernen und Lehren von Mathematik kaum vorstellbar, denn nur über den Einsatz von Darstellungen werden mathematische Objekte zugänglich (Goldin & Shteingold, 2001). Vielfältige Darstellungen sind hierbei jedoch sowohl Lernhilfe als auch Lernhürde, da die Wechsel zwischen unterschiedlichen Darstellungsregistern, sogenannte „conversions“ (Duval, 2006), als anspruchsvolle kognitive Leistungen anzusehen sind, die häufig Verständnisschwierigkeiten verursachen (Ainsworth, 2006; Dreher & Kuntze, 2015). Um ihre Schülerinnen und Schüler beim Lernen mit Darstellungen und bei Darstellungswechseln optimal unterstützen zu können, müssen Lehrkräfte daher über professionelles Wissen zu Darstellungen verfügen, auf dessen Grundlage sie den Umgang mit Darstellungen im Unterricht analysieren können. Diese fachdidaktische Analysekompetenz umfasst das Identifizieren von lernrelevanten Unterrichtsereignissen, deren kritische Bewertung bzw. Interpretation auf Grundlage von fachspezifischem Kriterienwissen zum Umgang mit Darstellungen sowie die Artikulation des Analyseergebnisses (Friesen, Dreher & Kuntze, 2015).

Zur Erhebung von Kompetenzen bei Lehrkräften werden Videovignetten aufgrund ihrer Unterrichtsnähe als besonders geeignet betrachtet (vgl. Blömeke, Gustafsson, & Shavelson, 2015). Bislang gibt es allerdings wenige Studien, die einen Vergleich verschiedener Vignettenformate vornehmen und deren Einfluss auf die Auseinandersetzung mit den vorgelegten Unterrichtssituationen sowie auf die Analyseergebnisse der Befragten untersuchen.

Zum Forschungsstand: Vergleich verschiedener Vignettenformate

Seidel et al. (2011) konnten in einer Studie zeigen, dass die wahrgenommene Authentizität, Immersion, Motivation und Resonanz der befragten Lehrkräfte eine wesentliche Rolle für deren kognitive Aktivierung und damit für die Auseinandersetzung mit den vorgelegten Unterrichtssituationen spielte. Immersion meint dabei, wie stark sich eine Lehrkraft in die Unterrichtssituation hineinversetzt fühlt bzw. in sie eintauchen kann. Mit Resonanz wird die Verbindung der vorgelegten Unterrichtssituation mit eigenen Unterrichtserfahrungen bezeichnet (vgl. Seidel et al., 2011). Bei den an der Studie von Seidel et al. teilnehmenden Lehrkräften waren Einschätzungen zu diesen vier Faktoren z.B. höher, wenn sie ein Video mit eigenem Unterricht im Vergleich zu fremdem Unterricht analysierten. Allerdings wurde kein systematischer Einfluss auf die Analyseergebnisse der Lehrkräfte zu verschiedenen Unterrichtsmerkmalen festgestellt (Seidel et al., 2011). Herbst und Kosko (2013) verglichen eine Unterrichtssituation in den Formaten Trickfilm und Video und konnten feststellen, dass die Befragten die Situation im Videoformat als signifikant echter einschätzten. Systematische Einflüsse der beiden Vignettenformate auf die Analyse relevanter Unterrichtsmerkmale konnten jedoch nicht gezeigt werden (Herbst & Kosko, 2013). Auch für die Erhebung fachdidaktischer Analysekompetenz zum Umgang mit Darstellungen stellt sich daher die Frage, ob sich durch verschiedene Vignettenformate Einflüsse auf die Auseinandersetzung mit den dargestellten Unterrichtssituationen und die Analyseergebnisse der Lehrkräfte ergeben.

Forschungsinteresse und ausgewählte Forschungsfragen

Vor dem oben skizzierten theoretischen Hintergrund ergeben sich die folgenden Forschungsfragen:

- Wie authentisch empfinden die Befragten die Vignetten und welchen Grad an Immersion, Motivation sowie Resonanz berichten sie?
- Gibt es hierbei Unterschiede zwischen den Video-, Comic- und Textvignetten?
- Beeinflusst das Vignettenformat (Video, Comic, Text) die Ergebnisse des Analyseprozesses zum Umgang mit Darstellungen in den vorgelegten Unterrichtssituationen?

Stichprobe und Design

Es wurden über 250 Lehramtsstudierende, Lehramtsanwärter/innen sowie praktizierende Lehrkräfte zu sechs Unterrichtssituationen aus dem Inhaltsbereich Brüche befragt. Die unterschiedlichen Vignettenformate wurden so vorgelegt, dass jede Testperson jeweils zwei Texte, zwei Comics und zwei Videos erhielt. Allen Unterrichtssituationen ist gemeinsam, dass sie eine Lehrer-Schüler-Interaktion zeigen, bei der die Lehrperson zur Erklärung einer Aufgabe einen Darstellungswechsel vornimmt, bei der sie unzureichend an die von den Lernenden verwendeten Darstellungen anknüpft. Auf der Basis des oben skizzierten theoretischen Hintergrundes ist ein solcher Darstellungswechsel kritisch zu betrachten, da er zu weiteren Verständnisschwierigkeiten bei den Lernenden führen kann. Eine genauere Beschreibung der Unterrichtssituationen und des Testinstruments liegt z.B. bei Friesen, Kuntze und Vogel (2015) vor. Auf jede Unterrichtssituation folgte ein Fragebogenteil mit geschlossenen und offenen Antwortformaten, in dem die Teilnehmenden gebeten wurden, die betrachtete Situation zum Umgang mit Darstellungen einzuschätzen („*Wie gut eignet sich die Reaktion der Lehrperson, um den Schülerinnen und Schülern weiterzuhelfen? Bitte beurteilen Sie im Hinblick auf den Umgang mit Darstellungen und begründen Sie!“)*. Die Einschätzungen zur Authentizität der Vignetten sowie zur empfundenen Motivation, Immersion und Resonanz wurden mit einer sechsstufigen Likert-Skala erhoben (vgl. Seidel et al., 2011).

Datenanalyse und ausgewählte Ergebnisse

Eine Analyse der Daten zur ersten Forschungsfrage zeigte, dass die Unterrichtssituationen insgesamt von allen Befragten als authentisch eingeschätzt wurden (M=4,8; SD=1,0). Auch die wahrgenommene Immersion (M=4,4; SD=1,0), Motivation (M=4,8; SD=1,0) und Resonanz (M=4,2; SD=1,3) wurde jeweils hoch eingeschätzt. Zur zweiten Forschungsfrage konnte festgestellt werden, dass sich bezüglich der wahrgenommenen Immersion, Motivation und Resonanz keine signifikanten Unterschiede zwischen den Vignettenformaten Video, Comic und Text zeigten. Die Einschätzungen zur Authentizität ergaben, dass die Unterrichtssituationen in den Formaten Text (M=4,9; SD=0,9) und Comic (M=4,9; SD=0,9) insgesamt signifikant authentischer empfunden wurden als dieselben Unterrichtssituationen im Videoformat (M=4,5; SD=1,1; F=15,2; df=2; p< .000). Um die dritte Forschungsfrage zu beantworten, wurden die in den offenen Antworten erreichten Analysescores zum Umgang mit Darstellungen bei Video-, Comic – und Textvignetten verglichen. Hierbei ergaben sich innerhalb der einzelnen Unterrichtssituationen keine signifikanten Unterschiede zwischen den verschiedenen Vignettenformaten Video, Comic und Text.

Diskussion

Die insgesamt hohen Einschätzungen zu Authentizität, Immersion, Motivation und Resonanz deuten darauf hin, dass im vorgestellten Testinstrument die Voraussetzungen für einen hohen Grad der Auseinandersetzung mit den Unterrichtssituationen unabhängig vom Vignettenformat gegeben sind. Dass der Vergleich der Analysescores zum Umgang mit Darstellungen keine signifikanten Unterschiede zwischen den Vignettenformaten ergab, lässt darauf schließen, dass sich zur Erhebung fachdidaktischer Analysekompetenz zum Umgang mit Darstellungen Videos, Texte und Comics vergleichbar eignen.

Förderhinweis

Die vorgestellte Studie entsteht im Rahmen des FuN-Kollegs EKoL und wird gefördert vom Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst des Landes Baden-Württemberg sowie von der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg.

Literatur

Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*, 183–198.

Blömeke, S., Gustafsson, J.-E. & Shavelson, R. (2015). Beyond dichotomies: Competence viewed as a continuum. *Zeitschrift für Psychologie, 223*, 3-13.

Dreher, A. & Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 88*(1), 89-114.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103–131.

Friesen, M., Dreher, A. & Kuntze, S. (2015). Pre-service teachers' growth in analysing classroom videos. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)*, Karls-Universität Prag, 2015, S. 2783-2789.

Friesen, M., Kuntze, S. & Vogel, M. (2015). Fachdidaktische Analysekompetenz zum Umgang mit Darstellungen – Vignettenbasierte Erhebung mit Texten, Comics und Videos. In: F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. WTM-Verlag, Münster, 2015, S. 1033-1036.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representation and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Hrsg.), *The role of representation in school mathematics* (S. 1–23). Boston, Virginia: NCTM.

Herbst, P., Aaron, W. & Kosko, K.W. (2013). Using representations of practice to elicit mathematics teachers' tacit knowledge of practice: a comparison of responses to animations and videos. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(6), 515-537.

Seidel, T., Stürmer, K., Blomberg, G., Kobarg, M., & Schwindt, K. (2011). Teacher learning from analysis of videotaped classroom situations: Does it make a difference whether teachers observe their own teaching or that of others? *Teaching and Teacher Education, 27*, 259-267.

Kim-Alexandra RÖSIKE, TU Dortmund

Wahrnehmung von Potenzialen in Bearbeitungsprozessen von Lernenden - Eine qualitative Studie zur Professionalisierung von Lehrkräften

Im Rahmen des Projekts „DoMath – Dortmunder Schulprojekte zum Heben mathematischer Interessen und Potenziale“ (finanziert durch die Dortmund Stiftung, Projektleitung S. Prediger) geht es um die Förderung von Schülerinnen und Schülern mit mathematischem Potenzial; es adressiert dafür sowohl Lernende im Unterricht als auch die Ebene der Lehrkräfte. Die Fortbildungsaktivitäten für die Lehrkräfte schließen drei große Arbeitsbereiche ein: die Diagnosekompetenz, die Aufgabenkonstruktion sowie die Moderationskompetenz. Die Diagnose und Förderung von mathematischen Potenzialen beschränken sich jedoch nicht auf diejenigen Lernenden, die bereits konstante sehr gute Leistungen im Mathematikunterricht zeigen, sondern beziehen auch diejenigen Schülerinnen und Schüler ein, deren mathematisches Potenzial sich derzeit noch nicht in Performanz äußert. Der *prozessbezogene Blick* auf mathematische Potenziale beinhaltet die Annahme, dass diese eine dynamische Natur aufweisen (Leikin 2009, S. 388) und eine Förderung von möglich ist – im Gegensatz zum eher statischen Konstrukt des Talents. Wenn sich allerdings das vorhandene Potenzial noch nicht in Performanz niederschlagen muss, sind Strategien der Lehrkräfte notwendig, es überhaupt sichtbar zu machen. Dazu können mathematisch-reichhaltige Lernumgebungen oder differenzierende Aufgabenformate zur Freilegung der mathematischen Potenziale beitragen, wenngleich diese zu Beginn ggf. noch situativ gebunden sind (Prediger & Schnell 2016). Dieser *situations- und prozessbezogene Blick* auf das mathematische Potenzial erlaubt einen flexibleren und umfassenderen Blick auf die Leistungen und Leistungsmöglichkeiten der Lernenden. Denn „darunter wird keine Disposition verstanden, sondern der Begriff wird […] auf die Situation bezogen: Potenzial zeigt sich in Handlungen der Lernenden und bietet Anknüpfungspunkte für lernförderliche Interventionen, die beispielweise zu einer tieferen Durchdringung eines mathematischen Konzepts beiträgt“ (Schnell 2015, S. 824).

Einen solchen situations- und prozessbezogenen Blick auf mathematische Potenziale zu entwickeln, ist das Professionalisierungsziel, damit Lehrkräfte die noch nicht manifestierten Potenziale erkennen und fördern lernen. In Anlehnung an den Reflexionszyklus von Rodgers (2002) lernen die Lehrkräfte die Unterrichtssituation und ihre Erfahrungen differenziert zu beschreiben (*Description of experience*), mulitperspektivisch zu analysieren und mit ihrem Professionswissen in Verbindung zu bringen (*Analysis of experience*). Dies geschieht außerhalb der Unterrichtssituation; die Reflektion findet also zunächst im Hinblick auf tatsächliches unterrichtliches Handeln statt und nicht in der Situation selbst. Rodgers unterscheidet hier die *Reflection-on-action* und die *Reflection-in-action*. Letztere findet in den folgenden beiden Phasen des Reflexionszyklus statt: in einem dritten Schritt integrieren die Lehrkräfte ihre neu gewonnen bzw. reaktivierten Erkenntnisse in ihren professionellen Alltag im Klassenzimmer (*experimentation*). Neben den zusätzlichen Handlungsoptionen, die aus den Reflektionen erwachsen, entwickeln sie auch einen differenzierten Blick auf die Lernprozesse ihrer Lernenden und erweitern und entwickeln so ihre Diagnosekompetenz (*learning to see*).

Methoden

Das Projekt DoMath wird durchgeführt im Forschungsrahmen der *Entwicklungsforschung für Lehrkräfte mit gegenstandspezifischem Fokus auf Professionalisierungsprozesse* (Prediger, Rösike, Schnell 2016). Im 2. Designexperimentzyklus wird die zehnmonatige Fortbildung organisiert in regelmäßigen Projekttreffen mit den 20 teilnehmenden Lehrkräften. Dabei werden die jeweils von 2-6 Lehrkräften durchgeführten Unterrichtsprojekte in Form von Videovignetten analysiert und reflektiert sowie neue Unterrichtsprojekte vorbereitet. Mit je 1-3 erprobenden Lehrkräften werden individuelle Diagnosesitzungen abgehalten, in denen Videovignetten aus den Erprobungen diskutiert werden. Bei der gemeinsamen Analyse der Unterrichtsszenen steht die Reflektion als Kernaktivität im Fokus und bildet die Basis für jegliche Fortbildungsaktivitäten als Handlungsentwicklung. Die angeregten Professionalisierungsprozesse der Lehrkräfte werden systematisch qualitativ beforscht, sowohl durch Videographieren der Diagnosesitzungen als auch der Projekttreffen, , um die Gesprächsverläufe und die individuellen diagnostischen Urteile und deren Weiterentwicklung zu rekonstruieren. Zur Datenanalyse werden die im Theorieteil genannten Elemente des Reflexionsmodells von Rodgers (2002) herangezogen und in einer Momentaufnahme gezeigt, wie die reflection-on-action durchlaufen wird.

Empirische Einblicke in einen Professionalisierungsprozess

Die vorliegenden Transkriptausschnitte stammen aus einer Diagnosesitzung mit zwei teilnehmenden Lehrkräften. Gegenstand der Sitzung war eine Videovignette, in der den Lehrkräften bekannte Schülerinnen und Schüler an der Treppenaufgabe (Schwätzer & Selter 1998) arbeiten. Den Lehrkräften lag das Transkript der siebenminütigen Videovignette vor zu dem Erarbeitungs- und Erkenntnisprozess von vier Jungen aus Klasse 8. Sie untersuchen, welche Zahlen sich als Reihe aufeinanderfolgender, natürlicher Zahlen darstellen lassen. Das Schülerprodukt zeigt einen Versuch der Formalisierung des entdeckten allgemeinen Zusammenhangs in einer Formel, mit Hilfe derer jede Zahl auf die Darstellbarkeit in einer bestimmten Treppenform überprüft werden kann.

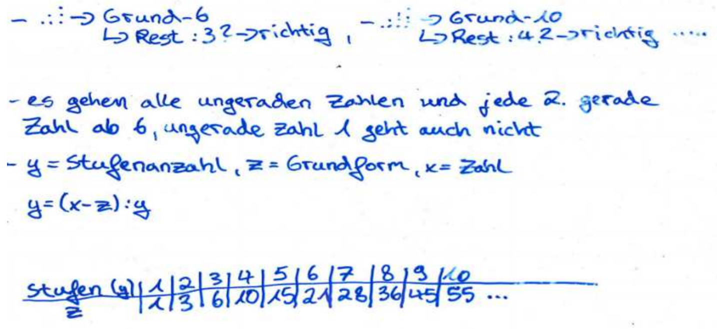


Abb. 1 Schülerprodukt zur Bearbeitung der Treppenaufgabe

Die Analyse des Transkripts der Diagnosesitzung zeigt, wie die Lehrkräfte zunächst den dargebotenen Lernprozess rekonstruieren, sowie situative Elemente und ihren kausalen Zusammenhang mit Folgeaktionen identifizieren:

I Die Frage ist/ Welche Zahlen lassen sich als Treppe, als aufeinander folgende Zahlen darstellen.
H Das ist ja schon bemerkenswert, dass sie so von selbst diese Idee haben.
I Absolut, ja.
H Das sie offensichtlich dieses, es verändert sich immer was und es kommt immer was dazu, das übertragen sie dann anscheinend von anderen Aufgaben jetzt/ versuchen sie es ja jetzt auch anzuwenden. Wie sie wissen, dass kann man jetzt in einer geschlossenen Form irgendwie besser darstellen.

Sie beschreiben hier die Szene und ihren Verlauf (*description of experience*) und bauen dann erste Analysen auf, die sie mit ihrem fachlichen und fachdidaktischen Wissen in Verbindung bringen (*analysis of experience*). Dass diese zwei Schritte teilweise gemeinsam vollzogen werden, ist durchaus natürlich. Dennoch gilt es, den Unterschied beider Phasen aufzuzeigen und diese auch wenn möglich nacheinander statt miteinander zu absolvieren.

Henry beschreibt zunächst das Vorgehen der Lernenden und fokussiert dabei den Löseprozess, der letztlich zur Formulierung einer Prüfformel führt (siehe Abb.1). Er analysiert aber direkt im Anschluss mögliche Ursachen für ihr Vorgehen, indem er ihre formale Lösung inhaltlich erörtert („es verändert sich immer was und es kommt immer was dazu“) und mögliche Ursachen für ihr Vorgehen antizipiert („das übertragen sie dann anscheinend von anderen Aufgaben“). Zu einem späteren Zeitpunkt in der Diagnosesitzung fokussiert Henry seine professionelle Rolle im Zuge des Lernprozesses der Schülerinnen und Schüler. In der dargestellten Unterrichtsszene findet keine Intervention der Lehrkräfte statt. Gefragt nach möglichen Impulsen, die er ggf. gerne gesetzt hätte, beschreibt Henry sein übliches Vorgehen („…dass ich als Lehrer sehr schnell den Bedarf hätte, zu sagen…“).

Gleichzeitig stellt er fest, dass das Ausbleiben seiner Intervention in diesem Fall gerade dazu geführt hat, dass die Lernenden den Prozess selbst gestaltet und sehr kreative Ergebnisse produziert haben („Vielleicht lässt man manchmal ein bisschen zu wenig Zeit, dass sie ihre Gedanken auch mal in Ruhe entfalten können").

I: Ja. Fehlt euch an dem Gespräch was‘? Hättet ihr gerne noch einen Impuls gesetzt wenn ihr dabei gewesen wärt‘?

H: Ja ich find eigentlich so irre daran, dass es/ Also ich merke so für mich, dass es auch ohne Impuls auch ganz gut funktioniert. Also ich merke, dass ich als Lehrer sehr schnell den Bedarf hätte zu sagen, och guck doch mal hier, was passiert denn hier, hier die drei, Also das ich die so in die richtige Richtung schubsen möchte. Und jetzt denk ich so, vielleicht lässt man manchmal ein bisschen zu wenig Zeit, dass sie ihre Gedanken auch mal in Ruhe entfalten können, also dass es viel Zeit braucht. […] Also von daher weiß ich gar nicht/ weil ich finde die wichtigen Impulse haben sie sich selber gesetzt. Also eh, einmal diese wo ich gucke mir erstmal oben die Spitze so zu sagen an und dann kann ich unten nochmal alles andere dranhängen. Das wäre ja so ein Impuls gewesen. Da sind sie selber drauf gekommen. Und dann kann man das auch irgendwie mit einer Formel ausdrücken. Wäre auch vielleicht so ein Impuls gewesen.

Diskussion und Ausblick

Die dargebotenen Reflexionen werden in den folgenden Projekt- und Diagnosetreffen als Ansätze für weitere Fortbildungsaktivitäten aufgegriffen, indem insbesondere die selbstadressierten Aspekte des professionellen Handelns thematisiert und die Professionalisierungsprozesse an ihnen ausgerichtet werden. Der Vollzug des Reflexionszyklus erfordert im weiteren Verlauf die Übertragung und Fortführung der gewonnenen Erkenntnisse in der Praxis (*Reflection-in-action*). Die Lehrkräfte werden bei diesem Prozess weiterhin unterstützt und die Entwicklung ihrer professionellen Reflexions- und Handlungskompetenzen dokumentiert.

Literatur

Leikin, R. (2009). Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (S. 383-409). Rotterdam: Sense Publishers.

Prediger, S., Rösike, K.-A., Schnell, S. (2016). Design Research with a focus on content-specific professionalization processes: The case of noticing students' potentials. Eingereichtes Manuskript.

Schnell, S. (2015). Mathematische Stärken sehen und fördern – Wie Lehrkräfte mathematische Potenziale diagnostizieren. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. 824–827). Münster: WTM-Verlag.

Schwätzer, U. & Selter, C. (1998). Summen von Reihenfolgenzahlen – Vorgehensweisen von Viertklässlern bei einer arithmetisch substantiellen Aufgabenstellung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19*(2-3), 123-148.

Moderierte Sektion:

Visualisieren unter der Perspektive der Gestaltung und Analyse svon Lehr-Lern-Prozessen

Eva MÜLLER-HILL, Marburg

Sektion „Visualisieren unter der Perspektive der Gestaltung und Analyse von Lehr-Lern-Prozessen“

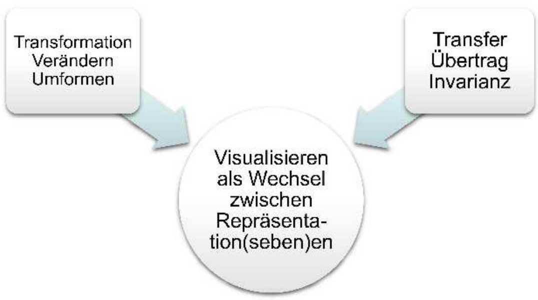
Die Sektion schloss an das Minisymposium „Didaktische Aspekte und Funktionen bildlicher Darstellungen“ im Rahmen der DMV-Jahrestagung in Hamburg im September 2015 an. Einige Sektionsvortragende (Elschenbroich, Haftendorn, Gawlick) hatten auch dort vorgetragen und zu didaktisch relevante Spannungsfelder von „Visualisieren“ gemeinsam diskutiert, wie beispielweise dynamisch – statisch, sequentiell – simultan, geometrisch – algebraisch, anschaulich gestützte Begriffserweiterungen – Artefakte, *visual literacy* – natürlicher Mehrwert von Visualisierungen.

In der hiesigen Sektion wurden Beispiele für Visualisierungen diskutiert, die bei der Gestaltung und Analyse von Lehr-Lern-Prozessen im Fach Mathematik Anwendung finden können. Dadurch konnten verschiedene didaktisch relevante Perspektiven aufgezeigt werden bezüglich (a) des Gegenstandes der Visualisierung (was wird visualisiert?) (b) der Art und Verwendung von Visualisierungen (wie wird visualisiert?) (c) der didaktischen Ziele und Funktionen von Visualisierungen (wozu wird visualisiert?) und (d) Wirkungsbereich/Reichweite (was verändern Visualisierungen?).

Visualisieren als Transformation und Transfer

> *Die eigentliche Leistung besteht für mathematische Unterrichtsinhalte gerade in der Transformation von Repräsentationen. (Lorenz 1992, S. 52)*

Trotz perspektivenreicher Mischung der Vorträge stand Visualisieren als „Transformation und Transfer“ und der Wechsel zwischen Repräsentationen und Repräsentationsmodi im Vordergrund der Sektion.



Inhaltliche Gliederung der Sektion

Die Sektion gliederte sich in drei Themenblöcke zu jeweils zwei Vorträgen.

Themenblock I: „Visualisieren als Transformation von Darstellungen von Bearbeitungsprozessen“ umfasste den eher theoretischen Vortrag von Thomas Gawlick über „Tempelbilder“ zur Visualisierung in und von Problemlöseprozessen sowie den darauf aufbauenden, eher empirischen Vortrag von Elisabeth Lucyga zur Visualisierung von Klippen in Problemlöseprozessen. Es wurde eine Methode zur Transformation einer Darstellung von Bearbeitungsprozessen (z.B. als Transkript) in eine strukturierte, schematische ikonische Repräsentation vorgestellt. Ziele waren die Reflektion, Analyse (Typologie), und Organisation von epistemischen, heuristischen und Steuerungsaktivitäten in mathematischen Problembearbeitungsprozessen.

Themenblock II: „Dynamisches Visualisieren als Perspektiv- und Repräsentationswechsel in Lehr-Lern-Prozessen – stoffbezogene Möglichkeiten" umfasst die Vorträge von Hans-Jürgen Elschenbroich zum Perspektivwechsel durch dynamische Software sowie von Dörte Haftendorn zur Dynamik für die Mathematiklehre. Beiden Vortragenden ging es unter anderem um einen „Lehrhaltungswechsel", etwa durch die Betonung und Dynamisierung des Zusammenspiels von Entdecken & Begründen. Die Vorträge beleuchteten Möglichkeiten dazu und brachten Beispiele aus den Bereichen der Ebene Geometrie, der Funktionen, der Analysis, und zu Kurven. Neben Begriffsbildungsprozessen lag der Fokus auf perspektivspezifischen Problemzugängen, dynamischen Strategien und Tätigkeiten.

Themenblock III: „(Dynamisches) Visualisieren als Perspektiv- und Repräsentationswechsel in Lehr-Lern-Prozessen – kognitive, affektive, epistemische & semiotische Aspekte" umfasste die Vorträge von Guido Pinkernell und Markus Vogel zu dynamischen Multirepräsentationen von Funktionen sowie von Ulrike Dreher et al. zur Rolle von Überzeugungen beim Arbeiten mit verschiedenen Repräsentationen von Funktionen. Wichtige Fragen betrafen die grundsätzliche Mehrdeutigkeit von Repräsentationen, Voraussetzungen und Hindernisse für einen verständigen Umgang mit multiplen Repräsentationen, sowie die Auswirkungen von Präferenzen und Selbstwirksamkeitsüberzeugungen. Konkretisiert wurde dies am Stoffgebiet „Funktionen". Neben der Konzeptualisierung ging es auch um die Operationalisierung zur Entwicklung von Erhebungs- und Förderinstrumenten.

Sektionsvorträge

Gawlick, Th.: Tempelbilder zur Visualisierung in/von Problemlöseprozessen

Lucyga, E.: Klippen in Problemlöseprozessen sichtbar machen

Elschenbroich, H.-J.: Perspektivwechsel durch dynamische Software

Haftendorn, D.: Dynamik bringt die Mathematiklehre voran

Pinkernell, G. & Vogel, M.: DiaLeCo – Lernen mit dynamischen Multirepräsentationen von Funktionen

Dreher, U., Leuders, T. & Holzäpfel, L.: Welche Rolle spielen Überzeugungen beim Arbeiten mit verschiedenen Repräsentationen von Funktionen?

Literatur

Lorenz, J. H. (1992), *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht.* Göttingen: Hogrefe.

Ulrike DREHER, Timo LEUDERS, Lars HOLZÄPFEL, Freiburg

Welche Rolle spielen Überzeugungen beim Arbeiten mit verschiedenen Repräsentationen von Funktionen?

Um das mathematische Objekt „Funktion" in seiner Breite zu erfassen, bedarf es der Kenntnis und des sicheren Umgangs mit den verschiedenen Repräsentationen von Funktionen (Wertetabelle, Funktionsgraph, Funktionsgleichung und verbal-situative Beschreibung) (Duval 2002). Bei der Bearbeitung von Aufgaben werden neben den Aufgabenmerkmalen, sowohl individuelle Faktoren als auch kontextuelle Faktoren für die Wahl der Repräsentation als Einflussfaktoren beschrieben (vgl. Acevedo-Nistal et al. 2009). In wie fern Überzeugungen – Präferenzen und Selbstwirksamkeitsüberzeugungen – eine Rolle für den Bearbeitungsprozess von Aufgaben im Bereich der linearen Funktionen spielen, soll in der vorliegenden Studie bei Schülerinnen und Schüler der 8. Klasse Realschule untersucht werden. Es wird erörtert, welche Erfassungsformate für diese Überzeugungen angewendet werden können und ob ein Zusammenhang zwischen der Leistung im Umgang mit Repräsentationen und den jeweiligen Überzeugungen hergestellt werden kann.

1. Stand der Forschung

Die Relevanz von individuellen Faktoren für den Lernprozess und die Leistung von Schülerinnen und Schüler wird im erweiterten Kompetenzbegriff von Weinert (2001) deutlich herausgestellt. Dieser beinhaltet „die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können" (Weinert 2001, S. 27f).

Der Umgang mit verschiedenen Repräsentationen wird in der Forschungslandschaft ebenfalls auf den unterschiedlichen Ebenen untersucht. Studien zu kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten beziehen sich auf die Erfassung verschiedener Kompetenzdimensionen (vgl. Bayrhuber et al. 2010, Acevedo-Nistal et al. 2012). Andere Studien fokussieren auf bereichsspezifische Selbstwirksamkeitsüberzeugungen (z.B. Gagatsis et al. 2009) oder repräsentationsspezifischer Präferenzen von Lernenden (z.B. Keller & Hirsch 1998).

Während dabei die Erfassung von Selbstwirksamkeitsüberzeugungen mittels geschlossenen Fragebogenformaten etabliert ist und in zahlreichen

Studien verwendet wird (vgl. Pajares & Graham 1999, Gagatsis et al. 2009), gestaltet sich die Erfassung von Präferenzen deutlich heterogener. Die Erfassungsformate hierzu lassen sich folgendermaßen gliedern (s. Abb.1):

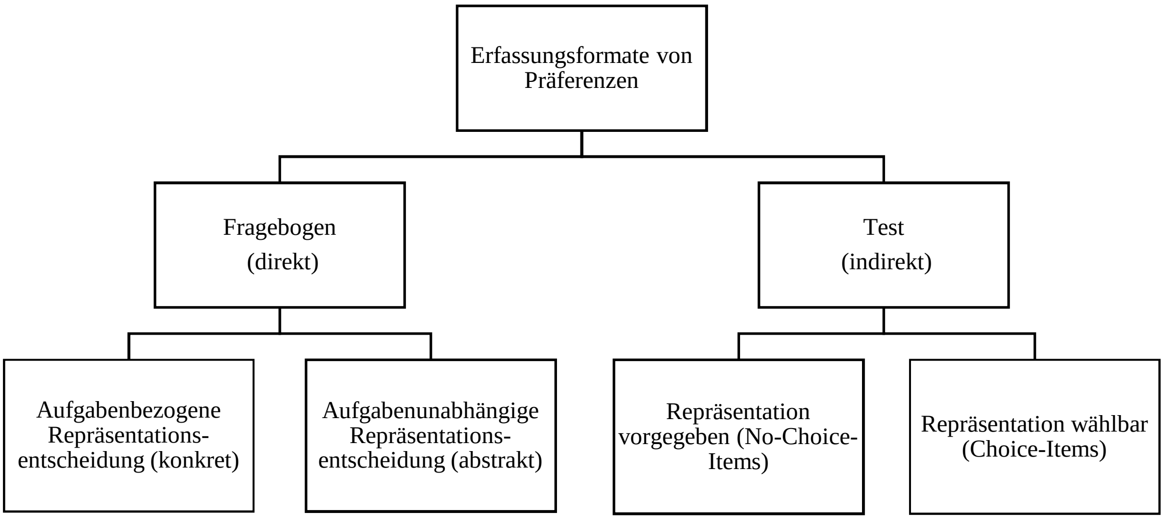


Abb.1: Übersicht zu den Erfassungsformaten von Präferenzen

Während bei der direkten Erfassung durch Fragebögen von einer bewussten Präferenz ausgegangen wird, kann die indirekte Erfassung mittels Aufgabenbearbeitung im Format eines aufgabenbasierten Tests vollzogen werden. Hierbei können unbewusste Präferenzen und damit verbundene Entscheidungen fokussiert werden.

Im Testformat werden die Schülerinnen und Schüler dazu aufgefordert, Aufgaben zu bearbeiten. Dabei wird ihnen die zu verwendende Repräsentation entweder vorgegeben (LaLomia et al. 1992), sie haben dementsprechend keine freie Wahl (No-Choice-Items), oder aber sie können frei zwischen den Repräsentationen wählen (Choice-Items z.B. bei Acevedo-Nistal et al. 2012 zur Erfassung der repräsentationalen Flexibilität). Diesen Ansätzen wird jedoch die Kritik entgegengebracht, dass die Antwort sehr stark durch die Form der Aufgabenstellung determiniert ist (vgl. hierzu Keller & Hirsch 1998, S. 2f) und dass keine Begründungen für die Auswahl erfasst werden.

Im Fragebogenformat kann hinsichtlich der Itemstruktur unterschieden werden: Entweder werden den Lernenden konkrete Aufgaben präsentiert und sie müssen entscheiden, mit welcher Repräsentationsart sie die Aufgabe bearbeiten würden (vgl. Keller & Hirsch 1998). Alternativ dazu können Items präsentiert werden, die abstrakte Situationen (Aufgabenarten oder -klassen) beschreiben, zu denen entschieden werden muss, welche jeweilige Repräsentation zur Bearbeitung präferiert wird (Bofah & Hannula 2011).

Durch die Ablösung von der Bearbeitung einer Aufgabe können zwar generellere Tendenzen erfasst werden, jedoch bleibt hier die Frage offen, in wie fern die Lernenden Erfolg mit der gewählten Repräsentation haben würden.

2. Operationalisierung der vorliegenden Studie

Mit Blick auf die verschiedenen Vor- und Nachteile der Erfassungsmethoden wurde in der vorliegenden Studie für die Erhebung der Präferenz eine Kombination der genannten Ansätze verfolgt. In direkten, abstrakten Fragebogenitems sind die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, sich in einem 6-stufigen Antwortformat zwischen den Repräsentationen Tabelle und Graph zu entscheiden. Indirekt wird die Präferenz durch die Bearbeitung von Choice-Items vollzogen. Diese werden ergänzt durch Reflexionsaufgaben, in denen die Schülerinnen und Schüler rückmelden, welche Repräsentation sie vornehmlich benötigt haben und warum sie sich für diese Repräsentation entschieden haben. Dadurch werden die Begründungsschemen expliziert und können Aufschluss über das Zustandekommen der Wahl geben.

Die Operationalisierung der spezifischen Selbstwirksamkeitsüberzeugungen erfolgt mit geschlossenen 4-stufigen Items zum Umgang mit den einzelnen Repräsentationsarten (Tabelle und Graph) und dem Thema lineare Funktionen allgemein.

3. Ausblick auf Ergebnisse

Mittels eines Mixed-Methods-Designs werden in Klassenstufe 8 die Wirkungen von Präferenzen und Selbstwirksamkeitsüberzeugungen der Lernenden bezüglich der einzelnen Repräsentationen auf die Anwendung und den Umgang mit den Repräsentationen von linearen Funktionen (Tabelle und Graph) quantitativ (N= 266) erfasst. Im qualitativen Studienteil wird durch Einzelinterviews (N= 8) eine Vertiefung der Erkenntnisse über die Rolle der Präferenzen und weiterer Faktoren angestrebt.

Um den Zusammenhang zwischen der Leistung im Repräsentationstest und den individuellen Faktoren – Selbstwirksamkeitsüberzeugungen und Präferenzen – zu untersuchen, wurde eine multiple Regression durchgeführt. Neben den spezifischen Selbstwirksamkeitsskalen zu Tabelle, Graph und Funktionen und den spezifischen Präferenzen wurden die Kontrollvariablen Note und Geschlecht in das Modell eingeschlossen. Hierbei ergibt sich eine Varianzaufklärung von 17 %. Dabei sind drei Variablen signifikante Prädiktoren für die Leistung im Test: Die Mathematiknote, das Geschlecht und die Selbstwirksamkeitsüberzeugung bezüglich des Umgangs mit Graphen.

Somit zeigt sich, dass neben den Kontrollvariablen eine Teildimension der Selbstwirksamkeitsüberzeugungen Vorhersagegewicht hat. In der anschließenden Interviewstudie werden dahin gehend die Begründungsschemata weiter analysiert.

Literatur

Acevedo Nistal, A., van Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J., Verschaffel, L. (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. *ZDM Mathematics Education 41 (5)*, 627–636.

Acevedo Nistal, A., Dooren, W., Verschaffel, L. (2012). What counts as a flexible representational choice? An evaluation of students' representational choices to solve linear function problems. *Instructional Science 40 (6)*, 999–1019.

Bayrhuber, M., Leuders, T., Bruder, R., Wirtz, M. (2010). Repräsentationswechsel beim Umgang mit Funktionen - Identifikation von Kompetenzprofilen auf der Basis eines Kompetenzstrukturmodells. Projekt HEUREKO. *Zeitschrift für Pädagogik; Beiheft 56 (56)*, 28–39.

Bofah, E., & Hannula, M. S. (2011). Reliability and factorial validity of students' mathematics-belief, representation and preference on function. In B. Roesken & M. Casper (Eds.), *Current state of research on mathematical beliefs XVI*I. *Proceedings of the MAVI-17 Conference*, 1–12.

Duval, R. (2002*).* The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 1-16.

Gagatsis, A., Panaoura, A., Deliyianni, E. & Elia, I. (2009). Student's Belief about the Use of Representations in the Learning of Fractions. *Proceedings of CERME 6*, 64–73.

Keller, B. A., & Hirsch, C. R. (1998). Student Preferences for Representations of Functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 29(1)*, 1-17.

Lalomia, M., Coovert, M., & Salas, E. (1992). Problem-solving performance as a function of problem type, number progression, and memory load. *Behaviour & Information Technology*, *11(5)*, 268-280.

Pajares, F. & Graham, L. (1999). Self-Efficacy, Motivation Constructs, and Mathematics Performance of Entering Middle School Students. *Contemporary Educational Psychology 24*, 124–139.

Weinert, F. E. (2001). Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F.E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen.* (S. 23- 43). Weinheim: Beltz.

Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Korschenbroich

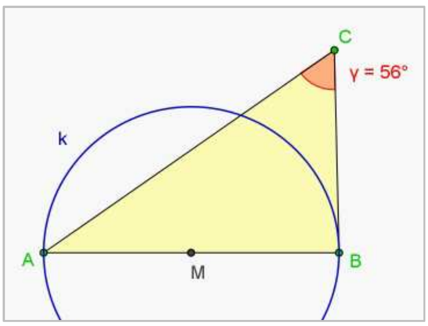
Perspektivwechsel durch dynamische Software

Zu vielen mathematischen Themen hat sich (nicht nur in der Schule) eine jeweils typische Sichtweise eingebürgert, die dann oft andere Sichtweisen an den Rand drängt. Manchmal ist es gut und hilfreich, diese ‚eine' Sichtweise zu wechseln und eine andere Perspektive einzunehmen. Dazu kann man das mathematische Gebiet wechseln, z.B. Geometrie statt Algebra, aber auch das Werkzeug. Waren in der jüngeren Vergangenheit die (auch in den Bildungsstandards angesprochenen) typischen mathematischen Software-Werkzeuge wie DGS, Funktionenplotter, Tabellenkalkulation und CAS noch getrennte Programme mit je eigenen Dateiformaten, so hat sich das mit dem Aufkommen von Multirepräsentationssoftware wie GeoGebra oder TI-Nspire geändert. Der Wechsel des Werkzeugs, der Repräsentationsform und damit auch der Perspektive auf das jeweilige Thema wird einfach und ohne Programm- und Dateiwechsel möglich.

Der klassische Blick auf mathematische Themen ist - wesentlich geprägt durch die seinerzeit verfügbaren Werkzeuge - oft statischer Natur gewesen. Insbesondere dynamische Software bietet heutzutage Anlass zur Neu- oder Rückbesinnung. Dies soll im Folgenden an einigen schultypischen Beispielen aufgezeigt werden.

1. Satz des Thales und Satz des Pythagoras

Eine typische Schulbuchformulierung zum Satz des Thales lautet: „Liegt der Punkt C auf dem Kreis über der Strecke AB, dann ist das Dreieck ABC rechtwinklig in C." (Fokus Mathematik 8 (2008), S. 107)



Bei einer dynamischen Betrachtung wird man sich aber nicht auf die Rechtwinkligkeit beschränken. Konstruiert man einen Thaleskreis über $\overline{AB}$, so kann man im Zugmodus untersuchen, wie sich der Winkel γ im Dreieck ABC verändert, je nachdem wohin man C zieht. Damit kommt man zu der umfassenderen Erkenntnis:

- Für $\gamma < 90°$ liegt C außerhalb des Thaleskreises
- Für $\gamma = 90°$ liegt C auf dem Thaleskreis
- Für $\gamma > 90°$ liegt C im Thaleskreis.

Das gleiche Vorgehen bietet sich beim Satz des Pythagoras an. Eine typische Schulbuchformulierung hat wieder statische Sicht: „Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate flächengleich mit dem Quadrat über der Hypotenuse." (Schnittpunkt 9 (2004), S. 118)

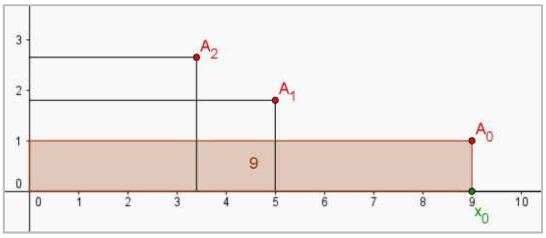
In der dynamischen Sicht erhält man dann im Zugmodus:

- Für $\gamma < 90°$ ist $a^2 + b^2 > c^2$
- Für $\gamma = 90°$ ist $a^2 + b^2 = c^2$
- Für $\gamma > 90°$ ist $a^2 + b^2 < c^2$.

Hier wird eine deutlich stärkere Betonung der Schüleraktivität, der Satzfindung, gegenüber dem klassischen Beweis sichtbar.

2. Verfahren von Heron

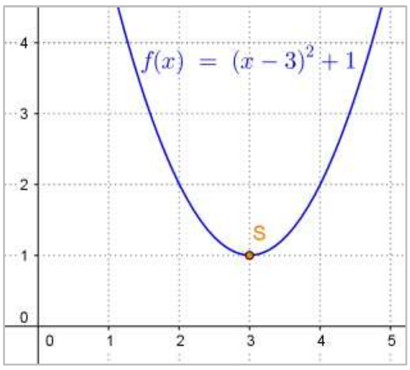
Der Algorithmus von Heron zur Berechnung einer Quadratwurzel ist aus heutiger Sicht die Programmierung einer algebraischen Formel in einer Schleife. Das war sicher nicht der Ansatz von Heron. In der damaligen Sicht der Mathematik und Geometrie wurden Produkte von Zahlen als Flächeninhalte von Rechtecken verstanden und das Wurzelziehen war der Übergang vom Flächeninhalt eines Quadrates zu seiner Seitenlänge.



Ein geometrischer Ansatz könnte dann sein: Starte mit einem passenden Rechteck (Seitenlängen a und 1) und mache dieses Rechteck bei gleichem Flächeninhalt sukzessive quadratförmiger.

Dazu bildet man den Mittelwert der beiden Seitenlängen und wählt dann die noch fehlende Seite für den Flächeninhalt passend. Wenn man dies mehrmals durchführt, sieht man, wie schnell das Verfahren konvergiert, wie schnell das Rechteck ‚quadratischer' wird. Desweiteren wird hier eine neue, funktionale Fragestellung möglich: Betrachtet man bei jedem Iterationsschritt den oberen rechten (hier rot markierten) Punkt, so kann man untersuchen, auf welchem Funktionsgraphen diese Punkte liegen.

