

No. 606

Juni 2019

Musik und Mathematik

**K. Sivalingam geb. Kirubamoorthy,
V. Kliewer, G. Köchling**

ISSN: 2190-1767

Musik und Mathematik

03. Mai 2017

Kiruththika Kirubamoorthy

kiruththika.kirubamoorthy@udo.edu

Viktorija Kliewer

viktorija.kliewer@udo.edu

Gerrit Köchling

gerrit.koechling@udo.edu

Technische Universität Dortmund

Lehrstuhl für Angewandte Mathematik und Numerik

Leitung von Prof. Dr. Stefan Turek

Wirtschaftsmathematisches Studienprojekt

Betreuung durch Dr. Andriy Sokolov

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Mathematische und musikalische Grundlagen	3
2.1. Klangentstehung	3
2.2. Klangeigenschaften	4
3. Einführung in die Klangsynthese	8
3.1. Additive Synthese	8
3.1.1. Fourierreihe	8
3.1.2. Fourier-Transformation	9
3.2. Hüllkurven und Low Frequency Oszillatoren	11
3.3. CSound	12
4. Theorie und Praxis: Instrumente	15
4.1. Saiteninstrumente	15
4.1.1. Die gezupfte Saite	16
4.1.2. Anwendung	23
4.1.3. Die gestrichene Saite	25
4.1.4. Anwendung	29
4.2. Membranophone	32
4.2.1. Bessel-Funktionen	32
4.2.2. Mathematische Beschreibung	33
4.2.3. Anwendung	37
4.3. Aerophone	41
4.3.1. Herleitung der Differentialgleichungen	41
4.3.2. Lösung der Differentialgleichungen	42
4.3.3. Anwendung	46
4.4. Idiophone	50
4.4.1. Herleitung der Differentialgleichungen	51
4.4.2. Lösung der Differentialgleichungen	53
4.4.3. Anwendung	58
5. Zusammenfassung und Ausblick	63
A. Verwendete Matlab-Programme	65
B. Verwendete CSound-Programme	68
B.1. Gezupfte Saite	68
B.2. Gestrichene Saite	69
B.3. Kick-Drum	70
B.4. Snare-Drum	70
B.5. Querflöte	71
B.6. Klarinette	71
B.7. Xylophone und Lamellophone	72

Abbildungsverzeichnis

1. Längs- und Querwellen	3
2. Kurven gleicher Lautstärke	6
3. Frequenzbewertungskurve A	6

4.	Fourier-Transformation	10
5.	Beispielhaftes Signal mit normalverteiltem Störterm	10
6.	Frequenzspektrum von $S(t)$	10
7.	ASDR-Hüllkurve	11
8.	Wellenform eines Vibratos	12
9.	Wellenform eines Tremolos	12
10.	Schwingende Saite	16
11.	Kleines Saitenstück mit den darauf wirkenden Kräften	18
12.	Grundfrequenz und die ersten beiden Obertöne	21
13.	Schwingungsverlauf einer gezupften Saite	23
14.	Signal einer gezupften Saite	24
15.	Signal und Frequenzspektrum des synthetischen Klanges einer gezupften Saite	25
16.	Auslenkung der Saite mit Beobachtungspunkten nahe Steg und Bogen	25
17.	Helmholtz-Bewegung einer Saite	27
18.	Signal des synthetischen Klanges einer gestrichenen Violinensaite	30
19.	Frequenzspektrum einer gestrichenen Violinensaite	31
20.	Bessel-Funktionen erster Gattung	33
21.	Bessel-Funktionen zweiter Gattung	33
22.	Parametrisierung der Membran	33
23.	Eigenschwingungen einer kreisrunden Membran	37
24.	Signal und Frequenzspektrum eines Kick-Drum Klanges	38
25.	Signal und Frequenzspektrum des synthetischen Kick-Drum Klanges	39
26.	Signal und Frequenzspektrum eines Snare-Drum Klanges	40
27.	Signal und Frequenzspektrum des synthetischen Snare-Drum Klanges	41
28.	Wellendarstellung des Drucks	43
29.	Wellendarstellung der Verschiebung	43
30.	Wellendarstellung des Drucks und der Verschiebung bei einem konischen Rohr	44
31.	Wellendarstellung des Drucks	44
32.	Wellendarstellung der Verschiebung	44
33.	Rohr eines Besselhorns mit $R(x) \equiv R(= b)$ für $\alpha = 0$	45
34.	Konisches Rohr für ein Besselhorn bei $\alpha = -1$	45
35.	Rohrform eines Besselhorns für $\alpha > 0$	45
36.	Effektive Länge bei geschlossenen Grifflöchern und einem geöffneten Griffloch	46
37.	Effektive Länge eines Rohrs in Abhängigkeit der Größe des Grifflochs	46
38.	Grafische Darstellung eines synthetisch erstellten Klanges einer Querflöte	48
39.	Grafische Darstellung eines Originaltons einer Querflöte	48
40.	Grafische Darstellung eines synthetisch erzeugten Klanges einer Klarinette	49
41.	Grafische Darstellung eines Originalklanges einer Klarinette	50
42.	Schmaler Balken unter Querkraft $V(x, t)$	51
43.	Verbiegung des Stabs unter äußerer Einwirkung	52
44.	Die ersten vier Schwingungsmoden bei freien Enden des Stabs	56
45.	Die ersten vier Schwingungsmoden einer an einem Ende befestigten Lamelle	58
46.	Signal und Frequenzspektrum eines Originaltons eines Xylophonstabs	59
47.	Signal und Frequenzspektrum des synthetischen Klanges eines Xylophonstabs	60
48.	Signal und Frequenzspektrum des synthetischen Klanges einer Lamelle	61
49.	Signal und Frequenzspektrum eines Originaltons eines Lamellophons	62

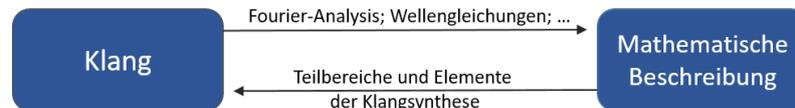
Tabellenverzeichnis

1.	Hörbereich ausgewählter Lebewesen	5
2.	Schalleindruck und physikalische Attribute einer Schallwelle	7

3.	Nullstellen der Bessel-Funktion J_n	37
----	---	----

1. Einleitung

Sowohl die Musik als auch die Mathematik zählen zu den ältesten Wissenschaften überhaupt. Die Musik wird durch ihre vielfältige Umsetzung vor allem in der Praxis gelebt, wobei unterschiedliches künstlerisches Empfinden und umfangreiche Interpretationsmöglichkeiten es ermöglichen, dass dieselbe Musik auf die verschiedenste Art und Weise wahrgenommen werden kann. Die Mathematik hingegen erscheint in ihrer Eindeutigkeit gerade zu nüchtern, sodass Musik und Mathematik zunächst kaum Gemeinsamkeiten aufweisen zu scheinen. Bei näherer Betrachtung wird jedoch deutlich, dass sich ganze Melodien und Kompositionen als Schwingungen auffassen lassen, die durch mathematische Funktionen beschrieben werden können. Dabei besteht jede Melodie aus einer Abfolge von Klängen, die wiederum aus Teiltönen bestehen. Jeder dieser Teiltöne lässt sich als Schwingung auffassen, die durch ihre Amplitude, Frequenz und Phase charakterisiert ist. Die Frequenz des tiefsten Teiltönen ist als Fundamentalfrequenz definiert und entspricht der Tonhöhe eines Klanges. Aus mathematischer Sicht entspricht beispielsweise die Tonstruktur im Allgemeinen einer transitiven und trichotomischen strengen Totalordnung. Steigt die Höhe oder Lautstärke eines Tons, steigt somit auch die Frequenz respektive Amplitude der zugehörigen Schwingung. Die Mathematik bietet damit eine Erklärung dafür, warum manche Töne oder Klänge als nicht harmonisch oder gar als unangenehm empfunden werden.



Ziel dieses Studienprojektes besteht darin, einen fundierten Zusammenhang zwischen Musik und Mathematik herzustellen und dem Leser anhand eines praxisorientierten Leitfadens aufzuzeigen, wie Mathematik am Beispiel additiver Synthese genutzt werden kann, um bestimmte Klänge synthetisch herzustellen. Dafür soll zunächst die musikalische und mathematische Basis gelegt werden. Im zweiten Kapitel werden die Entstehung und die Eigenschaften des Klanges behandelt und so die Relation zwischen Musik und Mathematik verdeutlicht. Im darauf folgenden Kapitel wird innerhalb einer Einführung in die Klangsynthese die additive Synthese und die ihr zugrundeliegende Fourier-Analyse näher durchleuchtet. Neben weiteren Elementen aus der Klangsynthese wird anschließend die Audio-Programmiersprache CSound eingeführt, die einen wichtigen Bestandteil des vierten Kapitels ausmacht. Das vierte Kapitel, das den Hauptteil der Ausarbeitung bildet, beschäftigt sich mit der Erstellung des synthetischen Klanges einiger ausgewählter Instrumente bestimmter Instrumentenklassen. Dabei wird vorerst die Differentialgleichung hergeleitet, die das Schallereignis, das durch das musizierte Instrument erzeugt

wird, beschreibt, und gelöst. Anschließend werden zusätzlich zu diesen mathematischen Beschreibungen der jeweiligen Instrumentenklasse die Originalklänge herangezogen, deren Signale und Frequenzspektren analysiert, um auf Basis der gewonnenen Erkenntnisse mittels CSound synthetische Klänge herzustellen.

2. Mathematische und musikalische Grundlagen

2.1. Klangentstehung

Viele Mathematiker und Physiker beschäftigen sich bereits seit Jahren mit der Frage wie und warum wir Musik hören können. Unter ihnen Juan Gualterio Roederer¹, der in [Roederer, 2000] das Ereignis des Hörens der Musik als eine Systemkette beschreibt. Die wesentlichen physikalischen Systeme der Kette sind dabei das Instrument (die Quelle), das den Klang erzeugt, und die Luft (das Medium), die den Schall bzw. die Klänge an das letzte Glied der Kette, den Zuhörer (der Empfänger), weiterleitet. In unserer Ausarbeitung wollen wir die ersten beiden Systeme eingehender untersuchen und konzentrieren uns zunächst auf die Frage der Klangentstehung. Das Medium, die Luft, besteht aus Luftmolekülen, die sich bei Raumtemperatur und Normaldruck 450-500 $\frac{m}{s}$ fortbewegen und bei Kollision Luftdruck erzeugen. Spielt ein Solist beispielsweise auf einer Violine, erzeugt die Violinensaite Schwingungen durch die die umgebende Luft zusammengedrückt wird, und die Luftmoleküle rücken enger aufeinander. Es entsteht ein Druckunterschied zur Umgebung. Um diesen Druckunterschied abzubauen, drücken Luftteilchen auf benachbarte Luftmoleküle und geben den Druckunterschied weiter. Diese Verdichtung der Luftmoleküle pflanzt sich in Längsrichtung wellenartig mit einer Geschwindigkeit von 343 $\frac{m}{s}$ fort bis die Schallwelle das Ohr erreicht und der Ton schließlich wahrgenommen wird.

Wie bereits oben angemerkt ist der Schall eine Längswelle, auch Longitudinalwelle genannt, da die Teilchen sich in Richtung der Ausbreitung bewegen. Anders als Schall sind beispielsweise Wasserwellen oder elektromagnetische Wellen Querwellen, die auch als Transversalwellen bezeichnet werden. Hierbei verlaufen die Schwingungen der Teilchen und die Ausbreitungsrichtung der Welle senkrecht zueinander. Eine Darstellung beider Wellen ist in der Abbildung 1 zu sehen.

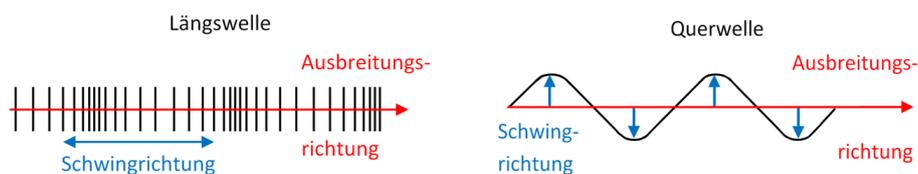


Abbildung 1: Längs- und Querwellen

Anhand der Abbildung 1 ist zu erkennen, dass Wellen einem harmonischen Bewegungsmuster folgen, weshalb sie sich analytisch durch trigonometrische Funktionen beschreiben lassen. Eine mögliche Darstellung der sinusförmigen Bewegung ist

$$y = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right). \quad (1)$$

¹Amerikanischer Physiker, geb. 1928

Mit der Amplituden A wird die maximale Auslenkung der Welle bezeichnet. T entspricht der Periode der Schwingung und ϕ dem Phasenwinkel. Die Winkelgeschwindigkeit ist gegeben mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Insbesondere spielen die ersten beiden Variablen bei der Wahrnehmung von Tönen eine wichtige Rolle, wie wir im folgendem Abschnitt sehen werden.

Doch auch wenn Töne reine Sinusschwingungen sind, stellen sie dennoch immer noch nicht die durch die Instrumenten verursachten Schallwellen dar, da beim Spielen eines Instrumentes statt einer reinen Sinusschwingung eine Überlagerung von mehreren Tönen entsteht. Wie in der Tabelle 2 zu erkennen, resultiert aus der Summe von mehreren sinusförmigen Schwingungen eine nicht sinusförmige Schwingung. Man spricht nun von einem Klang. Wie wir in Kapitel 3.1.1 sehen werden, lassen sich solche Schwingungen als Linearkombination von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen. Der Vollständigkeit halber werden an dieser Stelle zwei weitere Schallarten erwähnt, nämlich Geräusch und Knall. Im Gegensatz zum Klang besteht ein Geräusch aus der Summe von unregelmäßigen Schwingungen. Aufgrund der fehlenden Periodizität und der Zusammenhangslosigkeit von Frequenzen und Intensität, können keine klaren Töne identifiziert werden. Der Knall ist ein Geräusch, das kurzzeitig ertönt. Dessen anfängliche große Amplitude nimmt mit der Zeit schnell ab. Die Oszillogramme in Tabelle 2 illustrieren den Bewegungsverlauf der jeweiligen Schwingungen.

2.2. Klangeigenschaften

Das Ohr, ein komplexes und überaus empfindliches Organ, kann bereits Schwingungen mit Amplituden der Größe 10^{-7} cm und Periode von $7 \cdot 10^{-5}$ Sekunden wahrnehmen [Roederer, 2000]. Der Charakter eines empfundenen Klanges bzw. der Schalleindruck hängt im Wesentlichen von den folgenden drei Attributen der Schallwelle ab: die Frequenz, die Amplitude und die Schwingungsform.

