Vera KÖRKEL, Britta SJUTS, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, DE

Substanzielle Aufgaben zur Förderung mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler innerhalb und außerhalb des Mathematikunterrichts

Dass eine frühzeitige Diagnose und Förderung für die Begabungsentwicklung mathematisch begabter Jugendlicher notwendig ist, gehört zu den heute allgemein anerkannten Grundpositionen der Begabungsforschung (Käpnick, 2014). Für Lehrkräfte ist dementsprechend unabdingbar, über ein Repertoire an Förderformaten zu verfügen. Ein Element stellen substanzielle Aufgabenfelder dar (vgl. z.B. Benölken, 2016), die durch ein mathematisch reichhaltiges Potential möglicher Lösungen und Lösungswege zum Entdecken mathematischer Beziehungen im Sinne eines aktiven und konstruktiven Lernprozesses einladen (vgl. z.B. Winter, 1996). Dabei werden im individuellen Entdecken und Erforschen neuer Zusammenhänge mathematische Denkprozesse angeregt.

Solche Aufgaben werden im Projekt „Mathe für kleine Asse“ der Universität Münster* entwickelt und erprobt (Käpnick, 2016). Ein Aufgabenbeispiel soll im Folgenden vorgestellt werden. Aus den Beobachtungen beim Bearbeiten der Aufgabe resultieren Schlussfolgerungen für die Förderung mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler.

Aufgabenbeispiel: Mathematik mit Domino

Die Aufgabe „Mathematik mit Domino“ lädt zu Entdeckungen an Dominorahmen ein, bei denen aus einer bestimmten Anzahl Dominosteinen Rechtecke gelegt werden ohne die Anlegeregeln des Dominospiels zu beachten. Verwendet wird ein Dominospiel mit 0 bis 6 Augen. Die Schülerinnen und Schüler sollen an zwei einleitenden Beispielen (siehe Abbildung) entdecken, dass die Zeilen- und Spaltensumme in beiden Rahmen 3 beträgt. Aufgabe der Schülerinnen und Schüler ist nun, darauf aufbauend eigene Fragestellungen zu formulieren und selbst zu lösen. Die Lehrkraft steht ihnen dabei nur beratend zur Seite. Sie lässt ihnen genügend Zeit auch Irrwege zu beschreiten, unterstützt aber sofern nötig, wenn die Schwierigkeit der Fragestellungen zu hoch gewählt wird. Außerdem regt sie zur Verschriftlichung des Lösungsprozesses und der Ergebnisse an.

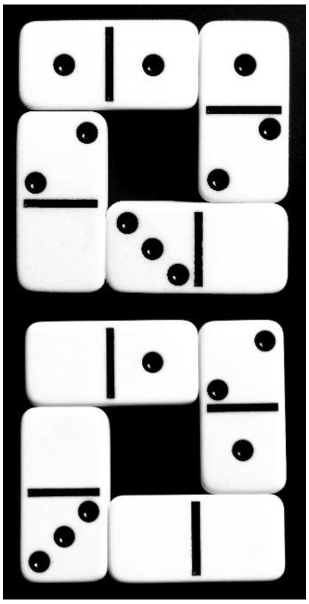

Abbildung 1: Beispiele von 4er-Dominorahmen

Die Aufgabe ist je nach Vorkenntnissen und Kompetenzniveau der Schülerinnen und Schüler auf unterschiedlichem Niveau (ca. 3.-7. Klasse) bearbeitbar. Folgende Fragestellungen sind denkbar, wobei die Schülerinnen und Schüler kreativ auf eigene Ideen kommen können und sollen:

- Als erste mögliche Fragestellung versuchen die Schülerinnen und Schüler häufig zunächst weitere 4er-Dominorahmen mit der Zeilen- und Spaltensumme 3 zu legen. Dafür lassen sich insgesamt 7 Möglichkeiten finden.
- Darauf aufbauend können die Schülerinnen und Schüler Rahmen mit anderen Zeilen- und Spaltensummen suchen. Die kleinste Möglichkeit ist eine Summe von 2, die größte ist 16. Beides ist jeweils nur auf eine Art möglich. Wie sich leicht überprüfen lässt, lassen sich alle Summen von 2 bis 16 erreichen.
- Schwieriger ist die Fragestellung zu beantworten, ob im 4er-Dominorahmen gleiche Zeilen- und Spaltensummen möglich sind, wenn die Anlegeregeln des Dominospiels beachtet werden. Bezeichnet man die dabei auftretenden Steine mit $(a \mid b),(b \mid \mathrm{c}),(c \mid \mathrm{d}),(d \mid \mathrm{a})$, so kann man die Bedingung der Gleichheit der Zeilen- und Spaltensummen als drei Gleichungen formulieren. Durch Umformungen lässt sich zeigen, dass diese Gleichungen nur erfüllt sind, wenn $a = c$ gilt, was bedeutet, dass zwei gleiche Steine verwendet werden müssten. Dies ist bei Verwendung eines einzigen Dominospiels nicht möglich. Damit ist ein Beweis durch Widerspruch geführt, dass die Anlegeregeln des Dominospiels nicht erfüllt werden können.
- Im Sinne eines mathematischen Problemlöseprozesses können nun Erweiterungen vorgenommen werden. Zum einen kann ein Set aus anderen Dominosteinen verwendet werden, z.B. indem nur die Steine mit 0 bis 3 Augen zugelassen werden oder ein Dominospiel mit bis zu 9 Augen verwendet wird. Zunächst ergibt sich die Frage, wie viele Steine in diesen Dominospielen enthalten sind. Aus dem rein kombinatorischen Problem entwickelt sich bei der Verallgemeinerung zu einem Spiel mit 0 bis n Augen die Frage der Berechnung einer endlichen Summe: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$.
- Daran schließt sich die Frage an, welche Zeilen- und Spaltensummen in einem Dominospiel mit 0 bis n Augen im 4er-Dominorahmen möglich sind. Die kleinste Summe bleibt weiterhin 2. Die größtmögliche Summe ergibt sich, wenn die Steine mit der

größten Augensumme $(n|n),(n|n-1),(n|n-2),(n-1|n-1)$ verwendet werden. Damit kann maximal eine Spaltensumme von $3n-2$ erreicht werden.

- Eine weitere Erweiterung des Problems betrifft das Legen anderer Größen von Dominorahmen. Schüler können beispielsweise versuchen, alle 28 Steine (beim Spiel mit 0 bis 6 Augen) in einem 28er-Dominorahmen zu legen. Dabei lässt sich analytisch bestimmen, dass Summen von 42 bis 48 möglich sind. In diesem großen Rahmen kann das Legen unter Beachtung der Anlegeregeln erfolgen, wobei dann nur die Summen 44, 45 und 46 möglich sind. Das Formulieren der Begründung, wieso beispielsweise bei Beachtung der Anlegeregeln die Summe 42 nicht erreicht wird, kann als Übung für logisches Schlussfolgern, wie es in mathematischen Beweisen notwendig ist, gesehen werden.