3. Scheitelpunktform



Bei quadratischen Funktionen geschieht die Herleitung der Scheitelpunktform üblicherweise algebraisch, mit Termumformungen.

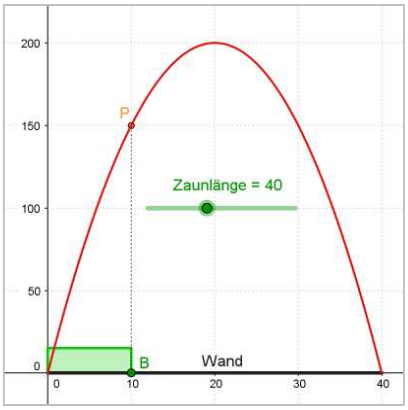
„Jeden Term der Form $ax^2 + bx + c$ kann man mit Hilfe der quadratischen Ergänzung auf die Form $a(x-d)^2 + e$ bringen." (Lambacher Schweizer 9 (1996), S. 88).

Um die Scheitelpunktform dynamisch zu verstehen, kann man einfach graphisch mit der Normalparabel starten und diese im Zugmodus im Koordinatensystem ziehen, zunächst längs der y-Achse, dann längs der x-Achse, dann quer durch das Koordinatensystem. Insbesondere bei ganzzahligen Gitterpunkten wird der Zusammenhang zwischen Lage des Scheitelpunktes und dem Funktionsterm offensichtlich.

4. Elementare Optimierung bei quadratischen Problemen

Typischerweise werden Extremwertaufgaben erst nach Abschluss der Differenzialrechnung mit entsprechenden Werkzeugen thematisiert. In etlichen Fällen kann man aber schon auf dem Niveau der Sekundarstufe I diese Probleme angehen.

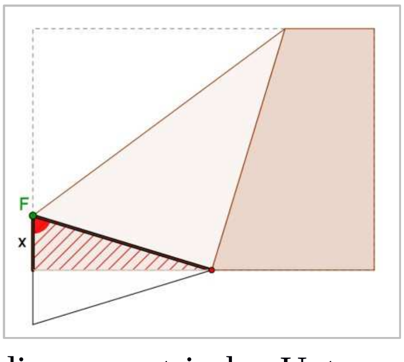
In der klassischen ‚Hühnerstall'-Aufgabe soll an einer Wand mit einem Zaun gegebener Länge ein möglichst großer Hühnerstall gebaut werden. Bei einer geeigneten Konstruktion mit dynamischer Software kann man dann das Rechteck, das den Hühnerstall repräsentiert, unter Beibehaltung der Zaunlänge verändern und den jeweiligen Flächeninhalt messen oder



ausrechnen. Diesen Flächeninhalt kann man als y-Koordinate in einen Punkt P exportieren und dessen Bahn untersuchen. Dabei stellt man fest, dass diese Bahn eine Parabel ist (was man leicht algebraisch begründen kann), dass der Flächeninhalt sich symmetrisch verhält, dass am Rande Nullstellen sind und dass der gesuchte Maximalwert da zu finden ist, wo die Parabel ihr Maximum hat (in der Mitte zwischen den Nullstellen).

5. Geometrie statt CAS

Faltet man ein DIN-A4-Blatt so, dass eine Ecke auf der gegenüberliegenden langen Seite des Blattes liegt, so entsteht ein (hier schraffiertes) Dreieck. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks?



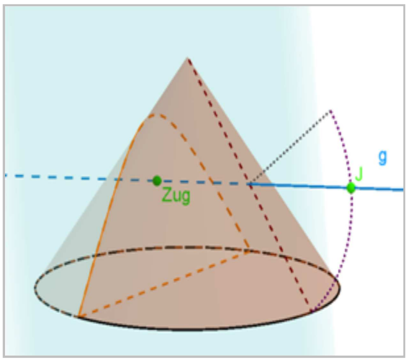
Und wie muss man falten, dass ein solches Dreieck maximalen Flächeninhalt hat? (Barzel (2016), S. 157)

Beim für die Differenzialrechnung typischen Ansatz kommt man zur Zielfunktion $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{(21-x)^2 - x^2}$, die man dann ableitet.

Geht man elementar vor, kann man sich auf die geometrische Untersuchung des schraffierten Dreiecks beschränken. Die fett hervorgehobenen Seiten haben zusammen die Länge der kurzen Blattseite (= 21 cm). Spiegelt man dieses Dreieck, so erhält man insgesamt ein Dreieck mit konstantem Umfang (= 42 cm). Es ist bekannt (bzw. muss in der Klasse bekannt sein), dass davon das flächengrößte gleichseitig ist.

Damit hat das optimale Dreieck die Seitenlängen 7 cm und 14 cm und der Winkel bei F beträgt 60°.

6. Kegelschnitte



Wenn Kegelschnitte überhaupt noch ein Thema in der Schule sind, dann werden Parabel, Ellipse, Hyperbel als ebene funktionale Objekte im Rahmen der Analytischen Geometrie thematisiert. Den raumgeometrischen Aspekt des tatsächlichen Schneidens von Kegeln, der früher in jeder mathematischen Sammlung präsent war, kann man heute mit dynamischer 3D-Software wiederbeleben.

7. Rotationskörper

Rotationskörper werden meist durch Rotation einer Fläche unter dem Graphen einer Funktion f um die x-Achse eingeführt. Ein alternativer, einsichtiger und mit Software leicht verständlicher und gut visualisierbarer Zugang nutzt die Querschnittflächen (Elschenbroich 2016, in diesem Band).

8. Fazit

Durch Perspektivwechsel, kombiniert mit Werkzeugwechsel, erhält man dynamische Sichtweisen von Sätzen, ermöglicht Verallgemeinerungen und kann von der algebraischen Sichtweise von Formeln und Gleichungen zu einer dynamischen geometrischen Sichtweise kommen, verlagert den Ansatz vom Funktionsterm auf Graphen, entlastet von Kalkül und stärkt das Entdecken (Elschenbroich 2017).

Literatur

Barzel; B. (2016): Arbeiten mit CAS aus fachdidaktischer Perspektive. In: Heintz, G. & Pinkernell, G. & Schacht, F.: *Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht*. MNU, Verlag K. Seeberger, Neuss.

Elschenbroich, H.-J. (2017): Perspektivwechsel durch dynamische Software. Erscheint in: Müller-Hill, E. (Hrsg.): *„Visualisieren – Transformation und Transfer“. Der Mathematikunterricht 6/2017*. Friedrich Verlag, Velber.

Elschenbroich, H.-J. (2016): Ein neuer Vorschlag zur Vermittlung von Grundvorstellungen der Integralrechnung. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016*. WTM-Verlag, Münster.

Thomas GAWLICK, Hannover

Tempelbilder zur Visualisierung in/von Problemlöseprozessen

Der Lösungsgraph nach Pólya und König wurde in Gawlick (2014) als Visualisierungswerkzeug für heuristische Impulse vorgestellt – sowohl in der Rückschau („Was hat uns geholfen?“) als auch zur Unterrichtsplanung mit Heuristischer Rekonstruktion. Hier erläutern wir anhand der Rekonstruktion des „Thales“-Beweises, wie die „Flussüberquerung“ von der Voraussetzung zur Behauptung durch Tempelbilder erleichtert wird – diese unterlegen wir den Lösungsgraphen, um die Gliederung der Argumentation, den Zusammenhang der Argumente und den Beweisfluss stärker zu verdeutlichen. Zudem sind sie für den Prozess des Verallgemeinerns nutzbar, wie an der Sequenz „Thales – Umfangswinkelsatz –K10“ gezeigt wird.

Wie a.a.O. erläutert, geht es bei der Heuristischen Rekonstruktion darum, den Beweisgang durch geeignete Zwischenziele vorzustrukturieren, die die SuS über ***heuristische Impulse*** und dadurch angestoßene ***epistemische Aktivitäten*** möglichst selbstständig ansteuern können. Wie dort zeigen wir dies am Beweis des IWS (Innenwinkelsummensatzes), bei dem in „Elemente der Mathematik 7“ (Griesel et al 2010, S.145) in der Rückschau die Metapher vom Beweisen als Flussüberquerung eingeführt wird (Abb. 1):

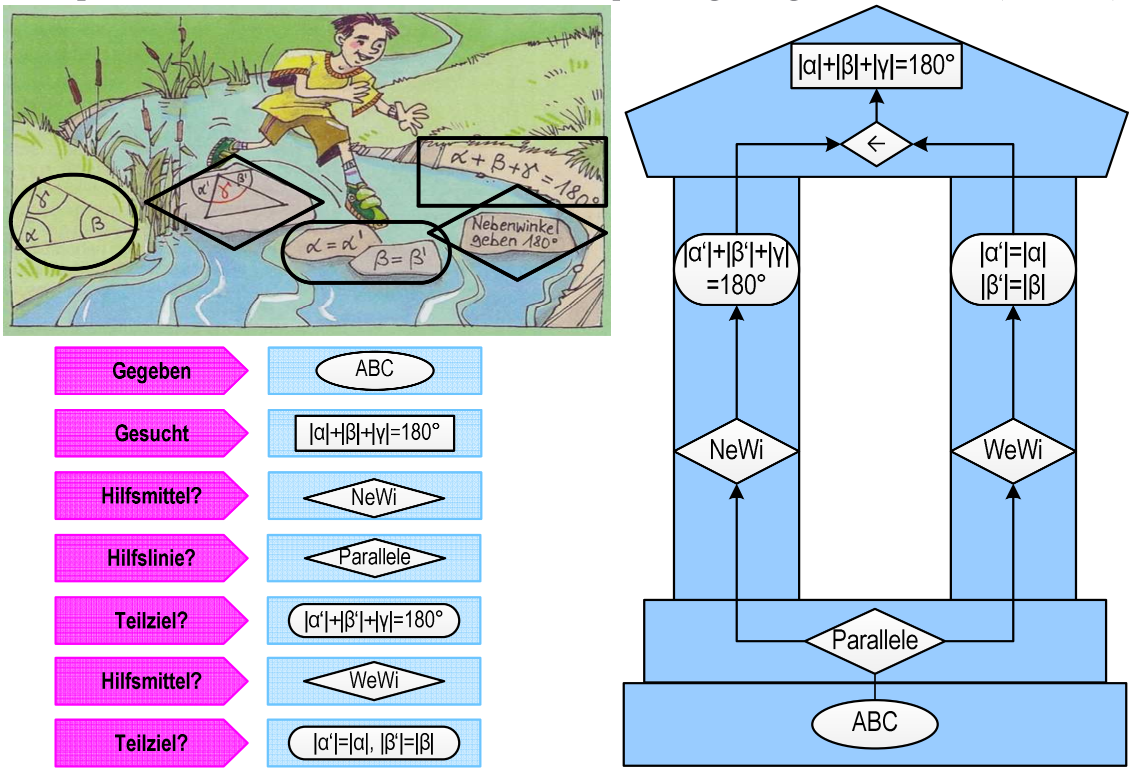


Abb. 1: IWS-Beweis als Folge von durch heuristische Impulse gefundener Teilziele

Zunächst fragt man mit Pólya nach dem Gegebenem (Graph-Symbol: Oval) und dem gesuchten (Rechteck) und sucht dann rückwärts arbeitend nach Teilzielen als „Trittsteinen“, um die Entfernung zwischen den Ufern zu überbrücken. Dazu dient Königs Frage nach geeigneten (HM?) um eine solche Winkelbeziehung zu erhalten, die den Operator NeWi (Nebenwinkelsatz) liefert (im Graph: Raute). Um ihn anwenden zu können, müssen zunächst die Voraussetzungen geschaffen werden, dazu dient die Frage nach der Hilfslinie (HL?), die die Parallele ins Spiel bringt, aus der mit Königs Teilzielfrage (TZ?) die gesuchte Gleichung $|\alpha'|+|\beta'|+|\gamma|=180°$ erhellt. Um zum Ziel zu kommen, muss man die Ausgangswinkel ins Spiel bringen, was wiederum mit HM? gelingt. Diese „Finde-Reihenfolge“ entspricht aber noch nicht der „Aufschreib-Reihenfolge“ des Beweises! Um daher in der Rückschau den Beweisgang zu visualisieren, unterlegen wir dem Graphen in Abb.1 eine **Tempelstruktur**: Sie besteht aus einem **Sockel** (enthält die Voraussetzungen), den **Säulen** (die Argumente linear *verketten*) und **Architraven** (die mindestens zwei Säulen argumentativ *verknüpfen*) **–** deren letzter ist das **Tympanon** (für die Behauptung).

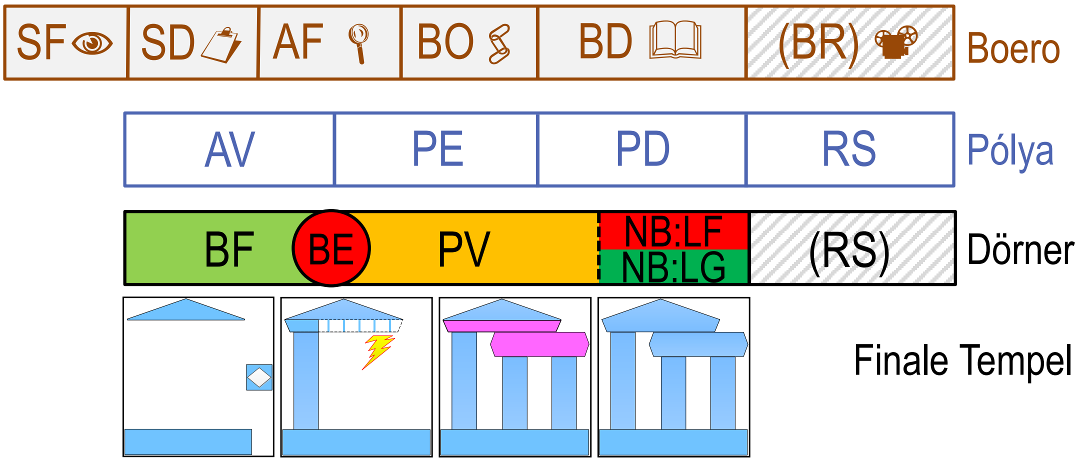
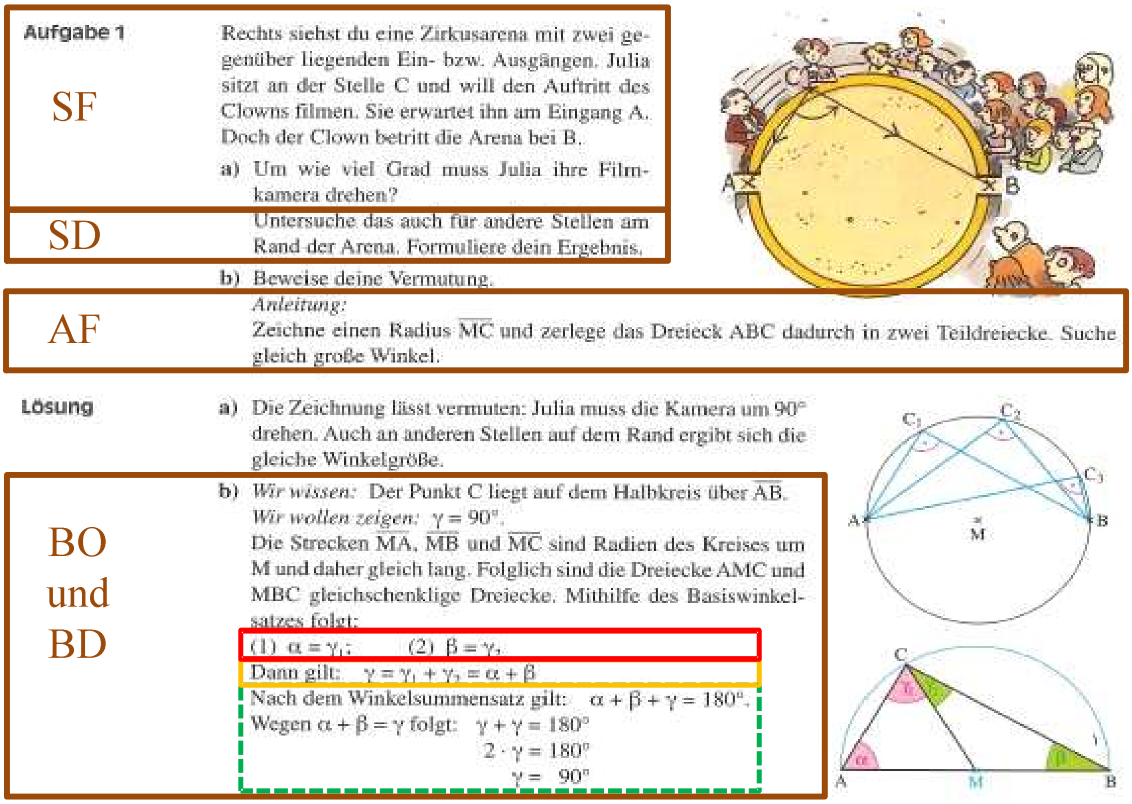


Abb. 2: Prozessabschnitte nach Pólya, Boero und Dörner

Im Prozess des Beweisens unterscheiden wir nach Boero (vgl. Brockmann-Behnsen 2014) die Phasen (SF) Satzfindung, (SD) Satzdarstellung, (AF) Argumentfindung, (BO) Beweisorganisation (*Verketten* und *Verknüpfen* von Argumenten) und (BD) Beweisdarstellung, ergänzt um (BR) Beweisreflexion. Für AF taugen die König-Fragen am Lösungsgraphen, für BO und BR Pólya-Fragen, die anhand skizzierter Tempel gestellt und beantwortet werden können. Dem Beweisen als Spezialfall des Problemlösens entsprechend stellen wir in Abb. 2 die Boero-Phasen den Pólya-Phasen (AV) Aufgabe verstehen, (PE) Plan entwickeln, (PD) Plan durchführen und (RS) Rückschau gegenüber. (SF geht AV voraus, da Pólya nur geschlossene Probleme betrachtet.) Probleme sind nach Dörner (1976, S.10) gekennzeichnet durch das Auftreten von Barrieren im Bearbeitungsprozess, was diesen in Abschnitte untergliedert: Kurze Abschnitte werden als Ereignisse bezeichnet, wie beispielsweise das Erreichen einer Barriere (BE). Vor dem Erreichen der Barriere liegt ein barrierefreier Abschnitt (BF), nach dem Erreichen der Barriere erfolgt ein Passageversuch (PV) der gefolgt wird oder übergehen kann in einen Abschnitt NB (Nachbarriere-Stadium) mit den Ausprägungen LG (Lösungsweg gefunden) oder LF (Lösungsweg fehlt).



Aufgabe 1

SF

Rechts siehst du eine Zirkusarena mit zwei gegenüber liegenden Ein- bzw. Ausgängen. Julia sitzt an der Stelle C und will den Auftritt des Clowns filmen. Sie erwartet ihn am Eingang A. Doch der Clown betritt die Arena bei B.

a) Um wie viel Grad muss Julia ihre Filmkamera drehen?

SD

Untersuche das auch für andere Stellen am Rand der Arena. Formuliere dein Ergebnis.

b) Beweise deine Vermutung.

AF

Anleitung: Zeichne einen Radius $\overline{MC}$ und zerlege das Dreieck ABC dadurch in zwei Teildreiecke. Suche gleich große Winkel.

Lösung

a) Die Zeichnung lässt vermuten: Julia muss die Kamera um 90° drehen. Auch an anderen Stellen auf dem Rand ergibt sich die gleiche Winkelgröße.

BO und BD

b) *Wir wissen:* Der Punkt C liegt auf dem Halbkreis über $\overline{AB}$.
Wir wollen zeigen: $\gamma = 90°$.
Die Strecken $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ und $\overline{MC}$ sind Radien des Kreises um M und daher gleich lang. Folglich sind die Dreiecke AMC und MBC gleichschenklige Dreiecke. Mithilfe des Basiswinkelsatzes folgt:
(1) $\alpha = \gamma_1$; (2) $\beta = \gamma_2$
Dann gilt: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \alpha + \beta$
Nach dem Winkelsummensatz gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Wegen $\alpha + \beta = \gamma$ folgt: $\gamma + \gamma = 180°$
$2 \cdot \gamma = 180°$
$\gamma = 90°$

Abb. 3: Hypothetische Boero- und Dörner-Phasen beim „Thales"-Beweis in „Elemente"

Wie verläuft in diesen Modellen der „Thales"-Beweisprozess? Die Darbietung in „Elemente der Mathematik 6" (Griesel et al 2006, S.64) lässt sich gut nach Boero gliedern (Abb. 3) und suggeriert einen barrierefreien Verlauf. Eine Heuristische Rekonstruktion des Lösungsgangs erweist jedoch: Selbst wenn die AF-Impulse fruchten und zu einer vorwärtsarbeitenden BO führen, ist erwartbar, dass SchülerInnen der Klasse 6 im entscheidenden Verkettungsschritt stecken bleiben (Abb.5): Um das Ziel im Tympanon zu erreichen, müssen sie die IWS-Säule und den Architrav $|\gamma| = |\alpha|+|\beta|$ verknüpfen – dazu müssten sie sich aber von der eingeübten Sichtweise „IWS als Rechenausdruck" lösen, in der eine Winkelgröße durch Einsetzen in die anderen beiden berechnet wird. Da $|\alpha|$ und $|\beta|$ variabel sind, lässt sich hier nur mit ihrer Summe operieren – das erfordert einen Sicht*wechsel* zur „IWS als Gleichung", in der Terme substituiert werden können. Dies ist aber in Klasse 6 noch gar nicht verfügbar. Über diese Problematik wird in Schulbüchern mehr oder weniger hinweggegangen– dass es hier aber einer heuristischen Aufarbeitung bedarf, lehrt die empirische Forschung: Hätten die SchülerInnen den Sichtwechsel beim „Thales" erlernt, könnten sie ihn z.B. bei der TIMSS-Aufgabe K10 wieder abrufen – dies ist aber nur ansatzweise der Fall, vgl. Lucyga (in diesem Band). Wir erwarten also eher einen Verlauf wie in Abb. 5! (Prozessband-Farben in Konkordanz mit Abb.3.)

Abhilfe verspricht der Ansatz von Elschenbroich & Seebach (2002), die den nun über die IWS in AMC und BMC geführten Beweis dynamisch entdecken lassen (Abb.6):

„Ziehe an C.

a) Was fällt dir an den eingezeichneten Winkeln auf?

b) Warum muss das so sein? Tipp: Beobachte das Dreieck AMC.

c) Verfahre entsprechend mit dem Dreieck BMC.

d) Was ergibt sich für die Größe des Winkels γ?“

So lässt sich der Beweis *barrierefrei* vorwärtsarbeitend aufbauen (Abb.7) – und *nach* Behandlung des Umfangswinkelsatz in der *Rückschau* auch für diesen verwenden! Man muss lediglich die rechte Säule (|μ| =

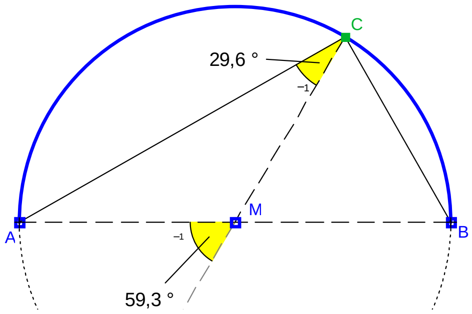
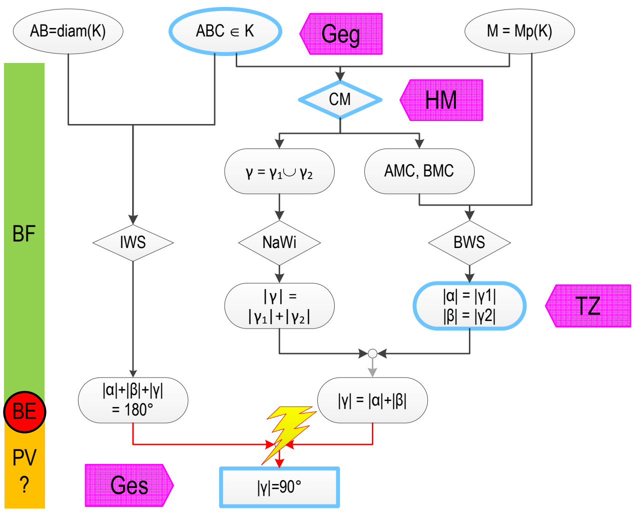


Abb. 6: Elektronisches Arbeitsblatt

180°, da AB ein Kreisdurchmesser ist) weglassen. Details dazu, zur Übertragung auf K10 und die Literatur in der Langfassung auf der Homepage bzw. in MU 4/17.



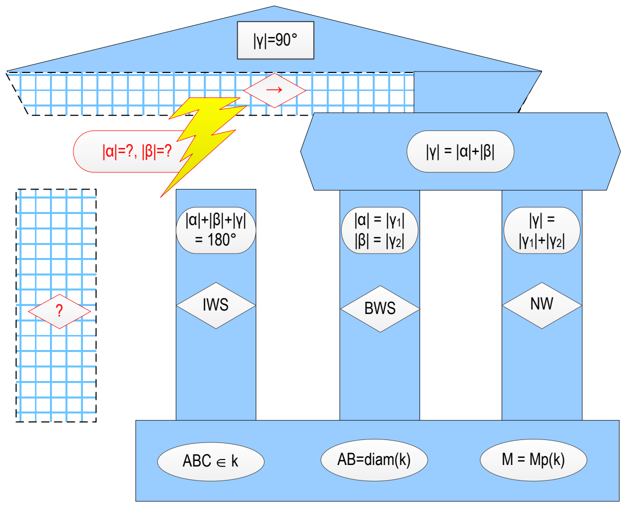
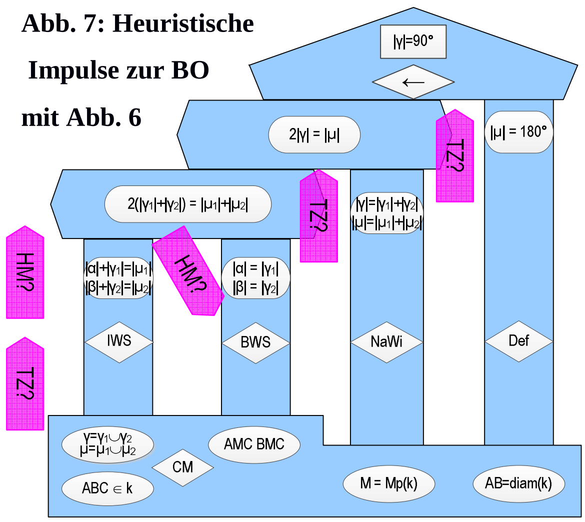


Abb. 5: Vermuteter tatsächlicher Prozessverlauf

Abb. 7: Heuristische Impulse zur BO mit Abb. 6



Dörte HAFTENDORN, Lüneburg

Dynamik bringt die Mathematiklehre voran

Es geht in diesem Beitrag um die "`vorwärtstreibende Kraft"', mit der bewegliche Darstellungen der DMS (Dynamischen Mathematik-Systeme) das Verstehen von Mathematik fördern. Damit muss auch die Lehre von Mathematik die allzu statische Sicht überwinden und wirklich "`vorankommen"', in eine gute Zukunft gegen. Die folgenden Beispiele beziehen sich auf das Verstehen der Ableitungsfunktion, Anwendung bei der Modellierung von Wirtschaftsfunktionen, Hinführung zur e-Funktion und auf Kurven in polar-kartesischer Darstellung. Ein interaktives Beispiel zum Verständnis des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung muss hier aus Platzgründen entfallen. Sie finden dieses aber im Buch (Haftendorn 2015). Entsprechendes gilt für die dynamische Betrachtung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

1. Die digitalen Werkzeuge für die Mathematiklehre

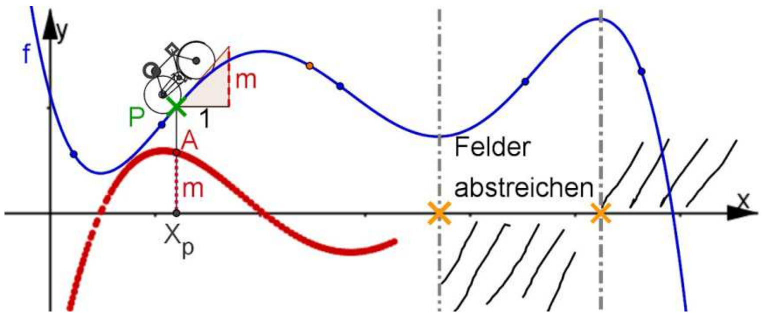
Die hier vorgestellten Beispiele verwenden das frei verfügbare DMS (Dynamisches Mathematik-System) GeoGebra, das in etwa 50 Sprachen übersetzt ist und weltweit in der Mathmatiklehre eingesetzt wird. Es enthält untereinander vernetzte Ebenen für die Arbeit in Geometrie, Analysis, Numerik, Diskreter Mathematik, Stochastik und Algebra. Man kann mehrere dieser Ebenen nebeneinander oder in beweglichen Fenstern sichtbar machen. Das ist didaktisch insbesondere für das CAS-Fenster, das Tabellenkalkulations-Fenster oder das Wahrscheinlichkeits-Fenster sinnvoll. Die Kunst des Mathematiklehrens besteht -- wie in der Einleitung zu dieser Sektion schon erläutert -- darin, einerseits sinnvoll auszuwählen, andererseits flexibel auf die Bedürfnisse der Lernenden durch Wechsel der Sichtweise eingehen zu können. Zu unterscheiden sind zwei Arten des Einsatzes von digitalen Werkzeugen: Erstens gibt es die von der Lehrkraft vorbereiteten Dateien, die zu einem Begriff oder einer mathematischen Aussage hinführen und sie ggf. von verschieden Seiten beleuchten. Dieses kann in ein Klassen- oder Kursgespräch eingebunden sein oder mit Hilfe von „elektronischen Arbeitsblättern“ erfolgen, wie es G. Seebach und H.-J. Elschenbroich schon mit den allerersten DMS vorgeschlagen haben.

Zweitens gibt es die freie Arbeit von Lernenden, bei der sie digitale Werkzeuge in eigener Entwicklung und Regie einsetzen, um mathematische Fragestellungen oder Zusammenhänge zu erkunden oder zu lösen. M. E. kann dieses aber nur gelingen, wenn die Lernenden den klugen Einsatz, der ihr Verstehen befördert hat, in der Lehre „erfahren“ haben. Dieses gilt im Schulalter, aber auch im Studium, insbesondere im Lehramtsstudium. Hier setzt dieser Beitrag an.

Anmerkung: Als Leser dieses Textes müssen Sie nicht nur auf die **Farbigkeit** der Darstellungen verzichten, sondern auch auf die **Dynamik**, die, laut Titel, das Wesentliche ist. Die finden die farbigen und beweglichen Darstellungen auf den beiden Websites (Haftendorn Web 1) und (Haftendorn Web 2).

2. Verstehen der Ableitungsfunktion

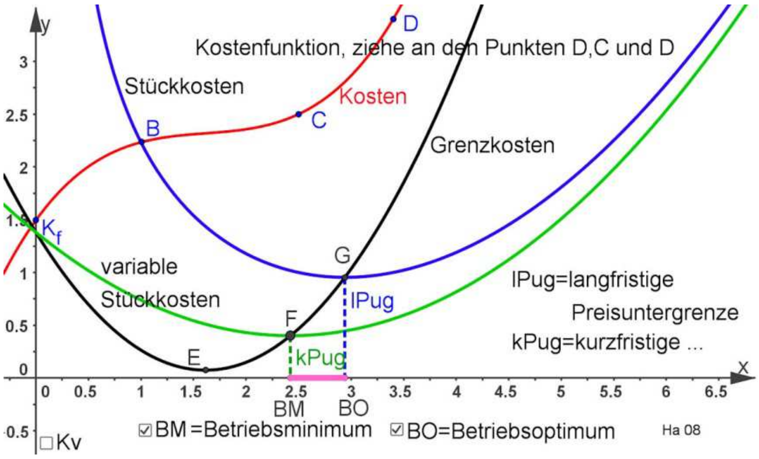
Dieses Besipiel soll bewusst machen, dass es bei solchen glatten Kurven in jedem Punkt eine Steigung gibt. Die Tangente kann mit einem Schalter zugeschaltet werden. Ob man die Steiung in einem (festen) Punkt P z.B. der Parabel vorher behandelt oder nicht, ist eine didaktische Entscheidung. Lernpsychologisch erscheint es mir sinnvoll, zunächst begreiflich zu machen, worum es im Ganzen geht, bevor man sich den Einzelheiten widmet. Jedenfalls wird die Tangente selbst von einem GeoGebra-Befehl geliefert und ein Steigungsdreieck kann angefordert werden. Der Steigungswert kann als Zahl oder geometrisch an der Stelle x(P) als Ordinate des Punktes A eingetragen werden. Bewegt man nun P, so zeichnet der Punkt A seine Spur. Übrigens ist das Fahrrad, bei dem sich sogar die Pedale drehen, von meinem Kollegen Dieter Riebesehl vollständig in GeoGebra konstruiert. In der Datei zu obigem Bild gibt es verschiebliche Stangen die man „nach Sicht“ an die Extremstellen oder die Wendestellen ziehen kann. Zum Beispiel tut dies jemand von den Lernenden an einem Whiteboard. Lässt man A weiterlaufen, prüft man interaktiv die richtige Stellung der Stangen. Diese können zusätzlich dazu dienen, „Felder abzusteichen“, in welche die Steigungsfunktion nicht gelangen kann. Mit dieser Methode können bei einer Klausur auch qualitative Ableitungsgraphen verlangt werden (siehe Haftendorn 2015, S.177).



Als nächsten Schritt schaltet man die Spur aus und lässt die **Ortslinie von A** (bezüglich P) anzeigen. Das Ausgangspolynom ist ein Newton’sches Interpolationspolynom durch die hier sichtbaren Punkte, die frei verschoben werden können. Tut man dieses, so ändert nicht nur das gegebene Polynom seine Form, sondern natürlich auch die Orstlinie von A. Es ist eindrucksvoll, wie sie auf jede Bewegung sofort reagiert. An dieser Stelle kann begriffen werden, warum die Steigungskurve **Ableitungsfunktion** genannt werden kann.

3. Modellierung von Wirtschaftsfunktionen

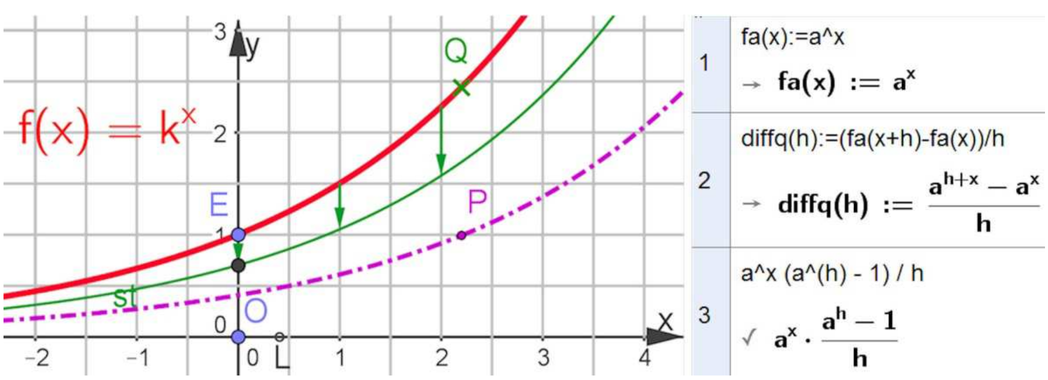
In diesem Beispiel ist eine Kostenfunktion durch frei verschiebliche Punkte K_f, B,C, D gelegt, der Befehl Polynom[Liste] leistet das. Solche monotonen Polynome dritten Grades sind in Büchern zur Wirtschaftsmathematik häufig ohne Begründung der Start in eine Aufgabe. In Wahrheit stammen die Kostenfunktionen aus der Disziplin „Kostenrechnung“, aber auch da sind sie eine **Modellierung** einer ökonomischen Gegebenheit. Mit x bezeichnet man die produzierte Menge, das ganze Bild folgt *allein* aus der Kostenfunktion.



Für Nicht-Ökonomen reicht es, wenn man zur Kenntnis nimmt, dass das Ziel letzlich die „Entscheidungsgrößen“ BM und BO sind. Verblüffend ist, dass schon kleine Änderungen der Stellung von C oder D „wilde“ Bewegungen dieser Wirtschaftsparameter zur Folge haben. Gerade die **Dynamisierung** erschüttert das naive Vertrauen auf die erzeugten Betriebsgößen nachhaltig.

4. Hinführung zur e-Funktion

Die Euler’sche e-Funktion ist zweifellos die wichtigste Exponentialfunktion und sie wird in den Naturwissenschaften der Sek II sehr bald gebraucht. Daher ist es sinnvoll, gleich nach dem Ableitungsbegriff zu dieser Funktion hinzuführen. Das kann und sollte natürlich unter Betonung ihrer herausragenden Eigenschaften für die Differentialrechnung erfolgen. Hierfür macht dieses Beispiel einen dynamischen Vorschlag. Als erstes betrachtet man Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis k und stellt fest, dass sie alle, aber mit unterschiedlicher Steigung, durch den Punkt E=(0,1) verlaufen.

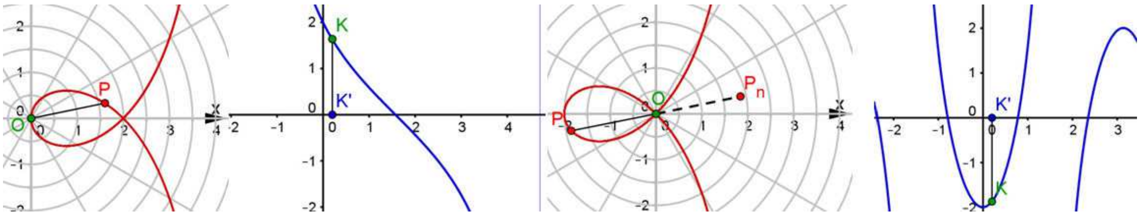


Setzt man einen Punkt P zugfest auf die Exponentialfunktion, kann man mit A -wie im ersten Beispiel- die Ableitungskurve als Ortslinie erhalten (Strichpunkt-Kurve). Könnte dies eine Stauchung sein? Eine gegenüber der Ausgangskurve gestauchte Exponentialfunktion mit variablem Stauchfaktor verformt sich, bis sie auf der Ableitungskurve liegt. Erhöht man nun die Basis k, so rückt die Ableitung immer näher an die Ausgangskurve, bis beide aufeinander liegen. Das geschieht für die Basis 2.7183. Diese Genauigkeit kann man experimentell erhalten, man weist auf das wahre e hin.

Diese Basis ist also tatsächlich die **bequemste Basis** für die Analysis der Exponentialfunktionen. Rechts ist mit GeoGebra CAS der Differenzenquotient gechrieben. Ist er dann im Unterricht eingeführt, kann man den Stauchfaktor auch wrklich als Steigung der Ausgangskurve in E deuten.

5. Ist das dieselbe Schlaufe? Kurven in polar-kartesischer Darstellung

Man sieht im Bild die Strophoide und eine spezielle Cissoide. Sie haben die Polargleichungen $r(\theta) = \dfrac{a}{\cos(\theta)} - a\tan(\theta)$ bzw. $r(\theta) = \dfrac{a}{\cos(\theta)} - 2a\cos(\theta)$



In zwei Grafikfenstern sind jeweils die Punkte K und P „gekoppelt“ und man kann den „Durchlauf“ dynamisch verfolgen. Das führt zu allerlei Beobachtungen und Vermutungen, die an dieser Stelle zu weit führen. (siehe Haftendorn Web 2).

6. Fazit

Dynamik bringt „Leben“ in die Mathematik, lebendige Mathematik spricht uns mehr an und was wir mögen, können wir besser lernen.

Literatur

Haftendorn, D. (2015, 2. Aufl.). Mathematik sehen und verstehen. *Schlüssel zur Welt,* Kap 6, 10 und S. 381. Heidelberg: Springer Spektrum

Haftendorn Web 1. Website zum Buch http://www.mathematik-sehen-und-verstehen.de

Haftendorn, D. (Erscheinen vermutlich 2016/17). Kurven erkunden und verstehen. Heidelberg: Springer

Haftendorn Web 2. Website zum Buch http://www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Elisabeth LUCYGA, Hannover

Klippen in Problemlöseprozessen sichtbar machen

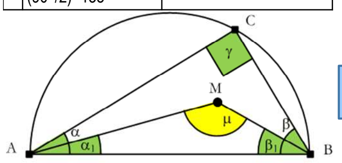
Theoretischer Hintergrund

Nach Dörner besteht ein Problem aus: „1. Unerwünschter Anfangszustand s_α; 2. Erwünschter Endzustand s_ω; 3. Barriere, die die Transformation von s_α in s_ω im Moment verhindert." (Dörner 1976, S.10) Ein möglicher Verlauf eines solchen Transformationsprozesses wird von Pólya beschrieben: „Nach einem unproblematischen Anfang folgt er einem gewundenen Pfad, bis er in eine (…) Sackgasse gerät. Dann kehrt er um und verfolgt seinen Weg zurück, bemerkt (…) einen Seitenweg und geht diesem nach, gerät aber wieder in eine Sackgasse, die ihn wieder zum Umkehren nötigt. Und so fährt er fort (…) wenn er auch häufig umkehren und seine Schritte rückgängig machen muß, so schreitet er doch im großen ganzen, so hoffen wir wenigstens, in der richtigen Richtung fort." Pólya (1967, S. 116 f.)

Damit können wir einen Problemlöseprozess barrierebezogen in die Abschnitte BF (Barrierefrei), BE (Barriere Erscheint), PV (Passageversuch) und NB (Nichtbarriere-Stadium) aufteilen, vgl. Gawlick (in diesem Band). Ebenso lässt sich eine Definition für Klippen ableiten: Eine *Klippe* ist eine Stelle auf dem bisherigen Lösungsweg, an der dem Probanden bewusst wird, in eine Sackgasse geraten zu sein. Diese Stelle erscheint dem Probanden damit als Barriere auf dem Weg zum Ziel.