Die Frequenz ist als die Anzahl der Schwingungen einer Schallwelle pro Sekunde definiert und wird in Hertz (Hz) gemessen. Je höher die Frequenz, desto höher ist der zu hörende Ton bzw. Klang. Das menschliche Ohr ist in der Lage Schwingungen im Bereich 20-20000 Hz zu registrieren, wobei die Begrenzung des Bereichs von der Lautstärke, und insbesondere durch das Alter der Person bedingt ist. Zum Vergleich folgt eine Tabelle mit verschiedenen Hörbereichen von einigen Lebewesen [Benson, 2007, Seite 13].

Ein Vergleich der Frequenzspektren von Menschen und Delfinen zeigt, dass Delfine in der Lage sind höhere Schallfrequenzen (Ultraschall) wahrzunehmen. Wenn Schallwellen auf das Trommelfell treffen und es in Schwingungen versetzt, reizt dies die im Mittelohr befindliche Membran. Die Bewegungen des Basilarmembrans werden von den Haarzellen entlang des Membrans

Lebewesen	Hörbereich (Hz)
Schildkröte	20-1000
Mensch	20-20000
Hund	50-46000
Delfin	1000-130000

Tabelle 1: Hörbereich ausgewählter Lebewesen

aufgenommen, die das Signal an die mit ihnen verbundenen Neuronen abgeben. Die Anzahl der Neuronen von Delfinen, die zur Familie der Zahnwale gehören, ist mit ungefähr 2000-3000 Ganglienzellen/mm Basilarmembran höher als beim Menschen mit 980 Ganglienzellen/mm (vgl. [Comtesse-Weidner, 2007]). Weiterhin beträgt das Verhältnis Haarzellen : Ganglienzellen beim Schweinswal (der Familie Zahnwal zugehörig) 6:1 während diese beim Menschen nur 2.4:1 beträgt (vgl. [Comtesse-Weidner, 2007]). Damit ist die Gesamtanzahl der Haarzellen bei Zahnwalen höher und liefert eine Erklärung für das breitere und höhere Frequenzspektrum dieser Lebewesen. Schildkröten jedoch hören lediglich tiefere Töne, da ihr Trommelfell nicht aus einer Membran besteht, sondern eine Knorpelplatte ist, die schlecht in Schwingung versetzt werden kann.

Die Amplitude korrespondiert mit der wahrgenommenen Lautstärke. Je größer die Auslenkung aus der Ruhelage, desto lauter ist der Schalleindruck. Die Lautstärke hängt vom Schalldruckpegel ab und wird in Dezibel (dB) gemessen. Der vom Ohr wahrgenommene Schalldruckpegelbereich beträgt 0 bis 130 dB. Dabei entspricht die untere Grenze, die sogenannte Hörschwelle, der gerade hörbaren Intensität. Ein leises Flüstern liegt etwa bei 15-20 dB, eine normale Unterhaltung bei 60 dB und lauter Straßenlärm bei 80 dB. Physiologischer Schmerz wird ab etwa 130 dB empfunden, und stellt somit die Schmerzgrenze dar [Benson, 2007]. Lärm oberhalb dieser Grenze können das Gehör langfristig schädigen. Auch hier gilt, dass die Begrenzung, aufgrund des Alters oder des Geschlechts, bei jeder Person verschieden ist.

Jedoch werden Töne mit gleicher Klangintensität aber unterschiedlicher Frequenz als unterschiedlich laut wahrgenommen. Anhand der „Kurven gleicher Lautstärke“ von Fletcher-Munson [Fletcher, 1998] (s. Abbildung 2²) kann entnommen werden, dass für die gleiche Lautstärkeempfindung Töne mit verschiedenen Frequenzen unterschiedliche Schalldruckpegel erfordern müssen. Um diese zu bestimmen wurde die subjektive Größe Lautstärke eingeführt, die in Phon angegeben wird. Die Definition dieser Einheit beruht auf dem subjektiven Vergleich zweier Töne, wobei der 1000 Hz-Ton als Referenzton dient. Hier entspricht dann die Lautstärkeskala der Dezibelskala. Wird beispielsweise ein 30 Hz-Ton mit 80 dB mit dem Bezugston verglichen

²Abbildung entnommen aus http://www.laermorama.ch/m1_akustik/schallpegel_w.html.

ertönen beide Töne gleich, wenn die Intensität des Referenztons 40 dB beträgt. Für beide Töne resultiert dann 60 Phon. Die gleiche Lautstärkeempfindung wird auch hervorgerufen, wenn ein 7 kHz-Ton mit 50 dB ertönt.

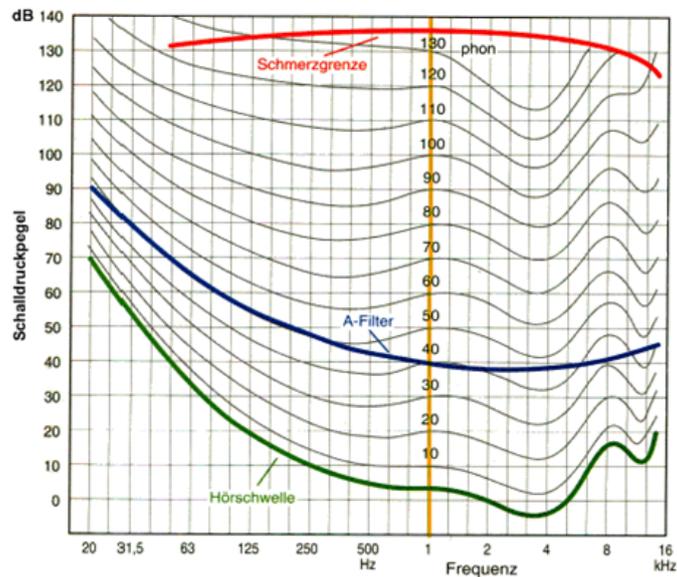


Abbildung 2: Kurven gleicher Lautstärke

Aufgrund der unterschiedlichen Intensitätswahrnehmung von Tönen bei gleicher Frequenz werden heutzutage Frequenzbewertungskurven verwendet, die die Messwerte in einem gewissen Frequenzbereich korrigieren, um ein Maß für die Tonempfindung zu erhalten. Fast ausschließlich wird die Bewertungskurve A verwendet, die der 40 Phon-Kurve angenähert ist. Beim Betrachten der Abbildung 3 fällt auf, dass der A-Filter niedrige und hohe Frequenzen abschwächt. Da tiefe und hohe Töne bei geringerer Intensität leiser empfunden werden (s. Abbildung 2), werden somit die A-bewerteten Messergebnisse der Empfindlichkeit des Ohres gerecht.

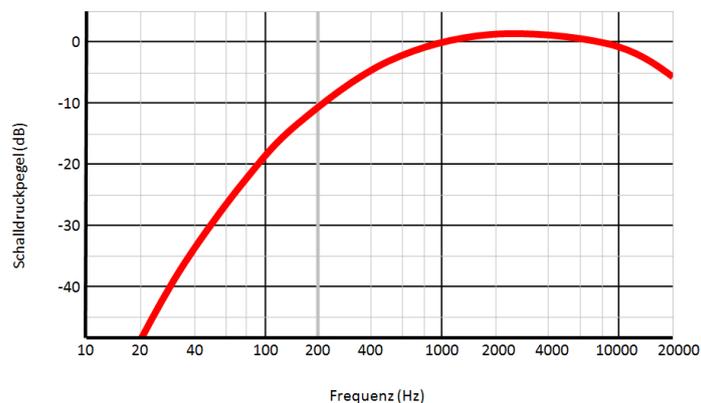


Abbildung 3: Frequenzbewertungskurve A

Die letzte Eigenschaft der Welle, die Schwingungsform, wirkt auf die Klangfarbe. Regelmäßige und einfache Schwingungen werden als Ton wahrgenommen während regelmäßige komplexere

Schwingungen als Klang empfunden werden. Eine Zusammenfassung der oben aufgeführten Zusammenhänge mit den entsprechenden Beispielen werden in der folgenden Tabelle 2 erfasst.

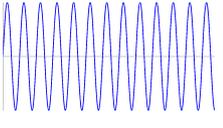
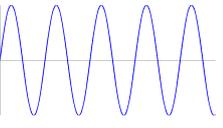
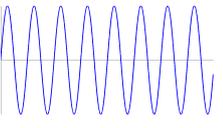
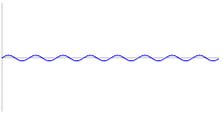
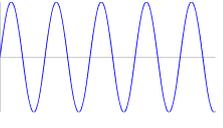
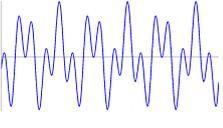
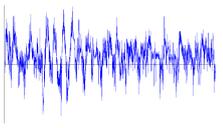
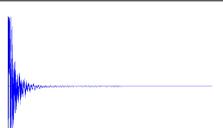
Welleneigenschaft	Die Bewegung eines Luftteilchens ist ...	typische Wellenform	Schallempfindung	Schalleigenschaft
Frequenz	...schnell		hoch	Tonhöhe
	...langsam		tief	
Amplitude	...groß		laut	Lautstärke
	...klein		leise	
Schwingungsform	...regelmäßig und einfach		Ton	Klangfarbe
	...regelmäßig und komplex		Klang	
	...chaotisch		Geräusch	
	...kurzzeitig		Knall	

Tabelle 2: Schalleindruck und physikalische Attribute einer Schallwelle

3. Einführung in die Klangsintese

Wie bereits erwähnt liegt ein Hauptaugenmerk dieses Studienprojekts in der Analyse zwischen der Verbindung von Mathematik und Musik. Die Grundlagen für die mathematische Beschreibung von Musik wurde bereits in Kapitel 2 gelegt. Darauf aufbauend ist es mit Hilfe einer Reihe von Elementen aus der Klangsintese möglich aus einer mathematischen Beschreibung eines Klanges oder gar ganzer Instrumentenklassen (vgl. Kapitel 4) einen synthetischen Klang herzustellen, der dem natürlichen Klang ähnelt. Folgend werden nun einige Teilbereiche und Elemente aus der Klangsintese vorgestellt, die im anschließenden Kapitel zur Sintese einiger ausgewählter Instrumentenklassen Verwendung finden.

3.1. Additive Sintese

3.1.1. Fourierreihe

Die Grundidee der additiven Sintese fußt in der Fourier-Analyse. Demnach kann jede periodische Funktion als eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen dargestellt werden. Im übertragenen Sinne bedeutet dies, dass sich jeder Klang als Summe von Teiltönen mit verschiedenen Amplituden darstellen lässt. Nach den Arbeiten von Jean Baptiste Joseph Fourier³ lässt sich jede periodische, abschnittsweise stetige Funktion f als folgende Reihe darstellen [Fourier, 1878]:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)). \quad (2)$$

Dabei gilt für die Fourier-Koeffizienten a_k und b_k die folgende Vorschrift:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(kt) dt, \quad \text{für } k \geq 0, \quad (3)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt, \quad \text{für } k \geq 1. \quad (4)$$

Ist f reellwertig, so sind auch die Fourier-Koeffizienten reellwertig. Desweiteren lässt sich die Fourier-Reihe von speziellen Funktionen vereinfachen, da für symmetrische (bzw. gerade) Funktionen, also Funktionen für die gilt

$$f(-x) = f(x),$$

der Fourier-Koeffizient $b_k = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ ist. Ist die Funktion hingegen asymmetrisch (bzw. ungerade), gilt also

$$f(-x) = -f(x),$$

³Französischer Mathematiker und Physiker, 1768-1830.

so ist der Fourier-Koeffizient $a_k = 0 \forall k \in \mathbb{N}$. Ist die Funktion f stetig und abschnittsweise stetig differenzierbar, so konvergiert die zugehörige Fourier-Reihe punktweise und gleichmäßig. Im Allgemeinen ist die Konvergenz von Fourier-Reihen jedoch nicht in jedem Fall sichergestellt⁴. Im Falle von Sprungstellen der Funktion f entstehen typische Über- und Unterschwingungen, auch Gibbssches Phänomen genannt, wie am Beispiel der Sägezahnschwingung in Kapitel 4.1.3 deutlich wird.

Die Zerlegung einer periodischen Funktion f in ihre Fourier-Reihe entspricht somit einer Dekomposition des Signals in eine Fundamentalfrequenz und unendlich viele Teiltöne. In der Form (2) lassen sich die einzelnen Frequenzen mit zugehörigen Amplituden jedoch vorerst nicht direkt ablesen, da sie sich als Mischung der beiden Sinus- und Kosinusfunktionen bzw. derer Koeffizienten a_k und b_k ergeben. Zweckgemäß lässt sich eine Fourier-Reihe jedoch auch in ihrer Spektralform (auch Amplituden-Phasen-Form) darstellen. Dazu wird die Tatsache ausgenutzt, dass sich jede Linearkombination von Sinus- und Kosinusfunktionen auch als

$$\cos(k - \phi) = \cos(k)\cos(\phi) + \sin(k)\sin(\phi)$$

für beliebige $k \in \mathbb{R}$ und $\phi \in [0, 2\pi)$ dargestellt lässt. Durch leichte Umformungen ergibt sich somit folgende Darstellung, an denen die Amplitude A_k der zugehörigen Frequenz abgelesen werden kann:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kt + \phi_k),$$

wobei $A_0 = a_0$, $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ und $[0, 2\pi) \ni \phi_k = \arccos(\frac{a_k}{A_k}) = \arcsin(\frac{b_k}{A_k})$ [Folland, 2009].

3.1.2. Fourier-Transformation

Werden durch die Fourierreihen im vorangegangenen Kapitel lediglich periodische Funktionen betrachtet, können durch die Fourier-Transformation auch nicht-periodische Funktionen dargestellt werden. Sie ist eine weitere Methode der Fourier-Analyse, die es ebenfalls ermöglicht eine Funktion in ihr Frequenzspektrum zu zerlegen, weshalb sie auch häufig Spektralfunktion genannt wird. Sei dazu $f(t)$ eine beliebige reell- oder komplexwertige Funktion mit $t \in \mathbb{R}$ als Zeiteinheit, dann ist ihre Fourier-Transformierte $\hat{f}(\nu)$ mit $\nu \in \mathbb{R}$ als Frequenzeinheit gegeben durch:

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\nu t} dt. \quad (5)$$

⁴Für tiefgreifenden Konvergenz-Analysen wird an dieser Stelle auf [Folland, 2009] verwiesen.

