Alexander WOLFF, Hildesheim

Umformen und Lösen von quadratischen Gleichungen

Quadratische Gleichungen zu lösen ist Bestandteil der Bildungsstandards Mathematik für die Sekundarstufe 1 und somit Lerngegenstand für alle Schülerinnen und Schüler (SuS). In Form von ausgewiesenen Kompetenzen lernen sie verschiedene Möglichkeiten und Vorgehensweisen kennen quadratische Gleichungen umzuformen und zu lösen. Wie sich hierbei jedoch ein Verständnis einstellt, das dafür verantwortlich ist, wie die SuS vorgehen, ist bisher kaum erforscht worden. Wurde Verständnis bisher vorrangig im Kontext und in der Verknüpfung mit Modellierungsaufgaben gesehen, liegt der Fokus dieses Projekts nun auf der Herstellung von Verständnis im Kalkül. Ziel des Projekts ist es, zu rekonstruieren, wie SuS den Prozess des Umformens im Kalkül verstehen. Erkenntnisse aus der Studie sollen helfen, Unverständnis und Sinnentleerung im Umgang mit quadratischen Gleichungen vorzubeugen.

1. Theoretische Grundlagen

Nicht wenige SuS fangen bei Aufgaben der Art $(x-2)(x+3)=0$ an auszumultiplizieren, statt die Lösungsmenge direkt aus der Aufgabe abzulesen. Fragt man sie nach alternativen Vorgehensweisen oder auch in welcher Beziehung das Produkt links des Gleichheitszeichens mit dem Wert (Term) auf der rechten Seite steht, so passen einige. Auch wenn man sie dazu auffordert (siehe Abbildung 1) Aufgaben über das Faktorisieren zu lösen, brechen sie ab. Hinzu kommt, dass viele SuS das Umformen und Lösen als sinnentleert erleben. Es fällt ihnen schwer nachzuvollziehen, warum sie bestimmte Rechenoperationen durchführen können, andere hingegen nicht, und worin eigentlich der Sinn liegt. Ein bekanntes Beispiel ist hier, dass die Addition auf beiden Seiten einer quadratischen Gleichung eine Äquivalenzumformung darstellt. Zieht man hingegen die Quadratwurzel, so handelt es sich nicht mehr um eine Äquivalenzumformung. Die Beispiele ließen sich unzählig fortsetzen. Kirsch führt für lineare Gleichungssysteme an, dass Fragen der Art „Dürfen wir auch? Wie müssen wir das rechnen?“ nach dem Sinne der Sache seitens der SuS ruft und auch das Bewusstsein über das Lösen thematisiert werden sollte (siehe 1991, S. 294 und S. 296.). Um auf die genannten Beispiele zurückzukommen ist offensichtlich

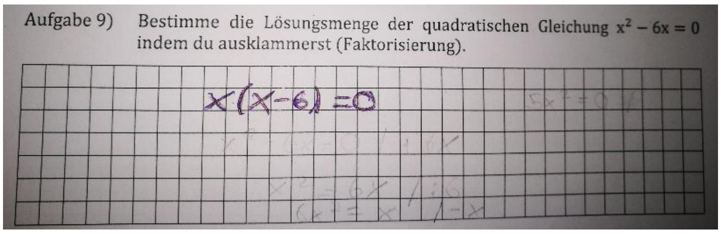

Abbildung 1: Aufgabenbearbeitung einer Schülerin

der formale Kalkül nicht verstanden worden und dies kann dazu führen, das Thema als sinnentleert wahrzunehmen. Dieses auftretende Phänomen führte in der vergangen Zeit in der Mathematik zu einer verstärkten Hinwendung auf die Fokussierung inhaltlichen Denkens über die Ausbildung von Grundvorstellungen über die Verknüpfung mit Modellierungsaufgaben (siehe z.B. v. Hofe, 1992; 2013, S. 4f.).

Dass Verständnis aber auch im formalen Kalkül liegt und hergestellt werden kann zeigt sich aber auch im Kern der Algebra. Denn ihre Stärke und ihr Wesen bestehen ja zum großen Teil darin, inhaltliche Überlegungen durch kräfteschonende formale Operationen zu ersetzen (vgl. Kirsch, 1991, S. 296). Auch eine Ausbildung algebraischen Denkens als Umgang mit Unbestimmtheit auf analytische Art und Weise (vgl. Radford, 2010) wäre ohne den Bezug zum Kalkül undenkbar.

Doch woran liegt diese Diskrepanz? Offensichtlich gelingt der Aufbau des Kalküls als formales Verständnis einer quadratischen Gleichung nicht wie gewünscht.

Zur Erklärung dieses Phänomens hat sich der Terminus des Erkennens und Nutzens von Strukturen bzw. von Strukturierungsprozessen in der Mathematikdidaktik etabliert.

Hoch und Dreyfus verweisen in ihren Untersuchungen darauf, dass den SuS der algebraische Struktursinn fehle, der einer quadratischen Gleichung zu Grunde liege. Hierunter verstehen sie, eine vertraute Struktur in ihrer einfachsten Form wieder erkennen zu können und angemessene Umformungsschritte vorzunehmen, die die Struktur mit am besten ausnutzen (siehe 2010, S. 25f.). Auch Malle spricht von einem Termstrukturerkennen, das dem Umformen algebraischer Ausdrücke zu Grunde liege und vielen Lehrern gar nicht bewusst wäre (vgl. Malle, 1993, S. 254f.). Rüede verschiebt dabei die Sichtweise von der objektiven Eigenschaft eines algebraischen Ausdrucks (Struktur) hin zur subjektiven Begegnung und spricht von Strukturierung in seiner Studie zu Linearen Gleichungen und Bruchgleichungen. Strukturierung definiert er dabei als ein Aufeinander beziehen von Teilen eines algebraischen Ausdrucks durch eine Person (siehe 2015, S. 38f.).