In diesem Beitrag untersuchen wir am Beispiel der Problemaufgabe K10, welche Klippen im Bearbeitungsprozess denkbar sind und welche tatsächlich auftreten: Betrachten wir zunächst die Standardlösung von K10 (Gesucht ist die Größe des Winkels $\mu = \angle AMB$, wobei ABC ein Thalesdreieck und M der zugehörige Inkreismittelpunkt ist) und die Visualisierung als Tempel (Abb. 1). Wie man zu dieser Lösung kommen kann und welche Klippen dabei denkbar sind,

#	Schritt	Begründung
1	$\|\gamma\| = 90°$	Satz des Thales: AB Durchmesser, $C \in k$
2	$\|\alpha\| + \|\beta\| + \|\gamma\| = 180°$	IWS in ABC
3	$\|\alpha\|+\|\beta\|=90°$	1, 2
4	AM, BM WH	Satz vom Inkreis: M Inkreismittelpunkt (MPI)
5	$\|\alpha_1\| = \|\alpha\|/2$; $\|\beta_1\| = \|\beta\|/2$	4
6	$\|\alpha_1\| + \|\beta_1\| + \|\mu\| = 180°$	IWS in ABM
7	$\|\mu\| = 180°-\|\alpha\|/2-\|\beta\|/2$	5,6
8	$\|\mu\|=180°-(90°/2)=135°$	3, 7



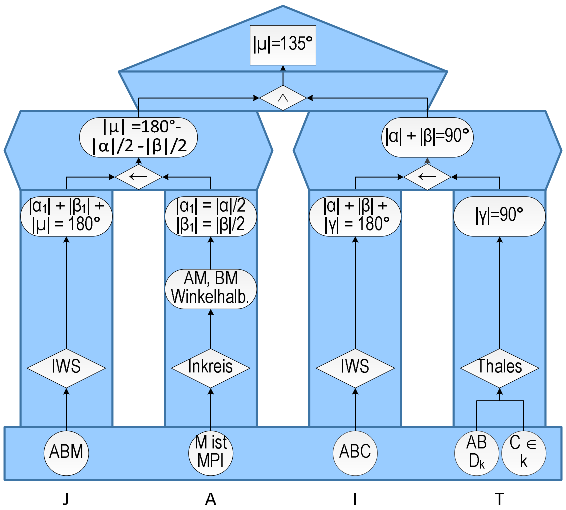


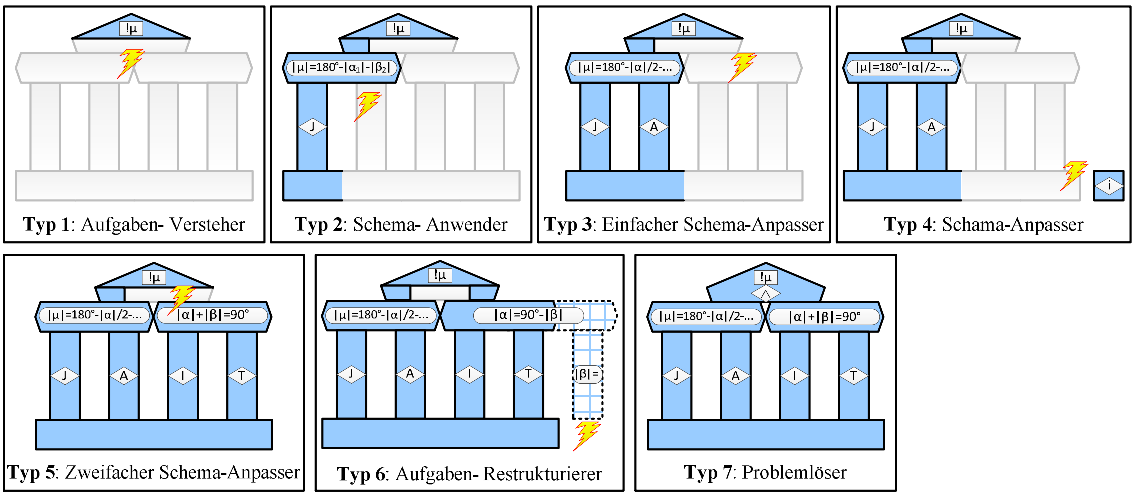
Abb. 1: Standardlösung, Lösungsgraph und Tempel von K10 (IWS: Innenwinkelsummensatz, WH: Winkelhalbierende)

zeigt Abb. 2. Bis zu welchem Planungsschritt ein Bearbeiter tatsächlich kommt, wird dabei durch die Hauptplanungstypen beschrieben.

#	Heuristische Aktivität	Epistemische Aktivität	Klippe
1	Was ist unbekannt?	Der Winkel μ.	„Nun weiß ich nicht mehr weiter.“
2	Mit welchem Hilfsmittel (HM) oder Teilziel (TZ) kann ich μ bestimmen?	Mit dem IWS im Dreieck ABM: $\lvert\mu\rvert=180°-\lvert\alpha_1\rvert - \lvert\beta_1\rvert$	„Ich kenne ja gar nicht α_1 oder β_1.“
3	Mit welchem HM oder TZ kann ich α_1 ,β_1 bestimmen?	M ist der Mittelpunkt des Inkreises, damit gilt $\lvert\alpha_1\rvert = \lvert\alpha\rvert/2$,$\lvert\beta_1\rvert = \lvert\beta\rvert/2$. Und damit $\lvert\mu\rvert = 180°-\lvert\alpha\rvert/2-\lvert\beta\rvert/2$.	„Ich kenne weder α noch β.“
4	Mit welchem HM oder TZ kann ich α ,β bestimmen?	Mit dem IWS im Dreieck ABC: $\lvert\alpha\rvert + \lvert\beta\rvert + \lvert\gamma\rvert = 180°$	„Aber das bringt mir doch nichts.“
5	Mit welchem HM oder TZ kann ich γ bestimmen?	AB ist der Durchmesser und C liegt C auf k, daher gilt mit SdT $\lvert\gamma\rvert = 90°$. Damit folgt $\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert=90°$.	„Ich weiß immer noch nicht, wie groß α oder β ist.“
6	Kannst du dir andere Daten denken, die geeignet sind, die Unbekannte zu bestimmen?	Wenn β gegeben wäre, so könnte ich α bestimmen, und damit dann auch μ.	„Das bringt nichts, β ist ja nicht gegeben.“
7	Kannst Du die Aufgabe anders ausdrücken? Kannst Du sie auf noch verschiedene Weise ausdrücken?	Ich brauche α und β gar nicht einzeln, ich kann die Summe verwenden.	

Abb. 2: Lösungsplan für K10, auslösende heuristische Impulse und mögliche Klippen

Lösungsprozesse von K10 werden hinsichtlich des Planungsverlaufs typisiert. Dazu wird der Bearbeitungsverlauf durch eine Tempelfolge beschrieben, vgl. Gawlick (in diesem Band), aus der die Folge der Planungstempel abgeleitet wird. Diese wird dann einem theoretischen *Hauptplanungstyp* zugeordnet: Die erste Klippe ist, überhaupt zu verstehen was gesucht ist - an ihr scheitert Typ 0, der Nicht-Versteher. Überwindet man sie, bemerkt aber direkt nach der Identifikation von μ, dass man nicht mehr weiter weiß (zweite Klippe) so liegt Typ 1: Aufgaben-Versteher vor. Schafft man es doch, einen Plan aufzustellen (μ mit IWS), gerät dann in eine Sackgasse (dritte Klippe) und scheitert, so ist man vom Typ 2: Schema-Anwender usw. Diese Pläne können mit Tempelbildern visualisiert werden. Abb. 3 zeigt die Tempel der Pläne, an deren Klippen die Typen scheitern.



Welche Klippen treten tatsächlich auf?

All diese Typen treten in der Praxis tatsächlich auf! In vielen Prozessen tritt genau eine Barriere auf, daher beschrieben wir diese durch das Quadrupel der finalen Tempel der Abschnitte BF, BE, PV, NB. Aus Platzgründen betrachten wir lediglich drei Prozesse aus HeuRekAP (Gawlick 2014):

Der Fall A05 Zu Beginn identifiziert A05 die gegebene Thales-Situation und folgert |γ|=90°. Dies verwendet er nicht weiter – ein Thales-Baustein wir neben dem Tempel bereitgelegt (Abb. 5 – A05, BF). Danach identifiziert er µ und stößt sogleich auf eine Klippe – er weiß nicht, wie er weiter vorgehen soll (Abb. 5 – A05, BE). Diese versucht er mit dem Plan den Kosinussatz umzuformen zu passieren, scheitert allerdings (Abb. 5 – A05, PV). Daraufhin misst er µ (Abb. 5 – A05, NB:LF). Betrachten wir das Tempelbildquadrupel (Abb.7 –A05), so fällt auf, dass dies ohne das zusätzliche Baumaterial jeweils recht gut einem der Hauptplanungstypen entspricht. Bei der Typisierung berücksichtigen wir das Baumaterial aber doch: Obwohl der Lösungsplan von A05 keine erfolgreiche Schemaanwendung enthält, zeigt der Thales-Baustein, dass A05 in der Lage ist ein Schema anzuwenden – ihm wird Typ 2: Schema-Anwender zugeschrieben.

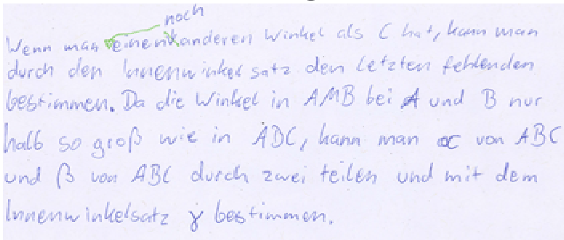

Wenn man einen noch anderen Winkel als C hat, kann man
durch den Innenwinkelsatz den letzten fehlenden
bestimmen. Da die Winkel in AMB bei A und B nur
halb so groß wie in ADC, kann man α von ABC
und β von ABC durch zwei teilen und mit dem
Innenwinkelsatz γ bestimmen.

Abb. 4: Ausschnitt der K10-Bearbeitung von A32

Der Fall A32 Direkt zu Beginn merkt A32 an, dass |γ|=90° ist, wegen dem Satz des Thales. Danach identifiziert er µ und erkennt die WH-Eigenschaft (Abb. 5 – A32, BF). Damit formuliert er einen Lösungsplan (µ mit dem IWS berechnen und WH-Eigenschaft berücksichtigen) und stößt sogleich auf eine Klippe: Er weiß nicht, wie er α und β bestimmen kann (Abb. 5 – A32, BE). In PV gelingt es ihm seinen Plan weiterzuentwickeln (Abb. 4). Er erkennt aber, dass er ihn so nicht durchführen kann und versucht erfolglos ihn zu restrukturieren. Da keine epistemischen Aktivitäten folgen, wird im NB-Abschnitt kein Tempel visualisiert. Vergleichen wir das Quadrupel von A32 wieder mit den Hauptplanungstypen, so fällt auf, dass diese im Vergleich zu der Folge von A05 ähnlicher ist. Der finale BF-Tempel entspricht im Wesentlichen dem Tempel von Typ 1, der BE-Tempel entspricht, bis auf den Thales-Baustein, dem von Typ 3. In PV baut A32 den Tempel weiter auf (Typ 6). Die Bearbeitung des Probanden kann damit Typ 6: Aufgaben-Restrukturierer zugeordnet werden.

Der Fall D11 (Eine detailliertere Darstellung des Bearbeitungsprozesses von D11 findet sich in Gawlick & Lucyga (2014).) Der Bearbeitungsprozess von D11 verläuft bis zum Erreichen der Barriere recht ähnlich wie der Prozess von A32 (vgl. Abb. 5). Nach dem Erreichen derselben Klippe wie A32 versucht D11 diese zu passieren, indem er viele verschiedene Gleichungen aufstellt. D11 stellt die Gleichungen auf, um seinen Plan grundlegend umzuarbeiten, daher sind die entsprechenden Säulen magenta gefärbt (Abb. 5 – D11, PV). Letztendlich gelingt es ihm seinen Plan umzustrukturieren – er wechselt in eine algebraische Betrachtungsweise. Er stellt die Gleichung $2|\alpha_1|+2|\beta_1|=90°$ nach α_1 um, setzt dies in $|\mu|=180°-|\alpha_1|-|\beta_1|$ ein und löst damit K10 (Abb. 5 –D11, NB:LG). Vergleichen wir das Quadrupel wieder mit den Hauptplanungstypen: Der BF-Tempel entspricht im Wesentlichen dem Tempel von Typ 2, der BE-Tempel dem von Typ 3. Der PV-Tempel entspricht am ehesten Typ 5, wohingegen der NB-Tempel dem Tempel des Problemlösers (Typ 7) entspricht. Insgesamt lässt die Bearbeitung von D11 darauf schließen, dass D11 ein Problemlöser (Typ 7) ist.

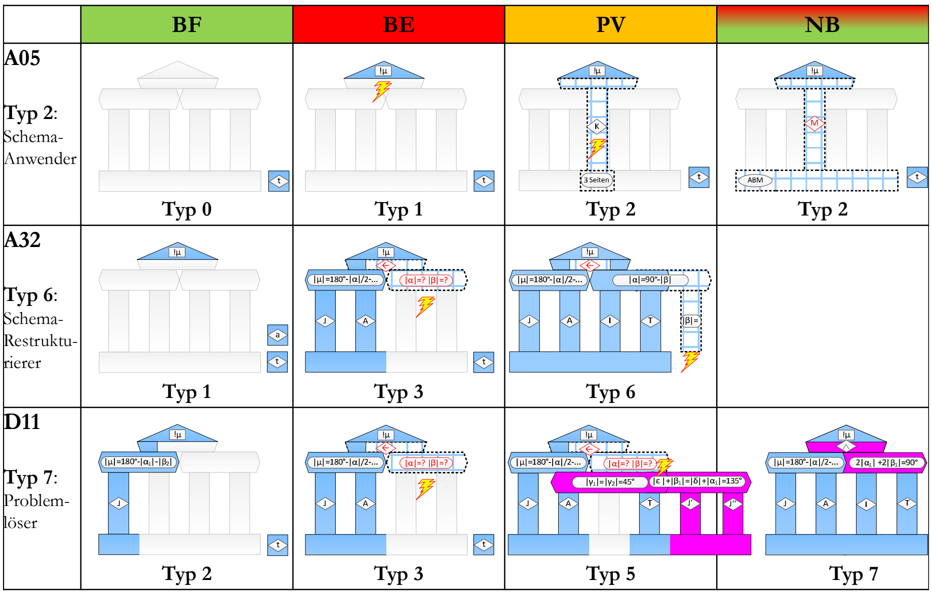


Abb. 5: Visualisierung der Bearbeitungsprozesse mit Tempelbildquadrupeln

Fazit

Wir haben gezeigt, dass sich die betrachteten Probanden den theoretischen Hautplanungstypen zuordnen lassen. Darüber hinaus haben wir gesehen, dass Tempelbilder eine strukturierte und übersichtliche Prozessdarstellung ermöglichen, v.a. wenn die finalen Tempelbilder eines jeden Abschnitts betrachtet werden. Mit dieser Darstellung können Problemlöseprozesse leicht vergleichbar gemacht werden und Klippen werden sichtbar. Mit Tempeln lassen sich damit sowohl Klippen, als auch die Arten des Umgangs damit beschreiben. Dies wiederum lässt sich als Ausdruck einer Kompetenzstufe (vgl. Gawlick & Lucyga (eingereicht)) interpretieren.

Literatur

Siehe Langfassung auf der Homepage bzw. MU 4/17.

Guido PINKERNELL, Markus VOGEL, Heidelberg

DiaLeCo – Lernen mit dynamischen Multirepräsentationen von Funktionen

Was am Computerbildschirm zu sehen ist und was mathematisch tatsächlich gemeint ist, muss nicht immer übereinstimmen. Dynamisierte multiple Repräsentationen können sogar Anlass zu visuelle Vorstellungen geben, die der Sache nicht zuträglich sind. Das Projekt DiaLeCo der PH Heidelberg geht der Frage nach, wie diesbezügliche Lernhürden diagnostiziert und abgebaut werden können.

Wahrnehmungsfallen beim Betrachten dynamisierter Graphen

Öffnen Sie eine dynamische Mathematiksoftware, fügen Sie ihr einen Schieberegler a hinzu und plotten dann den Graphen von $f(x) = x^2 + a$. Vergrößern Sie den Wert von a und betrachten Sie die Änderungen beim Graphen genau. Er bewegt sich durchaus nach oben, aber scheint er nicht auch enger zu werden? Eine Studentin der PH Heidelberg hatte genau diesen Eindruck (Pinkernell 2015). Sie wusste auch, dass ihre Wahrnehmung des sich bewegenden Graphen dem widersprach, was sie in der Schule gelernt hatte: Die „Öffnung“ der Parabel wird durch einen Faktor vor dem quadratischen Teilterm in der Funktionsgleichung bestimmt, so hatte sie es gelernt. Aber da war keiner.

Forschungsfragen

Das Beobachten der Bewegungen von Graphen in einem Softwarefenster lädt zu anderen Wahrnehmungen ein als bei statischem Material. Unsere unmittelbare Interpretation der visuellen Information werden durch Oberflächeneigenschaften des Stimulus beeinflusst, die dem dargestellten mathematischen Sachverhalt widersprechen kann. Das kann die Ausbildung eines sachadäquaten Begriffes des repräsentierten Lerngegenstands behindern. Hieraus ergeben sich für uns zwei Fragen, die zunächst auf theoretischer Ebene geklärt werden müssen:

1. kognitionspsychologische Perspektive: Wie lässt sich der Widerspruch zwischen Wahrnehmungsbild und „besserem Wissen“ erklären
2. fachliche Perspektive: Wie kann sich eine verständige Deutung einer dynamischen multiplen Repräsentation einer Funktion zeigen?

Beiden Fragen soll im Folgenden nachgegangen werden. Es sind Teilfragen eines umfassenderen Forschungsvorhabens, welches das Heidelberger Projekt DiaLeCo – Diagnose typischer Hürden beim Lernen mit computergestützten Multirepräsentationsumgebungen – verfolgt.

Kognitionspsychologische Perspektive

Wenn man im Eingangsbeispiel die Funktion $f(x) = x^2 + a$ durch die Funktion $f(x) = x + a$ ersetzt, erhält man eine Gerade, deren Bewegung in der Koordinatenebene bei Änderung von a unterschiedlich gesehen werden kann. Unter einer bestimmter Betrachtungsweise bewegt sie sich vertikal, unter einer anderen horizontal. Möglich ist auch die Wahrnehmung der Bewegung als eine diagonale durch das Softwarefenster. Das erinnert an bestimmte optische Täuschungen, die einander ausschließende Wahrnehmungen desselben Stimulus erlauben, wie z. B. den Neckerwürfel.

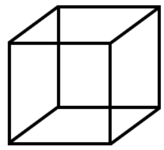


Abbildung 1

In seiner Analyse der Informationsverarbeitung von bildhaften Informationen unterscheidet Palmer (1975) zwischen parametrischen (Farbe, Größe, etc.) und strukturellen Informationen (Figur-Grund, Beziehungen zwischen Teilelementen, etc.). Hat ein Betrachter den Eindruck, dass sich die Farbe ändert, muss sich diese im Stimulus geändert haben. Hat er den Eindruck, dass sich Relationen zwischen bestimmten Teilelementen geändert haben, muss das im Stimulus nicht der Fall sein. Ob man den Neckerwürfel von oben oder von unten sieht entscheidet sich im Kopf des Betrachters, nicht in der Abbildung (Abb. 1). Bildhafte Darstellungen sind mit Blick auf strukturelle Informationen ambivalent. Eine sachadäquate Deutung einer bildhaften Repräsentation muss sich durch weitere Informationen ergeben. In einer Multirepräsentationsumgebung sind dies die weiteren Repräsentationen desselben Sachverhalts.

In ihrer Theorie der Verarbeitung multipler externer Repräsentationen von Informationen beschreiben Schnotz und Bannert (2003) das „mentale Modell“ als die kognitive Instanz, die als erste den externen Stimulus sinngebend interpretiert. Die Sinnkonstruktion wird dabei durch vorhandene kognitive Schemata unterstützt, die im Moment der Informationsverarbeitung instantiiert werden (vgl. Dutke, 1994). Bei der Verarbeitung logischer Bilder, i. e. Graphen oder Diagramme, sind dies sogenannte graphische Schemata. Der von uns betrachteten dynamischen Softwareumgebung bildet eine externe multiple logische Repräsentation des funktionalen Zusammenhangs zwischen a und f(x)+a, für deren sachadäquate Interpretation es ein geeignetes „graphisches Schema“ braucht. Seine Ausformung ist Gegenstand didaktischer Bemühungen, die eine fachliche Analyse der dynamischen multirepräsentationalen Lernumgebung voraussetzt.

Fachliche Perspektive

Ein mathematisches Objekt ist im wesentlichen abstrakter Natur. Ein verständiger Zugang zum mathematischen Objekt namens „Funktion“ kann nur über seine Repräsentationen erfolgen. Duval folgend (1999) heißt dies, mit den verschiedenen Standardrepräsentationsformen Term, Tabelle und Graph korrekt umgehen und zwischen ihnen nach Bedarf kohärent wechseln zu können. Regelhaftes Wissen über das Wechseln zwischen Term, Tabelle und Graph reicht aber nicht aus. Die Studentin aus dem Eingangsbeispiel wusste zwar, dass der Parameter a in $f(x) = x^2+a$ eine vertikale Verschiebung der Normalparabel um a LE angibt. Nur konnte sie ihr Wissen über die Zusammenhänge von Parametern in Funktionsgleichungen und Gestalt und Position der zugehörigen Graphen in dem Moment nicht mehr anwenden, als die sonst so gewohnten statischen Repräsentationen auf dem Computerbildschirm plötzlich lebendig wurden.

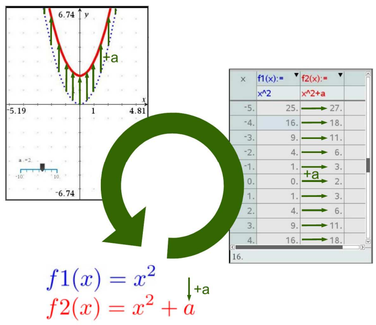


Abbildung 2

Alle drei Repräsentationsformen – die algebraische, die numerische und die graphische – sind semiotische Systeme, die sich bzgl. ihrer Syntax und der jeweils verwendeten Symbole fundamental unterscheiden. Und doch bildet jede denselben Zusammenhang zwischen a und f(x)+a ab. Das Wissen, das sich aus der Betrachtung der Informationen in einer Repräsentationsform ergibt, erweist sich erst dann als valide, wenn es durch Übersetzung des Wissens erklärt wird, das sich aus der Betrachtung der anderen Repräsentationsformen ergibt. Das ist, was Duval (1999) als Verstehen der abgebildeten Zusammenhänge beschrieb. Hier ist es die Wirkung des Parameterwerts, der in Term, Tabelle und Graph unterschiedliche Gestalt annimmt: In der algebraischen Repräsentation ist es der Operator +a, in der numerischen ist es die immer gleiche Differenz zwischen benachbarten Zellen der Wertetabellen von f(x) und f(x)+a, und in der geometrischen ist es der gleichbleibende vertikale Abstand zwischen den entsprechenden Punkten der beiden Graphen (Abb. 2).

Dieses Kondensieren der jeweils systemspezifischen Informationen über Relationen zwischen Tabellenwerten oder Punktkoordinaten auf die reine strukturelle Information der invarianten Differenz zwischen den $f(x_i)$ und $f(x_i)+a$ kann als Abstraktion bezeichnet werden. Dies ist ein Lernen, das durch durch ein kohärentes, weil verständiges Aufeinanderbeziehen von solchen Informationen geschieht, die an der Oberfläche keine Gemeinsamkeiten aufweisen. Ein solches Lernen lässt sich durch das Modell der theoretischen Abstraktion beschreiben (Davydov 1972, Dreyfus 2012). Für die Verarbeitung multipler Informationsrepräsentationen braucht es diesem Modell zufolge eine erkenntnisleitende theoriebasierte Idee *a priori*, die ein Identifizieren von Analogien in den Tiefenstrukturen der verschiedenen Repräsentationsformen lässt. Wie eine solche für das Lernen mit dynamischen multiplen Repräsentationsumgebungen zu konkretisieren wäre steht noch offen. Bis dato erscheint uns die folgende Formulierung mit Blick auf die vorangegangenen Überlegungen die naheliegendste: Der Analyseauftrag bzw. das Deutungsschema wäre ein Identifizieren des variablen Parameterwerts als strukturanaloge Invariante beim Wechsel zwischen den drei Repräsentationsformen, wobei der algebraischen Repräsentationsform eine deutungsleitende Funktion zukommt.

Literatur

Davydov, V. V. (1972). Über das Verhältnis zwischen abstrakten und konkreten Kenntnissen. In J. Lompscher (Hrsg.), *Probleme der Ausbildung geistiger Handlungen. Neuere Untersuchungen zur Anwendung der Lerntheorien Galperins.* Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag.

Dreyfus, T. (2012). Constructing Abstract Mathematical Knowledge in Context. In Sung Je Cho (Hrsg.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Seoul, South Korea.

Dutke, S. (1994). *Mentale Modelle: Konstrukte des Wissens und Verstehens: kognitionspsychologische Grundlagen für die Software-Ergonomie*. Göttingen: Verlag für Angewandte Psychologie.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization. In F. Hitt & M. Santos (Hrsg.), *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. I, pp. 3–26). Mexico.

Palmer, S. E. (1975). The nature of perceptual representation: An examination of the analog/propositional controversy. In *Proceedings of the 1975 workshop on Theoretical issues in natural language processing* (pp. 151–159). Association for Computational Linguistics.

Pinkernell, G. (2015). Reasoning with dynamically linked multiple representations of functions (pp. 2531–2537). In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9, 4-8 February 2015)* (pp. 2531-2537). Prague, Czech Republic

Schnotz, W., & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representation. *Learning and Instruction*, *13*, 141–156.

Moderierte Sektion:

Visualisierungen mathematischer Konzepte

Karin BINDER, Stefan KRAUSS, Georg BRUCKMAIER, Regensburg

Visualisierung komplexer Bayesianischer Aufgaben

Ärzte und Patienten haben oftmals Schwierigkeiten zu verstehen, was ein positives Testergebnis in der Medizin wirklich bedeutet. Nach einem positiven Testergebnis stellt sich die Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die jeweilige Erkrankung nun tatsächlich vorliegt. Aktuelle Studien aus den USA (Ellis & Brase, 2015) und Deutschland (Prinz et al., 2015) zeigen, dass beispielsweise medizinisches Personal in AIDS-Beratungsstellen oftmals die Auftretenswahrscheinlichkeit einer Erkrankung nach einem positiven Testergebnis nicht korrekt angeben kann. Im vorliegenden Beitrag wird das Design einer Studie vorgestellt, in der untersucht wird, wie Visualisierungen das Verstehen von statistischen Informationen beeinflussen.

Bayesianische Aufgaben: 1-Test-Fall und 2-Test-Fall

Situationen, in denen Ärzte die Prävalenz einer Krankheit mit der Sensitivität und Falsch-Positiv-Rate eines Tests miteinander kombinieren müssen, um die Bedeutung eines Testergebnisses bestimmen zu können, werden auch als *Bayesianische Aufgaben* bezeichnet, die auch in der Schule üblich sind. In der medizinischen Realität sind die Fragestellungen jedoch häufig komplexer, weil oftmals nicht nur *ein* positives Testergebnis (Bayesianischer 1-Test-Fall), sondern *zwei* (oder sogar mehr) positive Testergebnisse für das Vorhandensein einer bestimmten Erkrankung sprechen (Bayesianischer 2-Test-Fall). Nachfolgende Aufgabenstellung illustriert letztere Situation (siehe auch Abb. 1):

> *Brustkrebsfrüherkennung: Wahrscheinlichkeitsversion*
>
> Die Wahrscheinlichkeit, dass eine symptomfreie Frau Brustkrebs hat, beträgt 1 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau ein positives Mammogramm erhält, wenn sie Brustkrebs hat, beträgt 80 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau ein positives Sonogramm erhält, wenn sie Brustkrebs hat, beträgt 95 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau fälschlicherweise ein positives Mammogramm erhält, obwohl sie keinen Brustkrebs hat, beträgt 9,6 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau fälschlicherweise ein positives Sonogramm erhält, obwohl sie keinen Brustkrebs hat, beträgt 7,8 %.
>
> Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau mit positivem Mammogramm und positivem Sonogramm tatsächlich Brustkrebs hat?
>
> *(Lösung: 50,7 %)*

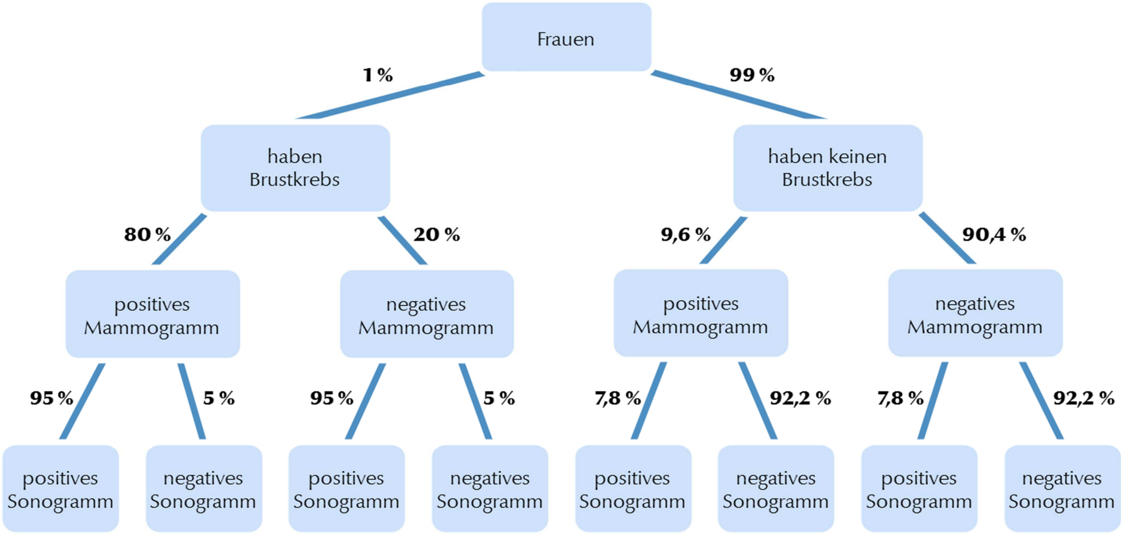


Abbildung 1: Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten

Verschiedene Darstellungsformate und Visualisierungen

Während Menschen bei Bayesianischen Aufgaben mit *Wahrscheinlichkeiten* häufig kognitiven Illusionen unterliegen, die zu schweren Fehlurteilen führen können, werden Bayesianische Aufgaben deutlich häufiger korrekt gelöst, wenn alle statistischen Informationen als *natürliche Häufigkeiten* dargeboten werden (vgl. für den 1-Test-Fall: Gigerenzer & Hoffrage, 1995; vgl. für den 2-Test-Fall: Hoffrage et al., 2015). Die zu voriger Aufgabe analoge Aufgabenstellung mit natürlichen Häufigkeiten statt Wahrscheinlichkeiten lautet wie folgt (siehe auch Abb. 2):

> *Brustkrebsfrüherkennung: Häufigkeitsversion*
>
> 100 von 10.000 symptomfreien Frauen haben Brustkrebs. 80 von 100 Frauen, die Brustkrebs haben, erhalten ein positives Mammogramm. 76 von 80 Frauen, die Brustkrebs haben und ein positives Mammogramm erhalten haben, erhalten ein positives Sonogramm. 950 von 9.900 Frauen, die keinen Brustkrebs haben, erhalten fälschlicherweise dennoch ein positives Mammogramm. 74 von 950 Frauen, die keinen Brustkrebs haben, aber ein positives Mammogramm erhalten haben, erhalten fälschlicherweise dennoch ein positives Sonogramm.
>
> Wie viele der Frauen mit positivem Mammogramm und positivem Sonogramm haben tatsächlich Brustkrebs?

Neben natürlichen Häufigkeiten unterstützt auch die Darbietung bestimmter *Visualisierungen* die Lösungsfindung im Bayesianischen 1-Test-Fall. Dazu zählen beispielsweise Baumdiagramme und Vierfeldertafeln mit natürlichen Häufigkeiten (Binder, Krauss & Bruckmaier, 2015), Einheitsquadrate (Böcherer-Linder, Eichler & Vogel, 2015), ikonische Darstellungen (Brase, 2008) und Rasterdiagramme (Garcia-Retamero & Hoffrage, 2013).

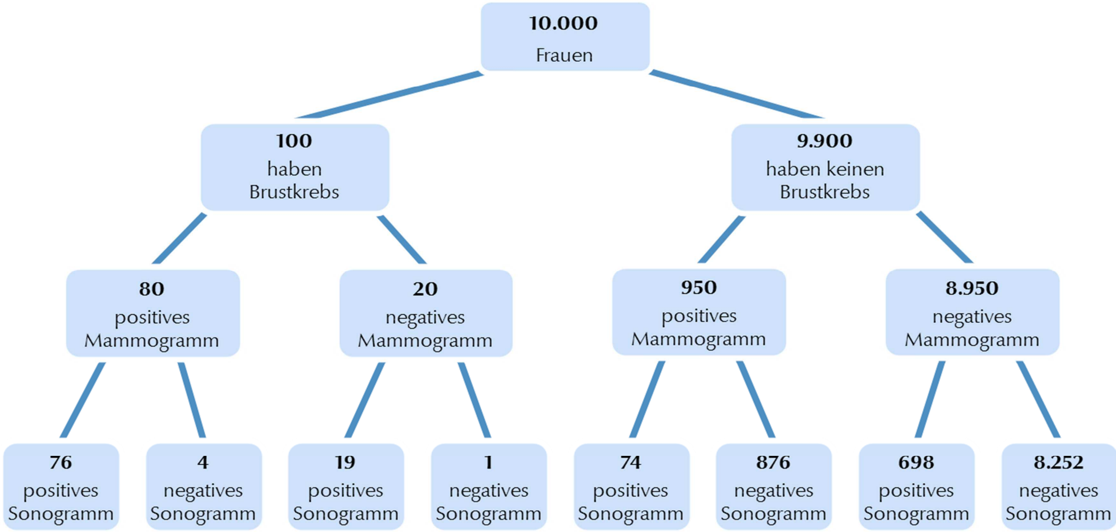


Abbildung 2: Baumdiagramm mit natürlichen Häufigkeiten

Die Darbietung einer Visualisierung muss aber nicht immer mit einer Erhöhung der Lösungsrate einhergehen. Bestimmte Visualisierungen unterstützen die Lösungsfindung nur sehr eingeschränkt, wie zum Beispiel Baumdiagramme und Vierfeldertafeln jeweils mit Wahrscheinlichkeiten (Binder, Krauss & Bruckmaier, 2015, vgl. auch Abb. 1) und Euler-Diagramme (Brase, 2008).

Fragestellung

In der geplanten Studie interessieren wir uns für den Einfluss des Darstellungsformats („Wahrscheinlichkeiten“ vs. „natürlichen Häufigkeiten“) und/oder Visualisierungen durch Baumdiagramme im Bayesianischen 2-Test-Fall (vgl. Abb. 1 und Abb. 2).

Methode

In unserer derzeit laufenden Studie bearbeiten ca. 180 Medizinstudierende je zwei Bayesianische Aufgaben in einem 2×3×2 Design (vgl. Tab. 1).

Tabelle 1: Design der laufenden Studie – 12 resultierende 2-Test-Versionen

Nr.	Format der Informationen	Darstellung der Informationen	Kontext: Brustkrebsfrüherkennung
1	Wahrscheinlichkeit	nur Text	
2		Text und Baum	
3		nur Baum	
4	Natürliche Häufigkeit	nur Text	
5		Text und Baum	
6		nur Baum	

Nr.	Format der Informationen	Darstellung der Informationen	Kontext: HIV-Tests
7	Wahrscheinlichkeit	nur Text	
8		Text und Baum	
9		nur Baum	
10	Natürliche Häufigkeit	nur Text	
11		Text und Baum	
12		nur Baum	

Die Aufgaben unterscheiden sich im *Informationsformat* („Wahrscheinlichkeiten“ vs. „natürliche Häufigkeiten“), in der *Darstellung der statistischen Informationen* („Text ohne Baum“ vs. „Text und Baum“ vs. „Baum ohne Text“) und im *Kontext* („Brustkrebsfrüherkennung“ vs. „HIV-Tests“).

Ausblick

In Kürze wird die Erhebung mit Medizinstudierenden abgeschlossen sein. Außerdem wird eine zweite Teilstudie mit Medizinstudierenden erfolgen, in der untersucht werden soll, welchen Einfluss die zusätzliche Darbietung eines *reduzierten* Baumdiagramms im Vergleich zu einem *vollständigen* Baumdiagramm (siehe Abb. 1 und Abb. 2) hat. In einem reduzierten Baumdiagramm werden nur die beiden Äste (von insgesamt 8 Ästen) dargestellt, die zur Beantwortung der Frage zwingend notwendig sind, alle weiteren Äste werden entfernt. Die erzielten Studienergebnisse sollen dazu beitragen, das Statistikcurriculum insbesondere für Medizinstudierende zu verbessern.

Literatur

Binder, K., Krauss, S. & Bruckmaier, G. (2015). Effects of visualizing statistical information – an empirical study on tree diagrams and 2 × 2 tables. *Frontiers in psychology*, *6*(1186).

Böcherer-Linder, K., Eichler, A. & Vogel, M. (2015). Understanding conditional probability through visualization. In H. Oliveira, A. Henriques, A. P. Canavarro, C. Monteiro, C. Carvalho, J. P. Ponte, R. T. Ferreira & S. Colaço (Eds.), *Proceedings of the International Conference Turning data into knowledge: New opportunities for statistics education. Lisbon, Portugal: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.*

Brase, G. L. (2008). Pictorial representations in statistical reasoning. *Applied Cognitive Psychology*, *23*(3), 369–381.

Ellis, K. M. & Brase, G. (2015). Communicating HIV Results to Low-Risk Individuals: Still Hazy After All These Years. *Current HIV research*, *13*(5), 381–390.

Garcia-Retamero, R. & Hoffrage, U. (2013). Visual representation of statistical information improves diagnostic inferences in doctors and their patients. *Social Science and Medicine*, *83*, 27–33.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review, 102*(4), 684–704.

Hoffrage, U., Krauss, S., Martignon, L. & Gigerenzer, G. (2015). Natural frequencies improve Bayesian reasoning in simple and complex inference tasks. *Frontiers in psychology*, *6*(1473).

Prinz, R., A Feufel, M., Gigerenzer, G. & Wegwarth, O. (2015). What Counselors Tell Low-Risk Clients About HIV Test Performance. *Current HIV research, 13*(5), 369–380.

Katharina BÖCHERER-LINDER, Freiburg; Andreas EICHLER, Kassel; Markus VOGEL, Heidelberg

Empirische Befunde zum Vergleich von Visualisierungen im Bereich der bedingten Wahrscheinlichkeiten

1. Einleitung

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten sind zentral für das Entscheiden unter Unsicherheit. Bespiele hierfür sind die Pränataldiagnostik (Wie würden Sie entscheiden, wenn ein solcher Test positiv ist?), Doping-Tests (Wie ist es zu bewerten, wenn Sportler bei einem positiven Testergebnis beteuern, nicht gedopt zu haben?) oder die Anwendung der DNA-Analyse in der Kriminalistik (Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um den Täter?). Die Schule soll Schülerinnen und Schüler dazu befähigen, „die Phänomene ihrer Lebenswelt zu verstehen“ und „Urteilsfähigkeit zu entwickeln“ (Leitgedanken zum Kompetenzerwerb für Mathematik, Gymnasium, Bildungsplan 2004, Baden-Württemberg). Dies gilt insbesondere für die Urteilsfähigkeit in solchen Situationen der Unsicherheit.

Die psychologische Forschung hat allerdings festgestellt, dass Menschen ganz allgemein Schwierigkeiten beim Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten haben. Hier ist das Forschungsprogramm „heuristics and biases“ (Tversky & Kahneman, 1974) und die Forschungen zur Risikokommunikation (Gigerenzer & Hoffrage, 1995) zu nennen. Die psychologische Forschung hat aber nicht nur diese Schwierigkeiten aufgedeckt und beschrieben, sondern auch Methoden entwickelt, wie der Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten erleichtert werden kann: „frequencies and pictures can improve understanding and performance“ (Brase, 2014, S. 81). „Frequencies“ meint hier natürliche Häufigkeiten und „pictures“ meint die Visualisierung statistischer Information.

Im Folgenden gehen wir der Frage nach, wie die Visualisierung der statistischen Information gestaltet werden kann und welche empirischen Befunde dafür vorliegen.

2. Visualisierung vs. keine Visualisierung

Zunächst gibt es Studien, die den Einfluss von Visualisierung der statistischen Information im Vergleich zu keiner Visualisierung untersuchen. Hierbei ist die statistische Information immer auch in einem Text gegeben und die Visualisierung dient als zusätzliche Hilfe. Wir beschränken uns in unserer Darstellung nur auf solche (Teil-) Studien, die die statistische Information in Form von natürlichen Häufigkeiten geben. In Binder et al. (2015) konnte gezeigt werden, dass sowohl Baumdiagramme als auch Vierfeldertafeln die Performanz signifikant steigern. Sedlmeier und Gigerenzer

(2001) kamen zu ähnlichen Ergebnissen bezogen auf das Baumdiagramm mit natürlichen Häufigkeiten und das Häufigkeitsgitter. In einer Studie von Brase (2014) waren sowohl Piktogramme als auch abstrakte Icon Arrays hilfreich. Insgesamt zeichnet sich ein Konsens ab, dass Visualisierungen basierend auf natürlichen Häufigkeiten günstig sind für die Berechnung und das Verständnis bedingter Wahrscheinlichkeiten.

3. Vergleich verschiedener Visualisierungen

Im Bereich der bedingten Wahrscheinlichkeiten werden verschiedene Visualisierungen eingesetzt. In Figur 1 zeigen wir beispielhaft vier verschiedene Visualisierungen. Weitere Visualisierungen sind das Häufigkeitsgitter (Garcia-Retamero & Hoffrage, 2013), Roulette-wheel-Diagramme (Yamagishi, 2003), Piktogramme und abstrakte Icon-Arrays (Brase, 2014).

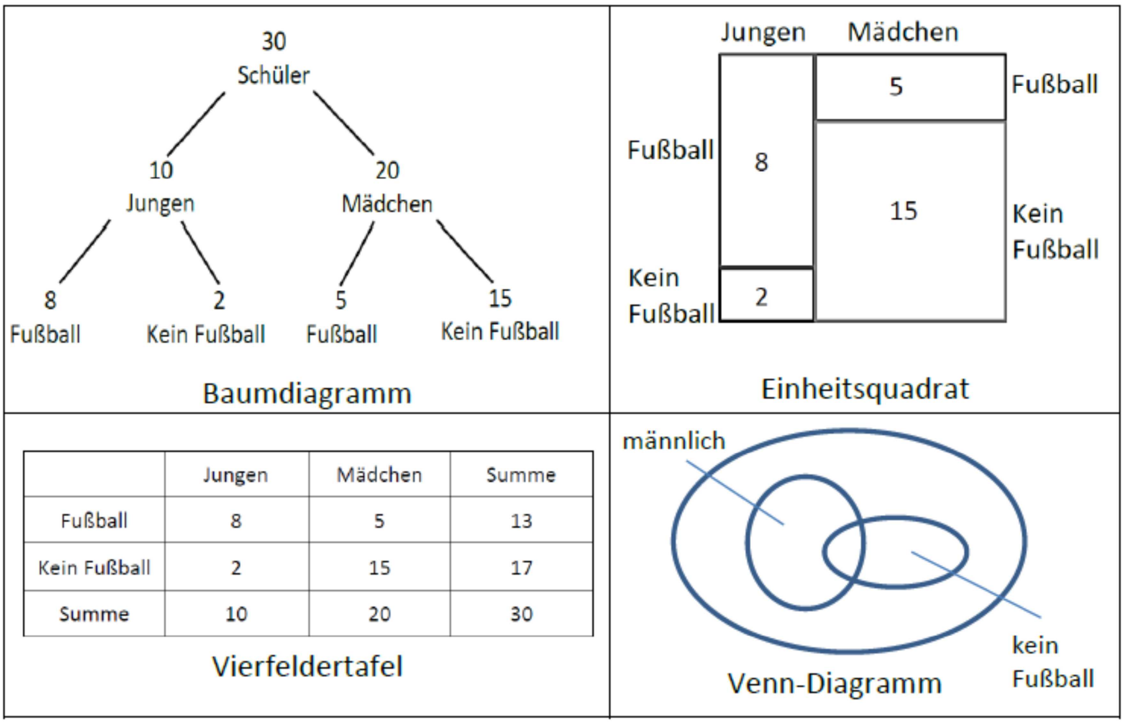


Fig. 1: Verschiedene Visualisierungen

Es stellt sich die Frage, welche Visualisierung besonders geeignet ist, bzw. welche Eigenschaften einer Visualisierung entscheidend sind dafür, die Lösungshäufigkeit für Probleme aus dem Bereich der bedingten Wahrscheinlichkeiten, z.B. Satz von Bayes, zu erhöhen. Von Seiten der Theorie gibt es zwei verschiedene Postulate. Erstens die Theorie der natürlichen Häufigkeiten (*ecological rationality account*, vgl. Cosmides & Tooby, 1996), nach der solche Visualisierungen günstig sind, die den natürlichen Sampling Prozess darstellen. Zweitens die Theorie der verschachtelten Mengen (*nested sets account*, vgl. Barbey & Sloman, 2007), nach der solche Visualisierungen günstig sind, die die Teilmengenstruktur deutlich machen.