Gegeben einer Frequenz ν kann $\hat{f}(\nu)$ also als Maß interpretiert werden, wieviel Signal $f(t)$ zu dieser Frequenz vorhanden ist [Benson, 2007, Seite 65]. Voraussetzung für die Existenz einer Fourier-Transformierten $\hat{f}(\nu)$ ist offensichtlich die Konvergenz des Integrals (5). Die Funktion $f(t)$ muss also im Raum der mindestens einfach integrierbaren Funktionen $L^1_{(-\infty, \infty)}$ liegen. Wie in Kapitel 2.1 bereits erwähnt ist ein allgemeines einfaches Signal gegeben durch eine Sinuswelle. Offensichtlich ist jedoch, dass die Sinusfunktion nicht in $L^1_{(-\infty, \infty)}$ liegt. Als Grundlage für die Analyse solcher Funktionen dient die sogenannte Distributionen-Theorie, wobei an dieser Stelle auf tiefergreifende Analysen verzichtet wird.

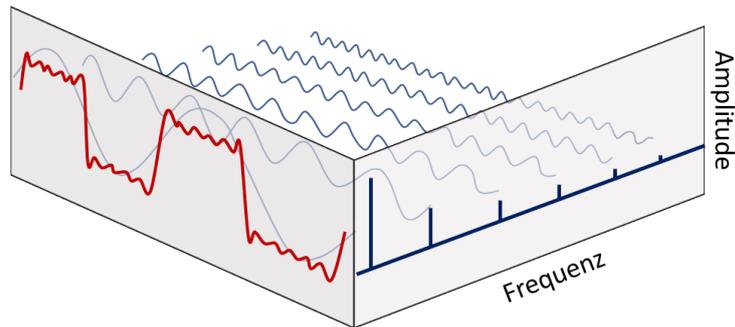


Abbildung 4: Fourier-Transformation: Periodische Ausgangsfunktion (rot) kann durch Sinuskomponenten (grau-blau) dargestellt werden, durch die das Frequenzspektrum (blau) ermittelt werden kann.

Deutlich gemacht werden kann die Nützlichkeit der Fourier-Transformation für die Frequenzanalyse anhand eines einfachen Beispiels. Betrachtet werden zwei Sinuswellen mit Frequenz 220 Hz bzw. 440 Hz und Amplituden 0.6 bzw. 1. Wird nun zusätzlich ein normalverteilter Störterm z mit Mittelwert 0 und Varianz 3 hinzugefügt⁵, so erhält man folgendes Signal $S(t) = 0.6\sin(2\pi 220t) + 1\sin(2\pi 440t) + z$. In Abbildung 5 wird deutlich, dass sich die einzelnen Komponenten des Signals, also die jeweilige Frequenz mit zugehöriger Amplitude, trotz nur zweier summierter Wellenformen nur sehr schwer bis gar nicht identifizieren lassen. Durch die Durchführung einer Fourier-Transformation lässt sich das Frequenzspektrum jedoch leicht ermitteln, wie in Abbildung 6 deutlichen wird.

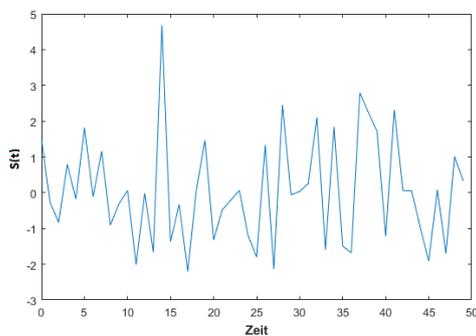


Abbildung 5: Beispielhaftes Signal $S(t)$

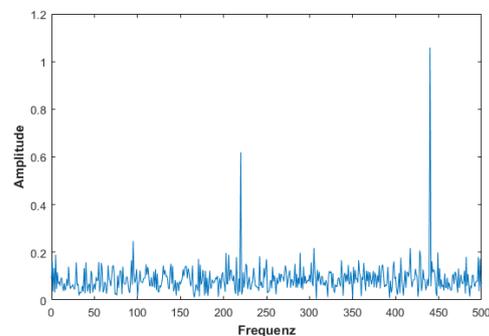


Abbildung 6: Frequenzspektrum von $S(t)$

⁵Motivieren lässt sich der Störterm durch etwaige Geräusche bei der Aufnahme eines Tonsignals, wie Rauschen oder sonstige umweltbedingte Laute.

3.2. Hüllkurven und Low Frequency Oszillatoren

Durch die in Kapitel 3.1.2 vorgestellte Fourier-Transformation ist es möglich ein Signal in ein Frequenzspektrum zu zerlegen. Überträgt man diese Erkenntnisse nun auf die Synthese eines Klanges, fällt auf, dass die wenigsten Klänge ein statisches Frequenzspektrum besitzen, sondern im Zeitverlauf variieren. Diese Eigenschaft lässt sich mittels sogenannter Hüllkurven („Envelopes“) modellieren. Eine häufig verwendete Hüllkurve ist der ASDR-Envelope. Dabei wird der zeitliche Verlauf eines Klanges in vier Phasen unterteilt, dem Anstieg („Attack“), Abfall („Decay“), Halten („Sustain“) und Freigeben („Release“) (s. Abbildung 7). Wird beispielsweise

eine Hüllkurve zur Modellierung des zeitlichen Verlaufs der Amplitude verwendet, so steht die Anstiegs-Phase für die Zeit, die benötigt wird, um die maximale Amplitude zu erreichen. Die Abfall-Phase hingegen bezeichnet die Dauer bis die Amplitude das Halten-Level, gemessen als relativer Anteil an der maximalen Amplitude, erreicht. Die Freigeben-Phase steht schließlich für

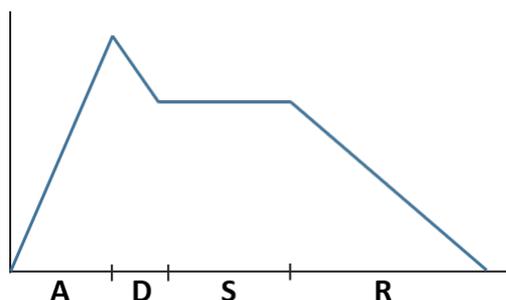


Abbildung 7: ASDR-Hüllkurve

die Zeit, die benötigt wird, bis das Signal ausgeklungen ist. In der Praxis werden Hüllkurven auch häufig auf die Frequenz angewendet. Ein gutes Beispiel für die Verwendung einer Hüllkurve zur Modellierung des zeitlichen Verlaufs der Frequenz bietet sich beispielsweise bei einem Glockenklang an. Dieser beginnt mit einem frequenzreichen Klang, wobei viele der Obertöne relativ schnell im zeitlichen Verlauf verschwinden [Benson, 2007, Seite 257].

Ein Low Frequency Oscillator (LFO) bezeichnet einen niederfrequenten Oszillator, in der Regel unter 20 Hz, der in festgelegten Abständen verschiedene Klangeigenschaften moduliert. So können LFOs beispielsweise verwendet werden, um die Frequenz eines Signals zu modulieren. Dabei wird zusätzlich zum ursprünglichen Signal eine weitere niederfrequente Wellenform verwendet, um in gewissen Abständen die Frequenz zu erhöhen bzw. zu verringern. Diese Verwendung eines LFOs wird auch Vibrato genannt. Die daraus entstehende Wellenform kann Abbildung 8 entnommen werden. Wird ein LFO genutzt, um die Amplitude eines Signals in festgelegten Abständen zu erhöhen bzw. zu verringern, so spricht man von einem Tremolo, dessen Wellenform Abbildung 9 entnommen werden kann.

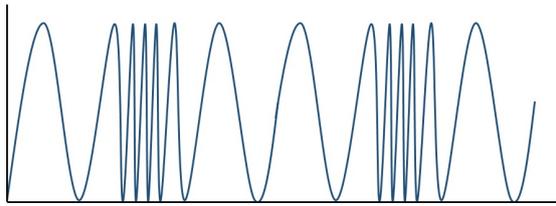


Abbildung 8: Wellenform eines Vibratos

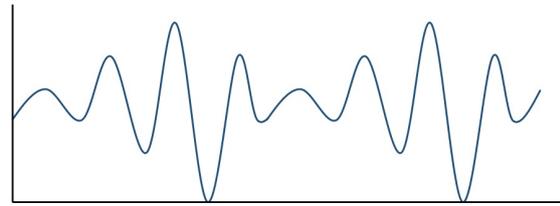


Abbildung 9: Wellenform eines Tremolos

3.3. CSound

CSound ist eine Audio-Programmiersprache, die im folgenden als Grundlage für die synthetische Erstellung von Klängen basierend auf den mathematischen Beschreibungen von musikalischen Elementen und ganzen Instrumentenklassen dienen soll. Sie wurde erstmals 1985 vom neuseeländischen Informatiker Barry Vercoe am Massachusetts Institute of Technology vorgestellt und basiert auf der Programmiersprache C, was den Namen CSound erklärt. Aufgrund der hohen Relevanz für das folgende Kapitel soll zunächst ein kurzer Überblick über die Struktur und die wesentlichen Bestandteile von CSound gegeben werden. Für die individuelle Anwendung der Klangsynthese auf die mathematischen Beschreibungen einiger Instrumentenklassen werden einige spezifische Elemente benötigt, die erst nachfolgend in den jeweiligen Kapiteln erläutert werden. Auf tiefgreifende Erläuterungen wird an dieser Stelle zunächst verzichtet.⁶

Die Struktur eines CSound Programms lässt sich grob in drei Abschnitte teilen. Der erste Teil besteht aus grundlegenden Optionseinstellungen, wie beispielsweise an welchem Ort eine Sounddatei erstellt werden soll. Gekennzeichnet ist dieser Abschnitt durch `<CsOptions></CsOptions>`. Im zweiten Abschnitt werden zunächst wesentliche Parameter festgelegt:

```

1 <CsInstruments>
2     sr      = 44100
3     ksmps  = 128
4     nchnls = 2
5 </CsInstruments>

```

Dabei entspricht `sr` der Abtastrate („sampling rate“), also wie oft ein zeitkontinuierliches Signal pro Sekunde gemessen wird, um es in ein zeitdiskretes Signal zu überführen. Der Parameter `ksmps` steht für die Anzahl von Samples in einem Audio-Array und `nchnls` für die Anzahl der Ausgabekanäle. Beispielsweise liegt für `nchnls = 2` eine Stereo-Ausgabe, für `nchnls = 1` eine Mono-Ausgabe vor. Dieser zweite Abschnitt dient desweiteren für die Festlegung von verschiedenen „Instrumenten“, denen jeweils ein Oszillator zugrunde liegt:

```

1 instr 1

```

⁶Für ein ausführliches Tutorium zu CSound wird zum Beispiel auf <http://www.csounds.com/toots/> verwiesen.

```

2 |   aout oscil 1 440
3 |   outs aout, aout
4 | endin

```

Jedes Instrument beginnt mit `instr` und einem Namen, in diesem Fall der `1`. Die zweite Zeile erzeugt eine Variable `aout`, die aus einem einfachen Oszillator, generiert durch die Funktion (in CSound „opcode“) `oscil`, mit Amplitude 1 und Frequenz 440 Hz besteht. Die dritte Zeile hingegen gibt den Ausgabewert des Instruments an. Da zuvor `nchnls = 2` gesetzt wurde, müssen zwei Ausgabewert angegeben werden.

Der dritte und letzte Abschnitt wird durch die Umgebung `<CsScore></CsScore>` gekennzeichnet. Hier wird zunächst der Oszillator, der im vorherigen Abschnitt der Variablen `aout` zugewiesen wurde, genauer festgelegt. Dies geschieht durch eine sogenannte `f`-Anweisung („`f score statement`“). Eine beispielhafte `f`-Anweisung zur Generierung einer einfachen Sinuswelle erhält man durch

```

1 | f 1 0 1024 10 1

```

Eine `f`-Anweisung erstellt eine Tabelle, in der durch sogenannte GEN-Routinen Daten generiert werden. Der erste Eintrag, auch erster P-Wert („`p field`“) genannt, entspricht der Nummer der zu generierenden Tabelle. Der zweite Eintrag entspricht dem Zeitpunkt, ab dem die Funktion angewendet werden soll. Der dritte Eintrag, also 1024, steht für die Größe der Tabelle und muss ein Vielfaches von 2 sein.⁷ Die verwendete GEN-Routine wird dann im vierten Parameter festgelegt. GEN10, die in diesem Fall verwendet wird, erstellt eine Summe aus Sinuswellen (vgl. Fourierreihen, Kapitel 3.1.1), dessen Amplituden jeweils in den folgenden P-Werten festgelegt werden. Da in diesem Beispiel eine einfache Sinuswelle als Oszillator verwendet werden soll, wird im fünften Eintrag der `f`-Anweisung lediglich eine Sinuswelle mit Amplitude 1 festgelegt. Außerdem erfüllt der CScore-Abschnitt noch eine weitere wichtige Funktion, da in diesem festgelegt wird, wann welches Instrument, das im Csinstruments-Abschnitt festgelegt wurde, zum Einsatz kommt.

```

1 | i 1 0 2

```

Eine `i`-Anweisung („`i score statement`“) legt fest, wann ein Instrument startet und wie lange es aktiviert bleibt. Analog zu einer `f`-Anweisung steht der erste P-Wert für die Nummer des zu verwendenden Instruments. Der zweite und dritte P-Wert steht für die Startzeit bzw. die Dauer. Es können auch noch weitere P-Werte eingefügt werden, um verschiedene Frequenzen

⁷Ein Vielfaches von $2 + 1$ ist ebenfalls möglich. Die maximale Größe beträgt $16777216(2^{24})$ (vgl. <http://www.csounds.com/manual/html/GEN01.html>).

und Amplituden für das selbe Instrument zu realisieren. Dies hat den Vorteil, dass nicht für jede Frequenz bzw. Amplitude ein neues Instrument implementiert werden muss. Insgesamt ergibt sich für eine einfache 440 Hz. Sinuswelle mit Amplitude 1, die für zwei Sekunden erklingt, folgendes CSound Programm:

```
1 <CsSynthesizer>
2   <CsOptions>
3   </CsOptions>
4   <CsInstruments>
5       sr      = 44100
6       ksmps  = 128
7       nchnls = 2
8
9       instr 1
10          aout oscil 10000 440
11          outs aout, aout
12      endin
13  </CsInstruments>
14  <CsScore>
15      f 1 0 1024 10 1
16      i 1 0 2
17  </CsScore>
18 </CsSynthesizer>
```

4. Theorie und Praxis: Instrumente

Musikinstrumente lassen sich beispielsweise nach ihrer Spielweise, ihrer Tonerzeugung, nach den Materialien, aus denen die Instrumente gebaut sind, oder nach ihrem Einsatz in der Praxis, in Klassen einteilen. Die weltweit bekannteste Klassifizierung ist die Hornbostel-Sachs-Systematik, die die Musikinstrumente nach ihrer Tonerzeugung unterscheidet [von Hornbostel, 1914]. Diese teilt die Musikinstrumente in vier Gruppen ein. Diese lauten Idiophone (Musikinstrumente, deren Korpus der Tonerzeugung dient), Membranophone (Musikinstrumente, bei denen der Klang durch eine in Vibrationen versetzte aufgespannte Membran ausgelöst wird), Aerophone (Musikinstrumente, deren Klang durch eine in Schwingung versetzte Luftsäule im Instrument entsteht) und Chordophone (Musikinstrumente, bei denen der Klang durch die Schwingung einer gespannten Saite erzeugt wird). Aufgrund von Kriterien wie Art der Schwingungserzeugung, Konstruktion und Spielweise lassen sich in den jeweiligen Instrumentenklassen weitere Untergruppierungen bilden, die hier nicht weiter behandelt werden⁸. Nach dem Erscheinen von elektrischen Instrumenten (Tonerzeugung geschieht durch elektrische Oszillatoren) wurde der Hornbostel-Sachs-Systematik eine fünfte Primärklasse hinzugefügt, die Elektrophone.

