

## **Inhaltliches Lösen von Gleichungen herbeiführen durch geeignetes Abändern von Standardaufgaben**

Ein verständnisvolles, flexibles Arbeiten an mathematischen Aufgaben steht im Kontrast zu einem algorithmisch nach festen Mustern zu lösenden Verfahren. Wird im Unterricht zu stark auf ein Lösen nach festen Mustern gesetzt, erschwert dies das Erarbeiten von Problemen in neuem Kontext, wenn diese Muster nicht oder nur in modifizierter Form anwendbar sind. Das Erfassen der zugrunde liegenden Struktur verkommt zum Trigger, ob eine Lösungsroutine anwendbar ist oder nicht, wie Novotna et al. (2014) sehr deutlich beschreiben: „This means pupils instead of solving a problem simply apply some algorithm chosen according to the signals from the assignment or the teacher. Then they fail if they are to solve non-standard problems whose assignment does not contain elements they are used to, elements that serve as indicators for selection of the right solving strategy. They feel helpless if they face an atypical, unusual problem or a problem set in an unknown context. (p.1)“ Dieses Problem ist nicht nur auf Anwendungsaufgaben beschränkt. Eine eigene Studie bestätigt, dass Schüler\_innen der 10. Klasse sehr geringe Flexibilität beim Lösen von Gleichungen zeigen und mentale Bilder von Gleichungen in Gestalt von Funktionsgraphen nur bruchstückhaft nutzen (vgl. Zell, 2017a).

Dieses Problem ist nicht neu. Schon Fanghänel (1984) warnt vor dem Hintergrund seiner Studien davor, dass Unterricht, welcher zu stark auf vorgegebene Lösungsmuster setzt, Gefahr läuft, „daß inhaltliches Verständnis durch formale Kenntnis von Sätzen und Verfahren ersetzt und damit ein Anwenden des Erlernten unter veränderten Bedingungen wesentlich erschwert“ wird (Fanghänel, 1984). Insbesondere bei der Behandlung von Gleichungen sind Lösungsroutinen sehr präsent. Sie werden intensiv geübt, so dass alternative (und evtl.) kürzere Lösungen nicht beachtet bzw. ignoriert werden. Die Fähigkeit im Lösen von Gleichungen wird als Werkzeug permanent im gesamten Mathematikunterricht und in weiteren Bildungsabschnitten benötigt. Umso notwendiger ist es, ein inhaltliches Verständnis des Lösens von Gleichungen aufzubauen, denn nur dieses garantiert nicht nur Automatismen, sondern langfristig verfügbare und vor allem flexibel anwendbare Kenntnisse und Fähigkeiten und damit dauerhaften Erfolg des Unterrichts. Ein guter Ansatz diese Inflexibilität zu verringern, ist die Förderung des inhaltlichen Lösens von Gleichungen.

Nach Fanghänel (1984) wird eine Aufgabe inhaltlich gelöst, „wenn sich der Aufgabenlöser durch Erfassen von Eigenschaften und Beziehung, durch