Eine Vielzahl von empirischen Studien hat bisher den Effekt zweier oder mehrerer Visualisierungen untersucht und verglichen. Wir beschränken uns in unserem Bericht wiederum nur auf solche (Teil-) Studien, in denen die statistische Information in Form von natürlichen Häufigkeiten gegeben wird. In Brase (2009) erwiesen sich Piktogramme effektiver als Venn-Diagramme. Dabei spielte es keine Rolle, wie die einzelnen Icons angeordnet waren. Dieses Ergebnis wurde durch die Theorie der natürlichen Häufigkeiten erklärt, da wie im natürlichen Sampling Prozess bei Piktogrammen diskrete, zählbare Objekte dargestellt sind. Sirota et al. (2014) hingegen zeigten, dass die Ikonizität der dargestellten Elemente keinen Einfluss hat und interpretierten dieses Ergebnis im Sinne der Theorie der verschachtelten Mengen. In einer Studie von Yamagishi (2003) erwies sich das Roulette-Wheel-Diagramm gegenüber dem Baumdiagramm als überlegen, was wiederum im Sinne der Theorie der verschachtelten Mengen gedeutet wurde. Im Gegensatz dazu zeigte Brase (2014) die Überlegenheit der Piktogramme gegenüber dem Roulette-Wheel-Diagramm, was für die Theorie der natürlichen Häufigkeiten spricht.

4. Forschungsbedarf

Es zeigt sich, dass durch die oben skizzierte Vielzahl an teilweise widersprüchlichen Ergebnissen die Frage nach der „besten“ Visualisierung nicht beantwortet werden konnte. Außerdem bleibt die Frage offen, welche Eigenschaften einer Visualisierung eigentlich entscheidend sind. Diese Frage ist allerdings grundlegend für das Design effektiver Visualisierungen und ist damit von enormer praktischer (wie auch theoretischer) Relevanz.

In unserem Forschungsprojekt („Einfluss von Visualisierung auf den Wissenserwerb im Bereich der bedingten Wahrscheinlichkeiten“), das ein Teil des Forschungs- und Nachwuchskollegs VisDeM an der PH Freiburg ist, gehen wir dieser Frage nach. Wir vergleichen zwei Visualisierungen, die eine sehr unterschiedliche Struktur haben, nämlich das Einheitsquadrat und das Baumdiagramm mit natürlichen Häufigkeiten. Dabei untersuchen wir nicht nur den Effekt auf die Lösungshäufigkeit bei Problemen aus dem Bereich der bedingten Wahrscheinlichkeiten, sondern widmen uns auch der Frage, wie die Effekte zu erklären sind, bzw. welche Eigenschaften der Visualisierungen dafür verantwortlich sind. Hier hat es sich als fruchtbar erwiesen, die Effekte des Auslesens von Information und die Effekte beim Bestimmen von Teilmengenbeziehungen genauer zu untersuchen.

Literatur

Barbey, A. K., & Sloman, S. A. (2007). Base-rate respect: From ecological rationality to dual processes. *The Behavioral and brain sciences*, *30*(3), 241-54.

Binder, K., Krauss, S., & Bruckmaier, G. (2015). Effects of visualizing statistical information - an empirical study on tree diagrams and 2 × 2 tables. *Frontiers in psychology*, *6*, 1186.

Brase, G. L. (2009). Pictorial representations in statistical reasoning. *Applied Cognitive Psychology*, *23*(3), 369–381.

Brase, G. L. (2014). The power of representation and interpretation: Doubling statistical reasoning performance with icons and frequentist interpretations of ambiguous numbers. *Journal of Cognitive Psychology*, *26*(1), 81–97.

Cosmides, L., & Tooby, J. (1996). Are humans good intuitive statisticians after all?: Rethinking some conclusions from the literature on judgment under uncertainty. *Cognition*, *58*(1), 1–73.

Garcia-Retamero, R., & Hoffrage, U. (2013). Visual representation of statistical information improves diagnostic inferences in doctors and their patients. *Social Science & Medicine*, *83*, 27–33.

Gigerenzer, G., & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review*, *102*(4), 684–704.

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.) (2004). Bildungsplan 2004 - Allgemein bildendes Gymnasium. Stuttgart.

Sedlmeier, P., & Gigerenzer, G. (2001). Teaching Bayesian reasoning in less than two hours. *Journal of Experimental Psychology: General*, *130*(3), 380–400.

Sirota, M., Kostovičová, L. & Juanchich, M. (2014). The effect of iconicity of visual displays on statistical reasoning: evidence in favor of the null hypothesis. *Psychonomic bulletin & review*, 21, 961 – 968.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainty: Heuristics and biases. *Science*, *4157*, *185*, 1124 – 1131.

Yamagishi, K. (2003). Facilitating normative judgments of conditional probability: frequency or nested sets? *Experimental psychology*, *50*(2), 97–106.

Julia OLLESCH, Markus VOGEL, Tobias DÖRFLER, Heidelberg

Beurteilung computergestützter Visualisierungen für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I durch angehende Lehrkräfte

Über das Internet sind heutzutage unzählige Plattformen verfügbar, welche Lehrkräften computergestützte Visualisierungen für den Einsatz im Mathematikunterricht fertig zur Verfügung stellen. Nicht alle dieser Computeranwendungen sind für den Unterricht als gleichermaßen geeignet zu beurteilen. Das durch das Land Baden-Württemberg geförderte Heidelberger Forschungsprojekt EKoL10 geht der Frage nach, mit welchen theoretisch fundierten Kriterien eine Beurteilung solcher Anwendungen erfolgen kann und wie diese in einem vignettenbasierten Verfahren der empirischen Forschung zugänglich gemacht werden können. Folgend werden aus multimediatheoretischer Sicht wesentliche Kriterien abgeleitet und die Einarbeitung in computerbasierte Bildschirmvignetten exemplarisch vorgestellt.

Computergestützte Visualisierungen im Mathematikunterricht

Der Einsatz computergestützter Visualisierungen im Mathematikunterricht ist in verschiedenen curricularen Rahmenrichtlinien explizit vorgesehen (z. B. Kultusministerkonferenz, 2012). Obgleich aus diesem Umstand das Postulat eines genuinen Mehrwerts herausgelesen werden kann, ist bisher wenig darüber bekannt an welchen Kriterien sich ein solcher Mehrwert für den Mathematikunterricht bemessen lässt.

In der Mathematikdidaktik wird häufig der Aspekt der dynamisierten Visualisierung von mathematischen Prozessen und Zusammenhängen diskutiert, die dem Ziel dient, die interne mathematische Verarbeitung extern zu unterstützen (vgl. Pinkernell & Vogel, 2016). Speziell die dynamische Verknüpfung mehrerer Darstellungen desselben Sachverhalts kann zu einem höheren Informationsgehalt führen (Kaput, 1989) und die Lernenden bei einem tieferen Verständnis unterstützen (vgl. Ainsworth, 1999). Schnotz und Rasch (2005) zeigen auf, dass dynamische Repräsentationen sowie dynamisch verknüpfte multiple Repräsentationen einen Mehrwert beim Computereinsatz bieten können, jedoch auch negative Lerneffekte möglich sind. So kann die *gegenseitige Ergänzung multimedialer Repräsentationen* ebenso zum sogenannten Split-Attention-Effekt führen (Brünken & Leutner, 2001), der sich ergibt, wenn getrennte Darstellungen mental zu integrieren sind. Eine stark mit diesem Effekt verbundene Gefahr ist die erhöhte kognitive Belastung (*cognitive load*), die durch Einsatz von computergestützten Visualisierungen entstehen kann (Brünken, Plass, & Leutner, 2003).

Computerbasierte Bildschirmvignetten

Inhaltliche Reflexionselemente: Bei der Erstellung der im Folgenden näher erläuterten und exemplarisch vorgestellten Bildschirmvignetten bildeten die Aspekte *cognitive load* und *gegenseitige Ergänzung multimedialer Repräsentationen* die zentralen theoretischen Reflexionselemente bei der mathematisch-inhaltlichen Fokussierung. Es wurden Inhalte aus dem Bereich der Geometrie und der parametrischen Standardfunktionen der Sekundarstufe I aufbereitet. Diese inhaltliche Fokussierung bringt es mit sich, dass im Bereich der Funktionen ausschließlich Aufgabenstellungen zu linearen, quadratischen und trigonometrischen Funktionen betrachtet wurden, wie z. B. das Studium der Wirkung der verschiedenen Parameter bei den genannten elementaren Funktionen. Im Bereich der Geometrie wurden Aufgaben eingearbeitet, wie z. B. die Einführung der Strahlensätze. Allen eingearbeiteten Aufgaben war gemeinsam, dass sie inhaltliche Anforderungen an das stellten, was Roth (2002) *bewegliches Denken* nennt, und im spezifischen Bereich der Funktionen unter dem zentralen Begriff des *funktionalen Denkens* diskutiert wird (z. B. Vollrath & Weigand, 2007).

Medientechnische Realisierung: Die hier vorgestellten Bildschirmvignetten stellen eine spezielle Art von Videovignetten dar, in denen zunächst kurz das Unterrichtssetting mit den am Computer sitzenden Schüler(inne)n zu sehen ist, bevor im unmittelbaren Anschluss der Fokus direkt auf den mathematischen Inhalt eines Bildschirms gerichtet wird, an dem die Schüler(innen) arbeiten. Für eine möglichst praxisnahe Gestaltung wurden bereits erstellte, online verfügbare GeoGebra-Dateien als Grundlage der Vignetten verwendet (Quelle: www.geogebratube.com). Eine Vignette dauert ca. 2 Minuten und stellt jeweils eine bestimmte Unterrichtssituation in den Vordergrund. Anhand der Darstellung der Klassensituation zu Beginn wird deutlich gemacht, dass es sich um eine konkrete Unterrichtssituation handelt und die Schüler(innen) beispielsweise in Partnerarbeit am Computer arbeiten. Während im weiteren Verlauf gänzlich auf den mathematischen Inhalt des Bildschirms fokussiert wird, wie es beispielhaft in Abbildung 2 (Autor der originalen GeoGebra-Datei: Wolfgang Wengler, Aufbereitung als Vignette: Julia Ollesch) zu sehen ist. Dabei wird der unterrichtliche Charakter weiterhin durch ein im Hintergrund zu hörendes Schülergespräch über die jeweilige Computeranwendung unterlegt. Der direkte Fokus auf den mathematischen Bildschirminhalt soll es den Probanden der empirischen Untersuchung ermöglichen, die gezeigte Computeranwendung besser zu erkennen und sich in die Situation der Bearbeitung dieser Anwendung durch die Schüler(innen) schneller hinein versetzen zu können.

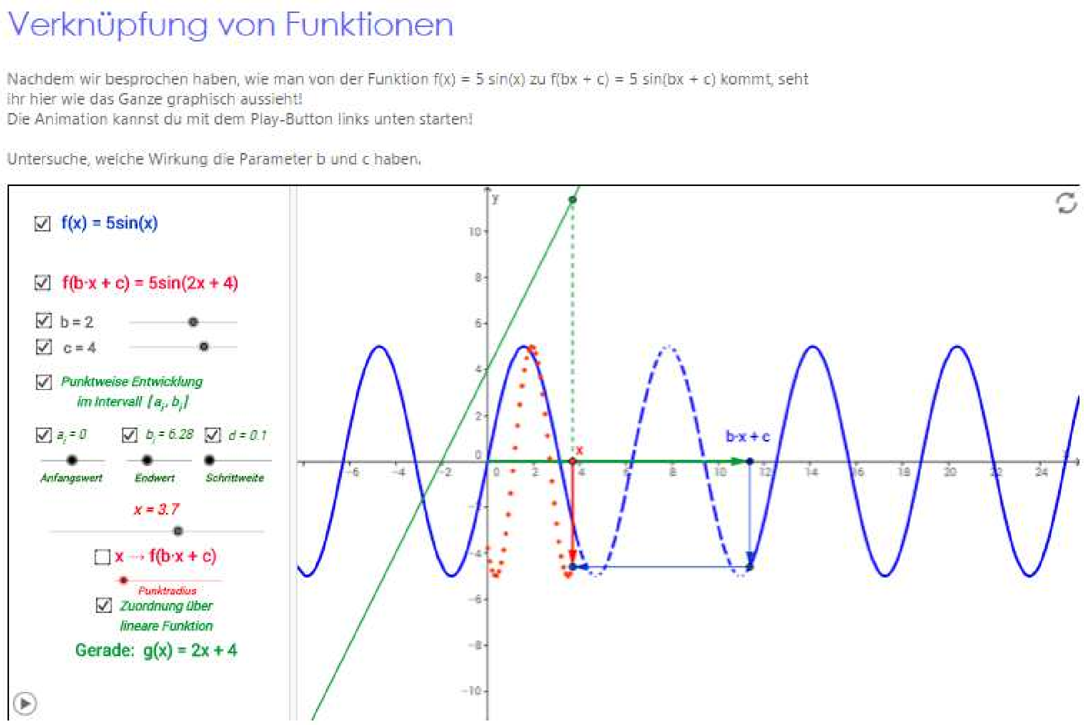


Abbildung 2: Screenshot aus einer Bildschirmvignette

Exemplarische Konkretisierung: Am Beispiel der Abbildung 2 sei eine computerbasierte Bildschirmvignette exemplarisch vorgestellt: Es geht hinsichtlich der Lernenden mathematisch-inhaltlich um das Ziel, den Übergang von f(x) nach f(bx+c) am Beispiel der Sinusfunktion mittels der Computeranwendung zu erläutern. Hierbei wird die rot dargestellte Funktion durch Veränderung von x zu bx+c aus der blau dargestellten Funktion entwickelt. Ebenso kann die rote Funktion über die grün dargestellte lineare Funktion zugeordnet werden. Durch Drücken des Play-Knopfes links unten werden diese Entwicklungen dynamisch abgespielt. Im Algebra-Fenster links sind die zugehörigen Variablen und Funktionsgleichungen zu sehen.

Mit Hilfe dieser Computeranwendung soll im Unterricht die Wirkung der Parameter b und c thematisiert werden, also die Verschiebung des Funktionsgraphen sowie die Streckung entlang der x-Achse. Die darauf basierende Vignette wurde hinsichtlich des Aspektes *cognitive load* erstellt und den Probanden zur Beurteilung präsentiert. Hierfür lagen je 6-7 Items pro Vignette vor, die auf einer 6-stufigen Likert-Skala zu bewerten waren. Die Items fokussieren, wie vorhandene Einzelheiten und Darstellungen im Sinne des Aspektes *cognitive load* zu beurteilen sind. Als Einzelheiten wurden in Abbildung 2 die Zuordnung über lineare Funktion (grün), neuer Funktionsgraph (rot) sowie die algebraisch angegebenen Variablen bezeichnet; als Darstellungen der Funktionsgraph sowie die algebraischen Formeln. Für die Beurteilung wurden die Probanden konkret nach der Notwendigkeit der Einzelheiten und Darstellungen sowie der Ersichtlichkeit der Zusammenhänge zwischen ihnen befragt, beispielsweise durch Items wie *Durch die Einzelheiten wird die Computeranwendung zu komplex.*

Ausblick

Durch eine mehrstufige Expertenbefragung mit Teilnehmern aus verschiedenen an der Lehrerbildung beteiligten Institutionen (Hochschulen, Staatliche Seminare sowie Schulen) wurden die entwickelten Vignetten validiert und die am besten geeigneten für das finale Testinstrument ausgewählt, welches zwischen Juni und Dezember 2015 eingesetzt wurde. Die ersten empirischen Befunde der Studie bestätigen die Validität des Testinstrumentes und sind auch darüber hinaus sehr vielversprechend für die weitere Forschungsarbeit.

Literatur

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. Computers and Education, 33(2-3), 131–152.

Brünken, R., & Leutner, D. (2001). Aufmerksamkeitsverteilung oder Aufmerksamkeitsfokussierung?: Empirische Ergebnisse zur "Split-Attention-Hypothese" beim Lernen mit Multimedia. Unterrichtswissenschaft. (29), 357–366.

Brünken, R., Plass, J. L., & Leutner, D. (2003). Direct Measurement of Cognitive Load in Multimedia Learning. Educational Psychologist, 38(1), 53–61. doi:10.1207/S15326985EP3801_7

Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), Research agenda for mathematics education: Vol. 4. Research issues in the learning and teaching of algebra (pp. 167–194). Hillsdale, NJ, England: Lawrence Erlbaum Associates.

Kultusministerkonferenz. (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Retrieved from http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Pinkernell, G., & Vogel, M. (2016). Zum Einsatz softwarebasierter multipler Repräsentationen von Funktionen im Mathematikunterricht. In G. Heintz, G. Pinkernell, & F. Schacht (Eds.), Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht. Festschrift für Hans-Jürgen Elschenbroich (pp. 231–242).

Roth, J. (2002). Bewegliches Denken – ein wichtiges Prozessziel des Mathematikunterrichts. In W. Peschek (Ed.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2002. Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 25. Februar bis 1. März 2002 in Klagenfurt (pp. 423–426). Hildesheim [u.a.]: Franzbecker.

Schnotz, W., & Rasch, T. (2005). Enabling, facilitating, and inhibiting effects of animations in multimedia learning: Why reduction of cognitive load can have negative results on learning. Educational Technology Research and Development, 53(3), 47–58. doi:10.1007/BF02504797

Vollrath, H.-J., & Weigand, H.-G. (2007). Algebra in der Sekundarstufe (3. Aufl.). Mathematik Primar- und Sekundarstufe. München [u.a.]: Spektrum, Akad. Verl.

Tobias ROLFES, Jürgen ROTH, Wolfgang SCHNOTZ, Landau

Dynamische Visualisierungen beim Lernen mathematischer Konzepte

Bereits seit den Anfängen der Informationstechnologie besteht die Hoffnung, dass computergenerierte dynamische Visualisierungen das Lernen unterstützen und erleichtern können. In den letzten zwei Jahrzehnten wurden daher interaktive Mathematiksoftware (z.B. Dynamische Geometriesysteme, Computeralgebrasysteme) entwickelt, mit denen der Benutzer animierte oder interaktive Repräsentationen gestalten kann.

Theoretischer Hintergrund

Allerdings sind dynamische Visualisierungen nicht prinzipiell lernförderlicher als statische Repräsentationen, wie empirische Studien in unterschiedlichen Inhaltbereichen zeigen (z.B. Mayer, Hegarty, Mayer & Campbell, 2005). Die Gründe für die uneinheitlichen Ergebnisse sind noch nicht ausreichend geklärt und weiterhin umstritten. Gog, Paas, Marcus, Ayres und Sweller (2009) nehmen an, dass dynamische Visualisierungen eine größere Belastung für das Arbeitsgedächtnis darstellen. Diese zusätzliche Belastung könnte die Ursache für einen negativen Lerneffekt sein. Mayer et al. (2005) vermuten, dass die mentale Simulation eines dynamischen Prozesses auf der Grundlage einer statischen Repräsentation lernwirksamer sein könnte als das passive Beobachten einer dynamischen Visualisierung.

Schnotz und Rasch (2008) nehmen an, dass dynamische Visualisierungen lernförderlich sein können, wenn sie Lernprozesse erst ermöglichen oder erheblich erleichtern. Koning und Tabbers (2011) schlagen vor, die Nutzer eine dynamische Visualisierung interaktiv manipulieren zu lassen. Somit könnten die Lernenden die interne Verarbeitung einer dynamischen Visualisierung mit einer *embodied action* verbinden. Das Ziel der im Folgenden dargestellten Studie war, die Wirkung von dynamischen Visualisierungen im Vergleich zu statischen Repräsentationen beim Lernen von mathematischen Inhalten experimentell zu überprüfen.

Methode

An der Laborstudie nahmen N = 157 Schülerinnen und Schüler (88 Achtklässler; 69 Neuntklässler) eines Gymnasiums in Rheinland-Pfalz teil. Der Anteil von Mädchen und Jungen war näherungsweise gleichverteilt (55% Mädchen; 42% Jungen, 3% keine Angaben). Das Durchschnittsalter betrug 14.2 Jahre (SD = 0.66). Aufgrund von Unvollständigkeit wurden die Daten von elf Schülerinnen und Schülern von der Analyse ausgeschlossen.

Um das Nachtest-Ergebnis um weitere Effekte kontrollieren zu können, wurden mehrere Variablen über die Einstellungen und Fähigkeiten der Probanden gesammelt. Fünf Einstellungsskalen der PISA-Erhebung (Ramm et al., 2006), die Skala Figurale Analogie des Kognitiven Fähigkeitstests (Heller & Perleth, 2000), zwei Skalen (Würfelrotation, Figuren zusammensetzen) des I-S-T 2000R (Amthauer, Brocke, Liepmann & Beauducel, 2001) und die Skala des Paperfolding-Tests des ETS (Ekstrom, French, Harman & Derman, 1976) wurden den Probanden vorgelegt. Um die Fähigkeiten der Versuchspersonen im qualitativen Graphenverständnis zu erheben, wurde ein eigener Test mit 22 Items entwickelt ($\alpha = .73$).

Die computerbasierte Lernumgebung bestand aus 19 Lernaufgaben. Der Lerninhalt bestand aus der Auseinandersetzung mit dem Änderungsverhalten von funktionalen Zusammenhängen, d.h. konkret mit dem Zusammenhang zwischen der Bewegung eines Punktes auf dem Dreiecksrand und der Länge der entsprechenden Sehne (vgl. Abb. 1). Durch korrespondierende farbige Markierungen wurden Fokussierungshilfen (Roth, 2005) eingebunden. Außerdem wurden Begründungen und Erläuterungen für die Zusammenhänge angeregt, um eine kognitive Aktivierung zu erzielen (Rolfes, 2014). Der computerbasierte Nachtest ($\alpha = .71$) umfasste 14 Items und erforderte einen Transfer, da das Gelernte auf andere Figuren (rechtwinkliges Dreieck, Fünfeck etc.) angewendet werden musste.

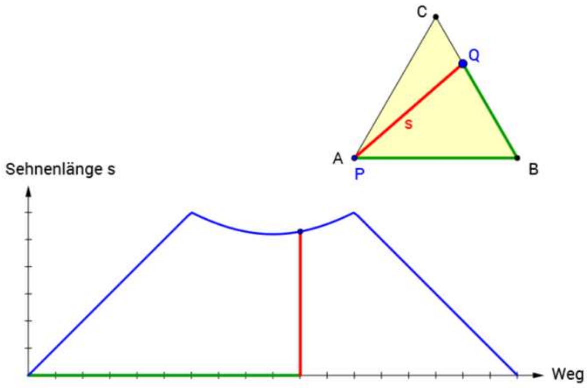


Abbildung 1: **Computergeneriertes Applet der Lernumgebung (nach Roth, 2005)**

Das Experiment hatte ein dreifaktorielles Posttest-Only Design, bei dem die Versuchspersonen zufällig einer Experimentalgruppe zugeordnet wurden. In der Lernumgebung wurden die Lernaufgaben mit zwei unterschiedlichen Formen von dynamischen Visualisierungen dargeboten. In einer animierten Variante konnten die Probanden eine Animation abspielen und die Bewegung des Punktes auf dem Dreieck und die Auswirkung auf die Länge der Dreieckssehne beobachten. In einer interaktiven Variante bestand die Möglichkeit, den Punkt mit der Maus auf der Dreieckslinie zu bewegen und die Auswirkung dieser manuellen Manipulation auf die Dreieckssehne zu analysieren. Die dritte Experimentalgruppe lernte mit statischen Repräsentationen und musste die Bewegung des Punktes eigenständig mental vollziehen.

Ergebnis

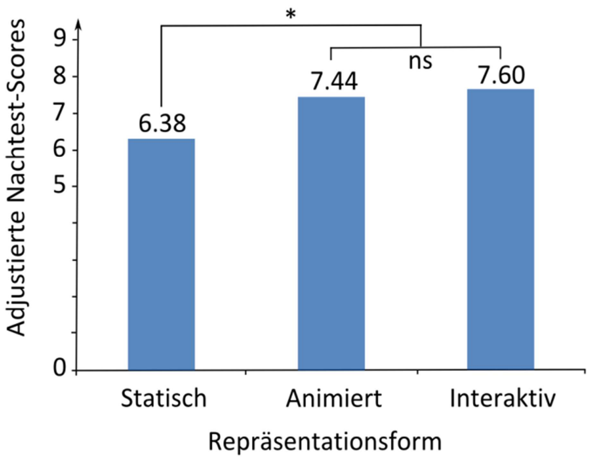


Abbildung 2: **Adjustierte Nachtest-Scores der Experimentalgruppen mit statischen Repräsentationen (*n* = 52), animierten Repräsentationen (*n* = 50) und interaktiven Repräsentationen (*n* = 44).**

Da alle Kovariaten und die Nachtest-Scores unabhängig und die Regressionslopes homogen über die Experimentalgruppen waren, waren die Voraussetzungen für die Durchführung einer ANCOVA erfüllt. Die Kovariaten *Qualitatives Graphenverständnis*, [F(1, 135) = 14.38, $p < .001$, partielles $\eta^2 = .10$], *Interesse an Mathematik,* [F(1, 135) = 12.94, $p < .001$, partielles $\eta^2 = .09$], und *Räumliches Vorstellungsvermögen* [F(1, 135) = 5.50, $p < .05$, partielles $\eta^2 = .04$], hatten einen signifikanten Einfluss auf das Nachtestergebnis. Lediglich marginal signifikanten Einfluss auf das Nachtestergebnis hatten die Kovariaten *Einstellung zum Computer* [F(1, 135) = 3.56, $p < .10$] und *kognitive Fähigkeiten*, [F(1, 135) = 3.03, $p < .10$]. Bei den drei Kovariaten *Computer-Kontrollüberzeugungen* [F(1, 135) = 2.37, $p = .13$], *Mathematikangst*, [F(1, 135) = 1.61, $p = .20$] und *Selbstwirksamkeit in Mathematik*, [F(1, 135) = 1.35, $p = .25$], bestand kein signifikanter Zusammenhang zum Nachtestergebnis.

Nach der Adjustierung des Nachtest-Scores durch die Kovariaten blieb ein signifikanter Effekt für die Repräsentationsform, $F(2, 135) = 3.59$, $p < .05$, partielles $\eta^2 = .05$. In einer anschließenden Kontrastanalyse (vgl. Abb. 2) zeigte sich, dass animierte oder interaktive Repräsentationen signifikant lernwirksamer waren als statische Repräsentationen, $t(135) = 2.67$, $p < .01$, $r = .22$. Zwischen animierten und interaktiven Repräsentationen bestand jedoch kein signifikanter Unterschied, $t(135) = 0.318$, $p = .75$, $r = .03$.

Diskussion

Die eingesetzte Lernumgebung war mit der Zielsetzung gestaltet, dass mit Hilfe der dynamischen Visualisierung eine Lernhürde überwunden werden konnte, d.h. die mentale Vorstellung eines sich bewegenden Punktes auf einer Figur und die Vorstellung der zugehörigen Sehnenlänge. Daher scheinen die vorliegenden empirischen Befunde die These zu unterstützen, dass dynamische Visualisierungen lernförderlich sein können, wenn sie den Lernprozess ermöglichen oder erheblich erleichtern. Die Vermutung, dass Embodiment einen zusätzlichen positiven Effekt haben kann, konnte allerdings nicht nachgewiesen werden.

Um die Evidenz für die Lerneffektivität von dynamischen Visualisierungen beim Mathematiklernen zu verbreitern, wären weitere Experimente zum Lernen dynamischer mathematischer Konzepte mit Hilfe dynamischer Visualisierungen wünschenswert. Beispielsweise erscheint es vor dem Hintergrund der vorliegenden Ergebnisse plausibel, dass dynamische Visualisierungen das Verständnis des Grenzwertprozesses bei der Ableitung oder dem Integral unterstützen könnten. Auch im Bereich der Statistik bzw. Stochastik könnten dynamische Visualisierungen förderlich für das Verständnis z.B. des Gesetzes der großen Zahlen oder des Zentralen Grenzwertsatzes sein, da es sich ebenfalls um mathematische Inhalte handelt, die auf mentalen Vorstellungen von dynamischen Prozessen beruhen.

Literatur

Amthauer, R., Brocke, B., Liepmann, D., & Beauducel, A. (2001). *I-S-T 2000 R - Intelligenz-Struktur-Test 2000 R*. Göttingen: Hogrefe.

Ekstrom, R. B., French, J. W., Harman, H. H., & Derman, D. (1976). *Manual for kit of factor-referenced cognitive tests*. Princton, NJ: ETS.

Gog, T., Paas, F., Marcus, N., Ayres, P. & Sweller, J. (2009). The mirror neuron system and observational learning: Implications for the effectiveness of dynamic visualizations. *Educational Psychology Review*, 21 (1), 21–30.

Heller, K. A., & Perleth, C. (2000). *KFT 4-12+R - Kognitiver Fähigkeits-Test für 4. bis 12. Klassen. Revision*. Göttingen: Beltz.

Koning, B. B., & Tabbers, H. K. (2011). Facilitating understanding of movements in dynamic visualizations: an embodied perspective. *Educational Psychology Review*, 23 (4), 501–521.

Mayer, R. E., Hegarty, M., Mayer, S., & Campbell, J. (2005). When static media promote active learning: Annotated illustrations versus narrated animations in multimedia instruction. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, 11 (4), 256–265.

Ramm, G., Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W., Lehmann, R., Leutner, D., . . . Schiefele, U. (2006). *PISA 2003: Dokumentation der Erhebungsinstrumente*. Münster: Waxmann.

Rolfes, T. (2014). Begriffsbildungsprozesse bei funktionalen Zusammenhängen: Wie lernförderlich sind externe dynamische Repräsentationen? In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 987–990). Münster: WTM.

Roth, J. (2005). *Bewegliches Denken im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.

Schnotz, W., & Rasch, T. (2008). Functions of animation in comprehension and learning. In R. Lowe & W. Schnotz (Hrsg.), *Learning with animation. Research implications for design* (S. 92–113). Cambridge, England: Cambridge University Press.

Teil 4:
Posterbeiträge

Sebastian KUNTZE, Marita FRIESEN, Ludwigsburg

Kriterienbezogene Awareness und professionelles Wissen als Voraussetzung für Noticing und Analysekompetenz

Expertise von Mathematiklehrkräften wird in einer wachsenden Zahl aktueller Studien über Ansätze beschrieben, bei denen die Nutzung professionellen Wissens (z.B. Kuntze, 2012) in Situationskontexten im Vordergrund steht (z.B. Kersting et al., 2012; Sherin et al., 2011). Dabei werden Konstrukte wie „Usable Knowledge“ (Kersting et al., 2012) oder „Noticing“ im Sinne eines „knowledge-based reasoning“ (Sherin et al., 2011) zentral. Diesen Ansätzen ist gemeinsam, dass sie sich diesen Expertisemerkmalen aus phänomenologischer Perspektive nähern, d.h. dass beschrieben wird, was Lehrkräfte wahrnehmen bzw. auf welches Wissen sie bei der Interpretation von Unterrichtssituationen oder etwa der Beschreibung von Handlungsalternativen zurückgreifen. Ausgehend von solchen Beobachtungen, wie Lehrkräfte mit Unterrichtssituationen umgehen, werden dann oft Folgerungen gezogen: bereits der Begriff „Usable Knowledge“ suggeriert etwa, dass nur das Wissen, auf das Lehrkräfte zurückgegriffen hatten, wirklich „nutzbar“ ist. Blickt man vorsichtiger auf die Ergebnisse, sollte evtl. vielmehr von „Knowledge used by teachers“ gesprochen werden. Vor dem Hintergrund dieser Bedeutungsdiskrepanz stellt sich die Frage, wodurch Noticing bzw. die wissensbasierte Analyse relevanter Beobachtungen ausgelöst wird und welche Bedeutung professionelles Wissen für diese Prozesse hat. Es zeigt sich also ein Bedarf an Überlegungen oder Modellierungen, wie Mathematiklehrkräfte auf Wissen und Überzeugungen zurückgreifen, wenn sie mit Unterrichtssituationen konfrontiert werden und wie wissensbasierte Deutungen zustande kommen. Im Folgenden wird daher ein Modell für diese Prozesse angesprochen, das sich als Arbeitsmodell im Projekt ANAKONDA-M bewährt hat und das Analysieren von Unterrichtssituationen durch Mathematiklehrkräfte als einen wissensbasierten kreislaufartigen Vorgang beschreibt. Das vorgestellte Prozessmodell kann nicht zuletzt helfen, Ergebnisse phänomenologischer Studien zu deuten.

Wir gehen dabei exemplarisch von unserer Forschung zum wissensbasierten Analysieren aus (z.B. Kuntze, Dreher & Friesen, im Druck), das wir als *„an awareness-driven, knowledge-based process which connects the subject of analysis with relevant criterion knowledge and is marked by criteria-based explanation and argumentation“* (Kuntze et al., im Druck) sehen. Analyseprozesse werden also maßgeblich durch eine kriterien- d.h. wissensbasierte Achtsamkeit („Awareness“) ausgelöst und gesteuert. Awareness bezieht sich auf Elemente professionellen Wissens, wir haben dieses Konstrukt in Kuntze & Dreher (2015, S. 298) folgendermaßen beschrieben: „awareness of certain elements of professional knowledge [is] a part of professional knowledge which influences the readiness and ability of teachers to use this professional knowledge element in instruction-related contexts“. Awareness erschließt damit gewissermaßen professionelle Wissensbestände, so dass diese beispielsweise in Analyseprozessen genutzt werden können. Dies kann auch anhand des Modells in Abbildung 1 verdeutlicht werden.

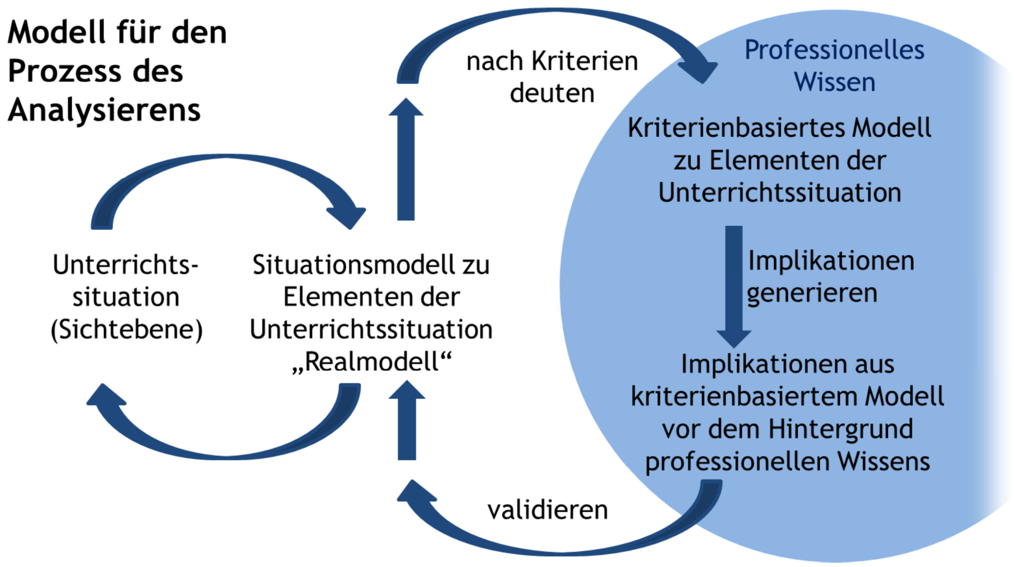


Abb. 1: Interpretieren und Analysieren von Unterrichtssituationen

In Abbildung 1 ist der Analyseprozess als ständiger Kreislauf des wissens- und kriterienbasierten Deutens dargestellt. Kriterienbasierte Awareness spielt – einem „Stand-By“ bezogen auf bestimmtes Kriterienwissen vergleichbar – eine Schlüsselrolle dabei, bezüglich welcher Kriterien und mit welchen Wissensbezügen intensivierte Analyseaktivitäten in Gang kommen.

Literatur

Kersting, N., Givvin, K., Thompson, B., Santagata, R., & Stigler, J. (2012). Measuring Usable Knowledge: Teachers' Analyses of Mathematics Classroom Videos Predict Teaching Quality and Student Learning. Am. Educ. Research Journal, 49(3), 568–589.

Kuntze, S. (2012). Pedagogical content beliefs: global, content domain-related and situation-specific components. Educational Studies in Mathematics, 79(2), 273-292.

Kuntze, S. & Dreher, A. (2015). PCK and the awareness of affective aspects reflected in teachers’ views about learning opportunities – a conflict? In B.Pepin & B.Rösken-Winter (Eds.) From beliefs and affect to dynamic systems: (exploring) a mosaic of relationships and interactions (pp. 295-318). Springer.

Kuntze, S., Dreher, A., & Friesen, M. (2015, in press). Teachers’ resources in analysing mathematical content and classroom situations. CERME 2015.

Sherin, M., Jacobs, V., Philipp, R. (2011). Mathematics Teacher Noticing. Seeing Through Teachers’ Eyes. New York: Routledge.

Nadine BÖHME, Erfurt

Zusammenhang von Beliefs und ausgewählten lernrelevanten Merkmalen von Mathematikstudierenden im ersten Semester

Überzeugungen sind Teil professioneller Handlungskompetenz von Lehrkräften (Baumert & Kunter, 2006). Bezogen auf die Mathematiklehrkräfte spielt die Unterscheidung zwischen epistemologischen Überzeugungen, die sich auf die Struktur von Wissensbeständen beziehen, und epistemologischen Überzeugungen, die sich auf den Erwerb mathematischen Wissens beziehen, eine entscheidende Rolle (Felbrich, Schmotz & Kaiser, 2010). Im Rahmen dieses Beitrags werden die Überzeugungen zur Struktur mathematischen Wissens näher betrachtet. Schmotz und Blömeke (2009) zeigten, dass eine dynamische Perspektive im Gegensatz zu einer statischen Perspektive eher mit höherem mathematischem Wissen einhergeht. Es finden sich demnach Zusammenhänge zwischen den Überzeugungen von Lehrkräften und weiteren Lernendenmerkmalen wie dem Fachwissen. Nach dem Modell zum Einfluss epistemologischer Theorien auf das Lernen in der Schule (Hofer, 2001) wirken die epistemologischen Überzeugungen der Lehrkräfte über die Unterrichtstätigkeit auf die Überzeugungen der SchülerInnen, die wiederum über die Lernmotivation und die Lernstrategien das Lernergebnis beeinflussen. Da es sich bei Lehramtsstudierenden auch um Lernende handelt, wurde sich im Rahmen der Studie folgende Frage gestellt: Inwieweit zeigen sich Zusammenhänge zwischen dem Leistungstestergebnis, den epistemologischen Überzeugungen zur Struktur der Mathematik, dem Studieninteresse und den mathematischen Lernstrategien bei angehenden Lehrpersonen für die Sekundarstufe I? Als Instrumente kamen der Fragebogen zum Studieninteresse in Bezug auf Mathematik (Schiefele, Krapp, Wild & Winteler, 1993), der LIST in Bezug auf Mathematik (Wild & Schiefele, 1994), die Skala zu den Epistemologischen Überzeugungen zur Natur der Mathematik (Laschke & Blömeke, 2013) und ein von der Autorin konstruierter Leistungstest zu schulmathematischen Themen zum Einsatz.

Um die Forschungsfrage beantworten zu können, wurden folgende Hypothesen aufgestellt:

1. Es zeigt sich ein positiver Zusammenhang zwischen einer statischen Sicht auf Mathematik und der Angabe der Verwendung von Oberflächenlernstrategien.
2. Es zeigt sich ein positiver Zusammenhang zwischen der dynamischen Sicht auf Mathematik und der Angabe der Verwendung von Tiefenlernstrategien.
3. Es zeigt sich kein Zusammenhang zwischen der Sicht auf Mathematik und dem Leistungstestergebnis.

4. Es zeigt sich ein positiver Zusammenhang zwischen der dynamischen Sicht auf Mathematik und dem Studieninteresse.
5. Es zeigt sich ein positiver Zusammenhang zwischen der Angabe der Verwendung von Tiefenlernstrategien und dem Leistungstestergebnis.
6. Es zeigt sich ein positiver Zusammenhang zwischen dem Studieninteresse und dem Leistungstestergebnis.

Die aufgestellten Hypothesen konnten alle im Rahmen der Studie, die mit 45 Studierenden in der zweiten Hälfte des ersten Bachelorsemesters an der Universität Erfurt durchgeführt wurde, bestätigt werden. Eine statische Sichtweise korrelierte positiv mit der Wiederholung (r=.35**) als Oberflächenstrategie (Hypothese 1). Es zeigte sich gemäß Hypothese 2 ein positiver Zusammenhang zwischen einer dynamischen Sichtweise und Tiefenlernstrategien (kritisches Prüfen (r=.47**) und Zusammenhänge herstellen (r=.46**)). Gerade die genannten Tiefenlernstrategien korrelierten wiederum signifikant positiv mit dem Leistungstestergebnis mit mittlerer Effektstärke (Hypothese 5). Ein direkter Zusammenhang zwischen der Sicht auf Mathematik und dem Leistungstestergebnis wurde nicht gefunden (Hypothese 3), was aber auch nach dem Modell von Hofer (2001) nicht zu erwarten war. Es zeigten sich auch positive Zusammenhänge zwischen dem Studieninteresse und einer dynamischen Sichtweise (Hypothese 4) sowie dem Studieninteresse und dem Leistungstestergebnis (Hypothese 6) mit mittlerer bis hoher Effektstärke. Die Ergebnisse können als Indiz für die Übertragbarkeit von Hofers Modell auf Studierende betrachtet werden. Des Weiteren unterstreichen sie die Wichtigkeit von Ansätzen zur Veränderung der Überzeugungen von Studierenden durch den Zusammenhang mit anderen lernrelevanten Konstrukten.

Literatur

Hofer, B. K. (2001). Personal epistemology research: Implications for learning and transfer. *Educational Psychology Review*, 13, 353-383.

Felbrich, A., Schmotz, C. & Kaiser, G. (2010). Überzeugungen angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. In S. Blömeke; G. Kaiser & R. Lehmann (Hrsg), *TEDS-M 2008 – Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich* (S. 297-326). Münster: Waxmann.

Nils BUCHHOLTZ, Hamburg, Sebastian SCHORCHT, Gießen

Erste Ergebnisse aus ÜberLeGMa – Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zur Geschichte der Mathematik

In einer gemeinsamen Studie der Universität Hamburg und der Justus-Liebig-Universität Gießen wurden die Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zur Geschichte der Mathematik (ÜberLeGMa) untersucht (Buchholtz & Schorcht, 2014). Leitende Forschungsfragen der Studie waren:

1. Welche Überzeugungen haben Lehramtsstudierende zur Mathematik, zur Geschichte der Mathematik und zum Lehren und Lernen geschichtlicher Bezüge im MU?
2. Wie hängen Überzeugungen zur Mathematik und zur Geschichte der Mathematik miteinander zusammen?

Unter Bezug auf empirische Forschungsarbeiten zu Beliefs (Grigutsch et al., 1998) und empirischen sowie theoretischen Arbeiten zu Überzeugungen zur Geschichte der Mathematik (Fauvel & van Maanen, 2000; Jankvist, 2009; Alpaslan et al., 2014; Tzanakis & Arcavi, 2000) wurde ein Online-Fragebogen mit der Software Questback entwickelt, mit dem im SS 2015 und im WS 2015/16 die Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zu verschiedenen Aspekten geschichtlicher Bezüge in der Mathematik erhoben wurden.

An der Studie nahmen 141 Lehramtsstudierende mit mehrheitlich Primarstufen- und Sekundarstufen I-Lehrbefähigung teil, die durchschnittlich im 6. Semester studierten. 21 % der Stichprobe waren männlich, 79 % weiblich, das Durchschnittsalter betrug 24,3 Jahre.