Im Folgenden sollen Instrumente mit unterschiedlicher Tonerzeugung analysiert werden. Dazu werden aus jeder Instrumentengruppe mindestens ein Instrument betrachtet, die Differentialgleichung zur Beschreibung der Schwingungen hergeleitet und diese gelöst. Anschließend erzeugen wir mit Hilfe der berechneten Ergebnisse, den Originalklängen und dem Audioprogramm CSound synthetische Klänge und vergleichen diese mit den Originalklängen. Es sei erwähnt, dass Elektrophone in dieser Arbeit nicht behandelt werden.

4.1. Saiteninstrumente

Betrachtet wird eine an beiden Enden fest eingespannte elastische Saite der Länge l , zum Beispiel die eines Saiteninstrumentes oder Klavieres, wie unten in der folgenden Abbildung 10 zu sehen. Wird die Saite zum Zeitpunkt t durch Zupfen oder Streichen mit einem Bogen ausgelenkt und danach nicht weiter gestört, beginnt diese frei zu schwingen, wodurch sich Transversal- und Longitudinalwellen beobachten lassen bis die Saite in ihre Ruhelage zurückkehrt. Der Einfachheit halber werden im Folgenden nur transversale Schwingungen betrachtet. Damit lässt sich die Auslenkung aus der Ruhelage, die der Punkt x der Saite zur Zeit t erfährt, mit der Funktion $y(x, t)$ bestimmen. Da die Saite an ihren beiden Enden fest eingespannt ist und sich deshalb in diesen Punkten nicht bewegen kann, gelten die Randbedingungen $y(0, t) = 0$ und $y(l, t) =$

⁸Genauerer zu Untergruppierungen der Instrumentenklassen lässt sich in [von Hornbostel, 1914] nachlesen.

$0 \forall t \in \mathbb{R}$.

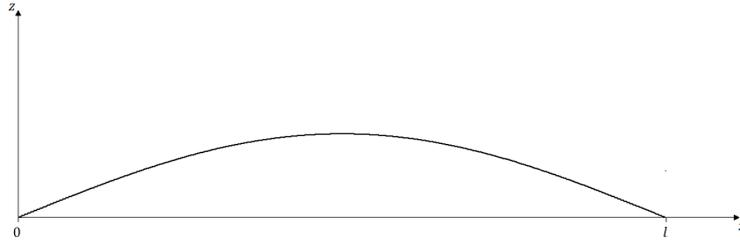


Abbildung 10: Schwingende Saite

Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes wird die Auslenkung $y(x, t)$ bestimmt, wobei Reibungskräfte etc. vernachlässigt werden. Insbesondere erfolgt die Analyse gezupfter und gestrichener Saiten getrennt, da sich ihre Schwingungen nach der Auslenkung differenzieren.

4.1.1. Die gezupfte Saite

Herleitung der Differentialgleichung Die freie Schwingung einer gezupften Saite lässt sich durch die eindimensionale Wellengleichung darstellen, die nun mit Hilfe physikalischer Eigenschaften einer ausgelenkten Saite hergeleitet wird. Anschließend liefert das Lösen dieser Gleichung die gesuchte Funktion der Auslenkung in Abhängigkeit von x und t .

Es sei die Saite mit der Dichte ρ , gemessen in $\frac{kg}{m}$, an ihren beiden Endpunkten wie in der obigen Abbildung 10 eingespannt. Wird die Saite nun ausgelenkt, wirkt eine rücktreibende Kraft parallel zur z -Achse auf die Saite aus, die die Saite nach unten zieht und schließlich langsam in ihre Ruhelage bringt. Diese hängt mit der Spannung der Saite $T(x, t)$ (gemessen in Newton $= kg \frac{m}{s^2}$) zusammen, die tangential zur Saite wirkt. Exemplarisch wird nun ein kleines Teilstück der schwingenden Saite mit den Anfangs- und Endpunkt in x und $x + \Delta x$ genommen, die auf diesem Saitenstück einwirkende Kräfte untersucht und so die Wellengleichung hergeleitet. Sowohl am rechten als auch am linken Rand des Saitenstücks wirkt die Kraft T . Die Gleichheit der Spannung an beiden Enden des Saitenstücks ist die Folge der Unabhängigkeit der Saitenspannung von der Längenänderung der Saite. Dies gilt, da die Saitenlänge im Vergleich zur Auslenkung sehr lang ist (vgl. [Mehr, 2007]).

Für die Zugkraft am linken Ende des Saitenstücks ergibt sich

$$F_z(x) = -T \sin(\theta(x))$$

und für die Zugkraft am rechten Ende

$$F_z(x + \Delta x) = T \sin(\theta(x + \Delta x)).$$

Unter der Voraussetzung, dass an einem Punkt x der Winkel $\theta(x)$ zwischen der Saite und der Horizontalen sehr klein ist, lässt sich $\sin(\theta(x))$ durch $\tan(\theta(x))$ approximieren. Weiterhin gelte für den Winkel $\theta(x)$:

$$\tan(\theta(x)) = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Dann ergibt sich die rücktreibende Kraft F_R aus der Summe der Kräfte an den Saitenenden:

$$\begin{aligned} F_R &= T \tan(\theta(x + \Delta x)) - T \tan(\theta(x)) = T \left(\frac{\partial y(x + \Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial y(x)}{\partial x} \right) \\ &= T \Delta x \frac{\frac{\partial y(x + \Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial y(x)}{\partial x}}{\Delta x} \\ &\approx T \Delta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Die rücktreibende Kraft F_R führt ebenfalls zu einer Beschleunigung des Saitenstückes mit der Masse $\rho \Delta x$. Mit dem zweiten Newton'schen Gesetz

$$F = ma = \rho \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

folgt durch Gleichsetzen der Kräfte F_R und F die Wellengleichung nach d'Alembert

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \approx c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (6)$$

mit $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ und $\Delta x \neq 0$, die den Zusammenhang zwischen räumlicher und zeitlicher Änderung der Auslenkung der Saite darstellt. Eine nähere Betrachtung der Einheit von c zeigt

$$\sqrt{\frac{kg \frac{m}{s^2}}{\frac{kg}{m}}} = \frac{m^2}{s^2} = \frac{m}{s},$$

d.h. die Einheit von c entspricht einer Geschwindigkeit. Folglich breiten sich die durch die Auslenkung verursachten transversale Schwingungen auf der Saite mit der Geschwindigkeit c aus. Diese hängt positiv von der Zugkraft T und negativ von der Dichte ρ ab.

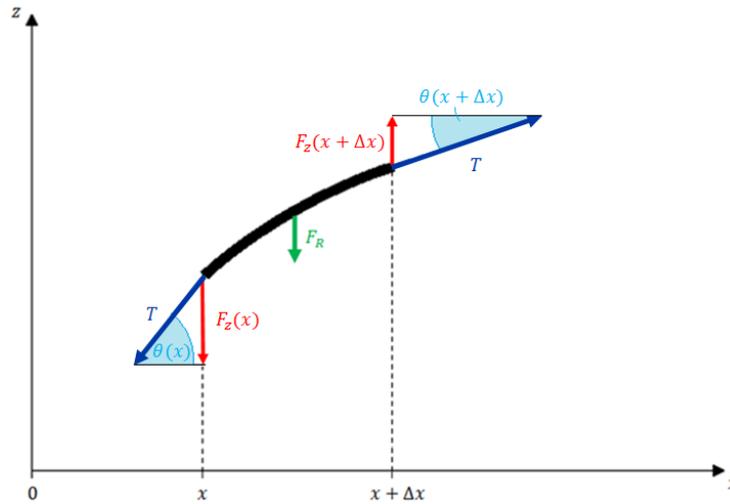


Abbildung 11: Kleines Saitenstück mit den darauf wirkenden Kräften

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung Es lassen sich einige Arbeiten finden, die Methoden, wie den Separationsansatz [Meier, 2008], zur Lösung der obigen Wellengleichung (6) vorstellen, auf die hier nicht weiter eingegangen wird. Stattdessen wird im Folgenden das Lösungsverfahren von d'Alembert vorgestellt, wobei hier wie in [Benson, 2007] und [Felix, 1995] vorgegangen wird. Zunächst wird die Wellengleichung (6) faktorisiert

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) y = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) y.$$

Durch die Anwendung der Koordinatentransformation $\tilde{y}(u, v) := y(x, t)$, mit $u := x + ct$ und $v := x - ct$, und der multivariaten Kettenregel für die Berechnung von $\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2}$ geht die Gleichung (6) über in die Gleichung

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial v^2} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial v^2} \right).$$

Die Umformung des obigen Ausdrucks liefert

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial u \partial v} = 0. \quad (7)$$

Somit ist $\frac{\partial \tilde{y}}{\partial v}$ nur noch von v abhängig, also $\frac{\partial \tilde{y}}{\partial v} =: \alpha(v)$. Aus der Integration von Gleichung (6) folgt

$$\tilde{y}(u, v) = \int_0^v \alpha(v') dv' + g(u),$$

wobei g eine beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktion ist. Die Resubstitution liefert die Lösung der Wellengleichung nach d'Alembert

$$y(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct), \quad (8)$$

mit $f(v) = \int_0^v \alpha(v') dv'$. Dabei beschreibt der erste Summand eine von rechts nach links verlaufende Welle und der zweite Summand eine von links nach rechts laufende Welle. Beide Wellen bewegen sich mit der Geschwindigkeit c fort und überlagern sich gegenseitig ohne die jeweils andere zu beeinflussen. Dieser Zusammenhang ist in der Physik auch unter Superpositionsprinzip von zwei Wellen bekannt.

Aus der eingehenden Untersuchung von (8) resultiert eine allgemeinere Lösung wie das Folgende zeigt. Einsetzen der ersten Randbedingung $y(0, t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$ in (8) liefert

$$0 = f(ct) + g(-ct) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

und somit

$$g(\lambda) = -f(-\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dies ergibt

$$y = f(x + ct) - f(x - ct). \quad (9)$$

Die Gleichung (9) wird gedeutet als eine nach links verlaufende Welle, die am Endpunkt der Saite reflektiert wird und nach rechts wandert. Die Auswertung von (9) an der Stelle $x = l$ unter Beachtung der zweiten Randbedingung $y(l, t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$ zeigt, dass f eine $2l$ -periodische Funktion ist:

$$f(l + ct) = f(ct - l) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

sodass gilt

$$f(\lambda) = f(\lambda + 2l) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Die obigen Ergebnisse werden im folgenden Theorem zusammengefasst [Benson, 2007]:

Theorem (d'Alembert). *Die allgemeine Lösung der Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

lautet

$$y(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct).$$

Erfüllt diese die Randbedingungen $y(0, t) = 0$ und $y(l, t) = 0 \forall t$ nimmt sie die Form

$$y(x, t) = f(x + ct) - f(-x + ct) \quad (11)$$

an, wobei f die Bedingung $f(\lambda) = f(\lambda + 2l) \forall \lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Ein Vergleich der Wellengleichung (6) mit der Lösung (11) zeigt, dass die Funktion f in (6) und (11) unterschiedlichen Eigenschaften genügt. Obwohl die Wellengleichung (6) nur für Funktionen mit Partialableitung von mindestens zweiter Ordnung Sinn macht, reicht es bei der Lösung (11), wenn die Funktion f eine beliebige stetige, periodische Funktion ist. Diese Besonderheit der Lösung liefert eine Erklärung dafür, dass die anfängliche Auslenkung stetig und nicht differenzierbar ist. Dieses Phänomen tritt häufig bei der Lösung von partiellen Differentialgleichungen auf. Abhilfe wird durch die Umschreibung der partiellen Differentialgleichung in Integralgleichungen geschaffen, da integrierbare Funktionen im Gegensatz zu differenzierbare Funktionen allgemeiner sind und somit eine allgemeinere Klasse von Lösungen liefern.

Eine weitere Ausführung von (10) liefert Bernoullis Lösung der Wellengleichung (6). Die Funktion f in (10) ist, wie bereits oben erwähnt, eine $2l$ -periodische Funktion und wird mittels Fourierreihenentwicklung umgeschrieben. Falls nur die Grundfrequenz gegeben ist, geht die Funktion f in Folge der Fourierreihenentwicklung in die folgende Darstellung über:

$$f(x) = C \cos\left(\frac{\pi x}{l} + \phi\right).$$

Für die n -te Oberschwingung wird f umgeformt zu

$$f(x) = C \cos\left(\frac{n\pi x}{l} + \phi\right)$$

und es resultiert nach Einsetzen in (11) und unter Verwendung von Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen

$$y_n(x, t) = 2C \sin\left(\frac{n\pi ct}{l} + \phi\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (12)$$

Gleichung (12) beschreibt die Schwingung der n -ten Harmonischen, wobei $n = 1$ dem Grundton entspricht. Die verschiedenen Obertöne werden in der Abbildung (8) dargestellt. Da die schwingende Saite ihre Schwingungsknoten und ihre maximale Auslenkung beibehält, spricht man von einer stehenden Welle.