Allen drei Theorien ist gemein, dass sie auf der Kalkülebene anzusiedeln sind. Wird Verständnis von mathematischen Objekten in Klassenstufen der frühen Sekundarstufe 1 durch Modellierungskontexte und somit den Aufbau inhaltlichen Denkens gefördert, erfährt der Kalkül – das innermathematische Arbeiten nach Regeln und Gesetzmäßigkeiten – in den höheren Klassenstufen eine zunehmend gewichtigere Rolle (vgl. Rüede, 2015, S. 1). Verständnis im Kalkül bezeichnet Kieran (2006) auch als interne Semantik, in Abgrenzung zur externen Semantik. So interessiert es bei der internen Semantik, wie Verständnis im reinen innermathematischen Kalkül hergestellt werden kann, und die externe Semantik fragt nach Deutungen mathematischer Objekte in Modellierungskontexten.

Wie SuS nun das Umformen und Lösen von Quadratischen Gleichungen konkret verstehen und somit folglich vorgehen, ist bisher kaum für den deutschsprachigen Raum untersucht worden. Viele Studien beschreiben zwar, wie sich Verständnis theoretisch im Kalkül einstellen kann, doch ist dies bisher auf den Lerngegenstand der quadratischen Gleichungen kaum untersucht worden. Daher interessiert es in der vorliegende Studie zu untersuchen, wie SuS das Umformen und Lösen von quadratischen Gleichungen verstehen, um so nachvollziehen zu können, wie sie beim Umformen und Lösen vorgehen. Verständnis im Umgang mit quadratischen Gleichungen wird hierbei als die Menge von Handlungen bzw. Berechtigungen betrachtet, zu denen SuS im Umgang mit quadratischen Gleichungen in der Lage sind.

Die Fragestellung differenziert sich dabei in drei Unterfragen auf:

- Welche Muster und individuellen Vorgehensweisen lassen sich bei den SuS rekonstruieren?
- Inwiefern lassen sich die Ergebnisse auf eine Entwicklung algebraischen Denkens verallgemeinern?
- Welche didaktischen Maßnahmen liegen nahe?

2. Design der Studie

Zur Untersuchung der vorliegenden Fragestellung wurde ein Design konzipiert, das aus drei Zugängen besteht. In einem ersten Schritt wurde ein Vorwissenstest konzipiert, der literaturbasiert verschiedene Aspekte zum Umformen und Lösen von quadratischen Gleichungen in Form von Teilkompetenzen abfragt. Dieser wurde als Leistungstest konzipiert und ist auf 60 Minuten angesetzt. In einem zweiten Schritt wurde ein Fragebogen für Lehrkräfte konzipiert, der ebenfalls literaturbasiert verschiedene Aspekte und Facetten zur Thematisierung des Lerngegenstandes im Unterricht abfragt. In einem dritten Schritt wurde ein aufgabenbasiertes Leitfadeninterview konzipiert, das aus den verschiedenen quadratischen Gleichungstypen besteht und in Kombination mit den Methoden des Lauten Denkens und des Führens eines Leitfadeninterviews die individuellen Vorgehensweisen zur Analyse hat. So soll das dem Umformen und Lösen quadratischer Gleichungen zu Grund liegende Verständnis interpretativ rekonstruiert werden. Dies kann dann in

Beziehung gesetzt werden zum stattgefundenen Unterrichtsprozess und zu vorhandenen Teilkompetenzen beim Lerngegenstand.

Vor der eigentlichen Haupterhebung wurde das Design umfangreich pilotiert. An der Studie nehmen insgesamt 4 Gymnasial- und 4 Gesamtschulklassen teil.

3. Ausblick

Zurzeit (April 2018) befindet sich das Projekt noch in der Datenerhebung, die bis Sommer 2018 abgeschlossen sein soll. Im Anschluss werden die Daten aus der Interviewstudie mit Lautem Denken inhaltsanalytisch in Anlehnung an Mayring (2010) ausgewertet und mit den Daten aus dem Test und dem Fragebogen in Beziehung gesetzt. Ziel ist es eine Theorie über das Verständnis beim Umformen und Lösen von Quadratischen Gleichungen zu entwickeln und praxisrelevante Hinweise in Form von didaktischen Maßnahmen zu formulieren.

Literatur

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2010). Nicht nur umformen, auch Strukturen erkennen und identifizieren- Ansätze zur Entwicklung eines algebraischen Struktursinns. Praxis der Mathematik in der Schule, 33, S. 25-29.

Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra. In A. Guiterrez & P. Boero (Hrsg.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future (S. 11-49). Rotterdam: Sensepublishers.

Malle, G. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig: Vieweg.

Kirsch, A. (1991). Formalismen oder Inhalte? Schwierigkeiten mit linearen Gleichungssystemen im 9. Schuljahr. In: Didaktik der Mathematik 19(4), S. 294-308.

Mayring, P. (2010). Qualitative Inhaltsanalyse. Weinheim: Belz.

Radford, L. (2010). Signs, gestures, meanings: algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In V. Durand-Guerrier, S. Soury Lavergne & F. Arzarello (Hrsg.). Proceedings of the sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. January 28th- February 1st 2009, Lyon (France) Lyon, France: INRP. www.inrp.fr/editions/cerme6. Zugegriffen: 15. Feb. 2014.

Rüede, C. (2015). Strukturieren von Termen und Gleichungen. Wiesbaden: Springer.

vom Hofe, R. (1992): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. In: Journal für Mathematik-Didaktik 13(4), S. 345-364.

vom Hofe, R. (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen. In: Mathematik lehren 118, 4-8.