Die Daten der Hauptstudie wurden mit Hilfe von konfirmatorischen Faktorenanalysen (CFA) auf zugrundeliegende Faktoren untersucht. Für den Bereich der Überzeugungen zur Mathematik konnte die auf der Basis von Grigutsch et al. (1998) angenommene 4-Faktoren Lösung (Formalismus, Anwendung, Prozess, Schematische Orientierung) bestätigt werden. Für den Bereich der Überzeugungen zur Geschichte der Mathematik konnte die in Schorcht & Buchholtz (2015) auf Grundlage der Pilotierungsstudie angenommene Faktorlösung mit 5 Faktoren bestätigt werden, die unterschiedliche Sichtweisen differenziert (χ^2/df = 1.32; CFI = 0.91; RMSEA = 0.04). Unterschieden werden konnte eine statische Sicht („*In Zukunft werden keine grundlegend neuen mathematischen Erkenntnisse mehr entdeckt.*“), eine lebensweltliche Sicht („*Die Geschichte der Mathematik verdeutlicht, welchen hohen Alltagsnutzen die Mathematik für die Menschen hat.*“), eine prozesshafte Sicht („*Die Geschichte der Mathematik zeigt uns, dass mathematische Erkenntnisse ständig hinterfragt werden müssen.*“), eine Protagonisten Sicht („*Die Geschichte der Mathematik zeigt uns das Wirken* *besonderer Persönlichkeiten.*“), sowie eine perfektionistische Sicht („*Geschichte der Mathematik bezeugt die Entwicklung mathematischer Ideen hin zu einer perfekten Mathematik.*“).

Erste Ergebnisse der Studie zeigen, dass sich die differenzierte Struktur der Überzeugungen zur Geschichte der Mathematik auch in einer z.T. sehr unterschiedlichen Höhe der Ausprägungen niederschlägt. Die prozesshafte und die statische Sichtweise hängen negativ miteinander zusammen, wohingegen die Protagonisten Sicht, die lebensweltliche Sicht und die perfektionistische Sicht ein positives Zusammenhangsgefüge ergeben.

Des Weiteren lassen sich Zusammenhänge zwischen Überzeugungen zur Mathematik und Überzeugungen zur Geschichte der Mathematik identifizieren. Dynamische Überzeugungen zur Mathematik (Anwendung, Prozess) hängen positiv mit lebensweltlichen und dynamischen Überzeugungen zur Geschichte der Mathematik zusammen. Formalistische Überzeugungen zur Mathematik hängen positiv mit perfektionistischen Überzeugungen zur Geschichte der Mathematik zusammen, nicht jedoch mit statischen.

Literatur

Alpaslan, M., Işıksal, M. & Haser, C. (2014). Pre-service Mathematics Teachers' knowledge of History of Mathematics and Their Attitudes and Beliefs Towards Using History of Mathematics in Mathematics Education. *Science & Education*, *23*, 159-183.

Buchholtz, N. & Schorcht, S. (2014). Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zur Geschichte der Mathematik. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1341-1343). Münster: WTM-Verlag.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.) (2000). *History in mathematics education—The ICMI study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19*(1), 3–45.

Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education – The ICMI study* (S. 201–240). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Jankvist, U.T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *71*, 235–261.

Schorcht, S. & Buchholtz, N. (2015). Ergebnisse einer Pilotstudie zu Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zur Geschichte der Mathematik. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. 1150-1151). Münster: WTM-Verlag.

Barbara DROLLINGER-VETTER, Kathleen PHILIPP, Alex BUFF, Zürich

Fachdidaktisches Wissen und Motivation: Das Thema «Wahrscheinlichkeit» in der Ausbildung von Lehrerinnen und Lehrern der Primarstufe

Im vom Schweizerischen Nationalfonds (SNF) geförderten Forschungsprojekt wird untersucht, welche Unterrichtssettings sich zum Erwerb fachdidaktischen Wissens zum Thema «Wahrscheinlichkeit» in der Ausbildung von Lehrpersonen der Primarstufe unter Berücksichtigung ihrer Motivation besonders eignen.

Ziel des Projekts

Ziel ist die Klärung der folgenden Frage: Mit welchen Unterrichtssettings könnte das Thema «Wahrscheinlichkeit» in der Ausbildung von Lehrpersonen der Primarstufe (1. bis 6. Klasse) so vermittelt werden, dass möglichst viele Studierende unter Berücksichtigung ihrer motivationalen Voraussetzungen möglichst viel profitieren?

Hintergrund des Projekts

Fachdidaktisches Wissen von Lehrpersonen ist für den Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler zentral (z.B. Baumert et al., 2010). Das Thema «Wahrscheinlichkeit» gehört in der Deutschschweiz neu zum Stoff der Primarstufe. Allerdings wird in der Literatur betont, dass es ein schwieriges Thema und nicht einfach zu unterrichten sei (z.B. Batanero & Diaz, 2012; vgl. auch die Überblicksartikel Jones et al., 2007; Shaughnessy, 1992).Weltweit gibt es erst verhältnismäßig wenig Wissen dazu, wie mit dem Thema «Wahrscheinlichkeit» im Unterricht der Primarstufe umgegangen werden soll, und noch weniger dazu, wie das Thema in der Ausbildung von Lehrpersonen der Primarstufe erfolgreich vermittelt werden kann (vgl. z.B. Stohl, 2005). Neben der Qualität des unterrichtlichen Angebots in der Ausbildung spielt für den Lernerfolg jedoch auch die Motivation der angehenden Lehrpersonen eine wichtige Rolle. Mehr darüber zu wissen, ist im Projekt eine wichtige Grundlage, um beurteilen zu können, in welchen Unterrichtssettings «möglichst viele Studierende möglichst viel profitieren».

Anlage des Projekts

Beim Projekt handelt es sich um eine experimentelle längsschnittliche Feldstudie mit vier Messzeitpunkten. Dieser Art von Studien wird hohe interne und externe Validität zugeschrieben (Bortz & Döring, 2006).

Die Zuordnung der Studierenden zu den einzelnen Unterrichtssettings erfolgt zufällig. Der entscheidende Vorteil einer zufälligen Zuordnung besteht darin, dass sich bei den Erhebungen nicht berücksichtigte Einflussfaktoren mit großer Wahrscheinlichkeit gleichmäßig auf die verschiedenen Gruppen verteilen.

Das Forschungsprojekt ist als Vollerhebung angelegt. Es nehmen alle Studierenden der Primarstufe im Jahr 2015 bzw. 2016 teil (2015: $N = 241$; 2016: $N \approx 260$). Die zweimalige Durchführung 2015 und 2016 ermöglicht a) die Prüfung der Replizierbarkeit von Befunden und führt b) insgesamt zu einer Stichprobengröße, die Analyseverfahren zulässt, welche größere Probandenzahlen erfordern (latente Modellierungen).

Design des Projekts

Das Design des Projekts ist in Abbildung 1 dargestellt.

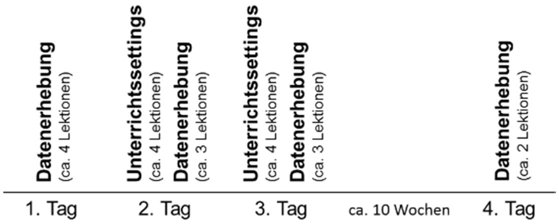


Abbildung 1: Projektdesign.

Bei den Datenerhebungen werden insbesondere das fachdidaktische Wissen zur Wahrscheinlichkeit und die Motivation erhoben.

Literatur

Batanero, C. & Diaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics, 3* (1), 3–13.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A. et al. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom and student progress. *American Educational Research Journal, 47* (1), 133–180.

Bortz, J. & Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler* (4. Auflage). Heidelberg: Springer.

Jones, G.A., Langrall, C.W. & Mooney, E.S. (2007). Research in probability. Responding to classroom realities. In F.K. Lester (Hrsg.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 909–955). Charlotte, NC: Information Age Publishing/NCTM.

Shaughnessy, J.M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D.A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 465–494). New York: Macmillan.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. In G.A. Jones (Hrsg.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (S. 345–366). New York: Springer.

Nora FELDT-CAESAR, Ulrike RODER, Darmstadt

Digitale Testinstrumente zur Diagnose von Grundwissen und Grundkönnen für die Sek. II

Gerade an den Übergängen des Bildungssystems kommen der Diagnose und Förderung von grundlegendem Wissen und Können besondere Bedeutung zu, denn geeignete Diagnose- und Fördermaßnahmen können dazu beitragen, bei allen Lernenden die Grundlagen für ein erfolgreiches Weiterlernen bereitzustellen. Im Rahmen zweier Dissertationsprojekte an der TU Darmstadt wurden digitale Testinstrumente zur Diagnose von Grundwissen und Grundkönnen entwickelt. An der Entwicklung von entsprechenden Fördermaterialien wird derzeit gearbeitet (vgl. hierzu Roder in diesem Band).

Was wird unter Grundwissen und Grundkönnen verstanden?

Als Mathematisches Grundwissen und Grundkönnen bezeichnen wir jene mathematischen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten, die bei allen Schülerinnen und Schülern am Ende der beiden Sekundarstufen in Form von Begriffen, Zusammenhängen und Verfahren langfristig und situationsunabhängig, das heißt insbesondere ohne den Einsatz von Hilfsmitteln, verfügbar sein sollen (Feldt, 2013).

Adaptivität des Testverfahrens

Die entwickelten Diagnoseinstrumente verwenden an verschiedenen Stellen adaptive Elementarisierungen auf inhaltlicher Ebene (Feldt-Caesar, 2015). Hierbei durchlaufen alle Lernende zunächst eine Hauptlinie von Testaufgaben, in denen Inhalte und Handlungen auch in kombinierter Form überprüft werden. Die notwendigen Verknüpfungen verschiedener elementarer Inhalte und Handlungen erfordern im Sinne eines *intelligentem Wissens* (Weinert, 2001) vergleichsweise hohe Aneignungsqualitäten der einzelnen Kenntnisse (vgl. hierzu Feldt, 2013). Zugleich kann auf diese Weise der sogenannten *Inhalt-Testzeit-Problematik* begegnet werden, die gerade an den Übergängen entsteht, wenn ein breiter Inhaltsbereich in einem zeitlich begrenzten Test abgebildet werden soll. Um dennoch eventuelle Defizite auch auf elementarer Ebene möglichst präzise lokalisieren zu können, wird der Lernende im Falle eines Fehlers in einer der Hauptlinienaufgaben in eine sogenannte *elementarisierende Schleife* geleitet, in der die zum Lösen der Hauptlinienaufgabe notwendigen Teilkenntnisse isoliert überprüft werden. Nach der Bearbeitung der elementarisierenden Schleifenaufgaben wird der Lernende zurück auf die Hauptlinie geleitet, wo er mit der Bearbeitung der nächsten regulären Aufgabe fortfährt. Auf diese Weise entstehen beim Elementarisierenden Testen individuelle Itempfade, die eine effiziente Nutzung der Testzeit ermöglichen.

Automatisiertes Schüler- und Lehrerfeedback

Lernende erhalten nach Abschluss des Tests unmittelbar ein individuelles, aufgaben- und bereichsspezifisches Feedback. Über einen zuvor generierten Zugangsschlüssel können auch Lehrende direkt nach dem Abschluss des Tests eine Zusammenfassung der Ergebnisse ihrer Lerngruppe einsehen. Sie erhalten einen Überblick über das Gesamtergebnis, eine aufgaben- und bereichsspezifische Auswertung der Ergebnisse ihrer Lerngruppe, sowie Einsicht in individuelle Schülerprofile in anonymisierter Form.

Das Diagnoseinstrument für den Beginn der Sekundarstufe II

Der digitale Test für den Übergang in die Oberstufe kann ab dem Ende der Klasse 9 eingesetzt werden. Inhaltlich fokussiert der Test funktionale Zusammenhänge, elementare Algebra (Terme und Gleichungen aufstellen, interpretieren und lösen, …) und Arithmetik (Kopfrechnen, Vorrangregeln, Prozentrechnung …). Die Testzeit beträgt etwa 45 Minuten und die Bearbeitung erfolgt hilfsmittelfrei. Der Test und eine Variation für die 8. Klasse sind frei verfügbar unter www.basics-mathematik.de.

Das Diagnoseinstrument für das Ende der Sekundarstufe II

Das Diagnoseinstrument für das Ende der Sek. II fokussiert die Leitidee ‚Funktionaler Zusammenhang'. Neben grundlegenden Inhalten zu Funktionen bzw. verschiedenen Funktionstypen werden die Differential- und Integralrechnung thematisiert. Die Bearbeitungszeit beträgt etwa 60-70 Minuten. Der Test sollte nach Möglichkeit ohne Hilfsmittel (außer Papier und Stift) bearbeitet werden. Das Diagnoseinstrument ist unter www.grundwissen-funktionen.de für Lehrende und Lernende frei verfügbar.

Literatur

Feldt, N. (2013). Konkretisierung und Operationalisierung von Grundwissen und Grundkönnen durch ein theoriegeleitetes Vorgehen. In G. Greefrath et al. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 308-311). Münster: WTM.

Feldt-Caesar, N. (2015). Funktionen – das kann ich! *mathematik lehren*, 192. 38-41.

Weinert, F.E. (2000). Lehren und Lernen für die Zukunft – Ansprüche an das Lernen in der Schule. Vortrag am 29.03.2000 im Pädagogischen Zentrum in Bad Kreuznach. *Pädagogische Nachrichten Rheinland-Pfalz,* 2. Sonderseiten 1-16.

Julia FLEISCHER, Dortmund

Entwicklung und Erforschung einer digitalen Lernumgebung zum Thema Operationsverständnis

Die digitale Lernumgebung zum Thema „Operationsverständnis“ ist Bestandteil des Projekts „PriMakom“ (Primarstufe Mathematik kompakt, primakom.dzlm.de). Die Internetplattform PriMakom wurde primär für mathematikfachfremd unterrichtende Lehrpersonen konzipiert, soll aber grundlegend allen Lehrpersonen zur Weiterbildung für die Unterrichtspraxis helfen und für grundlegende Ideen des zeitgemäßen Mathematikunterrichts sensibilisieren.

1. Forschungsinteresse und -ziel

Ausgangspunkt meines Forschungsinteresses sind die in der Mathematikdidaktik unzureichenden Forschungen bezüglich der Gestaltung solcher mathematikdidaktischen, digitalen Lernumgebungen. Bisher beforschte E-Learning Angebote (vgl. u.a. Reinmann et al 2005) sind stets mit Präsenzterminen gekoppelt. Jedoch wird diese entwickelte, digitale Lernumgebung zum „Operationsverständnis“ ausschließlich online im Selbststudium genutzt. Daraus resultieren zwei Forschungsfragen:

1. Wie wirken sich die Gestaltungsmerkmale auf die Akzeptanz der digitalen Lernumgebung „Operationsverständnis“ durch die befragten Lehrpersonen aus?
2. Inwiefern profitieren die Lehrpersonen nach ihrer Aussage von der Bearbeitung der digitalen Lernumgebung „Operationsverständnis“ im Selbststudium für ihren Unterricht?

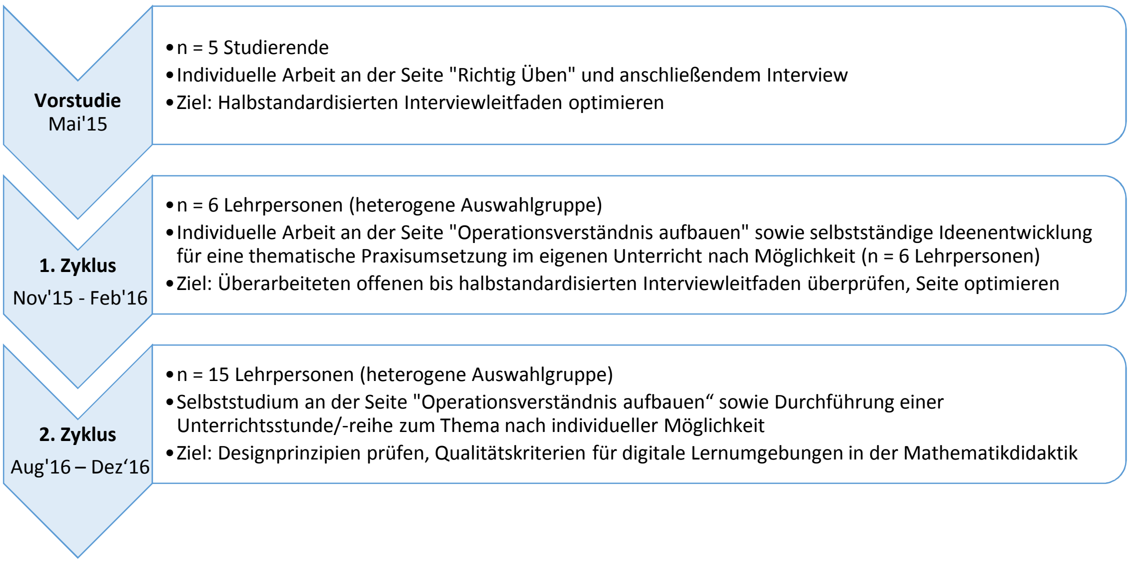


Abb. 1: Forschungsdesign Selbstlernplattform PriMakom

Schwerpunkt bildet die Akzeptanzerhebung nach Lipowsky (2004) und damit das Nutzungsverhalten der Nutzergruppe. Ziel ist das Herausstellen von Qualitätskriterien für digitale Lernumgebungen für ein Selbststudium. Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurden entwickelt:

- ein qualitatives Interviewdesign
- sowie Designprinzipien in Anlehnung an die multimedialen Prinzipien nach Mayer (2014), der Cognitive Load Theorie nach Sweller (2014) und den DZLM-Gestaltungsprinzipien (Barzel u. Selter 2015).

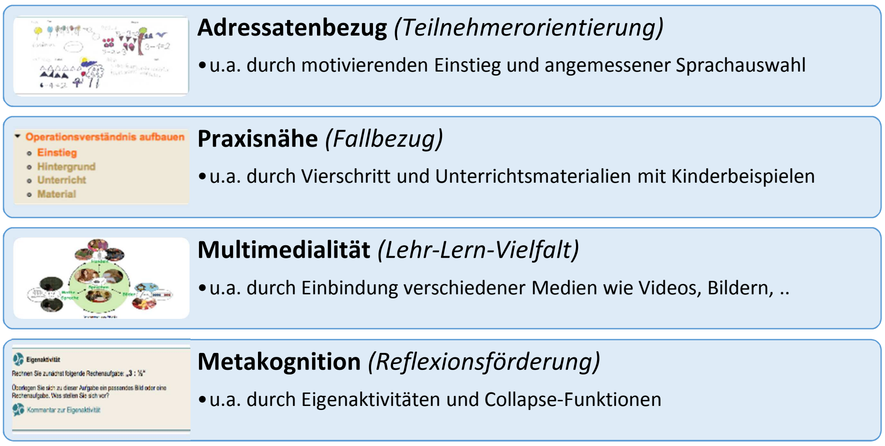


Abb. 2: Designprinzipien Selbstlernplattform PriMakom

2. Stand des Projekts

Aus der Vorstudie mit anderer Themenunterseite resultierte eine Überarbeitung des Interviewleitfadens. Der 1. Zyklus wurde abgeschlossen und wird anhand qualitativer Inhaltsanalyen ausgewertet. Die Themenunterseite „Operationsverständnis“ wird sowohl inhaltlich als auch gestalterisch überarbeitet und das endgültige Forschungsdesign für den 2. Zyklus festgelegt.

Literatur

Barzel, B., Selter, C. (2015) *Die DZLM-Gestaltungsprinzipien für Fortbildungen.* In: Journal für Mathematik-Didaktik (2015) 36: S. 259–284.

Lipowsky, F. (2004). *Was macht Fortbildungen für Lehrkräfte erfolgreich?* Die Deutsche Schule, 96(4), S. 462-479.

Mayer, R. E. (2014). *Cognitive theory of multimedia learning.* In: R. E. Mayer (Hrsg.), The Cambridge handbook of multimedia leaming (S. 43-71). Cambridge University

Reinmann, G. et al (2005). *Entwicklung und Evaluation einer E-Learning-Umgebung zur Schulentwicklung.* Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung, 23(1), 6-21. Verfügbar unter: http://www.bzl-online.ch/archivdownload/artikel/BZL_2005_1_6-21.pdf [Stand: 20.01.2016].

Sweller, J. (2014). *Implication of cognitive load theory for multimedia leaming.* In: R. E. Mayer (Hrsg.), The Cambridge handbook of multimedia learning (S. 27-42). Cambridge University

Christine GÄRTNER, Kathrin CORNETZ, Esther DOUMBOUYA-HOFFMANN, Mareile SHAW, Jochen LAUBROCK, Potsdam

Comicaufgaben vs. Textaufgaben im Mathematikunterricht

Sachrechenaufgaben werden in der Regel in Form von Textaufgaben gestellt. Viele Schülerinnen und Schüler haben jedoch Schwierigkeiten mit dem Lösen von Textaufgaben im Mathematikunterricht. Dies wird u.a. durch mangelnde Lesekompetenz und fehlende Aktivierung von mathematischen Grundvorstellungen und damit die falsche Wahl von Operationen sowie durch Konstruktion nichtadäquater Situationsmodelle erklärt (Prediger, 2010). Hier könnte der Einsatz von Aufgaben in Form von Comics diese Schwierigkeiten reduzieren, da die Aufgaben mit weniger Text verbunden sind und wichtige Informationen nicht ausschließlich schriftlich, sondern auch bildlich dargestellt werden können. Zudem könnte die bildliche Darbietung den Zugang zu den nötigen Grundvorstellungen erleichtern. Dafür sprechen Ergebnisse aus dem Bereich des multimedialen Lernens. So zeigte sich, dass Texte besser verstanden werden, wenn Text und relevante Bilder kombiniert vorliegen (Niegemann et al., 2008, S. 230). Vorgestellt werden im Folgenden das Design und erste Ergebnisse einer Pilotstudie, in der die Hypothesen „Comicaufgaben werden besser gelöst als Textaufgaben“ und „Comicaufgaben erhöhen die Motivation der Schülerinnen und Schüler“ untersucht wurden.

Design und Methode

Aus einer Grundschule einer hessischen Großstadt nahmen 57 Schülerinnen und Schüler aus drei 4. Klassen an der Studie teil. Für die Studie wurden vier Sachenrechenaufgaben bestehend aus drei Teilaufgaben in zwei parallelen Versionen, in Text- sowie Comic-Format, entwickelt und je zwei Aufgaben zu einem Block zusammengefasst. Jedes Kind bearbeitete ein Testheft. Die Testhefte waren wie folgt aufgebaut. Zunächst sollten die Kinder mit Hilfe eines Fragebogens mit drei Items und einer fünfstufigen Likert-Skala ihre allgemeine Einstellung zu Mathematik einschätzen (z.B. „Wie gerne rechnest du?“). Anschließend bearbeiteten alle Kinder die vier Sachrechenaufgaben, wobei jeweils ein Block im Comic-Format und ein Block im Text-Format präsentiert wurden. Die Reihenfolge der Aufgabenblöcke und der Formate wurde dabei systematisch variiert. Nach jedem Block (Comic- oder Textaufgaben) wurde mittels eines Fragebogens mit drei Items und einer fünfstufigen Likert-Skala die Aufgabenmotivation für das jeweilige Format erhoben (z.B. „Wie sehr wurde während des Rechnens dein Interesse geweckt?“). Abschließend wurden die Kinder nach ihrer Präferenz für ein Format gefragt (Comic, Text oder beides). Die Bearbeitung fand im Klassenverband innerhalb einer Schulstunde statt, wobei darauf geachtet wurde, dass jedes Kind jede Aufgabe und jeden Fragebogen bearbeitete.

Ergebnisse und Diskussion

Die Analyse der Daten mit Hilfe des t-Tests ergibt, dass kein signifikanter Unterschied zwischen den mathematischen Leistungen bei den Comicaufgaben und den Textaufgaben besteht. Dies gilt sowohl für die Gesamtleistung der einzelnen Formate als auch unterschieden nach den vier Sachrechenaufgaben. Nur die Aufgabe „Rundfahrt“, bei der die bildliche Darstellung von besonderem Nutzen ist (Landkarte), wird als Comicaufgabe signifikant besser gelöst. Hier wäre es interessant, genauer zu untersuchen, ob und welche Aufgabenarten besonders für das Comicformat geeignet sind.

Aufgabenname	M_{Comic} (sd_{Comic})	M_{Text} (sd_{Text})	*p*
Hase	1.05 (0.57)	0.99 (0.54)	n.s.
Kuchen	0.55 (0.59)	0.76 (0.51)	n.s.
Rundfahrt	1.57 (0.66)	0.96 (0.69)	0.0012**
Spinne	1.22 (0.63)	1.32 (0.65)	n.s.

Tabelle: Mittelwerte der mathematischen Leistungen unterschieden nach den einzelnen Aufgaben und Aufgabenformaten, **p<0.01/4 (Bonferroni-korrigiert).

Bezogen auf die Aufgabenmotivation findet sich kein signifikanter Unterschied zwischen Comic- und Textaufgaben.

Bei der Analyse der Daten für die Präferenz eines Formats zeigt sich, dass die Kinder, die das Comicformat besser fanden, die Comicaufgaben signifikant besser lösten als die Textaufgaben. Dies gilt nicht für die Präferenz des Textformats oder beider Formate. Vergleicht man die beiden Präferenzgruppen Comic und Text, sieht man, dass die Kinder, die Comicaufgaben präferieren, bei den Comicaufgaben signifikant besser abschneiden als die, die Textaufgaben präferieren ($p=0.015$). Bei den Textaufgaben hingegen gibt es keinen signifikanten Unterschied zwischen den Präferenzgruppen Comic und Text. Es stellt sich daher die Frage, welche Aspekte die Leistungsunterschiede bei den Comicaufgaben beeinflussen.

Literatur

H. M. Niegemann, S. Domagk, S. Hessel, A. Hein, M. Hupfer, & A. Zobel (2008). *Kompendium multimediales Lernen.* Berlin, Heidelberg: Springer.

S. Prediger (2010). Über das Verhältnis von Theorien und wissenschaftlichen Praktiken – am Beispiel von Schwierigkeiten mit Textaufgaben. *Journal für Mathematikdidaktik, 31*(2), 167-195.

Christoph PIGGE, Irene NEUMANN, Aiso HEINZE, Kiel

Mathematische Lernvoraussetzungen für MINT-Studiengänge aus Hochschulsicht – eine Delphi-Studie

Ausgangslage und Forschungsfrage

In MINT-Studiengängen wird seit Jahren eine hohe Studienabbruchquote verzeichnet (Heublein et al., 2014). Als Ursache geben Studierende häufig Leistungsprobleme an (Heublein et al., 2010). Vor- und Brückenkurse sollen den Einstieg in das Studium erleichtern und dem entgegenwirken. Betrachtet man die von Hochschulen angebotenen Vor- und Brückenkurse im Bereich Mathematik, so zeigt sich eine sehr große Heterogenität in der inhaltlichen Ausrichtung (Biehler et al., 2013). Von Hochschulseite ist bisher kein gemeinsamer Fokus erkennbar, welche „Kompetenzdefizite" vor Studienbeginn auszugleichen sind bzw. welche mathematischen Lernvoraussetzungen für MINT-Studiengänge als notwendig erachtet werden. Ziel dieses Projekts ist daher die Entwicklung eines Modells mathematikbezogener Lernvoraussetzungen, die aus Hochschulsicht zur Bewältigung der Anforderungen der mathematischen Eingangsmodule in MINT-Studiengängen erwartet werden.

Delphi-Studie

Zur Erreichung dieses Ziels wird eine iterative Expertenbefragung, sog. Delphi-Studie, durchgeführt. Die Delphi-Methode ist als Gruppenkommunikationsprozess mit dem Ziel der Konsensfindung zu einem komplexen Thema zu verstehen, demgegenüber Unsicherheit besteht (Häder, 2014). Konkret werden ca. N = 2000 Lehrende von Hochschulen aus Deutschland über vier Runden befragt, die in den letzten fünf Jahren Mathematikvorlesungen für das erste Semester in MINT-Studiengängen angeboten haben. Im ersten Schritt wird ein breites Bild der erwarteten mathematikbezogenen Lernvoraussetzungen für MINT-Studiengänge aus Hochschulsicht erhoben, das mittels Iteration und Feedback in den späteren Runden präzisiert wird, um sukzessive einen Konsens seitens der Hochschullehrenden zu erzielen.

Erste Befragungsrunde

Bislang wurde die erste Befragungsrunde durchgeführt. Da unklar ist, welche Aspekte von mathematischen Lernvoraussetzungen Hochschullehrende für wichtig erachten, zielte die erste Runde auf eine Ermittlung dieser Aspekte. Um eine möglichst unbeeinflusste Erfassung der Expertenmeinung vornehmen zu können, wurden v.a. offene Itemformate verwendet. Aus Effizienz- und Machbarkeitsgründen erforderte dies eine reduzierte Stichprobe (N = 49, Auswahl nach Region, besonderer Verantwortung für Lehre, Studiengang und Hochschulart), die online befragt wurde.

Die Auswertung der Antworten orientierte sich an der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2003). Mit Hilfe einer induktiven Kategorienbildung konnten die vier Kategorien *Inhalte* (z. B. Kombinatorik, lineare Gleichungssysteme), *mathematische Prozesse* (z. B. Argumentieren, Rechnen), *Wesen der Mathematik* (z. B. Beweis steht im Zentrum der Hochschulmathematik), *personenbezogene Eigenschaften* (z. B. ordentliche und strukturierte Arbeitsweise) sowie 67 Unterkategorien der mathematikbezogenen Lernvoraussetzungen ermittelt werden. Eine Zweitkodierung der Expertenantworten ergab eine zufriedenstellende Objektivität bei der Anwendung des Kategoriensystems (durchschnittliche Übereinstimmung zwischen 85% und 97%; Cohen's Kappa zwischen .60 und .94).

Ausblick

Auf Basis der Kategorien der Lernvoraussetzungen der ersten Runde werden nun die Items für die zweite Delphi-Runde entwickelt. In den Folgerunden wird die Hochschulsicht durch den Einbezug der Gesamtstichprobe (N = 2000) und iterative Konsensbildung vervollständigt und verfeinert. Als Ergebnis wird ein empirisch fundiertes Modell der notwendigen mathematikbezogenen Lernvoraussetzungen erwartet, das mit den Bildungsstandards sowie vorhandenen Vorkenntnissen verglichen werden soll.

Literatur

Biehler, R., Bruder, R., Hochmuth, R. & Koepf, W. (2013). Einleitung. In I. Bausch, R. Biehler, R. Bruder, P. R. Fischer, R. Hochmuth, W. Koepf, S. Schreiber, T. Wassong (Hrsg.), *Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik. Mathematische Vor- und Brückenkurse. Konzepte, Probleme und Perspektiven* (S. 1–6). Dordrecht: Springer.

Häder, M. (2014). *Delphi-Befragungen: Ein Arbeitsbuch* (3. Aufl.). Wiesbaden: Springer.

Heublein, U., Richter, J., Schmelzer, R., & Sommer, D. (2014). *Die Entwicklung der Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen: Statistische Berechnungen auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2012* (Forum Hochschule 4/2014). Hannover: DZHW.

Heublein, U., Hutzsch, C., Schreiber, J., Sommer, D., & Besuch, G. (2010). Ursachen des Studienabbruchs in Bachelor- und in herkömmlichen Studiengängen: Ergebnisse einer bundesweiten Befragung von Exmatrikulierten des Studienjahres 2007/08. Hannover: HIS.

Mayring, P. (2003). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (8. Aufl.). UTB für Wissenschaft Pädagogik: Weinheim: Beltz.

Alexander JOHN, Mainz; Diana HENZ, Mainz; Wolfgang I. SCHÖLLHORN, Mainz

Wirkung des Fahrens auf NeuroBikes auf die mathematische Lösungskompetenz und die EEG Gehirnaktivität: eine Interventionsstudie

Einleitung

Ein Einfluss des Fahrradfahrens auf kognitive Verarbeitungsprozesse wurde von mehreren Studien ermittelt (Crabbe & Dishmann, 2004; Etnier & Sibley, 2003; Kamijo et al., 2007). Das NeuroBike ist ein instabiles System, welches in der Sporttherapie und im Sporttraining Anwendung findet. Die Gleichgewichtsbewegung, verursacht durch das in der Mitte des Rahmens applizierte Gelenk, ist dem Kreuzgang des Menschen ähnlich und sorgt laut Hersteller für eine positive Beeinflussung der Gehirnfunktion. In der vorliegenden Studie untersuchten wir die Auswirkungen des Fahrens des NeuroBikes auf die mathematische Lösungskompetenz und die spontane EEG-Gehirnaktivität.

Studiendesign

In der vorliegenden Studie führten N = 36 gesunde Erwachsene im Alter von 20 bis 28 Jahren verschiedene Trainings (NeuroBike, gewöhnliches Fahrrad, Alltagsaktivität) je 20 Minuten dreimal pro Woche in einer zweiwöchigen Intervention durch. Die mathematische Lösungskompetenz (Algebra, Geometrie, Arithmetik) wurde zu Beginn und am Ende der Intervention durch einen Multiple-Choice Test an einem Computer erfasst. So wurde ein theoriebasierter Arithmetiktest (vgl. Padberg, 2007) in Form von Kopfrechnen sowie ein Algebratest (vgl. Filloy, Puig & Rojano, 2008) zur Lösung linearer Gleichungen mit beidseitiger Unbekannten eingesetzt. Das Raumvorstellungsvermögen im Geometrietest wurde mit dem Bausteine-Test von Birkel, Schein und Schumann (2002) erfasst. Als Messparameter wurden das Arbeitstempo und die Erfolgsquote jedes einzelnen Tests ermittelt. Die EEG-Gehirnaktivität wurde unter Anwendung des internationalen 10-20 Systems vor, und nach jeder Trainingseinheit in Ruhe, und während dem Mathematiktest vor und nach der zweiwöchigen Intervention mit einer Frequenz von 256 Hz aufgezeichnet. Die spektrale Leistung wurde durch das Theta- (4-7.5 Hz), Alpha- (8-13 Hz), Alpha1- (8-10 Hz), Alpha2- (10-13 Hz), Beta- (13-30 Hz), Beta1- (13-15 Hz), Beta2- (15-21 Hz), Beta3- (21-30 Hz) und Gamma- (30-70 Hz) Frequenzband ermittelt. Die Leistungsdichtespektren der EEG-Frequenzbänder und die Messparameter der mathematischen Lösungskompetenz wurden Varianzanalysen mit Bonferroni-korrigierten post-hoc Tests, sowie zur Untersuchung von Innergruppeneffekten einem T-Test und Wilcoxon-Test unterzogen.

Ergebnisse

Die Verhaltensdaten zeigten eine leicht reduzierte mathematische Leistung im Teilgebiet Geometrie nach der zweiwöchigen NeuroBike- und Fahrrad-Intervention im Vergleich zur täglichen Aktivität. EEG-Daten belegen eine erhöhte temporale Theta-Aktivität ($p < .05$), okzipitale Theta-, Alpha- und Beta1-Aktivität ($p < .05$) sowie parietale Beta-Aktivität ($p < .05$) nach der zweiwöchigen Intervention ohne akuten Einfluss des NeuroBike Fahrens in Ruhe. Keine Änderungen im akuten Einfluss des NeuroBike Trainings wurden infolge der zweiwöchigen Intervention beobachtet. Wiederholtes NeuroBike Training führte während des Teilgebiets Algebra zu einer erhöhten frontalen Aktivität in allen Frequenzbändern sowie, gegenüber der in den Teilgebieten Geometrie und Arithmetik vorliegenden Reduktion, zu einer Steigerung der temporalen Theta- und Alpha-Leistung.

Diskussion

Unsere Ergebnisse deuten darauf hin, dass das Fahren des NeuroBikes einen positiven Zustand des Gehirns für Lernen im Ruhezustand fördert, allerdings nicht zu einem optimalen Zustand des Gehirns für eine aktive Bearbeitung mathematischer Probleme, die vor allem visuell-räumliches Denken erfordern, führt. Demnach ist von einem Gebrauch des NeuroBikes direkt vor leistungsfordernden oder -überprüfenden Situationen, die visuell-räumliche Verarbeitung erfordern, wie dies speziell im mathematischen Teilgebiet Geometrie der Fall ist, eher abzuraten. Allerdings im Sinne von selbstständigem Lernen oder der Einführung von neuem Lehrstoff, für die es ein hohes Maß an Aufmerksamkeit und Aufnahmefähigkeit bedarf, ist ein Einsatz des NeuroBikes zu empfehlen. Dies gilt es in einer weiterführenden Studie mit konkretem Unterrichtsbezug zu bestätigen.

Literatur

Birkel, P., Schein, A. & Schumann, H. (2002). *Bausteine-Test*. Hogrefe. Göttingen.

Crabbe, J. B. & Dishman, R. K. (2004). Brain electrocortical activity during and after exercise: A quantitative synthesis. *Psychophysiology, 41*(4), 563–574.

Etnier, J. L. & Sibley, B. A. (2003). The relationship between physical activity and cognition in children: a meta-analysis. *Pediatric Exercise Science*, *15*, 243–256.

Filloy, E., Puig, L. & Rojano, T. (2008). *Educational Algebra*. New York: Springer.

Kamijo, K., Nishihira, Y., Higashiura, T. & Kuroiwa, K. (2007). The interactive effect of exercise intensity and task difficulty on human cognitive processing. *International Journal of Psychophysiology*, *65*(2), 114–121.

Padberg, F. (2007). *Didaktik der Arithmetik*. München: Spektrum.

Nicole KOPPITZ, Gießen

Mentoring im ersten Studienjahr für eine positive Einstellung

Ausgangslage

In Hessen sind im Lehramt an Grundschulen die Fächer Deutsch und Mathematik neben einem selbstgewählten Drittfach verpflichtend zu studieren. Eigene Erhebungen haben gezeigt, dass etwa die Hälfte der Studierenden das Fach Mathematik nicht gewählt hätte. Dadurch sind Unterschiede in der Motivation, Lernausgangslage sowie der Einstellung zum Fach erkennbar.

Mentoring als Intervention

Aufgrund dieser Ausgangslage wird seit dem WS 2015/16 ein vom HMWK gefördertes Mentoring-Programm für das erste Studienjahr am Institut für Didaktik der Mathematik der Justus-Liebig-Universität Gießen durchgeführt. Hierbei sollen die Studierenden, insbesondere die mit schwachen fachlichen und motivationalen Voraussetzungen, in die Lage versetzt werden, das Studium erfolgreich zu absolvieren. Die Idee ist, dass die Studierenden in der Studieneingangsphase eine positive Einstellung zum Fach entwickeln. Durch ein Peer-Mentoring sowie Betreuung und Beratung durch Studierende in höheren Fachsemestern sollen Lernhürden reflektiert, Lernschwierigkeiten überwunden und Lernstrategien optimiert werden.

Im Projekt sollen die Studierenden ihr eigenes Lernen fortlaufend reflektieren, um für jede/n ein selbstgesteuertes Lernen zu ermöglichen (Weinert, 1996). In der Anfangsphase des Mentorings werden die Motivation zum Studium sowie die eigenen Ressourcen, die das Lernen begünstigen, bewusst gemacht. Darauf aufbauend werden die bisherigen Lernstrategien und das entsprechende Zeitmanagement reflektiert. Mit Beginn des Sommersemesters sollen die bisherigen Reflexionen im Rahmen des Mentorings gezielt auf das Mathematikstudium angewendet werden, um die Studierenden auf der Metaebene in der Klausurvorbereitung zu unterstützen. So werden zwischen Studienbeginn und der Klausur acht ‚Themen des Monats‘ gestellt.

Okt.	Stärken und Schwächen reflektieren	**April**	Bisherige Arbeitsstrategien überdenken
Nov.	Motivation im Studium	**Mai**	Hürden erkennen und Lösungsstrategien finden
Dez.	Lern und Arbeitsstrategien	**Juni**	Selbstregulation umsetzen
Jan.	Zeitmanagement	**Juli**	Abschlussreflexion
Feb.	Halbzeitreflexion		

Tab. 1 Themen des Monats

Ablauf des Mentoring-Prozesses

Mentoring kann im Allgemeinen als eine persönliche, dyadische und hierarchische Beziehung verstanden werden. Im Fokus stehen dabei die Förderung des Lernens, das Vorankommen und die Entwicklung des Mentee durch einen erfahrenen Mentor (Stöger & Ziegler, 2012). Auf dieser Definition aufbauend wurde bei der Entwicklung des Mentoring-Prozesses darauf geachtet, dass neben der engen Betreuung der Studierenden das selbstständige Reflektieren des Lernprozesses gefördert wird. Um den beiden Ideen gerecht zu werden, wurde dem eigentlichen Mentoring eine Peer-Mentoring Phase vorangestellt. Bei der Bearbeitung des ‚Thema des Monats' werden fünf Phasen durchlaufen.

1. Phase	2. Phase	3. Phase	4. Phase	5. Phase
Jeder macht sich eigenständig Gedanken über das Thema des Monats.	Die Studierenden treffen sich in Peergruppen, um sich über das ‚Thema des Monats' auszutauschen.	Jeder Studierende gestaltet ein Portfolio und reflektiert das ‚Thema des Monats'.	Peergruppe und Mentor treffen sich. Es gibt ein Feedback zum Portfolio und weitere Denkanstöße.	Das Portfolio der Studierenden wird anhand der Denkanstöße überarbeitet.

Tab. 2 Fünf Phasen des Mentoring

In der ersten Phase sollen sich die Studierenden eigene Gedanken über das ‚Thema des Monats' machen, um auf individueller Ebene den Reflexionsprozess zu beginnen. Über die ersten Ideen wird sich in der zweiten Phase im Peer-Mentoring ausgetauscht. Neben dem vorgegebenen Thema klären die Studierenden auch allgemeine Fragen, die das Studium betreffen. Die Ergebnisse des Peer-Mentoring werden dann in der dritten Phase in einem Portfolio zusammengefasst und dem Mentor geschickt. Dieser liest den Portfolioeintrag und erkennt, wie weit die Studierenden in dem Reflexionsprozess sind und baut darauf die Inhalte des Treffens zwischen dem Mentor und der Gruppe auf. Somit werden in der vierten Phase die ‚Themen des Monats' vertieft und der Mentor kann die Studierenden bezüglich des Studiums beraten. In der abschließenden fünften Phase soll dann das ‚Thema des Monats' auf der individuellen Ebene noch einmal reflektiert und aus den Ergebnissen Handlungsalternativen abgeleitet werden.

Erste Rückmeldungen lassen erkennen, dass insbesondere die Betreuung und Beratung durch die Mentor/inn/en positiv bewertet wird.

Literatur

Stöger, H., Ziegler, A. (2012). Wie effektiv ist Mentoring? Ergebnisse von Einzelfall- und Meta-Analysen. In *Diskurs Kindheits- und Jugendforschung*,7(2), S. 131-146.

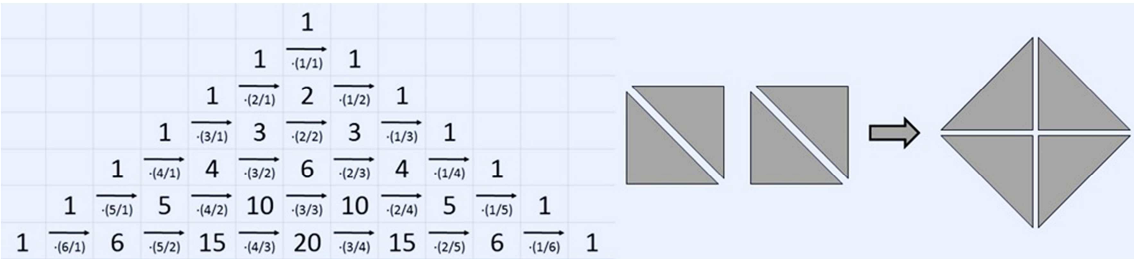
Weinert E.F. (Hrsg.) (1996). *Psychologie des Lernens und der Instruktion*. Göttingen: Hogrefe.