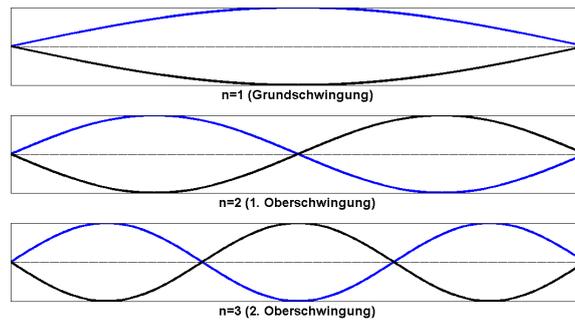


Abbildung 12: Grundfrequenz und die ersten beiden Obertöne

Ferner ist die Frequenz der n -ten Oberschwingung gegeben mit

$$\nu_n = \frac{nc}{2l} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Offensichtlich ist die niedrigste mögliche Frequenz die Grundfrequenz und die Harmonischen Vielfache dieser Frequenz. Weiterhin besagt die Gleichung, dass die Frequenz proportional zur Quadratwurzel der Spannung und umgekehrt proportional zu ihrer Länge und der Quadratwurzel der Dichte der Saite ist. Diese Erkenntnis liefert eine Erklärung für die charakteristischen Eigenschaften der Saiten von Streich- und Zupfinstrumenten, wie beispielsweise dem Klavier. Höhere Töne können durch kürzere Saiten (höhere Grundfrequenz) realisiert werden, aber auch durch die Erhöhung der Spannung. Ebenso lässt sich die Spannung erniedrigen um die Saite tiefer zu stimmen. Doch für tiefere Töne werden aufgrund von Platzmangel nicht die Saiten verlängert, sondern ihre Masse erhöht, indem man um die Saite zusätzlich Draht wickelt (vgl. [Roederer, 2000]). Dies erklärt beispielsweise auch den Aufbau eines Klaviers. Doch bei einer Geige, die nur vier gleiche Saiten hat, müssen sie alle in ihrer Spannung und Masse unterscheiden, sodass die Geige vier verschiedene Grundtöne erhält. Verschiedene Tonhöhen kann ein Geigenspieler erreichen, indem er durch Drücken der Saite gegen das Griffbrett die Saite verkürzt. Wie bereits im zweiten Kapitel erwähnt, wird der Grundton beim Zupfen oder Spielen stets von anderen Obertönen begleitet. Daher lässt sich die Schwingung einer gezupften Saite als Summe der Harmonischen darstellen:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2C \sin\left(\frac{n\pi ct}{l} + \phi\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Anfangswertproblem Durch eine weitergehende Analyse der Wellengleichung (6) und einigen Anfangsbedingungen lässt sich aus der allgemeinen Lösung von d'Alembert eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems herauskristallisieren. Offensichtlich spielt bei der Bewegungs-

beschreibung einer gezupften Saite die anfängliche Position $s_0(x)$ sowie die anfängliche Geschwindigkeit $v_0(x)$ der Saite eine wichtige Rolle. Wir erhalten folgendes Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, & \text{für } 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \\ s_0(0) = s_0(l) &= 0, & \text{für } 0 \leq x \leq l, \\ v_0(0) = v_0(l) &= 0, & \text{für } 0 \leq x \leq l.\end{aligned}\tag{13}$$

Gesucht ist eine Lösung der Form (11), die die obigen Anfangsbedingungen erfüllt. Es gilt dann für $t = 0$

$$f(x) - f(-x) = s_0(x),\tag{14}$$

$$cf'(x) - cf'(-x) = v_0(x).\tag{15}$$

Integrieren wir die letzte Gleichung (15)

$$cf(x) - cf(-x) = \int_0^x v_0(u) du$$

und addieren diese auf (14), erhalten wir nach einigen Umformungen

$$f(x) = \frac{1}{2}s_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(u) du.$$

Eingesetzt in (11) resultiert nach der Vereinfachung des Terms die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (13):

$$y(x, t) = \frac{1}{2} (s_0(x + ct) - s_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(u) du.\tag{16}$$

Die Eindeutigkeit der berechneten Lösung lässt sich trivial durch Einsetzen der Anfangs- und Randbedingungen nachweisen und beweist somit die Existenz der d'Alemberts Lösung. Für eine ausführlicheren Beweis s. [Grigoryan, 2014]. Eine Abhängigkeit der Lösung $y(x, t)$ von den Anfangswerten $s_0(x)$ und $v_0(x)$ ist deutlich zu erkennen, sodass eine kleine Änderung der Anfangsdaten nur zu einer kleinen Änderung der Lösung führt, vgl. [Benson, 2007] und [Debnath, 2007], d.h.:

Theorem (Beweis vgl. [Debnath, 2007]). *Seien $\delta, \epsilon > 0$ und $0 \leq t \leq t_0$ gegeben und es gelte*

$$|s_0(x) - s'_0(x)| < \delta, \quad |v_0(x) - v'_0(x)| < \delta.$$

Dann gilt die Ungleichung

$$|y(x, t) - y'(x, t)| < \epsilon,$$

mit $\epsilon = \delta(1 + t_0)$.

Die folgende Abbildung 13 illustriert die Bewegung einer gezupften Saite für den Spezialfall $v_0(x) = 0 : y(x, t) = \frac{1}{2}(s_0(x + ct) - s_0(x - ct))$. Sobald die ausgelenkte Saite losgelassen wird, zerfällt die Auslenkung in zwei Wellen, die sich in entgegengesetzten Richtungen mit der Geschwindigkeit c ausbreiten. An den festen Enden der Saite werden die Wellen reflektiert und laufen mit einem Phasensprung zurück. Diese Beobachtung entspricht unserer Deutung der allgemeinen Lösung von d'Alembert (11). Eine weitere wichtige Beobachtung ist, dass Wellen sich entlang einer Hüllkurve bewegen, die einem Parallelogramm ähnelt.

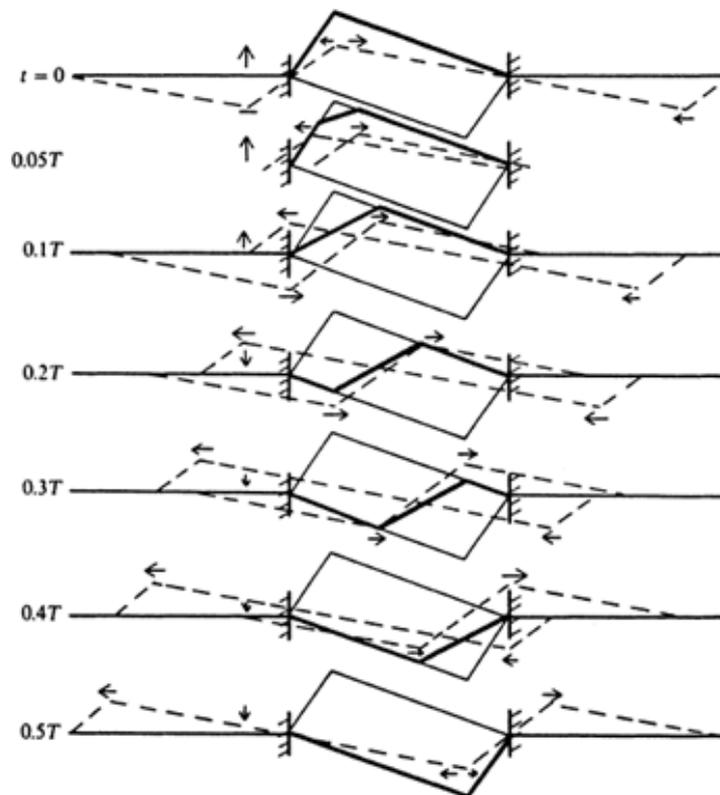


Abbildung 13: Schwingungsverlauf einer gezupften Saite (vgl. [Fletcher, 1998])

4.1.2. Anwendung

Schauen wir uns nun die Anwendung der im vorherigen Abschnitt erarbeiteten Theorie an. Dazu betrachten wir in Abbildung 14 das ca. eine Sekunde andauernde Signal einer gezupften Violinensaiten. Der Klang dieser gezupften Saite ist durch die hohe Amplitude in den ersten 0.02 Sekunden gekennzeichnet, die mit der Zeit abnimmt. Ein Ausschnitt des gegebenen Signals verdeutlicht die dreieckförmige Schwingung der ausgelenkten Saite (s. Abb. 14b), die bereits in

der Abbildung 13 erkannt wurde.

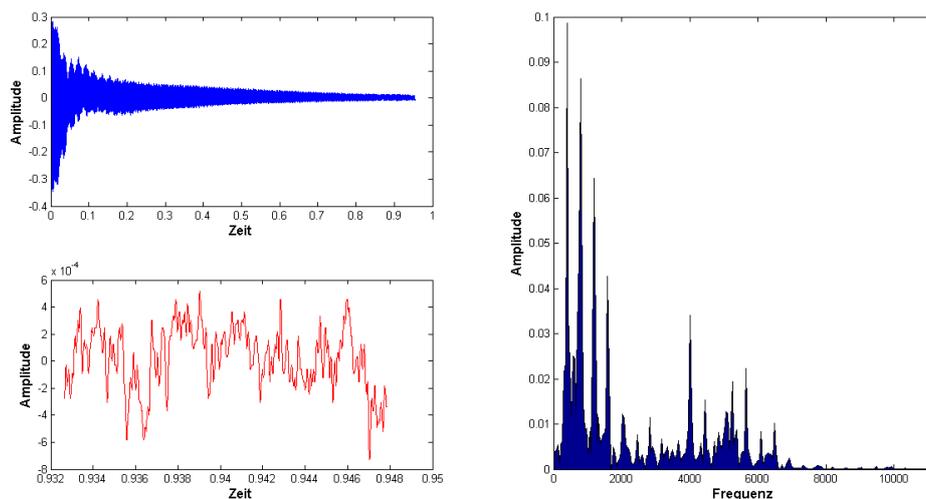


Abbildung 14: Signal einer gezupften Saite (links): (a) ganzes Signal und (b) Signalausschnitt, und Frequenzspektrum (rechts)

Das dazugehörige Frequenzspektrum weist mehrere Stellen von Verdichtungen auf, wobei die um die Grundfrequenz (in diesem Fall: $a^1 = \text{ca. } 440 \text{ Hz}$) am größten ist. Es fällt auf, dass die Amplitude der Grundfrequenz am höchsten ist. Begleitet wird dieser Ton von weiteren Harmonischen. Für die Erstellung des synthetischen Klanges mittels CSound wird der Opcode `pluck` verwendet. Dieser basiert auf den von Kevin Karplus und Alex Strong 1983 entwickelten Karplus-Strong-Algorithmus, der auf der Idee der Lösung der Wellengleichung (11) basiert. Auf eine ausführlichere Erläuterung dieses Algorithmus wird an dieser Stelle verzichtet. Der Opcode `pluck` benötigt folgende Variablen, die für die Implementierung des CSound Instrumentes gewählt werden müssen:

```
1 | pluck kamps, kcps, icps, ifn, imeth
```

Während die ersten drei Variablen die zu hörende Lautstärke und Tonhöhe festlegen, legt die Variable `ifn` die Nummer der Tabelle fest, aus der Daten für den Opcode bezogen werden. Der Eintrag `imeth` legt fest, wie der Ton abzuklingen hat. Setzen wir nun für die Variablen Werte ein, ergibt sich folgendes CSound Instrument:

```
1 | instr 1
2 |   asig pluck 0.7, 440, 440, 0, 6
3 |   outs asig, asig
4 | endin
```

Führen wir das dazugehörige vollständige CSound Programm (vgl. Anhang B.1) aus, ertönt eine

gezupfte A-Saite (440 Hz) mit der Amplitude 0.7. Ein Vergleich der Abbildungen 14 und 15 zeigt einen ähnlichen Verlauf der Signale, wobei das des synthetischen Klanges symmetrischer verläuft. Insbesondere ist beim synthetischen Klang die Ausprägung der Obertönen stärker als beim Originalton.

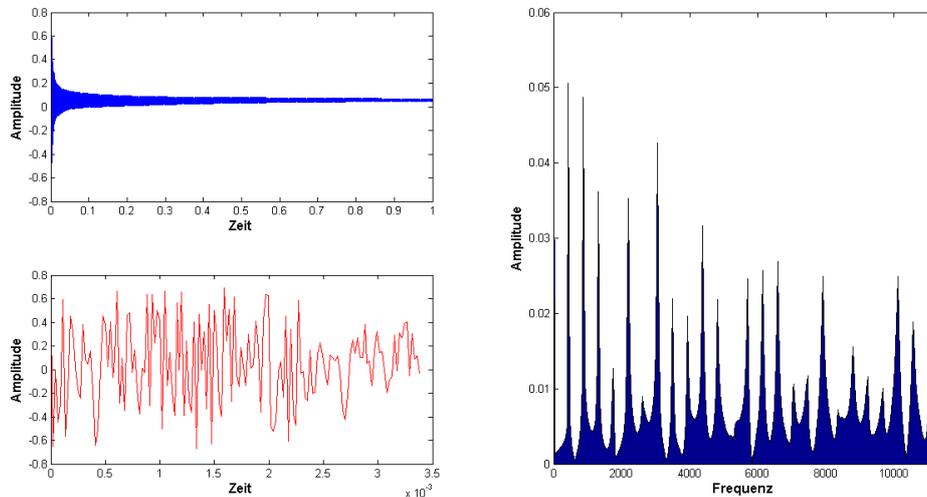


Abbildung 15: Signal (link) und Frequenzspektrum (rechts) des synthetischen Klanges einer gezupften Saite

4.1.3. Die gestrichene Saite

Schwingungsverlauf einer gestrichenen Saite Im Folgenden wird die Lösung der Wellengleichung für eine gestrichene Saite hergeleitet. Dazu wird zunächst eine Saite betrachtet, die mit einem Geigenbogen angestrichen und dadurch ausgelenkt wird. Hermann von Helmholtz untersuchte im Jahre 1860 die Bewegung einer angestrichenen Saite mit einem „Vibrationsmikroskop“ (Oszilloskop) und entdeckte, dass die Auslenkung an jedem Punkt der Saite dreieckförmig ist.