Beobachtungen beim Bearbeiten der Aufgaben

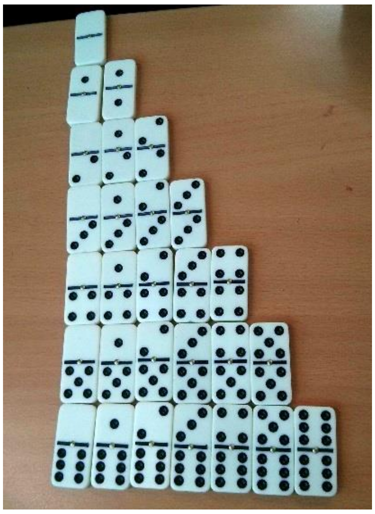

Abbildung 2: Systemhaftes Vorgehen eines Schülers

Die Schülerinnen und Schüler zeigten beim Bearbeiten der Aufgabe eine große Kreativität im Formulieren von Fragestellungen, in der Vielfalt der Lösungswege und der Lösungsdarstellungen. In Übereinstimmung mit den Studien von Fuchs (2006) arbeiteten sie dabei nach individuellen Problemlösestilen. Durch den Spielcharakter des Materials probierten viele Schülerinnen und Schüler zunächst enaktiv Möglichkeiten aus. Manche blieben bei hartnäckigem Probieren, anderen halfen Intuition und Fähigkeiten im Erkennen von Mustern und Strukturen beim Finden von Lösungen. Je schwieriger die Fragestellungen waren, desto mehr lösten sich die Schülerinnen und Schüler vom Material und gingen zu systematischen Überlegungen über. Andere Schülerinnen und Schüler präferierten ein systemhaftes Vorgehen. So ordnete ein Schüler zunächst die Dominosteine zu einer Struktur, um einen Überblick über das Material zu erhalten (siehe Abbildung). So fand er durch ein systematisches Vorgehen sehr schnell Lösungen zu möglichen Augensummen. Bei allen Schülerinnen und Schülern konnte in einem Wechselspiel zwischen Vereinfachung und Verallgemeinerung sowie zwischen kreativem Vorgehen und Systematisierung unter Verwendung logisch-schlussfolgerndem Denken ein mathematischer Arbeitsprozess initiiert werden.

Anforderung an Aufgaben

Damit Aufgaben solche mathematischen Denkprozesse anregen, muss die Aufgabenstellung für die Schülerinnen und Schüler leicht verständlich und interessant sein, so dass sie zum kreativen Arbeiten und zum Entdecken einlädt. Dafür ist nötig, dass das Problem eine reichhaltige mathematische Substanz bietet und offen bezüglich der Wahl der Hilfsmittel, der Lösungswege und der Ergebnisdarstellung formuliert ist (vgl. z.B. Benölken, 2016, S. 206f).

Fazit

Substanzielle Aufgaben werden der Forderung nach natürlicher Differenzierung gerecht, die eine Differenzierung vom Kind ausgehend vorsieht, das geprägt durch individuelle Potentiale selbst bestimmt, wie tief es in den mathematischen Gehalt einer Aufgabe eindringt (vgl. z.B. Käpnick, 2014, S. 194f). Sie können einerseits als Enrichment zum schulischen Mathematikunterricht angeboten werden und losgelöst von curricularen Vorgaben Einblicke in neue Themenfelder der Mathematik eröffnen, andererseits aber auch als Additum zu einer tieferen Durchdringung schulischer Themen einladen.

Literatur

Benölken, R. (2016): Offene substanzielle Aufgaben – Ein möglicher Schlüssel auch und gerade für die Gestaltung inklusiven Mathematikunterrichts. In R. Benölken & F. Käpnick (Hrsg.), *Individuelles Fördern im Kontext von Inklusion* (S. 203-213). Münster: WTM.

Fuchs, M. (2006): *Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen.* Berlin: LIT.

Käpnick, F. (2014): *Mathematiklernen in der Grundschule.* Berlin und Heidelberg: Springer.

Käpnick, F. (2016): Zehn Jahre „Mathe für kleine Asse“ - Eine Zwischenbilanz. In R. Benölken & F. Käpnick (Hrsg.), *Individuelles Fördern im Kontext von Inklusion* (S. 11-29). Münster: WTM.

Winter, H. (1996): *Mathematik entdecken: Neue Ansätze für den Unterricht in der Grundschule* (4. Auflage). Berlin: Cornelsen Scriptor.

---

* Förderprojekt an der WWU Münster zur Förderung mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler beginnend im Vorschulbereich bis Ende Sekundarstufe I (siehe http://mathefuerkleineasse.uni-muenster.de).