Stephan BERENDONK, Bonn

Examples of Elementary Mathematical Discoveries

The working mathematician knows a great variety of strategies in his search for new results. In modern mathematics education, however, the art of mathematical discovery is often reduced to just one of those strategies: induction (see the first example). To oppose this monoculture I try to find and promote convincing alternatives.

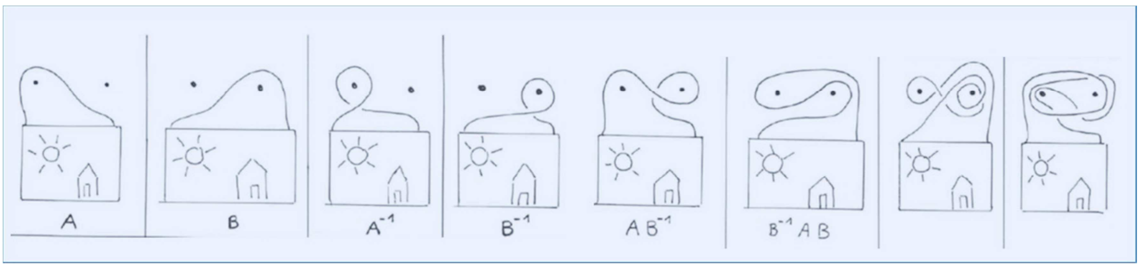
Recognizing a Pattern (Induction) - Binomial Coefficients: With which number do we have to multiply the *k*-th number in the *n*-th row of the left figure below to get the *k+1*-th number in the *n*-th row? Express the *k*-th number in the *n*-th row as a product of fractions.



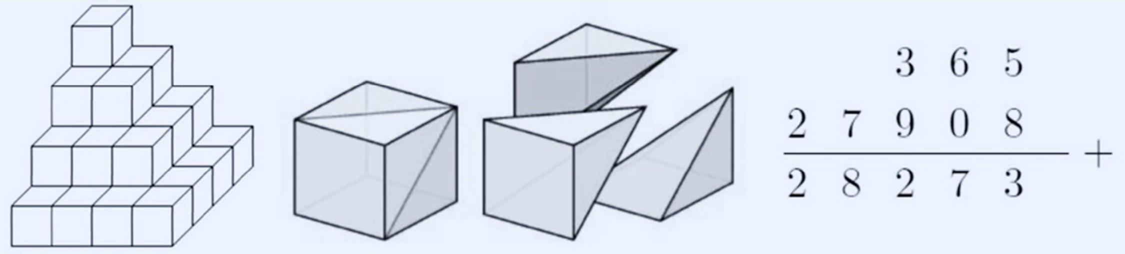
Learning from a Special Case - Pythagorean Theorem: The right figure above shows how one can put two congruent squares together to form one bigger square. Can you adjust this approach such that it also works for two squares of different size?

Learning from an Analogous Case - Number of Regular Polytopes: A convex polyhedron built from equilateral triangles can only have *3*, *4* or *5* triangles around each vertex. Hence there are only *3* Platonic solids consisting of triangles. How many tetrahedra fit around an edge of a convex polytope? What does this tell us about the number of regular polytopes consisting of tetrahedra?

Algebraizing a Geometrical Context - Foolish Hanging of a Picture: The following figure shows different hangings of a picture using two nails. Each hanging is encoded by a word in the letters *A* and *B*. Which words belong to the last two hangings? Find a hanging using *n* nails such that the picture falls down if you remove any of the *n* nails.



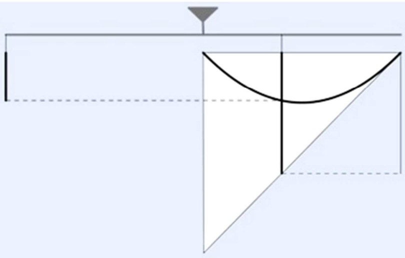
Geometrizing an Arithmetical Context - Formula for the Sum of Squares: The number $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ can be visualized by the pyramid in the left figure below. Use the fact that three such pyramids fit into a cube to derive a formula for the sum of the first *n* square numbers.

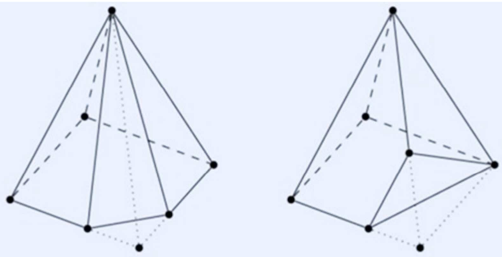


Alienating a Familiar Object - *10*-adic Numbers: Two natural numbers given in decimal notation are usually added as indicated in the right figure above. Instead of adding finite sequences of digits we could add infinite sequences of digits by the same method. What properties does this addition have? What can we say about periodic sequences? Do those infinite sequences behave differently in comparison to the natural numbers?

Analysing an Existing Proof - Law of Cosines: What happens if we apply Euclid's well-known proof of the Pythagorean Theorem (found in the first book of the Elements) to an arbitrary (not right-angled) triangle?

Following a Global Recipe - Volume of a Sphere: The left figure below indicates how one can determine the area of a parabolic segment using the law of moments. Try to determine the volume of a sphere in a similar way.





Discovering En Passant (Serendipity) - Euler's Polyhedron Formula: If we wanted to give each polyhedron a name in a systematic way, we could simply call them according their number of faces. Then, however, the triangular prism and the square pyramid would get the same name, as they both have *5* faces. We can easily resolve this by introducing the number of vertices as a distinctive feature. This leads to compound names: *6*-angled pentahedron for the triangular prism and *5*-angled pentahedron for the square pyramid. The right figure above shows two *6*-angled hexahedra, which are combinatorially different, since the left one has a pentagonal face and the right one doesn't. It seems natural to consider the number of edges as an additional distinctive feature. Would this work?

Stephan KREUZKAM, Hildesheim

Routinefertigkeiten bei Studienanfängern - Erste Ergebnisse einer Fehleranalyse

In diesem Artikel werden erste Ergebnisse einer Studie zu mathematischen Routinefertigkeiten von Studienanfängern an der Universität Hildesheim vorgestellt. Im Rahmen dieser Studie werden mithilfe einer deskriptiven Fehleranalyse Studienanfänger im Bereich Mathematik-Lehramt (GHR) auf Routine im Umgang mit elementaren arithmetischen Aufgaben untersucht. Aus den Ergebnissen soll Handlungsbedarf für die Gestaltung des Übergangs Schule-Hochschule abgeleitet werden.

Die Stichprobe umfasst alle Studierenden, die im WS 13/14 oder WS 14/15 an der Universität Hildesheim ein Studium mit Mathematikanteil begonnen haben und am ersten Tag des Vorkurses anwesend waren. Der Fragebogen untergliedert sich in vier Themenkomplexe: „Elementares Rechnen“ (2 S.), „Terme“ (2 S.), „Sprache und Symbole“ (1 S.) sowie „Zahldarstellungen“ (1 S.). Da u.a. die Bearbeitungsgeschwindigkeit der Aufgaben einen Rückschluss auf die Automatisierung elementarer Rechenverfahren und somit auf vorhandene Routinefertigkeiten zulässt, wurde die Bearbeitungszeit für die verschiedenen Themenkomplexe variiert.

In der nachfolgenden Auswertung wird eine Teilstichprobe (WS 13/14 – FB 2 – Lehramtsstudierende) im Hinblick auf den Themenkomplex „Elementares Rechnen“ betrachtet. Bei der Darstellung wird ausschließlich auf syntaktische Fehler (vgl. z.B. Prediger, Wittmann 2009) eingegangen. Die ausgewählte Teilstichprobe umfasste 42 Teilnehmer. Die Bearbeitungszeit des betrachteten Themenkomplexes betrug sechs Minuten für Seite eins und fünf Minuten für Seite zwei. Von 13 möglichen Aufgaben pro Seite wurden durchschnittlich 6,5 bzw. 6,0 - also insgesamt 522 - Aufgaben pro Studierendem bearbeitet. Von diesen wurden durchschnittlich 3,3 bzw. 2,7 Aufgaben vollständig korrekt gelöst. Inklusive der nicht vollständig, aber bis zum Abbruch korrekt bearbeiteten Aufgaben ergeben sich die Werte 4,3 bzw. 3,5. Bei 217 Lösungsversuchen ließen sich syntaktische Fehler feststellen, die sich u.a. in folgende Fehlerkategorien einordnen lassen (vgl. z.B. Padberg 2009, Padberg, Benz 2011, Gerster 2012): Perseveration (31), Operationsfehler (28), Fehler beim Kürzen (24), Fehler der Nähe (21), Vorzeichenfehler (12), Stellenwertfehler (12), Übertragfehler (9), Kommatrennt-Fehler (7).

Zur Illustration der Aufgabenstellung sowie typischer Fehlermuster sollen im Folgenden zwei Bearbeitungen vorgestellt werden.

Das erste Beispiel (Abb. 1) zeigt eine Multiplikationsaufgabe, die schriftlich zu lösen war. Als Schwierigkeiten weisen die Faktoren eine Nachkommastelle sowie eine unterschiedliche Zifferanzahl auf. Die Algorithmen der schriftlichen Multiplikation sowie Addition werden hier korrekt angewandt, jedoch weist jede Rechenzeile für sich einen Fehler auf. In der ersten Zeile werden die richtigen Operationen verwandt, es tritt aber ein Perseverationsfehler mit der Drei auf ($6 \cdot 7 = 42$ und $6 \cdot 5 = 3\mathbf{3}$). In der zweiten Zeile lässt sich ein Rechenrichtungsfehler identifizieren. Statt bei der Berechnung im zweiten Faktor die Stellen zu durchlaufen, wird dieses Vorgehen im ersten Faktor durchgeführt ($2 \cdot 7 = 14$ und $\mathbf{6} \cdot 7 = 42$). Die dritte Zeile weist einen Fehler der Nähe auf ($8 \cdot 7 = 5\mathbf{4}$).

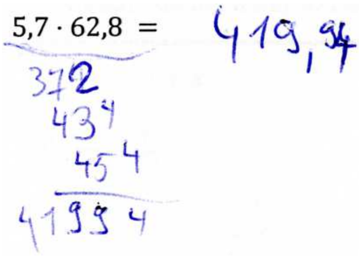


Abb.1: schr. Multiplikation

Die zweite Aufgabe (Abb. 2) zeigt die Subtraktion zweier Brüche. Die Schwierigkeiten bestehen darin, dass die beiden Brüche ungleichnamig sind und die gewählten Zahlen eine Möglichkeit zum Kürzen suggerieren. In diesem Fall wurde ein Operationsfehler (Subtraktion zu Division) begangen, so dass die beiden Nenner gegeneinander gekürzt wurden.

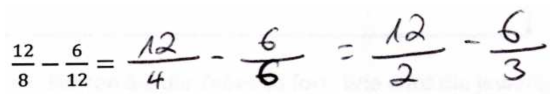


Abb.2: Subtraktion ungleichnamiger Brü-

Abschließend zeigt bereits die Betrachtung der Teilstichprobe in Bezug auf den dargestellten Thermenkomplex „Elementares Rechnen“, dass die Algorithmen zu schriftlichen Rechenverfahren nicht ausreichend automatisiert zur Verfügung stehen und selbst bei Aufgaben (v.a. zur Multiplikation) im Zahlenraum bis einhundert noch viele Unsicherheiten bestehen. Von Routine im Sinne von Automatisierung und Entlastung des Arbeitsgedächtnisses kann somit nicht gesprochen werden.

Literatur

Gerster, H.-D. (2012). *Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren: Diagnose und Therapie* (1982er Aufl.). *Evaluation und Testentwicklung in der Mathematik-Didaktik: Band 3*. Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Padberg, F. (2009). *Didaktik der Bruchrechnung: [für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung]* (4. Aufl.). *Mathematik Primar- und Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl.

Padberg, F., & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik: Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung* (4. Aufl.). *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl.

Prediger, S.; Wittmann, G. (2009). Aus Fehlern lernen - (wie) ist das möglich? In: *Praxis der Mathematik in der* Schule 51(3), S. 1–8.

Anika WITTKOWSKI, Ursula CARLE, Gerald WITTMANN, Bremen/Freiburg

Mathematik im Elementarbereich: Begründungsdimensionen und bedeutsame Rahmenbedingungen für das (mathematik-) didaktische Handeln von ErzieherInnen

Ausgangslage

Die Bedeutsamkeit der frühen mathematischen Bildung ist unumstritten. In diesem Kontext steht die Anbahnung und Förderung von mathematischen Basiskompetenzen bei den Kindern im Fokus (u. a. Rathgeb-Schnierer 2012; Steinweg 2008). Dies kann die pädagogische Fachkraft bspw. durch das bewusste Schaffen und die aktive Nutzung von substanziellen Lernumgebungen bzw. Lerngelegenheiten initiieren und unterstützen (Benz et al. 2015). Aktuelle Studien weisen jedoch darauf hin, dass ErzieherInnen kindliche Lernprozesse eher oberflächlich begleiten (u. a. Kucharz et al. 2014) und diese Begleitung fachdidaktisch wenig fundiert ist (u. a. Wittmann et al. 2016). Sie machen aber auch deutlich, dass hier noch ein erheblicher Forschungsbedarf, auch in der Weiterentwicklung der Erhebungsinstrumente, besteht.

Forschungsvorhaben

Daran anknüpfend wird in der hier vorgestellten qualitativ-rekonstruktiven Studie untersucht, wie ErzieherInnen im Freispiel entstandene Situationen mit mathematischem Potenzial interpretieren und welche Fördermöglichkeiten sie formulieren. Dabei sollen Begründungsdimensionen für das (mathematik-)didaktische Handeln von ErzieherInnen und bedeutsame Rahmenbedingungen rekonstruiert werden. Die Erkenntnisse können nicht nur für die Aus- und Weiterbildung genutzt werden, sondern auch für eine erste empirische Annäherung an das der Studie zugrunde gelegte, theoriebasierte Modell zur mathematikdidaktischen Kompetenz von ErzieherInnen (Gasteiger & Benz 2016).

Methodisches Vorgehen

Verschiedene Studien untersuchen durch standardisierte Bild- und Vignettenbefragung die Handlungs- und Wahrnehmungskompetenzen von ErzieherInnen und Lehrkräften. Vignetten wird das Potenzial zugeschrieben, handlungsrelevantes Wissen valide(r) erheben zu können (Lindmeier 2013). Vignetten mit Realbezug zur jeweiligen Einrichtung haben zudem den Vorteil, dass die pädagogischen Fachkräfte die Lernumgebung, das genutzte Material sowie den Lern- und Entwicklungstand des jeweiligen Kindes kennen und in ihre Überlegungen einbeziehen können. Werden sie des Weiteren in eine Interviewsituation eingebettet, so können durch gezielte

Nachfragen Erzählungen angeregt werden, die auch eine Rekonstruktion von impliziten Denkprozessen und Wissensbeständen möglich machen.

Daher wird ein dreistufiges, aufeinander aufbauendes Verfahren gewählt. Zunächst wird ein leitfadengestütztes Interview mit einem/einer ErzieherIn geführt, welches mit einer Begehung der Lernumgebung resp. des Funktionsraums mit mathematischen Bezügen verbunden ist. Anschließend folgt eine mehrtägige Hospitation, die durch ein zielgerichtetes Beobachten die Erstellung von Bildvignetten anvisiert. Auch das Handeln der zuständigen pädagogischen Fachkraft in den Freispielphasen wird beobachtet. Danach wird ein zweites Interview mit dem/der gleichen ErzieherIn geführt, in dem die Bildvignetten als Gesprächsgrundlage dienen und Ergebnisse des ersten Interviews dialogisch validiert werden. Die Bildvignetten werden für jede KiTa individuell erstellt.

Literatur

Benz, C., Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung. Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen (*Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II). Berlin: Springer Spektrum.

Bönig, D., Wittmann, G., Schuler, S. & Thöne, B. (2016). Entwicklung der Bild- und Videovignetten. In G. Wittmann et al. (Hrsg.), *AnschlussM. Anschlussfähigkeit mathematikdidaktischer Überzeugungen und Praktiken von ErzieherInnen und GrundschullehrerInnen* (S. 185-191). Münster: Waxmann.

Gasteiger, H. & Benz, C. (2016). Mathematikdidaktische Kompetenz von Fachkräften im Elementarbereich – ein theoriebasiertes Kompetenzmodell. *Journal für Mathematik-Didaktik*. DOI 10.1007/s13138-015-0083-z.

Kucharz, D., Mackowiak, K., Ziroli, S., Kauertz, A., Rathgeb-Schnierer, E. & Dieck, M. (Hrsg.) (2014). *Professionelles Handeln im Elementarbereich (PRIMEL). Eine deutsch-schweizerische Videostudie*. Münster: Waxmann.

Lindmeier, A. (2013). Video-vignettenbasierte standardisierte Erhebung von Lehrerkognitionen. In U. Riegel & K. Macha (Hrsg.), *Videobasierte Kompetenzforschung in den Fachdidaktiken. Fachdidaktische Forschungen (Bd. 4)* (S. 45-62). Münster: Waxmann.

Rathgeb-Schnierer, E. (2012). Mathematische Bildung. In D. Kucharz et al. (Hrsg.), *Elementarbildung. Reihe Bachelor/Master* (S. 50-85). Weinheim: Beltz.

Steinweg, A. (2008): Zwischen Kindergarten und Schule- Mathematische Basiskompetenzen im Übergang. In F. Hellmich & H. Köster (Hrsg.), *Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und Naturwissenschaften* (S. 143-159). Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt.

Wittmann, G., Levin, A. & Bönig, D. (Hrsg.) (2016). *AnschlussM. Anschlussfähigkeit mathematikdidaktischer Überzeugungen und Praktiken von ErzieherInnen und GrundschullehrerInnen*. Münster: Waxmann.

Nicola OSWALD & Nadine BENSTEIN, Wuppertal

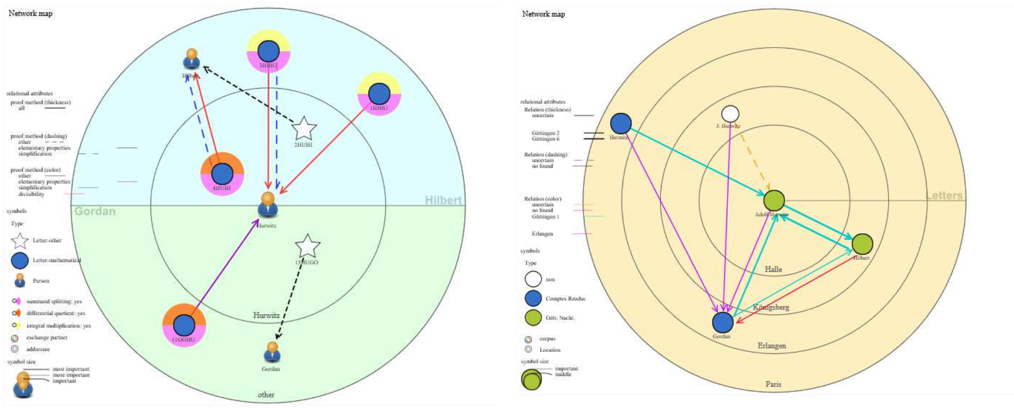
Network Maps als Visualisierungstool

Die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten von Mind und Concept Maps zur Wissensaneignung, -visualisierung oder -strukturierung im Mathematikunterricht wurden bereits ausführlich untersucht (vgl. Brinkmann 2011). Diese Methoden können auf viele Arten Verwendung bei der Erschließung mathematischer Zusammenhänge finden. Mit Hilfe von Network Maps, die Gemeinsamkeiten sowohl mit Concept als auch Mind Maps aufweisen, können historische bzw. kontextuelle Faktoren in diesen Prozess eingebunden werden. Das Wissensnetzwerk wird erweitert durch den authentischen Entstehungskontext bzw. –prozess und somit enge Verknüpfung mathematischer Inhalte zu ihrer Geschichte. Für die Übersetzung von Quellen in visuelle Elemente wird die Software VennMaker eingesetzt, welche den intuitiven Prozess des freien Zeichnens nutzt (vgl. Düring et al. 2011) ähnlich dem Erstellen von Concept Maps (vgl. Novak 1990). So können Network Maps eingesetzt werden um elaboriertes Lernen durch die Einordnung mathematischer Sachverhalte in ihren konzeptuellen Zusammenhang zu begünstigen.

Methode und Fallbeispiel

In einer Network Map wird wie bei einer Mind Map der zentrale Gegenstand, ein Ego oder Phänomen, im Mittelpunkt des zu visualisierenden Netzwerks platziert. Von diesem Zentrum aus werden beteiligte Akteure durch Kanten verbunden, die die Beziehung der Items zueinander darstellen wie bei einer Concept Map. Dem zugrunde liegt der Prozess des phänomenbasierten Zergliederns eines Quelltexts (Korpus) sowie dessen Übersetzung in visuelle Elemente. Network Maps befinden sich also an der Schnittstelle zweier erprobter Visualisierungs- bzw. Strukturierungsmethoden und vereinen deren Eigenschaften so, dass die Differenziertheit von Concept Maps mit der Übersichtlichkeit von Mind Maps kombiniert wird.

Als Fallbeispiel wurde eine Phase in der Entwicklung der Beweise der Transzendenz von e und π analysiert, an dem der jüdische Mathematiker Adolf Hurwitz (1859-1919) maßgebend beteiligt war. Bedingt durch religiöse Ressentiments sowie körperliche Dispositionen, agierte er zu seiner Zeit eher im Hintergrund. So weisen seine etwa 30 mathematischen Notizbücher (Archiv der ETH Zürich) eine Vielzahl an unveröffentlichten mathematischen Überlegungen auf und seine Korrespondenz mit David Hilbert (Niedersächsischen Staats- und Universitätsarchiv Göttingen) liefert Neues über die Weiterentwicklung der bahnbrechenden Beweise. Als Korpus wurden sechs dieser sowie zwei Briefe an Paul Gordan gewählt. Das Phänomen ist gegeben durch den Beweis selbst; als Kategorien wurden etwa „Mathematische Mittel“ und „Mathematische Methoden“ gewählt, wobei die jeweiligen Möglichkeiten als kategorielle Antworten (in einem fiktiven Fragebogen) vorgegeben waren. Entstanden sind Netzwerkkarten, die die Beweisentwicklung aus unterschiedlichen Perspektiven darstellen.



Im linken Bild liegt der Schwerpunkt auf dem Austausch mathematischer Mittel und Methoden, im rechten auf dem Austausch von Briefen zwischen den beteiligten Personen. Es werden folglich sowohl mathematische als auch soziale Prozesse visualisiert. Die Perspektiven und Schwerpunkte können aufgrund der freien Handhabung der Software individuell gewählt, variiert und erprobt werden.

Ausblick

Wissen über die Ursprünge mathematischer Inhalte und deren lange, oft umwegreiche Entwicklung werden selten in die Vermittlung von Mathematik integriert. Sie können aber zum Verständnis und zur Elaboration mathematischer Inhalte beitragen. Zum jetzigen Zeitpunkt wird die beschriebene Methode mit Studierenden der Universität Wuppertal getestet, die Network Maps im Rahmen ihrer Bachelor- und Masterarbeiten generieren.

Literatur

Brinkmann, A. (2011). Visualisieren und Lernen von vernetztem mathematischen Wissen mittels Mind Maps und Concept Maps. In A. Brinkmann, J. Maaß, H.-S. Siller (Hrsg.), *Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht Band 1* (S. 22–35). Aulis Verlag.

Düring, M., Bixler, M., Kronenwett, M. & Stark, M. (2011). Vennmaker for historians: Sources, social networks and software. *REDES - Revista hispana para el análisis de redes sociales* (http://revista-redes.rediris.es), 21(8), 421–652.

Novak, J. D. (1990). Concept maps and Vee diagrams: two metacognitive tools to facilitate meaningful learning. *Instructional Science*, 19, 29–52.

Selma PFENNIGWERTH[1], Simone DUNEKACKE[1], Aiso HEINZE[1], Susanne KURATLI[4], Miriam LEUCHTER[3], Anke LINDMEIER[1], Elisabeth MOSER OPITZ[2], Franziska VOGT[4] & Andrea WULLSCHLEGER[4]; [1]Kiel, [2]Zürich, [3]Landau, [4]St. Gallen

Effekte fachspezifischer Erzieherinnenkompetenz auf den Kompetenzzuwachs 4-6jähriger Kinder

Theoretischer Hintergrund: Die ersten Lebensjahre bilden eine wichtige Grundlage für die Kompetenzentwicklung von Kindern. Dabei belegen Studien eindrücklich die Bedeutung früher mathematischer Fähigkeiten für schulisches Lernen (Krajewski & Schneider, 2009). Besondere Bedeutung für die Kompetenzentwicklung von Kindern wird der Gestaltung der Lernumgebung und der Qualität der Lerngelegenheiten zugesprochen (Sylva et al., 2013). Als Verantwortliche dafür geraten Erziehende und ihre fachspezifischen professionellen Kompetenzen vermehrt in den Forschungsfokus. Vor diesem Hintergrund widmet sich das von der Deutschen Forschungsgesellschaft (DFG) und vom Schweizerischen Nationalfonds (SNF) geförderte Projekt *WILMA – Wir lernen Mathematik!* professionellen Kompetenzen von Erziehenden und deren Einfluss auf die Qualität der Lernsituationen und den Kompetenzzuwachs von Kindern. Die zentrale Forschungsfrage lautet: Lässt sich ein kausaler Wirkzusammenhang von professioneller Kompetenz von Erziehenden auf den Kompetenzzuwachs von Kindern, mediiert über die Qualität der Lehr-Lernsituationen, empirisch bestätigen?

In WILMA wird professionelle Kompetenz in Anlehnung an Lindmeier (2011) fachspezifisch und von den Anforderungen des Kindergartenalltags ausgehend als reflexive (RC) und aktionsbezogene (AC) Kompetenz gefasst. Während sich RC in Vor- und Nachbereitungsphasen von pädagogischen Situationen ohne Zeitdruck zeigt, wird AC als spontanes Handeln in pädagogischen Alltagssituationen verstanden (Lindmeier, 2011).

Beide Kompetenzkomponenten gründen auf fachspezifischem professionellem Wissen (Basiswissen), welches fachliches (*content knowledge*, CK) und fachdidaktisches (*pedagogical content knowledge*, PCK) Wissen umfasst und anschlussfähig an Forschungsbefunde zu professionellen Wissen ist (COACTIV, KomMa etc.)

Forschungsdesign: Das Modell in Abbildung 1 stellt die verschiedenen Untersuchungsebenen des WILMA-Projekts im Überblick dar und zeigt angenommene spezifische Wirkungszusammenhänge sowie mögliche erklärende Moderatorvariablen auf. Neben der querschnittlichen vertieften Untersuchung der Struktur fachspezifischer professioneller Kompetenz über die Maße Basiswissen, RC und AC einerseits wird die Analyse des kausalen Zusammenhangs durch ein experimentelles, längsschnittliches Prä-Post-

Design mit Experimental- und Kontrollgruppe realisiert. Durch verschiedene Fortbildungen (Interventionen zu AC und RC) werden dafür die Kompetenzen der Erziehenden experimentell variiert, um differenzierte Wirkungen auf die von ihnen gestalteten Lernumgebungen sowie den Lernzuwachs der Kinder zu untersuchen. Die Studie nutzt dabei vorliegende Materialien zur mathematischen Förderung durch Regelspiele (spimaf, Hauser et al., 2014). Diese Spiele werden auch in den Fortbildungen genutzt, um fachspezifische Anforderungen der Implementation (RC) bzw. der Lernbegleitung (AC) zu thematisieren.

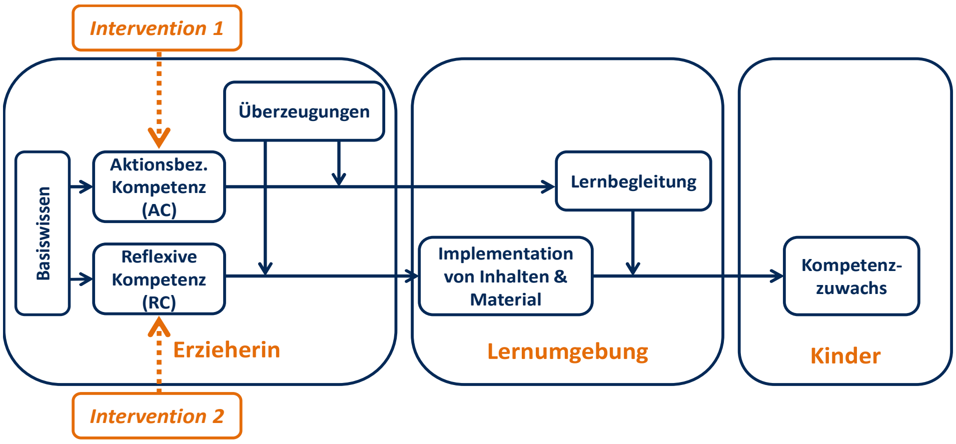


Abb. 1 Angenommenes Wirkmodell professioneller Kompetenzen

Ausblick: Die Studie, die im Frühjahr 2016 mit der Datenerhebung begonnen hat, wird erstmals die Wechselwirkung von verschiedenen Faktoren, die bisher getrennt voneinander untersucht wurden, betrachten. Erkenntnisse können u.a. zur aktuellen Debatte fachspezifischer Professionalisierungsangebote im Bereich frühe Bildung beitragen.

Literatur

Hauser, B., Vogt, F., Stebler, R., & Rechsteiner, K. (2014). Förderung früher mathematischer Kompetenzen: Spielintegriert oder trainingsbasiert. *Frühe Bildung*.

Krajewski, K., & Schneider, W. (2009). Early development of quantity to number-word linage as a precursor of mathematical school achievment and mathematical difficulties. Findings from a four-year longitudinal study. *Learning and Instruction*, *19*(6), 513-526.

Lindmeier, A. (2011). *Modeling and measuring knowledge and competencies of teachers: A threefold domain-specific structure model for mathematics* (Vol. 7). Münster: Waxmann.

Sylva, K., Sammons, P., Chan, L.L., Melhuish, E., Siraj-Blatchford, I., & Taggart, B. (2013). The effects of early experiences at home and pre-school on gains in English and mathematics in primary school: a multilevel study in England. *ZfE*, *16*(2), 277–301.

Johanna RUGE, Leibniz Universität Hannover

Erwartungen an das Mathematiklehramtsstudium

Einleitung und Zielsetzung

Welche Erwartungen haben Mathematiklehramtsstudierende an den Inhalt und Fokus mathematikdidaktischer Veranstaltungen?

In den Erwartungen spiegeln sich (1) eigene Berufsvorstellung der Mathematiklehramtsstudierenden und (2) der institutionelle Rahmen wieder. Erwartungen finden sich auf manifester und latenter Ebene.

(1) Es ist unklar, wie individuelle Berufsvorstellungen konkret Erwartungen an Veranstaltungen im Studium prägen. Welche Aspekte sind dabei aus Studierendenperspektive relevant?

(2) Der Kontext des Mathematiklehramtsstudiums ist gekennzeichnet durch verschiedene Fachkulturen. Wie werden diese Kontextbedingungen von Mathematiklehramtsstudierenden gedeutet? Welchen Einfluss haben diese Deutungen auf die Erwartungen?

Wie lässt sich das Zusammenspiel von individuellen Berufsvorstellungen und Kontextbedingungen beschreiben?

Methodisches Vorgehen

Um die Erwartungen von Studierenden an mathematikdidaktische Lehrveranstaltungen nachvollziehen zu können, werden Bedeutungs-Begründungszusammenhänge (Holzkamp, 1985; Abb. 1) rekonstruiert.

Abbildung 1: Bedeutungs-Begründungszusammenhänge

Hierzu wurden semi-strukturierte Interviews mit Lehramtsstudierenden durchgeführt und mit einer Kombination aus *grounded methods* (Strauss & Corbin, 1990) und Techniken der objektiven Hermeneutik (Wernet, 2009) ausgewertet.

Ergebnisse

<u>Individuelle Vorstellungen (1):</u> Studierende entwickeln basierend auf ihren Erwartungen ihr eigenes Konzept, welches professionelle Wissen sie innerhalb des Studiums erwerben müssen und wollen. Dieses ist geprägt durch das Mathematikbild und das Idealbild einer Mathematiklehrkraft. Es hat einen Einfluss darauf, inwieweit das mathematikdidaktische Lehrangebot angenommen wird. So steht bspw. der Wunsch einer Mathematiklehramtsstudentin nach Ausbildungsstruktur in Zusammenhang mit der Erwartung

Beiträge zum Mathematikunterricht 2016, hrsg. v. Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg. Münster: WTM-Verlag

der Thematisierung von *best-practice* Beispielen in mathematikdidaktischen Lehrveranstaltungen.

Kontextbedingungen (2): Fachkulturen haben einen Einfluss auf das Curriculum eines Faches (bspw. kumulatives Curriculum in der Mathematik vs. Orientierung an praxisrelevanten Themen in den Bildungswissenschaften), die Lehre und das Lernen (Neumann, 2003). Fachkulturelle Prägungen der Studierenden haben bspw. einen Einfluss darauf, wie Prüfungsanforderungen wahrgenommen werden – Mathematikstudierende erleben die vorherrschende Prüfungsform der Klausur als adäquat, während in den Bildungswissenschaften eher auf Hausarbeiten, die auf einen kritischen Theorienvergleich abzielen, gesetzt wird (Iannone, 2015). Lehramtsstudierenden begegnen in ihrem Studium verschiedene Fachkulturen. Es variiert, welche fachkulturellen Aspekte Studierende der Mathematikdidaktik zuschreiben.

Fachkulturelle Deutungen prägen die Erwartungen. So wird bspw. die Prüfungsform der Hausarbeit von einer Mathematiklehramtsstudentin abgelehnt, welche die Mathematikdidaktik eher der Mathematik zuordnet. Der bildungswissenschaftliche Aspekt der Fachdidaktik – der kritische Theorienvergleich – wird nicht als Bestandteil erkannt.

Fazit

Die Mathematikdidaktik ist nicht eindeutig verortet zwischen Mathematik und Bildungswissenschaften, wissenschaftlicher Disziplin und Praxis. Je nach Verortung der Studierenden ändert sich das Zusammenspiel von deren jeweiligen Professionalisierungskonzept und Erwartungen.

Eine Reflexion und offene Thematisierung dieser Aspekte kann helfen, Erwartungshaltungen zwischen Studierenden und Dozierenden zu klären.

Literatur

Holzkamp, K. (1985). *Grundlegung der Psychologie*. Frankfurt/Main, New York: Campus Verlag.

Iannone, P. (2015). Mathematics students perceptions of summative assessment. Vortrag auf der KHDM-Conference - Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline. Hannover (1.-4. Dezember 2015)

Neumann, R. (2003) A Disciplinary Perspective on University Teaching and Learning. In:Tight, M. (Ed.) *Access and Exclusion. International Perspectives on Higher Education Research Series*. (S. 217-245). Oxford: Elsevier Science.

Strauss, A., & Corbin, J. (1990). B*asics of Qualitative Research: Grounded Theory Procedures and Techniques*. Newbury Park, CA: Sage Publication, Inc.

Wernet, A. (2009). *Einführung in die Interpretationstechnik der Objektiven Hermeneutik*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Lena SCHLESINGER, Kirsten BENECKE, Armin JENTSCH, Hamburg

Unterrichtsbeobachtungen zur Messung der Unterrichtsqualität im Rahmen der Studie TEDS-Unterricht

TEDS-Unterricht ist ein Nachfolgeprojekt von TEDS-M und TEDS-FU und startete Anfang 2015 in Hamburg mit dem Ziel, die professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften der Sekundarstufe I und ihres über die Unterrichtsqualität vermittelten Einflusses auf den Leistungszuwachs von Schülerinnen und Schülern empirisch zu untersuchen.

1. Theoretischer Rahmen

Den Rahmen der beschriebenen Studien bildet ein Modell professioneller Kompetenz von Lehrkräften, das aus kognitiven und affektiv-motivationalen Facetten besteht. Die kognitive Facette bildet das Professionswissen der Lehrkräfte, welches in die drei Dimensionen mathematisches Fachwissen, mathematikdidaktisches Wissen und pädagogisches Wissen unterteilt werden kann (Baumert & Kunter, 2006; Blömeke, 2002; Shulman, 1987). Kompetenzen sind erlernbare Fähigkeiten (vgl. Blömeke, Gustafsson & Shavelson, 2015). Diese werden als relativ stabil angesehen, die jedoch durch verschiedene Komponenten beeinflusst werden können.

2. Erhebungsinstrument

Im Rahmen von *TEDS-Unterricht* werden bei einer Teilstichprobe Unterrichtsbeobachtungen im Mathematikunterricht zur Messung der Unterrichtsqualität durchgeführt. Während in der COACTIV-Studie Lehrer- und Schülerbefragungen und eine Analyse der im Unterricht verwendeten Materialien stattgefunden haben, jedoch keine Unterrichtsbeobachtungen (Kunter & Voss, 2011), werden in Hamburg dieselben Konstrukte mit anderen Methoden erhoben. Damit werden eine erhöhte Generalisierbarkeit sowie der Einsatz neuer Analysemöglichkeiten angestrebt. Das Konstrukt der Unterrichtsqualität wird dabei durch die drei Basisdimensionen Klassenführung, konstruktive Unterstützung und kognitive Aktivierung konzeptionalisiert (Kunter & Voss, 2011), welches vielfach die Grundlage empirischer Forschung der letzten Jahre bildete. Darüber hinaus werden diese Basisdimensionen unter Bezug auf Arbeiten von Blum et al. (2006) um eine fachspezifische Dimension ergänzt. Die Anzahl der Datenpunkte wird durch wiederholtes Raten (vier Messzeitpunkte je Doppelstunde) erhöht, um insgesamt eine gute

Reliabilität zu erreichen. Die Items werden von jeweils zwei Ratern auf einer vierstufigen Skala eingeschätzt. Jede Lehrperson wird in zwei Doppelstunden beobachtet. Die Unterrichtsbeobachtungen werden ad hoc durchgeführt, es werden keine Videos aufgezeichnet. Für die Dimension „mathematikdidaktische Merkmale" wurden in Anlehnung an die Pythagoras-Videostudie sowie die Bildungsstandards Mathematik mathematikdidaktische Qualitätsmerkmale zugrunde gelegt. Es werden hierbei unter anderem die Merkmale Darstellungsformen, fachliche Korrektheit der Lehrperson, Förderung allgemeiner mathematischer Kompetenzen, Erklärungen der Lehrperson sowie die fachliche Tiefe unterschieden.

3. Empirischer Rahmen, Pilotierung und Ausblick

Das Beobachtungsinstrument wurde mit n = 13 Lehrkräften in Hamburg, Brandenburg und Schleswig-Holstein pilotiert. Durch die Beobachtung mehrerer Unterrichtsstunden, einer intensiven Schulung und den Einsatz mehrerer Rater wird prominenter Kritik an Unterrichtsbeobachtungen Genüge getan (Praetorius et al., 2012).

Literatur

Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9*, 469-520.

Blömeke, S. (2002). *Universität und Lehrerausbildung*. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt.

Blömeke, S., Gustafsson, J.-E. & Shavelson, R. J. (2015). Beyond Dichotomies. *Zeitschrift für Psychologie*, *223*(1), 3–13.

Blum, W., Drücke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (2006). *Bildungsstandards Mathematik: Konkret. Sekundarstufe 1: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Kunter, M. & Voss, T. (2011). Das Modell der Unterrichtsqualität in COACTIV: Eine multikriteriale Analyse. In M. Kunter et al. (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 85-113). Münster: Waxmann.

Praetorius, A.-K., Lenske, G. & Helmke, A. (2012). Observer ratings of instructional quality: Do they fulfill what the promise? *Learning and Instruction, 22*(6), 387-400.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Research*, *57*, 1-22.

Anselm STROHMAIER, Jana BEITLICH, Matthias LEHNER, Kristina REISS, München

Blickbewegungen beim Lösen mathematischer PISA-Items und der Zusammenhang zu den Lösungsraten dieser Aufgaben

Motivation und Forschungsfrage

Blickbewegungen beim Lesen hängen nicht nur von der Person ab, die liest (Inglis & Alcock, 2012), sondern auch von Charakteristika des Textes. Dies spiegelt sich darin wieder, dass schwerere Texte anders gelesen werden als leichtere (Rayner, Chace, Slattery, & Ashby, 2006). Um einen Einblick in die Rolle des Lesens beim Bearbeiten von mathematischen Aufgaben zu erhalten wurde untersucht, ob auch die Lösungsrate mathematischer Texte in Zusammenhang mit Blickbewegungen beim Lesen dieser Aufgaben steht.

Beim Lesen von Texten vollzieht das Auge prinzipiell zwei Arten von Bewegungen. Während einer *Fixation* ruht der Blick und damit die Aufmerksamkeit auf einem Punkt. Unterbrochen werden die Fixationen durch *Sakkaden*, bei denen das Auge von einem Punkt zum nächsten springt. Diese ballistische Bewegung geschieht in wenigen Millisekunden, in denen keinerlei Information aufgenommen werden kann (Radach & Kennedy, 2004).

Aus der Leseforschung ist bekannt, dass in schwierigeren Texten die Fixationen generell häufiger und andauernder sind sowie die Dauer der Fixationen eine größere Varianz aufweist. Darüber hinaus zeigen Lesende in der Regel mehr Sakkaden sowie einen größeren Anteil an Sakkaden, die gegen die eigentliche Leserichtung gewandt sind, so genannte *Regressionen*. Unsere Hypothese war, dass diese Parameter auch in Zusammenhang mit der Schwierigkeit einer mathematischen Aufgabe stehen.

Methode

An der Studie nahmen 17 Akademikerinnen und Akademiker (11 weiblich, Durchschnittsalter 31,1 Jahre, *SD* = 4,4) ohne explizite mathematische Ausbildung teil. Sie lösten neun PISA-Items an einem Eye Tracker (SMI RED500).

Ergebnisse

Die Lösungsraten der Items lagen zwischen 29 % und 100 %. Betrachtet wurden die Pearson-Korrelationskoeffizienten zwischen der Lösungsrate und den folgenden Leseparametern:

- Mittlere durchschnittliche Fixationsdauer (MEANFIX)

- Mittlere Standardabweichung der Fixationsdauer (SDFIX)
- Anteil der Regressionen an den Sakkaden (REGRATIO)
- Fixationen pro Buchstabe der Aufgabe (FIXCHAR)
- Sakkaden pro Buchstabe der Aufgabe (SACCHAR)
- Regressionen pro Buchstabe der Aufgabe (REGCHAR)

Es zeigten sich teilweise hohe und signifikante Korrelationen zwischen den Leseparametern und den Lösungsraten der Items. Zusätzlich zeigten sich weitere mittlere, aber nicht signifikante Korrelationen:

	MEANFIX	*SDFIX*	*REGRATIO*	*FIXCHAR*	*SACCHAR*	*REGCHAR*
Lösungsrate	-.43	-.87**	-.64	-.67*	-.69*	-.73*

* Korrelation ist bei Niveau .05 signifikant (zweiseitig). ** Korrelation ist bei Niveau .01 signifikant (zweiseitig).

Diskussion und Ausblick

Die Ergebnisse aus der Leseforschung scheinen sich auch für mathematische Aufgaben zu bestätigen: Mathematische Aufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit werden unterschiedlich gelesen. Das bestärkt das Vorhaben, Leseforschung für mathematische Aufgaben und Texte weiter voranzutreiben.

Die Studie dient als Pilotstudie zur Aussagekraft von Blickbewegungen im Zusammenhang mit Aufgabenschwierigkeit. Analysen zum Zusammenhang zur empirisch festgestellten bzw. wahrgenommenen Itemschwierigkeit sowie kognitiven Prozessen stehen noch aus. Darauf basierend sollen Studien mit größeren Stichproben folgen, um zu untersuchen, wie Charakteristika der Lernenden, der Aufgaben und der Blickbewegungen zusammenhängen.

Literatur

Inglis, M., & Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(4), 358–390.