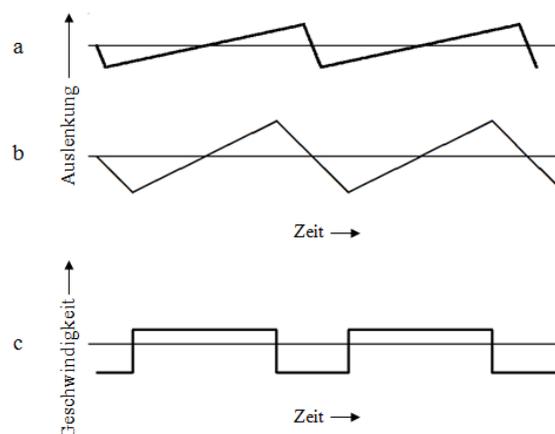


Abbildung 16: Auslenkung der Saite mit Beobachtungspunkten nahe Steg (a) und Bogen (b). (c) gibt die Geschwindigkeit von (b) wieder.

Wie in der obigen Abbildung 16 zu sehen hängt die Steigung des Dreiecksmusters vom Beobachtungspunkt ab. Nahe des Bogens ist die Steigung höher als in der Nähe des Stegs. Weiterhin fällt der Sprung der Geschwindigkeit zwischen zwei Werten mit ungleichen Vorzeichen auf. Ein Zusammenhang zwischen den beiden Geschwindigkeiten und den beiden Teillängen der Saite links und rechts vom Beobachtungspunkt ist in der Abbildung 16 deutlich zu sehen (vgl. [Blackham, 1988]).

Das Dreiecksmuster, in vielen Arbeiten auch oft als Sägezahnkurve bezeichnet, entsteht durch die Haft- und Gleitreibung, die beim Streichen mit dem Bogen entstehen. Betrachten wir die Bewegung der ganzen Saite: Durch die Haftreibung wird die Saite beim Streichen mit dem Bogen ausgelenkt. Die Saite bildet einen Knick am Anstreichort. Während der Haftungsphase wandert der Knick vom Anstreichort zum Sattel und zurück. Sobald die rücktreibende Kraft größer als die Haftreibung wird, dies geschieht genau dann, wenn der Knick wieder den Anstreichort erreicht, so gleitet die Saite unter dem Bogen. Helmholtz konnte durch seinen „Vibrationsmikroskop“ feststellen, dass der Knick in der Gleitphase zum Steg und zurück läuft. Die Saite haftet wieder am Bogen, wenn der Knick die Anstreichstelle erreicht. Es lässt sich eine Hüllkurve der Bewegung feststellen, die zwei gestauchten Parabeln ähnelt, wobei die eine an der Horizontalen gespiegelt ist. Der Knick durchläuft die gesamte Einhüllende während einer Schwingung. Die Umlaufrichtung des Knickes wird durch die Streichrichtung des Bogens bestimmt. Beim Aufstrich läuft der Knick gegen und im Abstrich im Uhrzeigersinn (vgl. [Blackham, 1988]).

In der folgenden Abbildung 17 sind die Momentaufnahmen der Helmholtz-Bewegung einer gestrichenen Geigensaite dargestellt. Der vertikale Pfeil markiert den Anstreichort und die Streichrichtung des Bogens, in diesem Fall ein Aufstrich. Wie bereits oben erwähnt, läuft der beim Streichen entstehende Knick beim Aufstrich gegen den Uhrzeigersinn, hier durch die kleinen Pfeile kenntlich gemacht. Die Einhüllende wird mit gepunkteten Linien dargestellt.

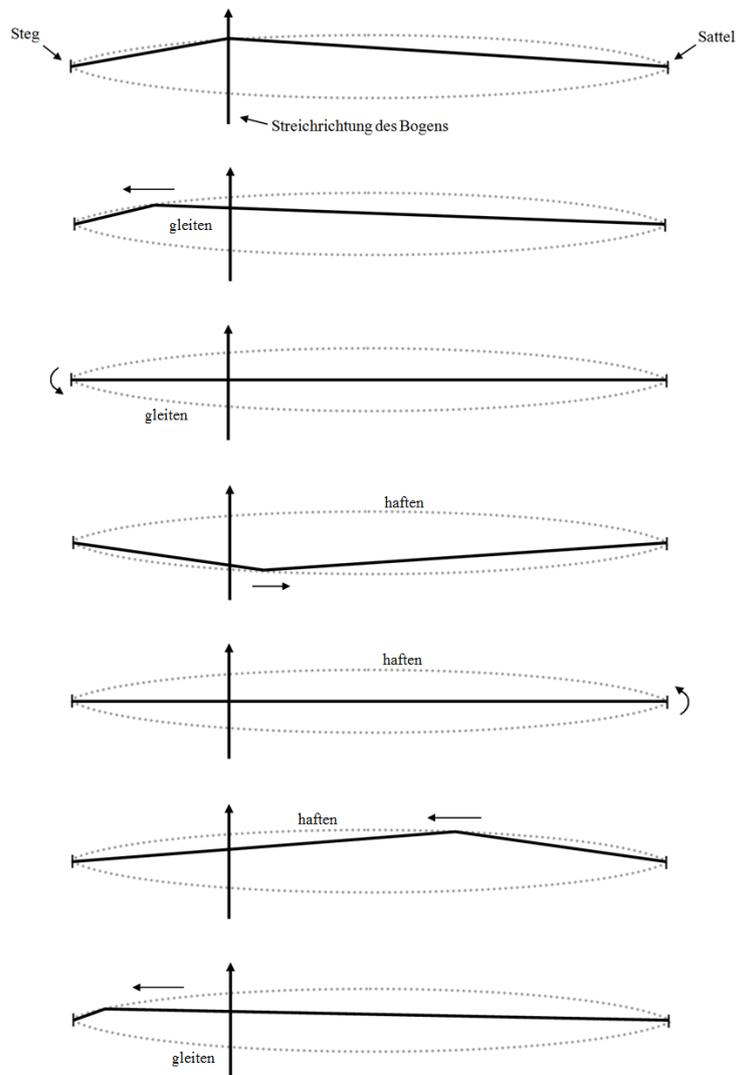


Abbildung 17: Helmholtz-Bewegung einer Saite

Lösung der Wellengleichung Nach der Untersuchung des Bewegungsablaufs einer gestrichenen Saite soll nun die Funktion $y(x, t)$ bestimmt werden, die diese Schwingung beschreibt. Dazu wird die hergeleitete Wellengleichung (6) benötigt, die offensichtlich auch hier die Randbedingungen $y(0, t) = 0$ und $y(l, t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zusätzlich gilt nun, dass $y(x_0, t)$ für alle t gegeben ist (vgl. [Benson, 2007]).

Da d'Alemberts Lösung der Wellengleichung (11) für die Herleitung der Differentialgleichung einer gestrichenen Saite ungeeignet ist, vgl. [Benson, 2007], nehmen wir die Lösungsdarstellung von Bernoulli (12) zur Hilfe. Passend zu den Abbildungen 16 und 17 sollte die Fourierreihe nur aus Sinustermen bestehen, sodass sich die Funktion $y(x_0, t)$ schreiben lässt als

$$y(x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right). \quad (17)$$

Aufgrund der Linearität der Wellengleichung reicht zunächst die Lösung für eine Frequenzkomponente $n \in [1, \infty)$ herzuleiten. Folglich ist $y(x_0, t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)$. Gesucht ist nun eine Darstellung der Lösung der Form

$$f(x) = c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l} + \phi_n\right), \quad (18)$$

wobei c_n und ϕ_n in Abhängigkeit von b_n bestimmt werden sollen. Das Einsetzen der obigen beiden Gleichungen (17) und (18) in (11) und die Anwendung der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen und deren Eigenschaften liefert

$$b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) = 2c_n \sin\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{l} + \phi_n\right).$$

Da Gleichheit zwischen Funktionen von t gelten soll, ist $\phi_n = 0$ und somit

$$b_n = 2c_n \sin\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right). \quad (19)$$

Dies lässt sich nach c_n umschreiben, sodass folgt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{2 \sin\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right)}. \quad (20)$$

Durch Einsetzen von (20) in (11) und nochmaliges Anwenden der Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen und Additionstheorem erhalten wir als Lösung der Wellengleichung

$$\begin{aligned} y &= f(x+ct) - f(-x+ct) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2 \sin\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right)} \left[\sin\left(\frac{n\pi(x+ct)}{l}\right) + \sin\left(\frac{n\pi(-x+ct)}{l}\right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)}{\sin\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Es bleibt noch zu klären, wie die Koeffizienten b_n und c_n aussehen. Dazu nutzen wir die Tatsache, dass der Schwingungsverlauf einer gestrichenen Saite für jedes x_0 der Sägezahnkurve gleicht. Dies lässt sich durch folgende Gleichung beschreiben

$$y(x_0, t) = \begin{cases} A \frac{t}{\alpha}, & -\alpha \leq t \leq \alpha, \\ A \frac{l-ct}{l-c\alpha}, & -\alpha \leq t \leq \frac{2l}{c} - \alpha, \end{cases}$$

wobei mit $\alpha = \alpha(x_0)$ die Verweildauer der Vorderkante der dreieckförmigen Welle an der Stelle x_0 und mit $A = A(x_0)$ mit maximale Schwingung an dieser Stelle bezeichnet werden. Dann

lässt sich der Faktor b_n mit Hilfe der Definition von Entwicklungskoeffizienten schreiben als (vgl. [Benson, 2007])

$$b_n = \frac{Al^2}{n^2\pi^2c\alpha(l - c\alpha)} \cdot \sin\left(\frac{n\pi c\alpha}{l}\right). \quad (22)$$

Nutzen wir den Zusammenhang (19) aus, ergeben sich weitere wichtige Kenntnisse über die Schwingung einer gestrichenen Saite. Mit (22) ergibt sich für c_n wegen (19)

$$c_n = \frac{Al^2}{n^2\pi^2c\alpha(l - c\alpha)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\pi c\alpha}{l}\right)}{\sin\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right)}. \quad (23)$$

Die Wahl

$$\alpha = \frac{x_0}{c} \quad (24)$$

führt dazu, dass der zweite Faktor von (23) gleich eins ergibt, wodurch die Unabhängigkeit des Koeffizienten c_n von x_0 gesichert ist. Insbesondere wird in [Benson, 2007] hervorgehoben, dass bei der Messung der Saitenschwingung an der Stelle x_0 der Anteil $\frac{\alpha}{(\frac{l}{c})}$ am Umfang der Hüllkurve gleich $\frac{x_0}{l}$ ist. Vor allem ergibt die Messung am Anstreichort eine Gleichheit zwischen dem Verhältnis des Weges, die ein umlaufender Knick während der Gleitphase zurücklegt, zum Umfang der Einhüllenden und dem Abstand zwischen Bogen und Steg im Verhältnis zur Saite (vgl. [Benson, 2007]).

Weiterhin lässt sich eine Gleichung für die Hüllkurve durch das Umstellen der Gleichung (23) unter Verwendung von (24) zu

$$\frac{A}{c\alpha(l - c\alpha)} = \frac{A}{x_0(l - x_0)} = \frac{c_n n^2 \pi^2}{l^2} = K \Leftrightarrow A = A(x_0) = K x_0 (l - x_0)$$

finden.

4.1.4. Anwendung

Im letzten Teil dieses Abschnittes wollen wir nun mit Hilfe der hergeleiteten Lösung der Wellengleichung (21)-(22), die die Sägezahnschwingung beschreibt, mittels CSound den Klang einer gestrichenen Saite erstellen. Aus [Benson, 2007] wissen wir bereits, dass die Sägezahnkurve mittels Fourieranalyse die folgende äquivalente Darstellung hat (unter Betrachtung nur der ersten sechzehn Terme):

$$f(\theta) \approx \sin(\theta) + \frac{1}{2} \sin(2\theta) + \dots + \frac{1}{16} \sin(16\theta).$$

Dies wollen wir bei der Simulation der gestrichenen Violinensaiten ausnutzen. Da für die Erstellung eines synthetischen Klanges die Frequenz und die Amplitude, die die Eigenschaft des Klanges ausmachen, wesentlich sind, werden zunächst Elemente aus der Klangsynthese betrachtet, der Low Frequency Oscillator und eine spezielle Form der Hüllkurve (vgl. Kapitel 3.2), die im folgenden kurz erläutert werden soll.

Für die Variation der Amplitude wird der CSound Opcode `envlpx` verwendet, die ähnlich zur ASDR-Hüllkurve ist. Auch hier lassen sich die Zeiten für den Anstieg und Abfall der Amplitude festlegen. Doch anders als bei der ASDR-Hüllkurve, kann durch den Opcode `envlpx` auf die Daten einer Tabelle zugegriffen werden, die die Anstiegsgeschwindigkeit der Amplitude festlegen. Mit den obigen Elementen lässt sich nun folgendes CSound Instrument entwerfen:

```

1 instr 1
2   kenv envlpx 0.5, 0.01, 1, 0.01, 2, 1, 0.01
3   klfo oscil 1, 1, 3
4   asig oscil klfo, 523.352, 1
5   outs asig*kenv
6 endin

```

Damit das erstellte Signal der Helmholtz-Bewegung gleich wird als Oszillator die Sägezahn-schwingung verwendet. Beim Ausführen gibt der im Anhang befindliche Beispielcode (vgl. Anhang B.2) ein eine Sekunde andauerndes c^2 (523.251 Hz) in mono als Sägezahnkurve aus. Lassen wir das resultierende Signal plotten, ergibt sich folgende Grafik:

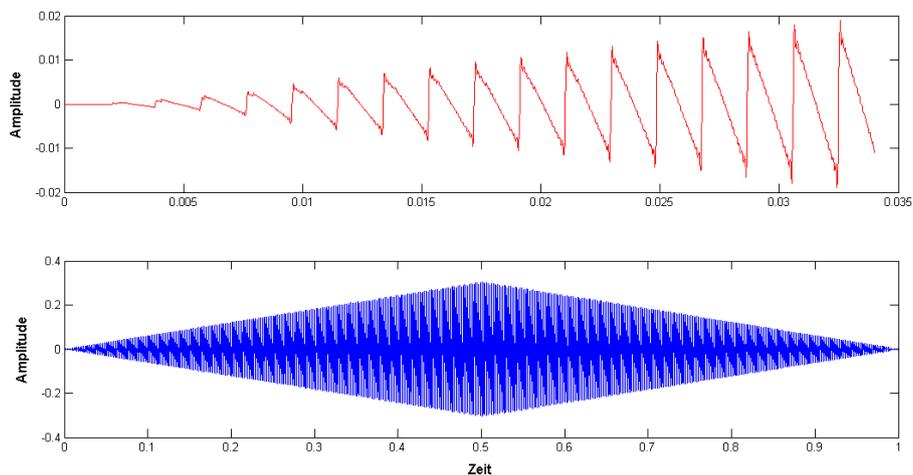


Abbildung 18: Signal des synthetischen Klanges einer gestrichenen Violinensaiten (Ton c^1 mit 0.5 dB): a) in den ersten 0.035 Sekunden (oben) und b) 1 Sekunde (unten)

In Abbildung 18 ist der synthetische Klang einer gestrichenen Saite in den ersten 0.035 Sekunden (s. Abb. 18a) und bis zum Abklingen des Signals (s. Abb.18b) abgebildet. Anhand der ersten Abbildung ist die erwartete Sägezahn-schwingung deutlich zu sehen. Trotz der geringen

Klangintensität von 0.5 dB ist der Ton aufgrund der gewählten Tabellennummer und des dadurch resultierenden exponentiellen Anstiegs zu hören. Dabei beträgt Anstiegs- und Abfallphase 0.01 Sekunden.