Deutung von Symbolen, durch Nutzung vorhandener theoretischer Kenntnisse klare Vorstellungen über den vorgegebenen Sachverhalt verschafft und diese zum Erreichen des Zieles, d.h. dem Lösen der jeweiligen Aufgabe einsetzt.“ Es ist kein Arbeiten mit Begriffen oder Algorithmen, sondern ein Nutzen der mathematischen Objekte (Begriffe, Operationen, Relationen, ...) und deren Eigenschaften zum Herbeiführen von Lösungen. Inhaltliches Arbeiten ist im Vergleich zu anderen Lösungsverfahren immer im Kontext der gegebenen Aufgabe zu sehen. Anhand seiner Studie folgert Fanghänel, dass „sich eine Verstärkung des inhaltlichen und problemhaften Vorgehens beim Lösen von Aufgaben (und damit ein Reduzieren des Lösens nach Muster bzw. einem bekannten Verfahren) positiv auf die Entwicklung des Könnens der Schüler zum Lösen von Anwendungsaufgaben ausgewirkt hat.“ (Fanghänel, 1984, S.156). Flade, Goldberg & Mounnarath (1992) greifen die allgemeine Definition von Fanghänel (1984) auf und sprechen dann von inhaltlichem Lösen von Gleichungen, wenn sich die Schüler\_innen klare Vorstellungen über die in einer Gleichung ausgedrückte Bedingung und deren Folgerungen verschaffen und diese zum Bestimmen einer Lösung bewusst einsetzen. Sill et al. (2010) verstehen unter inhaltlichem Lösen von Gleichungen und Ungleichungen das Lösen ohne Verwendung von algorithmisch-kalkülmäßigen Verfahren. Sie plädieren dafür, das inhaltliche Lösen auch dann noch zu nutzen, wenn kalkülmäßige Verfahren bekannt sind. Inhaltliches Lösen entwickelt Fähigkeiten im Erkennen von Termstrukturen und kann die Vertrautheit der Schüler\_innen mit Variablen, Termen und Gleichungen fördern helfen. Sie nennen ohne Anspruch auf Vollständigkeit sieben Möglichkeiten des inhaltlichen Lösens von Gleichungen (S. 32ff):

1. einfaches oder systematisches Probieren
2. Veranschaulichung von Gleichungen bzw. Ungleichungen auf einer Zahlengeraden
3. Zerlegen von Zahlen und Termen in Summen, Differenzen und Produkte
4. Verwenden der Umkehroperation bzw. Umkehrfunktion
5. Vergleichen von Zählern und Nennern bei Verhältnisgleichungen
6. Verwenden von Definitionen und Sätzen
7. Grafisches Lösen von Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen

Anhand dieser Beispiele ist zu erkennen: Inhaltliches Lösen ermöglicht flexibleres Herangehen an mathematische Probleme und erfordert das Bilden,

Kombinieren und Variieren mentaler Bilder von mathematischen Strukturen. Dies leisten Lösungen nach Lösungsmuster nicht.

Da inhaltliche Lösungsverfahren immer kontextabhängig sind, müssen Aufgaben sorgfältig ausgewählt werden. In den unteren Klassenstufen sollte viel Wert auf die mündliche Wiedergabe der Lösungen gelegt werden (Flade et al., 1992). Das Erstellen von Aufgaben in einem schriftlichen Test ist zudem herausfordernd, da dieselben Aufgaben algorithmisch oder nichtalgorithmisch gelöst werden können (Oldenburg, Hodson & Küchemann, 2013) und dass Schüler\_innen, welche eine Aufgabe ursprünglich inhaltlich gelöst haben mit zunehmendem Können nun syntaktisch lösen werden. Sie folgern, „it is possible theoretically to distinguish between syntactic and semantic aspects of algebraic thinking, it is not clear whether these aspects can be reliably distinguished empirically through test items” (p.502f). Für den Unterricht bedeutet dies, dass die Besprechung von Aufgaben mit Einbeziehung alternativer Lösungsverfahren eine hohe Bedeutung erfährt, um inhaltliche Ansätze bei den Schüler\_innen zu diagnostizieren. Wie können geschriebene Lösungen als inhaltlich identifiziert werden? Inhaltliches Lösen ist erforderlich, wenn noch kein Verfahren zur Lösung einer Aufgabe gegeben ist (Fanghänel, 1984). Beispielsweise können Schüler\_innen die Gleichung  $\sqrt{x} = x$  ohne Kenntnis des Lösungsalgorithmus für Wurzelgleichungen inhaltlich lösen, indem die Beziehung zwischen den beiden Zahlen links und rechts des Gleichheitszeichens untersucht werden muss. Nach Sill et al. (2010) ist inhaltliches Lösen insbesondere dann sinnvoll, wenn Zahlenmaterial und Gleichungsstrukturen einfach gestaltet sind und ein rationelleres Lösen als das kalkülmäßig-algorithmische Vorgehen ermöglicht wird. Für eine Studie zur Förderung des inhaltlichen Lösens von Gleichungen wurden neben diesen beiden Möglichkeiten weitere Aufgabenformate identifiziert:

- Die Lösung der Gleichung ist die leere Menge, z.B. kann die Gleichung  $x^2+4=0$ , schnell inhaltlich ohne Wurzelziehen gelöst werden.
- Explizites Verbieten von (Standard-)Algorithmen, z.B. soll die Gleichung  $3^{x-2} = 81$  ohne Einsatz des Logarithmus gelöst werden.
- Bewusstes Einsetzen von Funktionen zum Lösen von Gleichungen, z.B. kann die Lösungsmenge von  $2^x = x$  anschaulich mithilfe zweier Funktionsgraphen gelöst werden.
- Die Aufgabenstellung verlangt keine konkrete Lösung, z.B. kann die Aufgabenstellung „Begründe: Die Funktion  $f(x)=x^2+2x+1$  hat keine positiven Nullstellen“ ohne die Lösungsformel für quadratische Gleichungen bestimmt werden.

Diese Formate können natürlich auch in gemischter Form auftreten. So treten in der Aufgabe „Bestimme mithilfe von Funktionsgraphen die Lösungsmenge von  $2^x = x$ “ die Merkmale unlösbares Verfahren, einfaches Zahlenmaterial und bewusster Einsatz von Funktionen auf. An den Beispielen ist zu erkennen, dass ein Erstellen dieser Aufgabenformate durch minimales Abändern von Standardaufgaben aus Mathematikbüchern möglich ist. Weitere Beispiele sind in Zell (2017b) zu finden.

Die obigen Beispiele sind im Eingangstest der genannten Studie enthalten. 480 Schüler\_innen haben diesen Test zu Beginn des Schuljahres 2017/2018 geschrieben. Die Analyse der Ergebnisse zeigte, dass solche Aufgabenformate für Wiederholungsaufgaben sehr geeignet sind. Neben den Standardverfahren sind dadurch auch inhaltliche Lösungsverfahren möglich. So haben alle eine Chance die Aufgabe zu lösen, auch wenn Lösungsformeln nicht mehr präsent sind. Bei der anschließenden Besprechung können nicht nur Standardlösungsverfahren reflektiert werden, sondern auch die Bedeutung(en) und Eigenschaften der involvierten Begriffe anhand der inhaltlichen Vorgehensweisen. Daher steckt in diesen Aufgabenformaten ein hohes Potenzial inhaltliche Vorgehensweisen zu fördern und die Schüler\_innen zu einem verständigeren und flexiblen Umgang mit Gleichungen zu führen.

## Literatur

- Fanghänel, G. (1984). Zum Arbeiten mit Aufgaben im Mathematikunterricht an den zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen der DDR. Berlin, *Akad. d. Pädag. Wiss. d. DDR, Diss. B.*
- Flade, L., Goldberg, E., & Mounnarath, V.N. (1992). Inhaltliches Lösen von Gleichungen – eine legitime Methode. *Mathematik Lehren*, 51, 15-18.
- Novotná, J. et al. (2014). Problem Solving in School Mathematics Based on Heuristic Strategies. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science*, 7(1), 1-6.
- Oldenburg, R., Hodgen, J., & Küchemann, D. (2013). Syntactic and semantic items in algebra tests: a conceptual and empirical view. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M.-A. Mariotti (Hrsg.), *Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)*. 500-509.
- Sill, H. D. et al. (2010). *Sicheres Wissen und Können - Arbeiten mit Variablen, Termen, Gleichungen und Ungleichungen Sekundarstufe I*. Institut für Qualitätsentwicklung Mecklenburg-Vorpommern
- Walsch, W. (1992). Gleichungen im Mathematikunterricht. *Mathematik Lehren*, 51, 6-10.
- Zell, S. (2017a). Zum inhaltlichen Lösen von Gleichungen in der Klassenstufe 10. In: U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017*. Münster: WTM-Verlag.
- Zell, S. (2017b). *Workout Mathematik Klasse 10 – Wöchentliche 10-Minuten-Übungen zu Gleichungen und Funktionen als Vorbereitung auf die Kursstufe*. Bad Buchau: Feedersee-Verlag.