Radach, R., & Kennedy, A. (2004). Theoretical perspectives on eye movements in reading: Past controversies, current issues, and an agenda for future research. *European Journal of Cognitive Psychology, 16*(1/2), 3–26.

Rayner, K., Chace, K. H., Slattery, T. J., & Ashby, J. (2006). Eye Movements as Reflections of Comprehension Processes in Reading. *Scientific Studies of Reading, 10*(3), 241–255.

Rayner, K., Pollatsek, A., Ashby, J., & Clifton, C. Jr. (2012). *Psychology of reading* (second edition). New York: Psychology Press.

Daniel THURM, Essen

Essener Modellierungstag (EMTA) - Design eines Ausbildungsmoduls zum mathematischen Modellieren in der Lehrerausbildung.

Mathematischen Modellieren wird für den Aufbau von Mathematical Literacy als zentral angesehen. Folgerichtig ist „Mathematisch Modellieren“ auch in den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz als eine Kernkompetenz fest verankert. Trotzdem wird dem Modellieren im alltäglichen Mathematikunterricht nicht die entsprechende Bedeutung beigemessen. Sollen Veränderungen im Schulalltag erreicht werden, so muss daher einerseits am aktuellen Schulunterricht angesetzt werden und anderseits müssen Lehramtsstudierende für diesen Bereich sensibilisiert und mit den entsprechenden Kompetenzen ausgestattet werden. Dabei stellt sich die Frage, wie eine kompetenzorientierte und praxisnahe Ausbildung von Lehrkräften in diesem Bereich gestaltet werden kann (u.a. Schwarz 2007, Borromeo Ferri, 2009).

Im Rahmen der Neugestaltung der Lehrerausbildung an der Universität Duisburg-Essen wurde das Pflichtmodul „Mathematisch Modellieren“ entwickelt, in welchem Studierende in einem Dreischritt aus Entwicklung, Erprobung und Reflexion einer Modellierungsaufgabe im Rahmen eines Schülermodellierungstags die nötigen professionellen Kompetenzen erwerben sollen.

Design des Ausbildungsmoduls

Das Design des Ausbildungsmoduls orientierte sich dabei in Anlehnung an Borromeo Ferri (2009) an folgenden Kompetenzbereichen: (1) Kenntnisse über Ziele, Perspektiven, Modellierungskreisläufe und Aufgabentypen, (2) Lösen, Erstellen und Analysieren von Modellierungsaufgaben, (3) Planung und Durchführung von Modellierungsstunden, (4) Modellierungsprozesse von Schülerinnen und Schülern diagnostizieren. Insbesondere die Aspekte (3) und (4) lassen sich dabei ohne einen Praxisbezug kaum bei den Studierenden entwickeln. Um dies zu realisieren wurde ein Modellierungstag in das Modul integriert. Für diesen Tag entwickeln die Studierenden eigene Modellierungsaufgaben, welche sie dann mit Schülerinnen und Schüler lokaler Partnerschulen erproben.

Um die Schülerinnen und Schüler auf den Modellierungstag vorzubereiten, erhalten die teilnehmenden Schulen im Vorfeld konkrete Hilfestellungen, um Modellierungsaufgaben in ihrem Unterricht zu integrieren. Hierbei werden auch metakognitive Aspekte wie zum Beispiel die Nutzung eines Schüler-Modellierungskreislaufs als „Lösungsplan“ (z.B. Schukajlow et al. 2010) bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben einbezogen. So gelingt einerseits die Stärkung des Einbezugs von Modellierungskontexten in den Schulen, anderseits können die Lernenden entsprechend auf die Bearbeitung von Modellierungsaufgaben am Modellierungstag vorbereitet werden.

Die Studierenden entwickeln in Vorbereitung auf den Modellierungstag theoriegeleitet eigene Modellierungsaufgaben. Sie nutzen dabei die in der Vorlesung vermittelten Theorieelemente. Diese werden in der Vorlesung aktiv-selbständig erarbeitet. Die Entwicklung der Aufgaben wird dabei in den wöchentlichen Übungsgruppen begleitet. Dies geschieht, indem die Aufgaben kontinuierlich reflektiert, diskutiert und verbessert werden. Am Modellierungstag selber erproben die Studierenden ihre selbst entwickelten Aufgaben. In den Folgewochen analysieren und reflektieren die Studierenden die Durchführung der Aufgaben und reflektieren Hürden beim Modellieren anhand der am Modellierungstag entstandenen Schülerprodukte und Beobachtungen. Insgesamt sollen so alle vier oben genannten Kompetenzfacetten bei den Studierenden angesprochen werden.

Erfahrungen zeigen, dass Studierende in der Lage sind geeignete Modellierungsaufgaben für die Schülerinnen und Schüler zu entwickeln. Die Qualität der entwickelten Aufgaben ist jedoch von einer intensiven Begleitung der Entwicklung abhängig. Evaluationsergebnisse zeigen, dass die Studierenden insbesondere die direkte Anwendung der theoretischen Hintergründe zum Modellieren als sehr motivationsfördernd wahrnehmen. Für die Zukunft angedacht ist eine tiefergehende empirische Untersuchung der Wirkung des Ausbildungsmoduls auf die Kompetenzfacetten der Studierenden.

Literatur

Borromeo Ferri, R., & Blum, W. (2009). Mathematical Modelling in Teacher Education - Experiences from a Modelling Seminar. In European Society for Research in Mathematics Education (Hrsg.), *Proceedings of CERME 6,* (S. 2046-2055). Lyon: CERME.

Borromeo Ferri, R., Greefrath, G., Kaiser, G. (2013). *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Theoretische und didaktische Hintergründe*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schwarz, B.; Kaiser, G. (2007). Mathematical Modelling in school – experiences from a project integrating school and university. In Pitta-Pantazi, D; Philippou, G. (Hrsg.), *CERME 5 – Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 2180-2189).

Schukajlow, S., Blum, W., Krämer, J., Besser, M., Brode, R., Leiss, D., Messner, R. (2010). Lösungsplan in Schülerhand: zusätzliche Hürde oder Schlüssel zum Erfolg? In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 771-774). Münster: WTM Verlag

Katrin VORHÖLTER, Alexandra KRÜGER, Lisa WENDT, Hamburg

Förderung metakognitiver Modellierungskompetenzen von Schülerinnen und Schülern

Theoretischer Hintergrund

Beim mathematischen Modellieren geht es um die Bearbeitung realer, außermathematischer Probleme mit Hilfe mathematischer Verfahren (Kaiser et al. 2015). Die hierfür notwendige Modellierungskompetenz wird in der Forschung unterteilt in Teilkompetenzen entlang des Modellierungskreislaufs und globale Modellierungskompetenz. Letztere umfasst u.a. metakognitive Modellierungskompetenzen, die sich wiederum unterteilen lassen in deklaratives und prozedurales Wissen, welches metakognitive Strategien anspricht. Eine Ausdifferenzierung bedeutsamer metakognitiver Strategien findet sich in Vorhölter & Kaiser (2016). Die Verwendung metakognitiver Strategien hilft bei der Überwindung möglicher kognitiver Hürden, welche in jedem Schritt des Modellierungskreislaufs auftreten können. Lehrkräfte können ihre Schülerinnen und Schüler bei der Überwindung von Schwierigkeiten durch angemessene Interventionen unterstützen. (Blum 2015) Diese können im Allgemeinen auf unterschiedlichen Ebenen erfolgen (Zech 2002), wobei das Prinzip der minimalen Hilfe berücksichtigt werden sollte. Als besonders hilfreich für die eigenständige Bearbeitung mathematischer Modellierungsaufgaben haben sich strategische Hilfen erwiesen (Stender & Kaiser 2015).

Das Projekt MeMo

Für den Bereich der mathematischen Modellierung gibt es inzwischen eine Anzahl an Studien, die darlegen, dass der metakognitiven Komponente von Modellierungskompetenz eine hohe Bedeutung zukommt (vgl. Blum 2015). Dennoch ist bislang ungeklärt, wie diese Teilfacette von Modellierungskompetenz gefördert werden kann und welche Sichtweise Lernende und Lehrkräfte auf den Einsatz metakognitiver Strategien haben.

Kern der geplanten Studie ist die Erprobung einer Lernumgebung, in der sechs Modellierungsaktivitäten in einem Zeitraum von einem halben Jahr durchgeführt werden. Eine der Teilstudien zielt auf die Überprüfung der Effektivität dieser Lernumgebung zur Förderung metakognitiver Modellierungskompetenzen. Hierzu werden die teilnehmenden 24 Klassen in eine Interventions- und eine Kontrollgruppe geteilt. In der Interventionsgruppe wird in der Besprechung der Aufgabenbearbeitung mit den Schülerinnen und Schülern der Einsatz metakognitiver Strategien thematisiert, in der Kontrollgruppe die verwendeten mathematischen Verfahren. In einer weiteren Teilstudie wird die Sichtweise der beteiligten Schülerinnen und Schüler auf die angewendeten eigenen metakognitiven Strategien, aber auch die der anderen rekonstruiert. Darüber hinaus soll in einer weiteren Teilstudie analysiert werden, inwiefern die im Rahmen des Projekts durchgeführte Lehrerfortbildung zu strategischen Interventionen beim mathematischen Modellieren Einfluss auf das Lehrerverhalten während der Modellierungstätigkeiten, aber auch in ihrem weiteren Unterricht hat.

Methodisches Vorgehen

Zur Überprüfung der Effektivität der Lernumgebung wird in einem Pre-Post-Design die Modellierungskompetenz wie metakognitive Kompetenz der Schülerinnen und Schüler vor Beginn der Intervention sowie nach der Intervention erhoben. Während der Durchführung der Lernumgebung wird der Bearbeitungsprozess ausgewählter Kleingruppen videografiert. Im Anschluss wird in Anlehnung an das Drei-Stufen-Design von Busse & Borromeo Ferri (2003) mit den betroffenen Lernenden ein NLD durchgeführt, an das sich ein Interview anschließt. Die Lehrerperspektive wird auf dieselbe Art erhoben, wofür ihnen ausgewählte Interventionsszenen vorgespielt werden, an denen sie beteiligt waren.

Literatur

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? In: S. J. Cho (Hg.): The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. Cham: Springer International Publishing, S. 73–96.

Busse, A.; Borromeo Ferri, R. (2003). Methodological reflections on a three-step-design combining observation, stimulated recall an interview. In: ZDM 35 (6), S. 257–264.

Kaiser, G.; Blum, W.; Borromeo Ferri, R.; Greefrath, G. (2015). Anwendungen und Modellieren. In: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme und H.-G. Weigand (Hrsg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg (S. 357–383).

Stender, P. & Kaiser, G. (2015). Scaffolding in complex modelling situations. In: *ZDM Mathematics Education* 47 (7), S. 1255–1267.

Vorhölter, K.; Kaiser, G.(2016). Theoretical and Pedagogical Considerations in Promoting Students’ Metacognitive Modeling Competencies. In C. Hirsch (Hrsg.) *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* . Reston: National Council of Teachers of Mathematics (S. 273-280).

Zech, F. (2002). Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik. Weinheim [u.a.]: Beltz.

Katrin VORHÖLTER, Hamburg, Nils BUCHHOLTZ, Hamburg

Beschulung von Flüchtlingskindern in Hamburg

Rund 4650 neu zugewanderte Kinder und Jugendliche wurden zu Beginn des Schuljahres 2015/16 in besondere Bildungsangebote Hamburger Schulen aufgenommen. Dadurch hat sich der Anteil von Flüchtlingskindern in den allgemeinbildenden Schulen insbesondere im letzten Jahr aufgrund der andauernden politischen Konflikte in Syrien, Afghanistan und im Irak deutlich erhöht (Behörde für Schule und Berufsbildung, 2016).

Entscheidend für die zu besuchende Klassenform ist der Grad der Alphabetisierung. Basis- bzw. Alphabetisierungsklassen nehmen Flüchtlinge auf, die nicht in der lateinischen Schrift alphabetisiert sind oder die in ihrem Heimatland bisher keine Schulbildung erfahren haben. Sind bereits schulische Kenntnisse und erste, wenn auch rudimentäre Lese- und Schreibkompetenzen in der deutschen Sprache vorhanden, erfolgt die Zuweisung zu einer sog. Internationalen Vorbereitungsklasse (IVK). Die maximale Aufenthaltsdauer in beiden Klassenformen beträgt für jede Schülerin und jeden Schüler maximal ein Jahr; dann erfolgt der Übergang in die nächsthöhere Klassenart (IVK oder Regelklasse). Die Klassen sind gestaffelt nach dem Alter der Lernenden und dementsprechend an Grundschulen beziehungsweise Stadtteilschulen, seltener auch an Gymnasien angegliedert. Teilweise findet an den Stadtteilschulen sogar eine zielgerichtete Vorbereitung des ersten allgemeinbildenden Schulabschlusses (ESA) und des mittleren Schulabschlusses (MSA) statt. Bestandteil der Ausbildung in diesen Klassen ist daher neben dem Spracherwerb auch ein substanzieller Anteil an Mathematikunterricht. Aktuell gibt es in Hamburg 69 Lerngruppen in den zentralen Erstaufnahmen für Flüchtlinge, 38 Basisklassen und 164 IVK (davon 36 mit ESA/MSA-Ausrichtung).

Bisher liegen nur wenig wissenschaftliche Erkenntnisse über den Mathematikunterricht in Klassen mit Flüchtlingskindern vor (z.B. Miller, 2009). Auch Materialien zum sprachsensiblen Mathematikunterricht, auf die Lehrkräfte in diesen Klassen zurückgreifen können, existieren erst vereinzelt (z.B. Meyer & Prediger, 2012; Abshagen, 2015). Die Materialien berücksichtigen zwar sprachliche Heterogenität. In den betroffenen Klassen wird diese allerdings zusätzlich von einer extremen Heterogenität in Bezug auf das mathematische Vorwissen begleitet.

Eine von uns in Hamburg durchgeführte Untersuchung von Mathematikunterricht in Flüchtlingsklassen zielt darauf, Ansätze von „best practice“ beim Unterricht in diesen Klassen sowie spezifische Bedarfe zu identifizieren.

Durchgeführt wurden dazu Unterrichtsbeobachtungen und Interviews mit sechs Lehrkräften in IVK und Basisklassen. Für die Unterrichtsbeobachtungen wurde die Unterrichtsqualität in den Klassen durch ein halbstrukturiertes Beobachtungsinstrument im Rahmen teilnehmender Beobachtung erfasst. Dabei wurden verschiedene, für den Unterricht in Flüchtlingsklassen relevante Aspekte von Unterrichtsqualität berücksichtigt (u. a. Helmke, 2010):

- Individualisierung
- Klassenführung
- Diagnostik
- Kognitive Aktivierung
- Fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung
- Sprachsensibler Fachunterricht

Zusätzlich wurden Interviews mit den Lehrkräften geführt, die folgende Aspekte berücksichtigten:

- Unterrichtsmethoden
- Umgang mit der Lerngruppe
- Schulische Rahmenbedingungen

Die Auswertung der Unterrichtsbeobachtungen und der Interviews erfolgte mit Hilfe des codierenden Verfahrens der Grounded Theory. Die Beobachtungen zeigen beispielsweise den vermehrten Einsatz einseitiger Unterrichtsmethoden (kleinschrittiger Frontalunterricht bzw. stark individualisierter Unterricht). Dieser Umstand wirft Fragen nach angemessenen Unterrichtsformen für den Mathematikunterricht in diesen Lerngruppen auf.

Literatur

Abshagen, M. (2015). Praxishandbuch Sprachbildung Mathematik. Sprachsensibel unterrichten – Sprache fördern. Stuttgart: Klett-Verlag.

Behörde für Schule und Berufsbildung (2016). Schuljahresstatistik 2015. Ausgewählte Ergebnisse. Online in Internet: http://www.hamburg.de/contentblob/4471992/data/ ppt-praesentation-zur-schuljahresstatistik-2015-16.pdf (letzter Zugriff 29.02.2016).

Helmke, A. (2010). Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Seelze-Velber: Kallmeyer/Klett.

Meyer, M. & Prediger, S. (2012). Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht. PM – Praxis der Mathematik in der Schule, 45, 2-9.

Miller, J. (2009). Teaching Refugee Learners with Interrupted Education in Science: Vocabulary, Literacy and Pedagogy. International Journal of Science Education, 31(4), 571-592.

Candy WALTER, Hildesheim

Wie entstehen die 3D-Gebäudemodelle bei Google Earth? – SketchUp: Modellieren im virtuellen Raum

Was ist Google *SketchUp* und was bietet das Programm? SketchUp ist eine kostenlose Software der Firma *Trimble*, mit der sich „schnell“ und „einfach“ dreidimensionale Objekte virtuell erzeugen lassen. Mit SketchUp lassen sich „problemlos“ Aufgaben im Bereich „Raum und Form“ und „Messen“ bearbeiten. Darüber hinaus bietet SketchUp die Möglichkeit Modellierungskompetenzen aufzubauen und zu vertiefen. Für den Mathematikunterricht kann SketchUp somit eine *abwechslungsreiche Unterstützung mit hohen Motivationscharakter* bieten.

Bildungsauftrag: Leitidee Raum und Form

Innerhalb der nationalen Bildungsstandards lassen sich mit SketchUp verschiedene verbindlich zu unterrichtende Kompetenzen fördern (KMK 2003, S. 11). Die Schülerinnen und Schüler …

- stellen geometrische Figuren im kartesischen Koordinatensystem dar,
- stellen Körper(z. B. als Netz, Schrägbild oder Modell) dar,
- analysieren und klassifizieren geometrische Objekte der Ebene und des Raumes,
- zeichnen und konstruieren geometrische Figuren unter Verwendung angemessener Hilfsmittel wie […] dynamische Geometriesoftware,
- setzen geeignete Hilfsmittel beim explorativen Arbeiten und Problemlösen ein.

Die Pisa-Studie 2012

Trotz der verbindlich zu unterrichtenden Inhalte, zeigt sich bis heute für die inhaltsbezogene Kompetenz Raum und Form, dass die hier analysierten *„Befunde auf […] relative Schwächen im Bereich […] Raum und Form“* hinweisen und sich somit *„ein Ansatzpunkt für eine weitere Verbesserung mathematischer Kompetenz in Deutschland“* abzeichnet. (Pisa 2012, S. 82) Einen möglichen Ansatzpunkt bietet Google SketchUp.

Möglicher Unterrichtsgang in sechs Phasen zur Leitidee Raum und Form

Um Motivation bei den Schülerinnen und Schüler für die Arbeit mit Google SketchUp zu wecken könnte sie mit folgender Frage konfrontiert werden: *Wie entstehen eigentlich die 3D-Geäudemodelle in Google Earth?* Je nach Klassenstufe und Lernstand bietet sich ein Zeitrahmen von ca. 4 bis

6 Zeitstunden an. Nach unserer Erfahrung lernen die Schülerinnen und Schüler den Umgang mit SketchUp sehr schnell, sodass der Einstieg, um das Programm kennenzulernen, nicht länger als eine Schulstunde (ca. 45 Min) in Anspruch nehmen sollte. Unsere Erfahrungen beruhen auf der Bearbeitung eines Tutoriums für eine 6ten Realschulklasse. Nachfolgend beschreiben wir nun einen möglichen Unterrichtsgang für SketchUp (den Umgang mit dem Programm setzen wir als bekannt voraus). *Zum Beginn* der Einheit erfolgt in der Einstiegsphase eine kurze Ideensammlung. Die Lernenden nennen (einfache) Beispiele für eine mögliche Modellierung, z.B. Spielfiguren (Legosteine, Schachfiguren etc.), Stifte oder Getränkeflachen. Die Ideen werden an der Tafel festgehalten. In der *ersten Erarbeitungsphase* erstellen die Lernenden eine Zeichnung bzw. Skizze ihres gewählten Objektes (Enaktiv → Ikonischer Übergang – von 3D nach 2D). In der *ersten Sicherungsphase* stellen die Schülerinnen und Schüler verschiedene, zu den Objekten gehörende, geometrische Figuren heraus, z.B. Kreise, Zylinder etc. Die Sicherung erfolgt an der Tafel. Anschließend werden wenn möglich verschiedene Vorgehensweisen zur Nachkonstruktion (mit SketchUp) an der Tafel gesammelt (*zweite Erarbeitungsphase + Tafelsicherung*). In der *dritten Erarbeitungsphase* erfolgt die Modellierung des gewählten Objekts mit SketchUp (von 2D nah 3D). Im letzten Unterrichtsgang erfolgt die *dritte Sicherungsphase* und damit die Betrachtung der verschiedenen Schülerergebnisse. Hierbei werden mögliche Probleme (z.B. Schwierigkeiten beim Konstruieren oder Modellfehler durch „CameraClipping Plan“) offen diskutiert. Wenn möglich, sollten die Lernden auftretende Konstruktionsfehler (z.B. verschnitte am Modell oder zu kurze bzw. zu lange Modellelemente) selbst beheben.

Anschluss

Sofern möglich, sollten die Lernenden nun die Möglichkeit bekommen (evtl. auch als Hausaufgabe) ein (einfaches) Gebäudemodell in Google Earth zu erstellen und zu integrieren. Sie können hier ja vielleicht die Schule oder das eigene Haus Modellieren lassen.

Literatur

Ruppert, M & Wörler, J. (2013). *Technologien im Mathematikunterricht*. Springer, S.136–156.

KMK - Beschlüsse der Kultusministerkonferenz (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Beschluss vom 04.12.2003.

Alexander WILLMS, Stefan UFER, LMU München

Mathematiklernen mit Arbeitsmitteln in der Sekundarstufe

Ein Arbeitsmittel ist ein konkretes Material, das Schülerinnen und Schülern durch die direkte, physikalische Interaktion die Möglichkeit bietet, mathematisches Wissen zu konstruieren (Krauthausen & Scherer, 2007). Arbeitsmittel können genutzt werden als Mittel zur Zahldarstellung, Mittel zum Rechnen und als Argumentationsmittel. Der Einsatz findet sowohl in der Primar- als auch in der Sekundarstufe statt (Wartha & Schulz, 2011).

Die Effektivität des Einsatzes von Arbeitsmitteln ist gut gesichert, insbesondere in den Bereichen Stellenwertsystem und Bruchrechnung (Carbonneau et al., 2013), allerdings liegen bisher wenige empirische Kenntnisse über die Rahmenbedingungen, die diese Effektivität beeinflussen und über Indikatoren für effektive Arbeitsprozesse mit Arbeitsmitteln vor. Zudem werden Erklärungsansätze für die variierende Wirksamkeit auf unterschiedliche Lernergebnisse (prozedurales Wissen, konzeptuelles Wissen und Transfer) gesucht.

Als Vorbereitung eines Promotionsprojekts wurde daher zunächst ein theoretisches Arbeitsmodell für arbeitsmittelbasierte Lehr-Lern-Prozesse entworfen, das als Grundlage für mögliche Forschungsfragen sowie mögliche Studiendesigns verwendet werden soll.

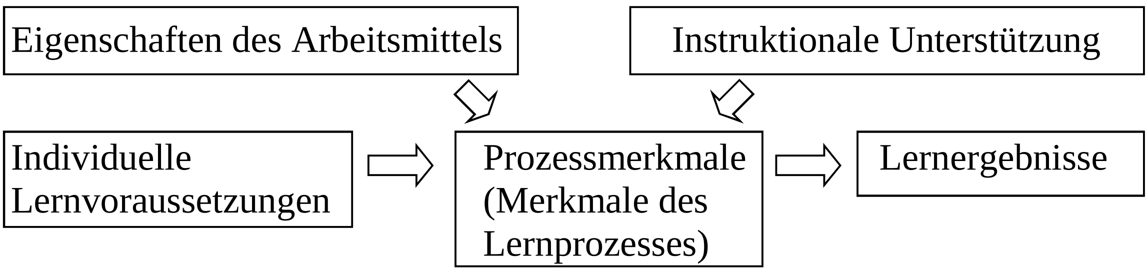


Abb. 1: Arbeitsmodell für arbeitsmittelbasierte Lehr-Lern-Prozesse

Die Eigenschaften des Arbeitsmittels selbst haben Einfluss auf den Lernprozess. So wird diskutiert, ob realistische Darstellungen die Aktivierung von konzeptrelevantem Vorwissen (practical knowledge, Burns, 1996) begünstigen, und ob höherwertige Lernergebnisse durch ein Arbeitsmittel erreicht werden können, das reichhaltige Anknüpfungen an Alltagswissen erlaubt (z.B. Ähnlichkeit zu realen Objekten wie z.B. Pizzas, Brown et al., 2009). Es finden sich in der Literatur auch Hinweise auf hinderliche Wirkungen reichhaltiger Materialien (McNeil et al., 2009).

Ebenfalls beleuchtet werden soll die Rolle der instruktionalen Unterstützung im Lernprozess. Es soll untersucht werden, welche vorbereitenden und begleitenden Instruktionen notwendig sind und wie eine sinnvolle Unterstützung der Ablösung vom Arbeitsmittel angeboten werden kann (Fyfe et al., 2014, Wartha & Schulz, 2011).

Folgende Ziele sollen im anvisierten Projekt insbesondere fokussiert werden:

1. Theoretische Beschreibung von Merkmalen wirksamer, arbeitsmittelbasierter Lernprozesse.

2. Beschreibung und empirische Untersuchung von Prozessmerkmalen auf ihre Beziehung zur Wirksamkeit auf unterschiedliche Lernergebnisse.

3. Untersuchung der Effekte von Merkmalen instruktionaler Unterstützung beim Lernen mit Arbeitsmitteln.

Im Rahmen einer Einheit zur Einführung von Brüchen in Jahrgangsstufe 6 sollen zunächst arbeitsmittelbasierte Lernumgebungen pilotiert werden. Danach sollen einzelne Prozessmerkmale operationalisiert und auf ihren Zusammenhang mit Lernvoraussetzungen und -ergebnissen hin untersucht werden. Darauf aufbauend soll in einer experimentellen Studie untersucht werden, wie spezifische instruktionale Maßnahmen, z.B. die Anregung von Verbalisierungs- und Selbsterklärungsaktivitäten, den Lernprozess und den Lernerfolg beeinflussen.

Literatur

Brown, M.C., McNeil, N.M., Glenberg, A.M. (2009). Using concreteness in education: Real problems, potential solutions. *Child Development Perspectives*, *3(3)*, 160 - 164.

Burns, M. (1996). How to make the most of math manipulatives. *Instructor, 105(7)*, 45 - 51.

Carbonneau, K., Marley, S., Selig, J.P. (2013). A Meta-Analysis of the Efficacy of Teaching Mathematics With Concrete Manipulatives. *Journal of Educational Psychology. Vol. 105, No. 2*, 380 - 400.

Fyfe, E.R., McNeil, N., Son, J., Goldstone, R. (2014). Concreteness Fading in Mathematics and Science Instruction: a Systematic Review. *Educational Psychology Rewiew, 26*, 9 - 25.

Krauthausen, G., Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*, 3. Aufl., Spektrum Akad. Verlag.

McNeil, N.M., Uttal, D., Jarvin, L., Sternberg, R. (2009). Should you show me the money? Concrete objects both hurt and help performance on mathematics problems. *Learning and Instruction*, *19(2)*, 171 - 184.

Wartha, S., Schulz, A. (2011). *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen*, Publikation des Programms SINUS an Grundschulen.

Anna KÖRNER, Bremen

Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen in der Grundschule

Die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen ist ein zentrales Ziel des Arithmetikunterrichts der Grundschule, allerdings zeigen Grundschüler*innen empirischen Ergebnissen zufolge kaum aufgabenadäquates Handeln (vgl. z.B. Selter 2000). Im Rahmen eines qualitativen Forschungsprojekts soll deshalb der Frage nachgegangen werden, wie sich die Teilkompetenzen flexiblen Rechnens im Verlauf der Grundschule auf Grundlage geeigneter Unterrichtsaktivitäten entwickeln.

Theoretischer und empirischer Rahmen

In Anlehnung an Rathgeb-Schnierer (2008) wird im Rahmen dieser Untersuchung unter Flexibilität bzw. flexiblem Rechnen ein aufgabenadäquates Handeln verstanden, bei dem der Lösungsweg durch das Erkennen und Nutzen von Zahl- und Aufgabenmerkmalen und -beziehungen vereinfacht werden soll. Maßnahmen zur Entwicklung und Förderung flexibler Rechenkompetenzen lassen sich dann idealtypisch zwei verschiedenen theoretischen Ansätzen (*Strategiewahl- und Emergenzansatz*) und darauf aufbauenden Unterrichtskonzeptionen (*explizierender und problemlöseorientierter Unterricht*) zuordnen (vgl. Schwabe et al. 2014).

Basierend auf dem Emergenzansatz, bei dem davon ausgegangen wird, dass flexible Rechner*innen Zahl- und Aufgabenbeziehungen und -merkmale *während* des Lösungsproesseses erkennen und nutzen, unterscheidet Rathgeb-Schnierer (2008) verschiedene Teilkompetenzen flexiblen Rechnens, die mithilfe von Aktivitäten zur Zahlenblickschulung gefördert werden können. Qualitative Untersuchungen in den ersten beiden Schuljahren belegen den positiven Einfluss solcher Unterrichtsaktivitäten auf die Entwicklung der Flexibilität der Schüler*innen (vgl. Rathgeb-Schnierer 2006, Rechtsteiner-Merz 2013), bislang wurden jedoch noch keine längsschnittlichen Untersuchungen zur Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen im Verlauf der gesamten Grundschulzeit durchgeführt.

Untersuchungsdesign

Um diese Forschungslücke zu schließen, soll im Rahmen einer qualitativen Studie folgender zentraler Forschungsfrage nachgegangen werden:

Wie entwickeln sich die Teilkompetenzen flexiblen Rechnens im Verlauf der Grundschulzeit, wenn im Mathematikunterricht von Klasse 1 bis 4 kontinuierlich Aktivitäten zur Zahlenblickschulung angeboten werden?

Im Rahmen eines *‚classroom teaching experiment'* (vgl. Yackel 2001) werden drei erfahrene Grundschullehrkräfte in mehreren Fortbildungen theoretisch und unterrichtspraktisch auf die Förderung flexibler Rechenkompetenzen mithilfe der sogenannten Zahlenblickschulung vorbereitet und durch regelmäßig stattfindende Austausch- und Evaluationstreffen begleitet. Vorhandene Aktivitäten zur Zahlenblickschulung (vgl. z.B. Rathgeb-Schnierer 2006, 2008; Rechtsteiner-Merz 2013) und entsprechende eigene Weiterentwicklungen werden dann in diesen Klassen im Umfang von etwa einer Schulstunde pro Woche im Arithmetikunterricht kontinuierlich im Verlauf der gesamten Grundschulzeit angeboten.

Um die kindlichen Entwicklungen der Teilkompetenzen flexiblen Rechnens im Rahmen dieses Unterrichts zu erfassen, werden regelmäßig (jeweils in der Mitte und am Ende jedes Schuljahres) leitfadengestützte Einzelinterviews durchgeführt. Durch qualitative Inhaltsanalysen und anschließende Fallkontrastierung und Typenbildung (vgl. Kelle & Kluge 2010) sollen unter Einbezug bisheriger theoretischer und empirischer Erkenntnisse (vgl. u.a. Rechtsteiner-Merz 2013, Rathgeb-Schnierer 2006) schließlich typische Entwicklungsverläufe rekonstruiert werden.

Literatur

Kelle, U. & Kluge, S. (2010). *Vom Einzelfall zum Typus. Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung* (2., überarb. Aufl.). Wiesbaden: VS.

Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen. Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze.* Hildesheim: Franzbecker.

Rathgeb-Schnierer (2008). Ich schau mir die Zahlen an, dann sehe ich das Ergebnis. Zahlenblick als Voraussetzung für flex. Rechnen. *Grundschulmagazin*, 76(4), 8-12.

Rechtsteiner-Merz, C. (2013). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung. Entwicklung und Förderung von Rechenkompetenzen bei Erstklässlern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen.* Münster: Waxmann.

Schwabe, J., Grüßing, M., Heinze, A. & Lipowsky, F. (2014). *Instruktionsstrategien zur Förderung der individuellen Kompetenz zur adaptiven Wahl von Additions- und Subtraktionsstrategien im Zahlenraum bis 1000. Ergebnisbericht (Stand März 2014).* URL: http://www.ipn.uni-kiel.de/de/forschung/das-ipn/abteilungen/didaktik-der-mathematik/dokumente/ergebnisbericht-tiger/at_download/file [letzter Aufr.: 28.02.16].

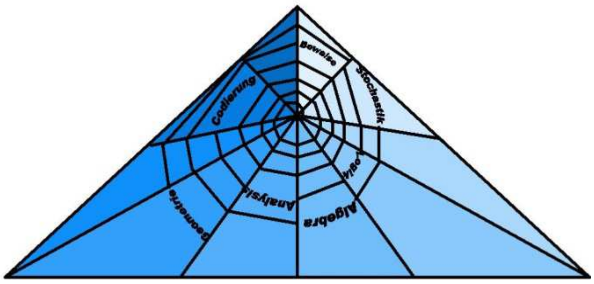
Selter, C. (2000). Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. *Journal für Mathematikdidaktik,* 21(3-4), 227-258.

Yackel, E. (2001). Perspectives on arithmetic from classroom-based research in the United States of Amerika. In J. Anghileri (Hrsg), *Principles and Practices in Arithmetic Teaching. Innovative approaches for the primary classroom* (S. 15-31). Maidenhead: Open University Press.

Teil 5:
Berichte der Arbeitskreise

Matthias BRANDL, Passau; Astrid BRINKMANN, Münster; Thomas BORYS, Karlsruhe

Bericht des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“



Der Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ besteht nun mehr als sieben Jahre. Weiterhin setzen wir unsere Arbeit an der altbekannten und zentralen Forderung an das Lernen von Mathematik fort: Mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten sollen nicht isoliert voneinander, sinnlos und beziehungslos nebeneinander gelehrt und gelernt werden, sondern in ihrer Wechselbeziehung zueinander, also vernetzt.

Die Sitzung des Arbeitskreises auf der GDM-Tagung 2016 wurde durch einen Bericht von Astrid Brinkmann zu den Aktivitäten des Arbeitskreises eröffnet. Da einige neue Teilnehmer/innen sich für die Arbeit des Arbeitskreises interessierten, wurden die zentralen Intentionen des Arbeitskreises vorgestellt.

Anschließend wurde zur 9. Tagung des Arbeitskreises in Hildesheim von Alexander Wolff eingeladen. Dabei wurde u. a. auch das Programm besprochen.

Danach folgte ein Impulsvortrag von Matthias Brandl zur narrativen Didaktik. Daraufhin stellte Michael Bürker sein dazu passendes Buchprojekt „Raumzeitgeister von Eratosthenes bis Einstein“ im Sinne von Work In Progress vor. Dabei bereicherte er seinen Vortrag mit einer kleinen Lesung.

Top 1. Astrid Brinkmann: Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“

In der Reihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“ (Aulis Verlag in der Stark Verlagsgesellschaft) werden die Arbeitsergebnisse des Arbeitskreises vorgestellt. Jeder der Bände umfasst drei Teile (Reihenherausgeberin: Astrid Brinkmann):

- Unterrichtsmethoden,
- Mögliche inhaltliche Vernetzungen,
- Vernetztes Denken fördern.

Aktuell ist Band 4 (Hrsg. Matthias Brandl, Astrid Brinkmann, Thomas Borys) als E-Book (ISBN 978-3-7614-2960-0) erschienen. Erstmals wurden bei diesem Band die beiden Teile, Artikel zu Mathe vernetzt und die dazu gehörigen Materialien, in einem Buch vereint. Die Materialien bestehen aus direkt einsetzbaren, fertig aufbereiteten Arbeitsblättern für die Unterrichtsvorbereitung. Zu jedem Arbeitsblatt gibt es Musterlösungen bzw. Lösungsvorschläge sowie didaktische Hinweise, Stichwörter zur Zuordnung hinsichtlich Stoff und Altersstufe und nicht zuletzt den Hinweis auf jeden Artikel, der den Hintergrund für das Arbeitsblatt bildet.

Top 2. Alexander Wolff:
Einladung zur 9. Tagung des AKs mit Lehrer/innen-Fortbildung an der Universität Hildesheim vom 22. bis 23. April 2016

Die neunte Tagung des Arbeitskreises wird von Barbara Schmidt-Thieme und Alexander Wolff organisiert. Die Tagung wird am 22. April um 14.00 Uhr beginnen. Am Freitag ist ein Fortbildungsnachmittag für Lehrer/innen geplant. Am Samstag findet eine „interne" Sitzung des Arbeitskreises statt.

Das Tagungsprogramm und weitere Informationen zur Tagung sind auf der Homepage des Arbeitskreises www.math-edu.de/Vernetzungen.html (siehe: http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html) veröffentlicht.

Top 3. Matthias Brandl:
„Narrative Didaktik"

Bereits 1986 stellte J. Bruner der logisch-diskursiven Argumentation („logico-scientific mode") den narrativen Denkmodus („narrative mode") gegenüber. Während der logisch-diskursive Modus „looks for universal truth conditions … the narrative mode looks for particular connections between events" (Richardson, 1990, S. 118). Klassen (2006) weist darauf hin, dass authentische Auszüge aus dem historischen Kontext der Mathematikgeschichte helfen können, das Lebendige der Wissenschaft, das sich in Forschung, Entdeckung und Kreativität zeigt, wieder sichtbar werden zu lassen. Allerdings gestaltet sich ein schülergerechter Unterrichtseinsatz originaler historischer Artefakte als sehr schwierig. Kubli (2002, 1999) zeigt jedoch, dass Schülerinnen und Schüler wesentlich positiver auf historisches Material reagieren, wenn es in narrativer Form aufbereitet und eingesetzt wird. Freude am Erzählen ist dabei ein wesentlicher Faktor für den Lehrerfolg, weswegen eine narrative Didaktik auch davon ausgeht, dass der Mensch ein „erzählendes" Wesen („homo narrans") ist. Narrative Didaktik begegnet dem bereits angesprochenen Vorwurf an den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht, kalt, unattraktiv und langweilig zu sein, indem sie nach dem Menschlichen in der Mathematik fragt – und dies in (eine) Geschichte einbettet.

Top 4. Michael Bürker:
Lesung aus dem Romanfragment „Die Raumzeitgeister“

Im Sinne einer narrativen Didaktik (narrare = erzählen) soll die Erweiterung des Weltbilds von „Eratosthenes bis Einstein“ in Form eines 'historischen' Romans „erzählt“ werden. Derzeit ist der Roman noch ein „work in progress“. Die Adressaten können Schülerinnen und Schüler, aber auch Lehrkräfte und allgemein Interessierte am Thema „Geschichte des Weltbilds“ sein. Der Bezug zur Schulmathematik und -physik ergibt sich an Hand der folgenden Fragestellungen:

- Wie berechnete Eratosthenes den Erdumfang?
- Wie wurden in der Antike die Entfernungen zu Mond und Sonne abgeschätzt?
- Welche Bedeutung hat die kopernikanische Wende für Kultur, Mathematik und Naturwissenschaften?
- Wie kommt es zum Galileischen Prinzip „Die Gesetze der Natur sind in der Sprache der Mathematik geschrieben“?
- Welche Umwälzungen haben Galilei, Kepler und Newton bewirkt?
- Wie kommt es zu Beginn des 20. Jh. zum Begriff der „Raumzeit“?

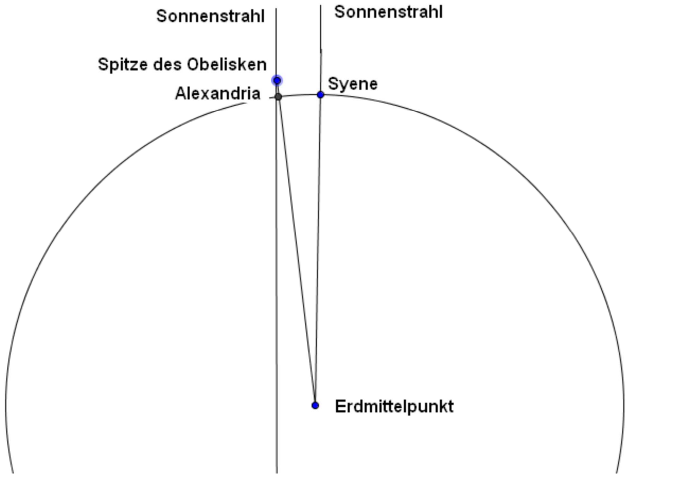
Die Antworten werden in dem Romanfragment implizit in Form von Handlungen, Überlegungen und Dialogen vorgestellt. Der Roman ist als Rahmenhandlung konzipiert, in der ein Schüler der Abiturklasse einen schweren Unfall erleidet, ins Koma fällt und träumt, in ein Zeitschloss zu geraten. Dort erhält er einen neuen Namen, Miro, und trifft Sarkus, einen Mitarbeiter im Zeitschloss, der ihn betreut. Die beiden bekommen vom Herrn der Zeit den Auftrag, im dritten Jahrhundert vor Christus die mathematischen und naturwissenschaftlichen Entdeckungen der damaligen Welt zu erkunden. Der Herr der Zeit versetzt die beiden in die Lage, am Leben des Jahres 219 v. Chr. in Athen und Alexandria direkt teilzunehmen. Insbesondere lernen sie in Athen den Leiter der platonischen Akademie und einige der Dozenten sowie Elemente der griechischen Philosophie kennen.

Sie gelangen auf dem Seeweg nach Alexandria, dem wissenschaftlichen Zentrum der damaligen Welt. Auf dem Schiff treffen sie einen griechischen Kaufmann, der vor einigen Jahren nach Alexandria umgezogen ist und die beiden wissbegierigen jungen Leute gastlich in seinem Hause aufnimmt. Auf dem Platz mit dem großen Obelisken in Alexandria lernen sie Antilaos, den Leiter einer Messgruppe kennen, die um die Sommersonnenwende herum in der Mittagszeit die Schattenlänge dieses Obelisken und damit den Einfallswinkel der Sonne misst. Antilaos führt die beiden zu Eratosthenes, dem Leiter der weltberühmten Alexandriner Bibliothek, der am Tag darauf in einem Vortrag vor dem Königspaar und großem Publikum seine Berechnung des Erdumfangs erklärt. Miro und Sarkus haben auch Gelegenheit, in den Tagen der Sommersonnenwende an einer Exkursion nach Syene in Südägypten teilzunehmen. Da Syene, das heutige Assuan, am nördlichen Wendekreis liegt, befindet sich die Sonne um die Mittagszeit genau im Zenit, so dass die Akteure das Spiegelbild der Sonne in einem tiefen Brunnen sehen.

Mit den beiden Messungen in Alexandria und Syene und der bekannten Entfernung zwischen diesen beiden Orten ist Eratosthenes in der Lage, den Erdumfang wenigstens näherungsweise zu bestimmen, wobei er voraussetzt, dass die Sonnenstrahlen zu gleicher Zeit an allen Orten parallel zueinander sind.

So weit der Inhalt des ersten Abschnitts dieses Romanfragments, aus dem der Teil über Eratosthenes' Vortrag zur Berechnung des Erdumfangs Gegenstand einer Lesung war.

Wesentlich ist dabei die nebenstehende Figur:



Literatur

Brinkmann, A. (Reihenhrsg.). *Schriftenreihe: Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht*. O. O.: Aulis Verlag.

http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html

Bruner, J. (1986). *Actual Minds, Possible Worlds*. Cambridge (Mass.): Harvard University Press.

Klassen, S. (2006). A theoretical framework for contextual science teaching. *Interchange, 37, 1-2*, 31–61.

Kubli, F. (2002). *Plädoyer für Erzählungen im Physikunterricht: Geschichte und Geschichten als Verstehenshilfen – Ergebnisse einer Untersuchung* (2nd ed). Köln: Aulis Deubner.

Kubli, F. (1999). Historical aspects in physics teaching: Using Galileo's work in a new Swiss project. *Science & Education, 8(2)*, 137–150.

Richardson, L. (1990). Narrative and sociology. *Journal of Contemporary Ethnography*, 19(1), 116–135.