Für eine genauere Analyse des Signals des synthetischen Klages werden nun die Frequenzspektren des synthetisch erzeugten Klages mit dem eines aufgenommen Originaltons einer gestrichenen Violinensaiten verglichen, wobei nun Klangintensität erhöht wird auf 14 dB und die Frequenz bei 523.521 Hz bleibt. Auffällig ist die maximale Amplitude bei etwa 500 Hz, die durch die gewählte Grundfrequenz zu erklären ist. Sowohl beim synthetisch erzeugten Ton als auch im Originalton klingen neben der Grundfrequenz weitere Harmonische mit. Doch unterscheiden sie sich in der Anzahl der zu hörenden Harmonischen und deren Lautstärke. Beim synthetisch erzeugten Klang ertönen durch die im Beispielcode definierte f -Anweisung f_1 nur die ersten 16 Obertöne während der Originalton mehrere Obertöne aufweist. Weiterhin nimmt die Amplitude der Obertöne mit steigender Frequenz exponential ab. Dies ist auch in Abb. 19a zu beobachten, wobei die Amplitude bis etwa 5000 Hz nicht so stark abnimmt wie in Abb. 19b. Ab 5000 Hz sinkt die Amplitude schließlich unter 0.003.

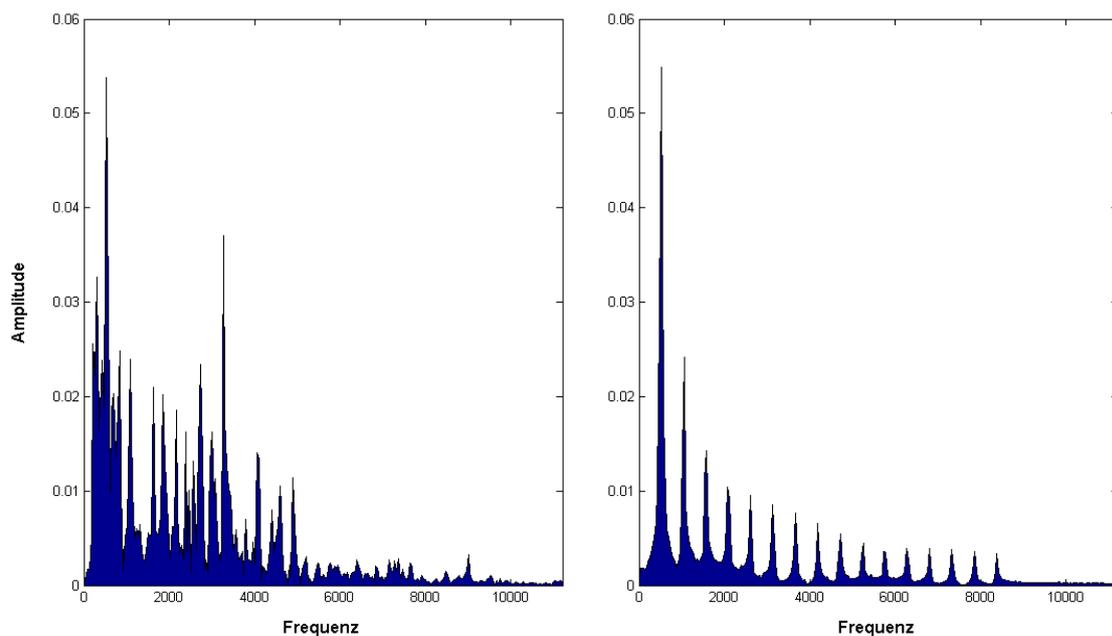


Abbildung 19: Frequenzspektrum einer gestrichenen Violinensaiten (Ton c^1 mit 14 dB) (links: original, rechts: synthetisch erzeugt)

4.2. Membranophone

4.2.1. Bessel-Funktionen

Bessel-Funktionen finden häufig Verwendung bei der Untersuchung verschiedener physikalischer Phänomene. So dienen sie beispielsweise zur Modellierung von Wärmeleitung in Stäben, Ausbreitung von Wasserwellen in runden Behältern und, vor allem von Interesse für die mathematische Beschreibung von Musik, Eigenschwingungen einer kreisförmigen Membran. Die Bessel-Funktionen ergeben sich als Lösung der Besselschen Differentialgleichung, die wie folgt gegeben ist [Abramowitz, 1964, Seite 358]:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} + (x^2 - n^2)f = 0, \quad (25)$$

wobei n eine reelle Konstante ist. Da es sich bei Gleichung (25) um eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt, existieren zwei linear unabhängige Lösungen. Diesen werden auch Bessel-Funktionen erster und zweiter Gattung (J_n bzw. Y_n) genannt. Durch eine Linearkombination dieser beiden Funktionen erhält man die Bessel-Funktionen dritter Gattung ($H_n^{(1)}$ und $H_n^{(2)}$). In der Literatur werden verschiedene Verfahren zur Lösung von Gleichung (25) verwendet.⁹ Für die Lösung der zweidimensionalen Wellengleichung, die im folgenden Kapitel vorgestellt wird, sind vor allem die Bessel-Funktionen erster Gattung J_n und zweiter Gattung Y_n interessant. Diese sind gegeben durch [Abramowitz, 1964, Seite 359]

$$J_n(x) = \left(\frac{1}{2}x\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \quad (26)$$

und

$$Y_n(x) = -\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n}}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{1}{4}x^2\right)^k + \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{1}{2}x\right) J_n(x) - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} [\psi(k+1) + \psi(n+k+1)] \frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k!(n+k)!}, \quad (27)$$

wobei $\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1}$ für $n \geq 2$ und $\psi(1) = -\gamma$ und γ der Eulerschen Konstanten entspricht. Durch den Logarithmus in Formel (27) lässt sich eine Singularität der Funktion

⁹Für eine mögliche Herleitung der Bessel-Funktionen wird an dieser Stelle auf [Chao, 2009] verwiesen.

bereits erahnen. Diese befindet sich in der 0, wie in Abbildung 21 deutlich wird.

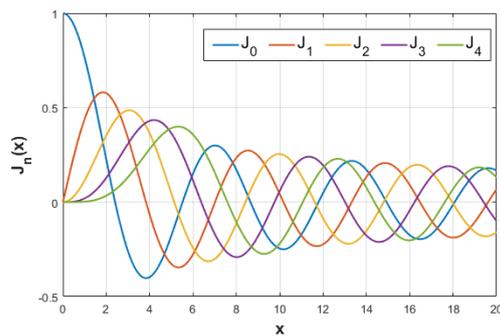


Abbildung 20: Bessel-Funktionen erster Gattung

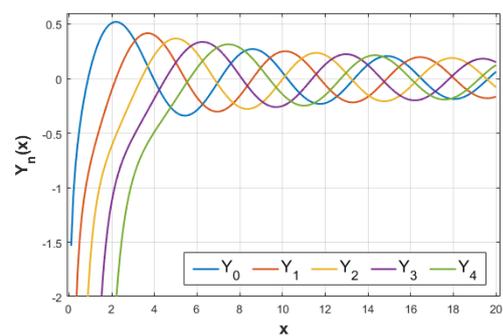


Abbildung 21: Bessel-Funktionen zweiter Gattung

4.2.2. Mathematische Beschreibung

Repräsentativ für Membranophone im Allgemeinen wird im folgenden eine Trommel mit kreisrunder Membran betrachtet. Die Dichte der Membran wird wieder mit ρ bezeichnet. Der Rand der Trommel, an dem die Membran befestigt ist, unterliegt einer gleichmäßigen Spannung, sodass die gesamte Oberfläche durch eine gleichmäßige Spannung T , gemessen in $\frac{\text{Newton}}{\text{Meter}}$, beschrieben werden kann. Die mathematische Beschreibung einer Trommel orientiert sich an der eines Saiteninstruments aus Kapitel 4.1, die durch die eindimensionale Wellengleichung beschrieben werden kann. Da in diesem Fall eine Membran anstelle einer Saite betrachtet wird, führen die folgenden Überlegungen zu einer zweidimensionalen Wellengleichung.

Analog zum eindimensionalen Fall wird die Oberfläche der Trommel parametrisiert und eine senkrechte Membranschwingung als eine Funktion $z(x, y, t)$ dargestellt, die abhängig von der Position (x, y) auf der Membran und dem Zeitpunkt t ist. Betrachtet wird nun ein rechteckiger

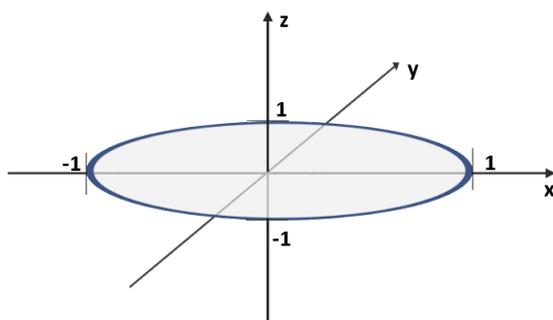


Abbildung 22: Parametrisierung der Membran

Bereich der Membran mit Breite Δx und Länge Δy . Die Spannung am linken und rechten Ende dieses Bereichs ist somit gegeben durch $T\Delta y$.

Genau wie im eindimensionalen Fall kann nun die Differenz der vertikalen Teilkräfte der zwei Enden geschätzt werden (vgl. Kapitel 4.1.1):

$$(T\Delta y) \left(\Delta x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right).$$

Analog wird die Differenz der vertikalen Teilkräfte des oberen und unteren Endes des Bereiches approximiert:

$$(T\Delta x) \left(\Delta y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right).$$

Die gesamte vertikale Kraft, die auf den Bereich wirkt ist durch die Summe der beiden Teilkraft gegeben:

$$(T\Delta y) \left(\Delta x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) + (T\Delta x) \left(\Delta y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = (T\Delta x\Delta y) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right).$$

Analog zum eindimensionalen Fall ist die Masse des Bereiches gegeben durch $\rho\Delta x\Delta y$, sodass nach dem zweiten Newtonschem Gesetz gilt:

$$(T\Delta x\Delta y) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \approx (\rho\Delta x\Delta y) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Durch Dividieren von $\Delta x\Delta y$ auf beiden Seiten und Setzen von $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ erhalten wir die zweidimensionale Wellengleichung [Benson, 2007, Seite 104]:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right). \quad (28)$$

Zur Lösung dieser partiellen Differentialgleichung werden die Koordinaten (x, y) auf der kreisrunden Membran zunächst als Polarkoordinaten (r, θ) geschrieben, sodass Gleichung (28) übergeht in:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right). \quad (29)$$

Gesucht wird eine separable Lösung der Form¹⁰:

$$z = f(r)g(\theta)h(t).$$

Einsetzen von z in Gleichung (29) liefert:

$$f(r)g(\theta)h''(t) = c^2 \left(f''(r)g(\theta)h(t) + \frac{1}{r} f'(r)g(\theta)h(t) + \frac{1}{r^2} f(r)g''(\theta)h(t) \right).$$

Teilen beider Seiten durch $f(r)g(\theta)h(t)$ ergibt:

$$\frac{h''(t)}{h(t)} = c^2 \left(\frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{1}{r} \frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{g''(\theta)}{g(\theta)} \right).$$

In dieser Darstellung der zweidimensionalen Wellengleichung wird deutlich, dass die linke Seite nur von t und die rechte Seite nur von r und θ abhängig ist, wobei t , r und θ unabhängig voneinander sind. Somit gilt, dass der Wert, für den diese Gleichung erfüllt ist, unabhängig von t , r und θ ist und somit eine Konstante sein muss. Später wird deutlich, dass es sich um eine

¹⁰Nachvollzogen kann dies beispielsweise in den Arbeiten von [Benson, 2007]

negative Konstante $-\omega^2$ handelt¹¹. Es ergeben sich somit die folgenden zwei Gleichungen:

$$h''(t) = -\omega^2 h(t), \quad (30)$$

$$\frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{1}{r} \frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = -\frac{\omega^2}{c^2}. \quad (31)$$

Die allgemeine Lösung von Gleichung (30) ist ein Vielfaches der Lösung

$$h(t) = \sin(\omega t + \phi), \quad (32)$$

wobei ϕ eine temporär festgelegte Konstante ist. Multiplizieren von Gleichung (31) mit r^2 liefert:

$$r^2 \frac{f''(r)}{f(r)} + r \frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{\omega^2}{c^2} r^2 = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}. \quad (33)$$

Erneut wird ersichtlich, dass um die Gleichung stets zu erfüllen der gemeinsame Wert eine Konstante sein muss, da die linke Seite nur von r abhängt, die rechte Seite hingegen nur von θ . Daraus folgt, dass $g(\theta)$ entweder eine Sinus- oder Exponentialfunktion sein muss, abhängig vom Vorzeichen der Konstanten. Da $g(\theta)$ jedoch eine Winkelfunktion ist, muss sie periodisch mit Periode 2π sein. Der gemeinsame Wert ergibt sich also als Wurzel einer Ganzzahl n , sodass

$$g''(\theta) = -n^2 g(\theta)$$

und $g(\theta)$ analog zu $h(t)$ ein Vielfaches von $\sin(n\theta + \psi)$ ist, wobei ψ eine weitere Konstante ist. Die Funktionen $g(\theta)$ und $h(t)$ wurden nun bereits bestimmt. Einsetzen von $g(\theta)$ in Gleichung (33) liefert:

$$r^2 \frac{f''(r)}{f(r)} + r \frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{\omega^2}{c^2} r^2 = n^2.$$

Durch Multiplizieren mit $f(r)$ und Teilen durch r^2 geht dieser Ausdruck über in:

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) f(r) = 0. \quad (34)$$

Die Lösung dieser Gleichung benötigt eine kurze Rechnung:

Bemerkung. Die allgemeine Lösung von Gleichung (34) ist gegeben durch

$$f(r) = a J_n\left(\frac{\omega}{c} r\right) + b Y_n\left(\frac{\omega}{c} r\right),$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$, J_n die Bessel-Funktion erster und Y_n die Bessel-Funktion zweiter Gattung

¹¹Für eine detaillierte Analyse wird an dieser Stelle auf [Benson, 2007] verwiesen.

ist (vgl. Kapitel 4.2.1).