Katja EILERTS, Berlin, Gilbert GREEFRATH, Münster, Johanna RELLENSMANN, Münster, Stanislaw Schukajlow, Münster, Hans-Stefan SILLER, Koblenz, Katharina SKUTELLA, Berlin

ISTRON-Gruppe: Realitätsbezüge im Mathematikunterricht

Im Jahre 1990 hat sich in Istron Bay auf Kreta eine Gruppe konstituiert mit dem Ziel, durch Koordination und Initiierung von Innovationen zur Verbesserung des Mathematikunterrichts beizutragen (Greefrath, Siller, & Blum 2016). Diese Gruppe, die sich nach dem Gründungsort genannt hat möchte Realitätsbezüge im und für den Mathematikunterricht fördern. Konstitutiv dabei ist die Netzwerk-Idee: Die Verbindung von Aktivitäten und der sie tragenden Menschen auf lokaler, regionaler und internationaler Ebene. Eine eigene Schriftenreihe, die bis ins Jahr 2013 bei Franzbecker mit 18 Bänden aufgelegt wurde und seit 2014 bei Springer erscheint, ermöglicht der ISTRON-Gruppe mit mittlerweile 20 Bänden auch eine nachhaltige Präsenz und Sichtbarkeit in der Schulpraxis, aber auch für die wissenschaftliche Community. Im Rahmen der ISTRON-Sitzung haben zwei Vorträge zu Realitätsbezügen im Mathematikunterricht stattgefunden.

Katharina Skutella & Katja Eilerts: Ein Modellierungskontext für verschiedene Altersstufen

Wir stellen in diesem Beitrag eine Modellierungsaufgabe „Stellungsspiel der Torhüterin im Strafraum“ (Abb. 1) vor, welche Kinder verschiedener Altersstufen zu authentischen und zugleich substantiellen mathematischen Aktivitäten anregt. Ein und derselbe Modellierungskontext kann bereits in jüngeren Klassen thematisiert, später in höheren Klassen aufgegriffen und in seiner mathematischen Komplexität mit einem stetig erweiterten Strategierepertoire und mit zunehmend differenzierten Modellierungskompetenzen weiter ausgearbeitet werden (Eilerts & Kolter, 2015 a, b). Die in der Aufgabe beschriebene Spielsituation lässt sich vereinfacht geometrisch darstellen (Abb. 2). Der Stürmer schießt den Ball von der Schussposition S, die Torhüterin platziert sich zur Abwehr auf Position T. Der Winkel $\angle DSC$ ist eine geeignete geometrische Darstellung aller möglichen Schussbahnen des Balls. Die Strecke $\overline{AB}$ stellt die Armspanne der Torhüterin dar. Um den Ball möglichst gut zu erreichen, sollte sich die Torhüterin möglichst so positionieren, dass sie alle Bälle gut erreichen kann. Geometrisch interpretiert liegt der Punkt T (Torhüterposition) auf der Winkelhalbierenden w des Winkels $\angle DSC$ und zwar so nah am Punkt S (Stürmerposition), dass die Punkte A und B jeweils auf dem entsprechenden Schenkel des Winkels $\angle DSC$ liegen.

Du bist Torhüterin.

Ein Stürmer der gegnerischen Mannschaft schießt aus dem Strafraum auf das Tor. Wo platzierst du dich, um den Angriff erfolgreich abzuwehren?

Abbildung 1: Die Modellierungsaufgabe „Stellungsspiel der Torhüterin im Strafraum“

Ein und derselbe Aufgabenkontext bietet diverse, reichhaltige mathematische Facetten und kann Schülerinnen und Schüler von der Grundschule bis in die Sekundarstufe zu anspruchsvollen mathematischen Aktivitäten anregen. Beispielsweise lässt sich der Zusammenhang zwischen Stürmer- und Torhüterposition durch trigonometrische Zusammenhänge beschreiben und mit dynamischer Geometriesoftware visualisieren (Skutella & Eilerts 2016).

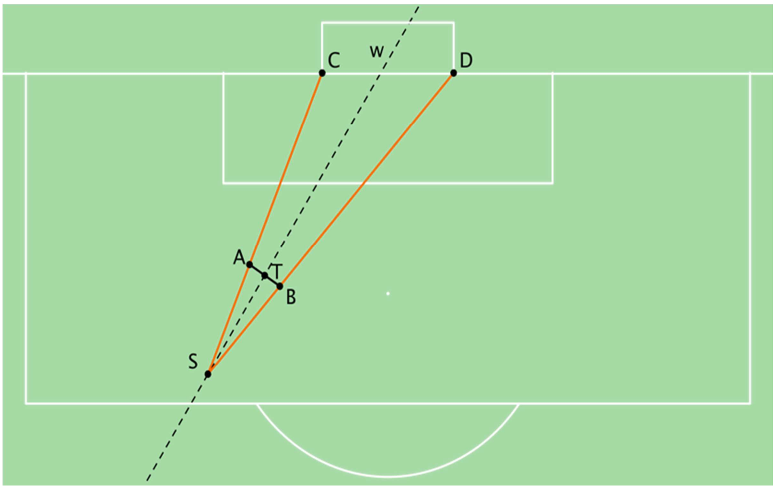


Abbildung 2: Ein geometrisches Modell

Die Modellierungsaufgabe wurde im Rahmen einer Bachelorarbeit (Peters, 2015) mit zwei Zweitklässlern auf dem Fußballplatz erprobt und pilotiert. Geplant ist eine qualitative Quasi-Längsschnittstudie, im Rahmen derer die Modellierungskompetenzen von Kindern der Klassenstufen 1-12 am Beispiel der Aufgabe „Stellungsspiel der Torhüterin im Strafraum“ erhoben und verglichen werden sollen.

Johanna Rellensmann & Stanislaw Schukajlow: Warum ist nicht jede Skizze hilfreich? Qualitative Analyse von selbsterstellten Skizzen im Modellierungsprozess

Theorie. Die weltweit ernüchternden Befunde zur Modellierungskompetenz von Lernenden werfen die Frage nach lernförderlichen Instruktionsmaßnahmen auf. Das Zeichnen einer Skizze hat das Potential, Lernende beim Bearbeiten von mathematischen Modellierungsaufgaben zu unterstützen (Rellensmann, Schukajlow, & Leopold, 2015; Schukajlow, 2011). Jedoch zeigen bisherige Untersuchungen zur Instruktion „Zeichne eine Skizze" widersprüchliche Befunde.

Methode. In einer Laborstudie des DFG-Projekts *Visualisierungen bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben (ViMo)* wurden fünf Schülerpaare der neunten Jahrgangsstufe u.a. bei der Bearbeitung der Modellierungsaufgabe *Feuerwehr* (Fuchs & Blum, 2008) gefilmt. Die Schülerpaare erhielten die Instruktion, vor dem Lösen der Aufgabe zunächst eine Skizze zu zeichnen. In der Studie wurden die erstellten Skizzen und ihre Nutzung im Modellierungsprozess mit der Methode der *Qualitativen Inhaltsanalyse* nach Mayring analysiert.

Ergebnisse. Es zeigte sich, dass die Skizzen in vielen Teilprozessen des Modellierens genutzt werden können. So erfordert das Zeichnen einer Skizze die Auswahl und Organisation der relevanten Informationen und fördert so die Prozesse des Vereinfachens und Strukturierens. Die Konstruktion eines mathematischen Modells kann durch das Erkennen von mathematischen Objekten und Relationen (z.B. eines rechtwinkligen Dreiecks) in der Skizze unterstützt werden. Außerdem wurde die Skizze als Hilfe beim Aufstellen einer Gleichung genutzt. Auch zum Interpretieren des mathematischen Resultats und zum Validieren von Lösungen und Modellen wurde die Skizze herangezogen. Jedoch wies die Skizzennutzung unabhängig vom Leistungsniveau eine große Variabilität zwischen den Schülerpaaren auf. Beispielsweise beruhte die Aufgabenbearbeitung des leistungsstärksten und des leistungsschwächsten Schülerpaars auf Oberflächenstrategien und zeichnete sich durch eine geringe Skizzennutzung aus. Darüber hinaus zeigte sich eine wechselseitige Abhängigkeit zwischen der Skizzennutzung und internen Modellierungsprozessen. Wurden die Prozesse des Vereinfachens und Strukturierens zum Beispiel intern ausgeführt, zeigten die Schüler keine Skizzennutzung in diesen Teilprozessen. Außerdem lassen die Ergebnisse vermuten, dass die Möglichkeiten der Skizzennutzung von der Skizzenart abhängen. Eine Situationsskizze, die die Information entsprechend ihres realen Erscheinungsbilds darstellt und nicht ein mathematisches Modell fokussiert, scheint daher eher zum Interpretieren und Validieren geeignet als eine mathematische Skizze (s. Abb. 3).

Diskussion. Zusammenfassend stellen Skizzen ein kognitives Werkzeug dar, das in vielen Teilprozessen des Modellierens unterstützend genutzt werden kann. Für die optimale Nutzung von Skizzen sollten die verschiedenen Skizzenarten und ihre Nutzungsmöglichkeiten im Mathematikunterricht thematisiert werden.

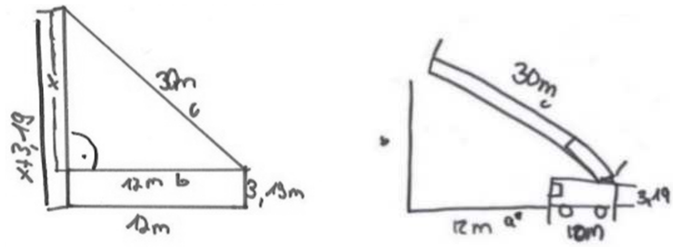


Abb. 3 Verschiedene Skizzen zur Modellierungsaufgabe *Feuerwehr*

Literatur

Eilerts, K. & Kolter, J. (2015a). Modellieren baut Brücken - Eine Kletterwand für Klasse 1 bis 6. In: mathematik lehren, Heft Friedrich 192, S. 20–24.

Eilerts, K. & Kolter, J. (2015b): Kognitive und metakognitive Strategien bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben durch Grundschulkinder. In: Kaiser, G. & Henn, W. (Hrsg.), Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht. Springer, Wiesbaden S. 119 – 133.

Fuchs, M., & Blum, W. (2008). Selbständiges Lernen im Mathematikunterricht mit ‚beziehungsreichen' Aufgaben. In J. Thonhauser (Ed.), *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen* (pp. 135-148). Münster: Waxmann.

Greefrath, G., Siller, H.-S., Blum, W. (2016). 25 Jahre ISTRON – 25 Jahre Arbeit für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 100, 19-22.

Peters, D. (2015): Modellieren im außerschulischen Kontext – Stellungsspiel im Fußball. Unveröffentlichte Bachelorarbeit Humboldt-Universität zu Berlin 2015.

Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2015). Gute Skizze - Bessere Lösung? In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (pp. 732-735). Basel: Gesellschaft für Didaktik der Mathematik.

Schukajlow, S. (2011). *Mathematisches Modellieren. Schwierigkeiten und Strategien von Lernenden als Bausteine einer lernprozessorientierten Didaktik der neuen Aufgabenkultur*. Münster: Waxmann.

Skutella, K. & Eilerts, K. (2016) (under revision): Das Stellungsspiel der Torhüterin im Strafraum – ein Modellierungskontext für verschiedene Altersstufen. *ISTRON-Beitrag.*

Anselm LAMBERT, Saarbrücken, Guido PINKERNELL, Heidelberg

Arbeitskreis Mathematikunterricht und Informatik – jetzt: Arbeitskreis Mathematikunterricht und Digitale Werkzeuge

Der Arbeitskreis Mathematikunterricht und Informatik (AK MU&I) hat sich auf dem Treffen während der Jahrestagung der GDM 2016 in Heidelberg umbenannt. Er heißt jetzt Arbeitskreis Mathematikunterricht Mathematikunterricht und Digitale Werkzeuge (AK MuDiWe)

Vorangegangene Programmdiskussion

Vorausgegangen ist eine lange Diskussion über eine gewachsene implizite programmatische Neuausrichtung und einer damit gebotenen neuen Namensgebung. In den Mitteilungen der GDM Nr. 100 (Januar 2016) haben wir sie wie folgt zusammengefasst: „Die traditionelle Kernaufgabe des AK MU&I (man könnte sie verkürzt so formulieren: Konzeptionalisierung, Konkretisierung und Reflektion informatischer Ideen und Produkte für den Mathematikunterricht) war in den ersten Jahren des Arbeitskreises in einer engen Verknüpfung von Informatik und Mathematik begründet. Denn informatische Ideen wie "Algorithmisieren" sind im Kern mathematische Ideen und können durch Verwendung von Software für den Mathematikunterricht zurückgewonnen werden. Auch die Reflektion des didaktisch-methodischen Potentials "informatischer Produkte", also mathematische Software, für das Lernen existierender curricularer Inhalte ist erklärter Gegenstand der Arbeit im AK MU&I. Man sollte also erwarten, dass der AK MU&I auch weiterhin eine Plattform für den Austausch entsprechender Projekte und Unternehmungen in schulpraktischen und didaktischen Bereich ist. Nun ist das aber nicht der Fall. Wir beobachten zum Beispiel, dass viele Akteure auf diesem Gebiet sich in solchen AKs verorten, die sich primär inhaltlich positionieren. Oder man wendet sich spezialisierten Arbeitskreisen zu, die eine fokussierte Arbeit im eigenen Forschungsschwerpunkt erlauben.“

Hieraus ergaben sich zwei Fragen für die zukünftige Arbeit im Arbeitskreis:

1. Die Frage nach einer expliziten programmatischen Umorientierung des AK, der den aktuellen Gegebenheiten entspricht: Software wird überall im Unterricht und Forschung benutzt bzw. ist Gegenstand von Reflektion und wird nicht mehr als besonderes "informatisches Produkt" wahrgenommen.

2. Die Frage nach einer Umbenennung des AK MU&I: Angesichts der Tatsache, dass bei ubiquitärer Präsenz von Software die informatischen Ursprünge immer weniger präsent scheinen und nun vielerorts das Schlagwort "Digital" an die informatischen Ursprünge erinnert, wäre zu überlegen, ob

man den Namen des AK so ändert, dass diesem Umstand Rechnung getragen wird.

Neuausrichtung und Umbenennung

Auf dem Treffen des Arbeitskreises während der Jahrestagung 2016 in Heidelberg wurden die zwei Fragen wie folgt beantwortet:

Der Arbeitskreis versteht sich als eine Plattform für die fachdidaktische Diskussion der Potentiale und Phänomene des Einsatzes digitaler Werkzeuge in Schule und Hochschule. Dabei nimmt er insbesondere die Wirkungen dieser Werkzeuge auf das Lernen und Lehren von Mathematik in den Blick:

- Digitale Werkzeuge erweitern und verändern den Zugang zu mathematischen Begriffen und Verfahren, indem sie Möglichkeiten zur Vernetzung, Dynamisierung und Interaktion eröffnen.
- Digitale Werkzeuge verändern den Umgang mit Mathematik beim Argumentieren, Problemlösen, Modellieren, Darstellungen Verwenden, Rechnen und Kommunizieren.
- Digitale Werkzeuge sind Produkte der Informatik. Sie ermöglichen die Verankerung informatischer Ideen wie Formalisierung, Algorithmisierung und Modularisierung auch im Mathematikunterricht.
- Digitale Werkzeuge verändern die Unterrichtspraxis und stellen neue Anforderungen an das Klassenmanagement.
- Digitale Werkzeuge sind allgegenwärtig und berühren so Fragen zur Allgemeinbildung wesentlich.

Zu einer kritischen und fruchtbaren Diskussion der Wirkungen digitaler Werkzeuge auf das Lernen und Lehren von Mathematik gehören die Perspektiven von universitärer Forschung und schulischer Praxis gleichermaßen; der Arbeitskreis ist daher Ort für theoretische Reflexionen, empirische Beobachtungen und unterrichtspraktische Ideen.

In Konsequenz dieser programmatischen Schwerpunktsetzung haben die anwesenden Mitglieder während des Treffens dem Arbeitskreis einen neuen Namen gegeben. Er heißt nun Arbeitskreis Mathematikunterricht und Digitale Werkzeuge.

Benjamin ROTT, Essen; Ana KUZLE, Potsdam

Bericht des Arbeitskreises „Problemlösen“

Am Montag, den 07.03.2016, fand in Heidelberg die zweite GDM-Tagungs-Sitzung des Arbeitskreises *Problemlösen* statt. Knapp 20 Personen kamen zusammen, um sich über die Aktivitäten des Arbeitskreises zu informieren und auszutauschen sowie einen Vortrag von Lars Holzäpfel zu hören. An dieser Stelle sollen insbesondere die Informationen noch einmal zusammengetragen werden.

1. Tagungsbände der Herbsttagungen

Zur Herbsttagung 2014 in Münster ist mittlerweile der Tagungsband erschienen: Kuzle & Rott (2015).

Auch zur Herbsttagung 2015, die gemeinsam mit der ProMath-Tagung in Halle stattgefunden hat, wird ein Tagungsband erscheinen: Fritzlar et al. (2016). Momentan (Stand: März 2016) hat die Überarbeitung der Artikel begonnen. Das Buch soll pünktlich zu den Tagungen im Herbst 2016 (s.u.) fertig sein.

2. Stand der Planung der Herbsttagung 2016 in Braunschweig

Die dritte Herbsttagung des Arbeitskreises wird am Freitag, 14. und Samstag, 15.10.2016, an der TU Braunschweig stattfinden (der örtliche Tagungsleiter ist Frank Heinrich). Der Unkostenbeitrag wird voraussichtlich 10 Euro betragen.

Den Eröffnungsvortrag wird Harald Schaub (Abteilungsleiter Human Factors und Mensch-System-Integration bei der IABG, Ottobrunn bei München, außerplanmäßiger Professor an der Universität Bamberg) halten. Es wird um Möglichkeiten der Förderung von Problemlösekompetenzen aus psychologischer Sicht gehen.

Passend dazu soll es in einem Workshop am Samstagvormittag um Konzepte zur Förderung von Problemlösekompetenzen aus mathematikdidaktischer Sicht gehen. Die übrigen Vorträge und Workshops können von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern thematisch frei gestaltet werden.

3. Ankündigung der ProMath-Tagung 2016

Die ProMath-Tagung 2016 wird nicht gemeinsam mit der Herbsttagung des Arbeitskreises ausgerichtet werden. Sie wird von Mittwoch, 07.09.2016, bis Freitag, 09.09.2016, an der Universität Zadar in Zadar, Kroatien stattfinden. Der Hauptvortrag wird von Željka Milin-Šipuš (Universität Zagreb) gestaltet werden. Die Tagungsgebühr wird voraussichtlich 30 Euro betragen. Mehr Informationen sind auf der ProMath-Seite unter http://promath.org/meeting2016.html zu finden.

4. Sonderheft zum Problemlösen in *mathematica didactica*

Voraussichtlich im Jahr 2017 soll ein Sonderheft der Zeitschrift *mathematica didactica* zum Thema Problemlösen erscheinen. Zum Zeitpunkt des Verfassens dieser Zeilen (März 2016) ist die erste Reviewphase abgeschlossen und die Überarbeitung der Artikel kann beginnen.

5. Weitere Aktivitäten aus dem Umfeld des Arbeitskreises

In der ersten Jahreshälfte 2016 werden zwei Zeitschriftenhefte erscheinen, an von Mitgliedern des Arbeitskreises mitgestaltet wurden:

(1) Im April 2016 wird ein Heft der Zeitschrift *PM – Praxis der Mathematik in der Schule* (Heft Nr. 68) mit dem Titel *Schritte zum Problemlösen* erscheinen. Herausgegeben wird es von Timo Leuders, Benjamin Rott und René Schelldorfer. Als Autoren haben sich unter anderem Christina Bauer, Frank Heinrich, Frank Förster, Hans-Jürgen Elschenbroich und Kathleen Philipp beteiligt.

(2) Im Juni 2016 wird ein Heft zum *geometrischen Problemlösen* in der Zeitschrift *ml – mathematik lehren* (Heft Nr. 196) erscheinen. Herausgegeben wird es von Ana Kuzle und Regina Bruder. Beiträge stammen unter anderem von Silke Ladel, Ulrich Kortenkamp, Christian Dohrmann, Matthias Ludwig und Andreas Filler.

In der zweiten Jahreshälfte soll ein englischsprachiges Buch erscheinen, in dem im Unterricht praktisch erprobte Probleme ausführlich vorgestellt werden: Hodnik Čadež, Kuzle und Rott (2016). Zusätzlich wird das Buch einen kurzen Überblick über die Problemlöse-Forschung der letzten Jahrzehnte mehrerer europäischer Länder und einen Einblick in Aktionsforschung zum Thema Problemlösen enthalten.

6. Vortrag während des Arbeitskreissitzung

Der Großteil der Arbeitskreis-Sitzung in Heidelberg wurde von Lars Holzäpfel (PH Freiburg) mit einem Vortrag und einer sich anschließenden Diskussion gestaltet. Der Vortrag trug den Titel: *Problemlösen lernen in der Sekundarstufe, im Lehramtsstudium und in der Lehrerfortbildung*

Abstract: Problemlösen gewinnt zunehmend an Bedeutung in der Schule. Dies spiegelt sich in den Bildungsstandards und Bildungsplänen wider. Entsprechend bedarf es der Entwicklung geeigneter Unterrichtskonzepte und Aufgaben einerseits, andererseits aber auch Programme für die Lehramtsausbildung und nicht zuletzt für die Lehrerfortbildung.
Anhand konkreter Beispiele werden zentrale Aspekte des Problemlösens dargelegt und Erfahrungen aus der Arbeit mit Studierenden und aus der Lehrerfortbildung berichtet. Dabei werden auch Daten aus Forschungsprojekten vorgestellt.

Literatur

Fritzlar, T., Aßmus, D., Bräuning, K., Kuzle, A. & Rott, B. (Hrsg.) (in Vorbereitung – erscheint 2016). *Problem solving in mathematics education. Proceedings of the 2015 joint conference of ProMath and the GDM working group on problem solving. Ars Inveniendi et Dejudicandi 6*. Münster: WTM-Verlag.

Hodnik Čadež, T., Kuzle, A. & Rott, B. (Hrsg.) (in Vorbereitung – erscheint 2016. *Practical Ideas for Problem Solving in the Mathematics Classroom – Experiences from Different Countries. Ars Inveniendi et Dejudicandi 7*. Münster: WTM-Verlag.

Kuzle, A. & Rott, B. (Hrsg.) (2015). *Problemlösen gestalten und beforschen. Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen 2014. Ars Inveniendi et Dejudicandi 4*. Münster: WTM-Verlag.

Teil 6:
Beiträge vergangener Jahrestagungen

Julia MEINKE, Göttingen

Subjektive Theorien von Lehrerinnen und Lehrern zur Algebra der Sekundarstufe I

Die grundsätzliche Voraussetzung für die Beforschung der subjektiven Theorien von Lehrkräften ist die Annahme, dass die Lehrkraft eine sehr entscheidende Rolle sowohl in Bezug auf das Planen und Durchführen des Unterrichts (Eichler, 2011), als auch in Bezug auf den Lerneffekt der Schülerinnen und Schülern besitzt (Nye et al., 2004). Nye et al. (2004) wiesen diese Bedeutung gerade in Bezug auf den Mathematikunterricht nach. Hattie (2009) betont ebenfalls den großen Wirkungsgrad den die Lehrkräfte auf die Leistungen der Schülerinnen und Schüler besitzen und plädiert dafür die ‚Brille' zu verstehen, durch die Lehrpersonen ihre Erfolgskriterien und ihre Rolle beim Lernen und Lehren betrachten (S. 110).

Diese Brille zu untersuchen und dabei den Fokus auf das schulbezogene Wissen – also auf die Überzeugungen, Vorstellungen und Haltungen in Bezug auf eine ganz spezielle Teildisziplin der Schulmathematik – zu legen, ist Ziel dieses Projekts. Es gibt begründete Hinweise darauf, dass sich die Vorstellungen in den einzelnen Teildisziplinen der Mathematik unterscheiden, wie es die schon durchgeführten Untersuchungen zeigen (Eichler, 2011): Zum Beispiel die Forschung zu den individuellen Curricula der Lehrkräfte in den Bereichen Stochastik (Eichler, 2006), Geometrie (Girnat, 2011), Analysis (Erens, 2012) und Arithmetik (Bräunling, 2012). In diesem Sinn richtet das vorliegende Poster den Fokus auf die subjektiven Theorien von Lehrkräften im Bereich der Algebra in der Sekundarstufe I - einem Teilgebiet der Mathematik, das von zentraler Bedeutung für das Lernen und Lehren von Mathematik ist (Usiskin, 1995).

Zur Rekonstruktion der subjektiven Theorien wird das Forschungsprogramm Subjektive Theorien (Groeben et al., 1988) genutzt. Die Erarbeitung der subjektiven Theorien erfolgt mit Hilfe der Ziel-Mittel-Argumentation.

Die Stichprobe besteht aus insgesamt neun Lehrerinnen und Lehrern, die im Sinne des theoretical samplings allerdings nur basierend auf äußeren und rein hypothetischen Faktoren ausgewählt worden sind und sich dabei in Alter, Geschlecht, Bundesland, Technologieverwendung (CAS, GTR oder wissenschaftlicher Rechner) und Standort (Kleinstadt oder Anbindung an eine Universität) unterscheiden.

Zunächst wurden mit allen Lehrkräften Leitfadeninterviews geführt, um die subjektiven Theorien der Lehrkräfte zu erheben. Der Leitfaden wurde auf Basis einer zuvor durchgeführten Interview-Studie entwickelt, die die relevanten Termina eruieren sollte, in denen Lehrkräfte über Algebra sprechen.

Anschließend wurden alle Lehrkräfte zweimal „unangekündigt“, also ohne Kenntnis des Besuchstermins, in ihrem Algebra-Unterricht besucht, bevor die Interviews ausgewertet worden sind. Auf diese Weise konnte die Feldbeobachtung, bei der Beobachtungsprotokolle mit dem Fokus auf dem Lehrerhandeln angefertigt worden sind, weitestgehend unvoreingenommen stattfinden. Diese Protokolle, die die realisierten Curricula widerspiegeln, werden im Nachhinein zur Validierung der zunächst nur im Interview thematisierten Curricula genutzt. Die Auswertung der Interviews findet kodierend angelehnt an die grounded theory statt.

Die Analyse der Daten, die in der ersten Jahreshälfte 2015 geplant ist, wird sich schwerpunktmäßig mit dem Variablenverständnis der Lehrerinnen und Lehrer und darüber hinaus mit den bereits in den oben genannten Untersuchungen analysierten Bereichen: Anwendung, Problemlösen, Formalismus und Schemaorientierung befassen.

Literatur

Bräunling, K., & Eichler, A. (2012). Individuelle Curricula von Lehrkräften zur Arithmetik. *Beiträge zum Mathematikunterricht.* Weingarten. Gefunden am 17. Nov. 2014 unter http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2012/

Eichler, A. (2006). *Individuelle Stochastikcurricula von Lehrerinnen und Lehrern.* Verlag Franzbecker.

Eichler, A. (2011). Statistics teachers and classroom practices. In Batanero, S., Burril, G., & Reading, C. (Hrsg.), *Teaching Statistics in School Mathematics – Challenges for Teaching and teacher Education.* New ICMI Study Series, Bd. 15. Heidelberg, New York: Springer.

Erens, R. (2012). Curriculare Überzeugungen von Lehrkräften zum Analysisunterricht. *Beiträge zum Mathematikunterricht.* Weingarten. Gefunden am 17. Nov. 2014 unter http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2012/

Girnat, B. (2011). Ontological beliefs and their impact on teaching elementary geometry. *PNA, 5*(2), 37-48.

Groeben, N., Wahl, D., Schlee, J. & Scheele, B. (1988). *Das Forschungsprojekt subjektive Theorien. Eine Einführung in die Psychologie des reflexiven Subjekts.* Tübingen, Germany: A. Francke Verlag GmbH.

Hattie, J. (2009). *Visible Learning. A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement.* New York: Routledge.

Nye, B., Konstantopoulos, S., & Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *26*(3), 237-257.

Usiskin, Z. (1995). Why is algebra so important to learn. *American Educator, 19*(1), 30-37.

Anna Luisa HUCHTING, Malte JETZKE, Luisa KOCKISCH, Kolja PUSTELNIK, Göttingen

Repräsentationswechsel mit Eye-Tracking beobachten – Eine Studie im Rahmen eines forschungsorientierten Didaktikseminars

Mit Hilfe von Eye-Tracking sind im Kontext des Seminars Studierendengruppen unterschiedlichen Fragestellungen zum Thema Aufgabenvariation nachgegangen. In unserem Forschungsprojekt wurde untersucht, wie Lernende den Repräsentationswechsel zwischen situativer und graphischer Darstellung vollziehen und ob dies durch die unterschiedliche Anordnung der Informationen auf dem Arbeitsblatt beeinflusst wird.

Theoretischer Hintergrund

Mathematische Darstellungen verwenden ist eine der sechs zentralen Kompetenzen, deren Aufbau laut Bildungsstandards im Unterricht gefördert werden soll (vgl. Kultusministerkonferenz 2003, S. 15). Hierbei spielt insbesondere für das tiefere Verständnis von mathematischen Zusammenhängen der Repräsentationswechsel zwischen verschiedenen Darstellungen eine wichtige Rolle (z.B. Ainsworth, 2006). Nach Hußmann (2011) sind drei der Grundvorstellungen zu Funktionen von vom Hofe (1995) notwendig, damit graphische Darstellungen interpretiert werden können: die Kovariationsvorstellung, die Zuordnungsvorstellung und die Objektvorstellung. Bayrhuber-Habeck (2009) entwickelte diesbezüglich ein situationsgebundenes Modell, um den Wechsel von Repräsentationsformen zu analysieren. Von diesem Modell sind besonders zwei Komponenten für die Fragestellung relevant: Das Mathematisieren innerhalb der grafischen Darstellung, was in Zusammenhang mit den Grundvorstellungen zu Funktionen steht, und der Wechsel zwischen situativer und grafischer Repräsentation.

Fragestellung

Als Erweiterung zu diesem Modell wird zum Einen untersucht, inwiefern eine Richtung bei dem Wechsel zwischen situativer und grafischer Darstellung beobachtbar ist und zum Anderen, ob die Anordnung der Informationen auf dem Aufgabenblatt die Richtung des Wechsels beeinflusst.

Design und Forschungsmethodik

Die Aufgabe besteht darin, dass die Schülerinnen und Schüler Abbildungen von Gläsern zu Graphen zuordnen, welche die Füllhöhe beim gleichmäßigen Befüllen der Gefäße in Abhängigkeit der Zeit darstellen. In Aufgabenvariante A befinden sich die sieben Abbildungen auf der linken und die sieben Graphen auf der rechten Seite. In Variante B stehen sie andersherum und in Variante C befinden sich Abbildungen und Graphen auf verschiedenfarbigen Kärtchen die vermischt in einem Stapel vor den Teilnehmenden liegen. Es nehmen zehn 14 bis 16 jährige Gymnasiasten teil, deren Fixationen mit der Eye-Tracking Brille erfasst und Ton- sowie Videoaufnahmen der Bearbeitungen mitgeschnitten werden. Im Anschluss findet ein Stimulated Recall auf Grundlage der Aufgabenbearbeitungen statt.

Ergebnisse

Insgesamt begannen acht der zehn Teilnehmenden bei der Zuordnung mit den Abbildungen und ordneten diesen Graphen zu. Diejenigen, die weniger als vier der sieben Zuordnungen richtig lösten, hielten diese Bearbeitungsrichtung bei. Teilnehmende, die mindestens sechs der sieben Paare richtig zuordneten, wechselten die Richtung, wenn Schwierigkeiten beim Lösen auftraten und variierten im Verlauf der Bearbeitung flexibel die Richtung.
Die zwei Lernenden, welche die Zuordnung von den Graphen ausgehend starteten, bearbeiteten die Variante B bzw. Variante C. Dies deutet auf einen Einfluss der Links-rechts-Leserichtung hin. Von den zwei Gymnasiasten, welche Aufgabenvariante B bearbeiteten, bewältigte zudem nur derjenige die Aufgabe, der zu Beginn von den Graphen ausging, damit der Leserichtung folgte, und danach flexibel die Bearbeitungsrichtung variierte.

Diskussion

Die Teilnehmenden, die multiple Strategien bei der Bearbeitung der Aufgabe zeigten und den Repräsentationswechsel flexibel variieren konnten, haben bessere Ergebnisse erzielt. Der Links-rechts-Leserichtung wurde nicht konsequent gefolgt. Diese Studie gibt dennoch Hinweise darauf, dass die Anordnung von Darstellungsformen auf dem Arbeitsblatt die Lernenden bei der Bearbeitung von Zuordnungsaufgaben beeinflusst.

Literatur

Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16,* 183–198.

Bayrhuber-Habeck, M. (2009). *Konstruktion und Evaluation eines Kompetenzstrukturmodells im Bereich mathematischer Repräsentationen.*

Hußmann, S., H. L. (2011). *Eine Funktion - viele Gesichter - Darstellen und Darstellungen wechseln.* Praxis der Mathematik, 38.

Kultusministerkonferenz. (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* München: Luchterhand.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Texte zur Didaktik der Mathematik. Heidelberg u. a.: Spektrum Akademischer Verlag.

Andreas OBERSTEINER, München, Stanislaw SCHUKAJLOW, Münster

Visuelle Repräsentationen in Mathematik

Lernen von Mathematik kann durch die Verwendung geeigneter visueller Repräsentationen unterstützt werden. Beispielsweise kann eine Skizze helfen, eine Textaufgabe besser zu verstehen und Lösungsideen zu generieren. Psychologische Studien bestätigen, dass beim Lernen eine geeignete Kombination aus Text- und Bildinformation zum Aufbau tragfähigerer mentaler Modelle führen kann als die Verwendung von Text allein (Schnotz, 2005). Visuelle Repräsentationen spielen auch im Mathematikunterricht eine bedeutende Rolle. Allerdings ist das bloße Vorhandensein von Repräsentationen nicht automatisch lernförderlich. Vielmehr stellen der richtige Umgang mit geeigneten Repräsentationen, ihre sachgemäße Verknüpfung und die Übersetzung zwischen Repräsentationen eine zentrale mathematische Kompetenz dar, die erworben werden muss (KMK, 2003). Sollen Schülerinnen und Schüler Repräsentationen selbst generieren, ist dies zunächst eine über die eigentliche Aufgabenstellung hinausgehende zusätzliche kognitive Herausforderung (Renkl & Nückles, 2006). Die Verwendung geeigneter Repräsentationen geht auch für Lehrende mit Herausforderungen einher. Mathematische Sachverhalte können auf unterschiedliche Weisen repräsentiert werden, so dass sich die Frage nach der Auswahl geeigneter Repräsentationen und ihrer effektivsten Kombination stellt (Ainsworth, 2006). Der Einsatz unterschiedlicher Repräsentationen kann schließlich zu unterschiedlichen Lerneffekten führen (Obersteiner, 2012), und der Wechsel zwischen unterschiedlichen Repräsentationen kann eine nicht zu unterschätzende Schwierigkeit für Lernende darstellen. Zusammenfassend erscheint der Einsatz visueller Repräsentationen zur Unterstützung mathematischen Lernens grundsätzlich sinnvoll, viele Fragen zum Umgang mit diesen Repräsentationen sind aber noch nicht ausreichend geklärt.

Diese Sektion beschäftigt mit der Frage, wie Lehrende und Lernende mit visuellen Repräsentationen beim mathematischen Lernen umgehen. Die vier vorgestellten Studien nähern sich dieser Frage im Zusammenhang mit unterschiedlichen mathematischen Lerninhalten und mit einer Vielfalt an methodischen Ansätzen.

Hohn untersucht die Qualität selbstgenerierter Repräsentationen beim Lösen problemhaltiger Textaufgaben von Schülerinnen und Schülern der vierten, sechsten und neunten Jahrgangsstufen. Dabei werden Videoaufnahmen und Interviews eingesetzt, um individuelle Lösungsprozesse nachvollziehen zu können und den Zusammenhang zwischen der Qualität dieser Prozesse und dem Lösungserfolg aufzuklären.

Rellensmann und Kollegen untersuchen die von Schülerinnen und Schülern der neunten und zehnten Jahrgangsstufen selbst erstellten Skizzen beim Lösen von Modellierungsaufgaben. Neben der Qualität der erstellten Skizzen erfassen sie mit schriftlichen Tests das Wissen der Schülerinnen und Schüler darüber, was hilfreiche Skizzen ausmacht. Sie analysieren in einem Pfadmodell den Einfluss dieser Merkmale auf die Leistung im Modellieren.

Beitlich und Kollegen untersuchen den Prozess beim mathematischen Arbeiten bei Schülerinnen und Schülern der zehnten und elften Jahrgangsstufen. Hier geht es um die Verwendung von heuristischen Lösungsbeispielen, die textliche und bildhafte Informationen enthalten. Mit der Methode des Eye-Tracking werden die Blickbewegungen der Teilnehmer untersucht, um zu klären, welche Repräsentationen wahrgenommen werden und ob Informationen aus unterschiedlichen Repräsentationsformaten integriert werden.

Friesen und Kollegen nehmen schließlich die Lehrenden in den Blick und fassen die Fähigkeit, Unterrichtssituationen hinsichtlich der adäquaten Verwendung verschiedener Repräsentationen beurteilen zu können, als Teil professionellen Lehrerhandelns auf. In einem Hochschulseminar wurden diese Fähigkeit mit Lehramtsstudierenden trainiert und die Lernerfolge mit Hilfe von Unterrichtsvideos und darauf bezogenen Fragebögen untersucht.

Sektionsvorträge

Hohn, K.: Die Bedeutung der Qualität selbstgenerierter Repräsentationen für das Lösen von Textaufgaben

Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C.: Gute Skizze – bessere Lösung?

Beitlich, J., Reichersdorfer, E., & Reiss, K.: Blickbewegungen beim Lesen eines heuristischen Lösungsbeispiels mit verschiedenen Repräsentationsformen

Friesen, M, Dreher, A., & Kuntze, S.: Lehramtsstudierende analysieren den Umgang mit Repräsentationen in Unterrichtsvideos

Literatur

Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*, 183–198.

KMK (Kultusministerkonferenz). (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss*. Bonn: KMK.

Obersteiner, A. (2012). *Mentale Repräsentationen von Zahlen und der Erwerb arithmetischer Fähigkeiten*. Münster: Waxmann.

Renkl, A., & Nückles, M. (2006). Lernstrategien der externen Visualisierung. In H. Mandl & H. Friedrich (Eds.), *Handbuch Lernstrategien* (S. 135-147). Göttingen: Hogrefe.

Schnotz, W. (2005). An Integrated Model of Text and Picture Comprehension. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (pp. 49-69). Cambridge: Cambridge University Press.

Markus RUPPERT, Würzburg; Jan F. WÖRLER, Würzburg

Die Lehrerfortbildungsreihe »TiMu«: Kurzveranstaltungen statt Ganztagesfortbildung

Eine wichtige Aufgabe, die dem Servicebereich der Hochschullehre zuzuordnen ist und die insbesondere auf dem Gebiet der Fachdidaktiken eine große Rolle spielt, ist die Fortbildung von Lehrkräften. Trotzdem werden an Hochschulen Lehrerortbildungen meist nur punktuell angeboten und widmen sich dann einen Nachmittag oder einen ganzen Tag lang einem Schwerpunktthema.

Der Aufwand der mit solchen Veranstaltungen einhergeht, ist bei allen Beteiligten hoch: Von Seite des Veranstalters müssen Referenten und ggf. Sponsoren akquiriert und ein Programm ausgearbeitet werden, es müssen Räume und Medien gestellt werden, und auch eine Bewirtung wird erwartet. Auf der Teilnehmerseite müssen Lehrkräfte, die an solchen Veranstaltung teilnehmen wollen, vom Unterricht freigestellt, der ausfallende Unterricht muss vertreten werden. Demzufolge ermöglichen Schulleitungen in vielen Fällen nur einzelnen Lehrern die Teilnahme an angebotenen Veranstaltungen und verpflichten diese im Gegenzug zur anschließenden Multiplikation der Inhalte im Rahmen von schulinternen Lehrerfortbildungen.

Die Fortbildungsreihe TiMu zum Thema »Technologien im Mathematikunterricht« der Universität Würzburg geht seit 2011 einen anderen Weg. Sie setzt auf regelmäßige kurze Veranstaltungsabende statt punktueller Ganztagesfortbildungen: Im 4–6-wöchigen Turnus werden immer mittwochs ab 18:00 Uhr 120 Minuten lang Themen zum Technologieeinsatz im Mathematikunterricht vorgestellt und diskutiert. Konkrete Unterrichtsideen und Unterrichtsvorschläge können dabei genauso den inhaltlichen Rahmen bilden, wie spezielle Softwareschulungen oder die Vorstellung interessanter Trends oder Produkte. Methodisch wechseln dabei Kurzvorträge mit Workshops und Diskussionsrunden. Auf diese Weise will die TiMu-Reihe Anfängern den Einstieg in die Nutzung verschiedener Soft- und Hardwareprodukte für den Unterricht ermöglichen und dabei helfen, gegebenenfalls vorhandene Hemmschwellen gegenüber neuen Technologien abzubauen; gerade für diese Nutzergruppe ist die Regelmäßigkeit der Treffen wertvoll. Aber auch Fortgeschrittene werden angesprochen, indem sie die Gelegenheit bekommen in Kleingruppen untereinander spezielle Anwendungsfragen zu erörtern oder selbst als Workshopleiter aufzutreten.

Durch die organisatorische Zusammenarbeit zwischen Schule und Hochschule treten bei TiMu also als Referenten sowohl Vertreter der universitären Lehre als auch Lehrkräfte der Gymnasien und Realschulen auf. Somit kann einerseits ein realistischer Blick auf die Unterrichtspraxis geworfen werden, andererseits finden auch aktuelle Forschungsfragen Berücksichtigung. Auf diese Weise können alle an TiMu Beteiligten miteinander und voneinander etwas über die Möglichkeiten und Grenzen des Computereinsatzes im Mathematikunterricht lernen. Die Verortung der Fortbildungsreihe an der Hochschule ermöglicht zudem auch Studierenden und anderen Hochschullehrenden die Teilnahme.

Die Teilnahme an den Veranstaltungsabenden ist freiwillig und erfolgt außerhalb der üblichen Unterrichtszeiten. Daher ist die Fortbildungsreihe für Lehrkräfte gut mit ihrem Schulalltag vereinbar. Eine regelmäßige Teilnahme ist, bedingt durch den offenen Anmeldemodus, nicht erforderlich. Dennoch wurde mit den Schulämtern die Möglichkeit abgestimmt, dass Lehrkräften die Teilnahme an mehreren TiMu-Abenden als (Ganztages-)Fortbildung angerechnet werden kann. Den Teilnehmern wird dadurch eine Schwerpunktsetzung ermöglicht, die sich nach ihren individuellen Interessen und Zeitplänen ausrichten lässt.

Auch für die Organisation der Veranstaltungsabende bietet das TiMu-Format Vorteile: Durch die Regelmäßigkeit der Einzelveranstaltungen bildet sich neben wechselnden Teilnehmern auch ein fester Interessentenkreis, der als Ideengeber für weitere Veranstaltungen dienen kann. Häufig werden von den Teilnehmenden Themenwünsche genannt, die man „mal ansprechen müsste“ und in der Regel lassen sich in der Teilnehmergruppe auch Personen finden, welche die Vorbereitung des Themas übernehmen. Die Veranstaltungsabende entwickeln sich so immer stärker zu einer selbstständigen, dynamischen Plattform für den Austausch von Unterrichtsideen, Alltagserfahrungen und über aktuelle Trends und Ideen auf dem Gebiet des Technologieeinsatzes im Mathematikunterricht.

Literatur

Ruppert, M; Wörler, J. (Hrsg.): Technologien im Mathematikunterricht: Eine Sammlung von Trends und Ideen. Springer, 2013