Beweis. Wir wissen, dass die Bessel-Funktion die Lösung der Besselschen Differentialgleichung

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + \left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right)f(r) = 0 \quad (35)$$

ist. Es wird zunächst gezeigt, dass $f = J_n\left(\frac{\omega}{c}r\right)$ eine Lösung von Gleichung (34) ist. Die Ableitungen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} f' &= \frac{\omega}{c} J_n'\left(\frac{\omega}{c}r\right), \\ f'' &= \frac{\omega^2}{c^2} J_n''\left(\frac{\omega}{c}r\right). \end{aligned}$$

Auflösen der Besselschen Differentialgleichung nach f'' , Einsetzen von $f = J_n\left(\frac{\omega}{c}r\right)$ und Multiplizieren mit $\frac{\omega^2}{c^2}$ liefert:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} J_n''\left(\frac{\omega}{c}r\right) &= -\frac{1}{r} \frac{\omega}{c} J_n'\left(\frac{\omega}{c}r\right) - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{c^2 n^2}{\omega^2 r^2}\right) J_n \\ \iff f''(r) &= -\frac{1}{r} f'(r) - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r^2}\right) f(r). \end{aligned}$$

Dies entspricht gerade Gleichung (34), sodass $J_n\left(\frac{\omega}{c}r\right)$ eine Lösung dieser ist. Da die Bessel-Funktion zweiter Ordnung $Y_n\left(\frac{\omega}{c}r\right)$ ebenfalls eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung ist, kann analog gezeigt werden, dass diese auch eine Lösung von Gleichung (34) ist. Weiterhin ist Gleichung (34) linear, somit ist also jede beliebige Linearkombination von $J_n\left(\frac{\omega}{c}r\right)$ und $Y_n\left(\frac{\omega}{c}r\right)$ ebenfalls eine Lösung. Da es sich bei Gleichung (34) um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt, kann es keine weiteren Lösungen geben. \square

Die allgemeine Lösung von Gleichung (34) ist also eine Linearkombination von $J_n\left(\frac{\omega}{c}r\right)$ und $Y_n\left(\frac{\omega}{c}r\right)$. Da jedoch gilt, dass $Y_n\left(\frac{\omega}{c}r\right) \xrightarrow{r \rightarrow 0} -\infty$ (vgl. Kapitel 4.2.1), würde dies eine Singularität im Zentrum der Membran implizieren. Die relevante allgemeine Lösung von Gleichung (34) ergibt sich also als Vielfaches von $J_n\left(\frac{\omega}{c}r\right)$, sodass sich die Lösung der zweidimensionalen Wellengleichung wie folgt ergibt:

$$z = f(r)g(\theta)h(t) = A J_n\left(\frac{\omega}{c}r\right) \sin(n\theta + \psi) \sin(\omega t + \phi). \quad (36)$$

Angenommen der Radius der Membran ist gegeben durch a , so muss die folgende Randbedingung erfüllt sein:

$$z = 0, \text{ falls } r = a, \text{ sodass } J_n\left(\frac{\omega}{c}a\right) = 0. \quad (37)$$

Die Bessel-Funktion J_n nimmt abzählbar viele Nullstellen an, sodass ω ebenfalls nur abzählbar viele Werte annehmen kann. Die Wahl eines $n \in \mathbb{N}_0$ und einer Nullstelle der Bessel-Funktion J_n erfüllt dann die obige Bedingung (37). In Tabelle 3 sind die ersten Nullstellen der Bessel-Funktion angegeben, wobei k die k -te Nullstelle bezeichnet.

k	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4
1	2.40483	3.83171	5.13562	6.38016	7.58834
2	5.52008	7.01559	8.41724	9.76102	11.06471
3	8.65373	10.17347	11.61984	13.01520	14.37254

Tabelle 3: Nullstellen der Bessel-Funktion J_n

Diese verschiedenen Möglichkeiten führen zu den Eigenschwingungen einer kreisrunden Membran, die für die erste drei Spalten von Tabelle 3 in Abbildung 23 dargestellt sind.

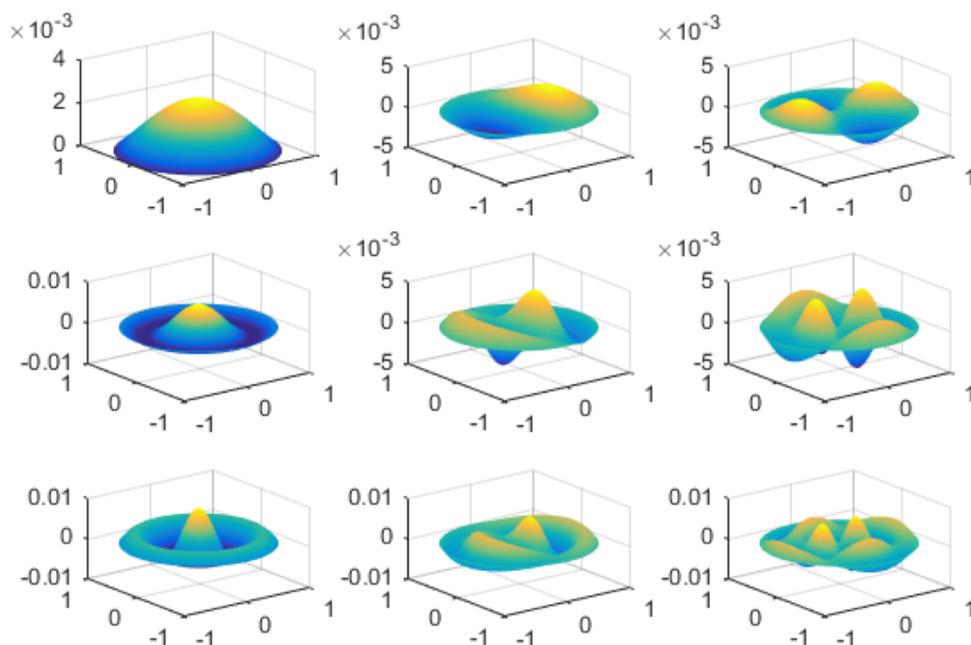


Abbildung 23: Eigenschwingungen einer kreisrunden Membran mit $\rho = 1$, $T = 1$ und $A = 1$ für $n \in \{0, 1, 2\}$ spalten- und $k \in \{1, 2, 3\}$ reihenweise.

4.2.3. Anwendung

Diese Eigenschwingungen können ähnlich zur Zerlegung einer periodischen Funktion in ihre Fourierreihe verstanden werden, da jede Schwingung als Komposition ihrer Eigenschwingungen dargestellt werden kann. Bezeichnet $j_{n,k}$ die k -te Nullstelle von J_n , so hat die zugehörige Schwingung der Membran die Frequenz $\frac{c j_{n,k}}{2\pi a}$, was $\frac{j_{n,k}}{j_{0,1}}$ -mal der Grundfrequenz entspricht

[Benson, 2007, Seite 106]. Im Allgemeinen kann für geschlossene Membranophone die Fundamentalfrequenz durch die Eigenschwingung für $n = 1$ und $k = 1$ identifiziert werden. Höhere Eigenschwingungen werden in der Regel dadurch gefördert, dass sich die Luft problemlos von einer Seite zur anderen bewegen kann [Benson, 2007, Seite 106]. Um sich nun ein vollständiges Bild über die Zusammensetzung des Klangspektrums einer Trommel zu machen, wird das Frequenzspektrum eines realen Trommelschlags analysiert. Zunächst wird eine große Trommel („Kick-Drum“), danach eine kleine Trommel („Snare-Drum“) betrachtet.

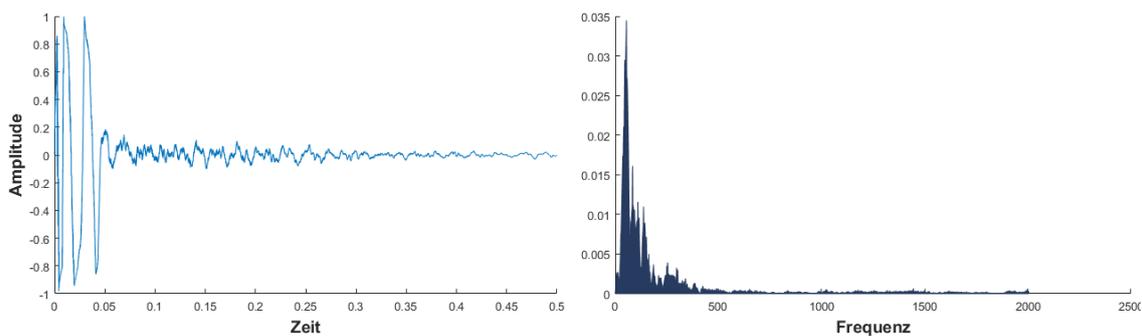


Abbildung 24: Signal (links) und Frequenzspektrum (rechts) eines Kick-Drum Klanges

Ein Kick-Drum zeichnet sich durch seine tiefen Klänge aus und wird häufig als Grundgerüst des Rhythmus innerhalb einer Komposition verwendet. In der Regel zeichnen sie sich durch einen Frequenzgang mit niedriger Fundamentalfrequenz und einem schwachen Obertonspektrum aus. In Abbildung 24 ist das aufgenommene Signal des Trommelschlages zu sehen, daneben das zugehörige Frequenzspektrum. Deutlich zu sehen ist eine kurze Phase zu Beginn des Signals mit, im Verhältnis zum weiteren Verlauf des Signals, hoher Amplitude. Diese bricht sprunghaft ab und verweilt bis zum Ausklang des Signals bei etwa 20% der ursprünglichen Amplitude. Der Verlauf des Signals entspricht also weitestgehend dem, was sich intuitiv vermuten ließ, da durch einem Trommelschlag auf ein Kick-Drum ein zu Beginn lauter, jedoch schnell abfallender Klang entsteht. Das durch Fourier-Transformation (vgl. Kapitel 3.1.2) ermittelte Frequenzspektrum zeigt eine starke Frequenzdichte im niedrigen Frequenzbereich mit einer Fundamentalfrequenz bei etwa 75 Hz. Um nun einen synthetischen Klang eines Kick-Drums mittels CSound zu entwerfen, werden eine Reihe von Elementen aus der Klangsynthese aus Kapitel 3 benötigt. Betrachtet wird zunächst die Entwicklung der Amplitude über die Zeit. In Kapitel 3.2 wurde die ASDR-Hüllkurve vorgestellt, die in CSound mittels des Opcodes `asdr` umgesetzt wird. Wie bereits erwähnt zeichnet sich der Klang bzw. die Amplitude des Klanges eines Kick-Drums durch eine schnell abfallenden Anfangsphase aus. Als Anstiegs- und Abfallparameter werden daher für einen Kick-Drum Klang mit einer Länge von 0.5 Sekunden jeweils 0.025 Sekunden gewählt. Das Halten-Niveau wird als 20% der maximalen Amplitude und die Freigeben-Phase durch 0.35

Sekunden determiniert.

```
1 | aenv adsr 0.025, 0.025, 0.1, 0.35
```

Die Frequenz wird ebenfalls mit einer Hüllkurve moduliert. Hierbei wird zu Beginn ebenfalls von einer höheren, dann schnell abfallenden Frequenz ausgegangen. Dazu wird eine Anfangsfrequenz in Höhe von 73.4162 Hz gewählt, also die Note D, die im Zeitverlauf exponentiell auf 10 Hz fällt, somit nicht mehr für das menschliche Ohr als Klang wahrnehmbar ist (vgl. Kapitel 2.2). Diese Form einer Hüllkurve wird in CSound mittels des Opcodes `expon` umgesetzt. Sie besteht aus drei Parametern, dem Startzustand, der Dauer und dem Endzustand der Frequenz.

```
1 | k1 expon 73.4162, 0.5, 10
```

Zusammengesetzt ergibt sich folgendes CSound Instrument¹²:

```
1 | instr 1
2 |   k1      expon      73.4162,    0.5,  10
3 |   aenv    adsr     0.025, 0.025, 0.1, 0.35
4 |   a1      poscil 10000,    k1,    1
5 |   outs a1*aenv, a1*aenv
6 | endin
```

Wird als Oszillator eine einfache Sinuswelle verwendet, so ergeben sich folgende Grafiken für das entstehende Signal und dessen Frequenzspektrum:

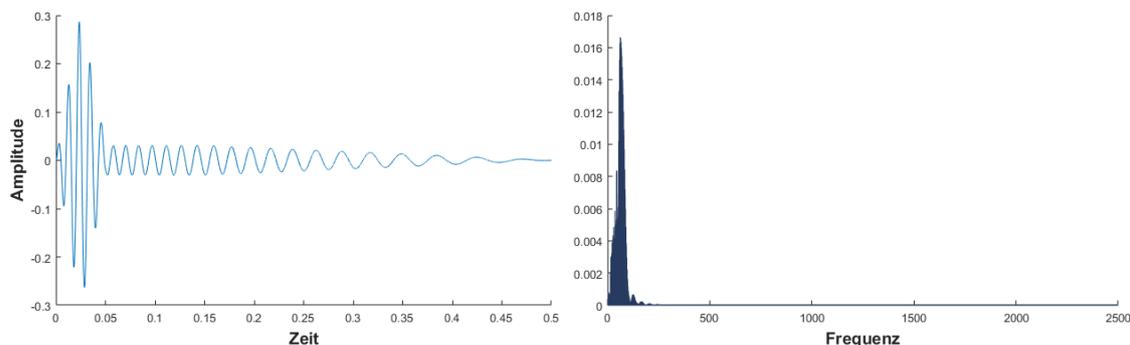


Abbildung 25: Signal (links) und Frequenzspektrum (rechts) des synthetischen Kick-Drum Klanges

Es wird deutlich, dass der synthetische Klang ein geringeres Obertonspektrum besitzt als der Originalton. Grund hierfür ist die sehr simple Darstellung des Kick-Drums mittels CSound, so dass nicht alle Eigenschaften des Klanges des Kick-Drums einfach umgesetzt werden können. Ein wesentlich größeres Obertonspektrum besitzt das Snare-Drum, welches im folgenden behandelt wird. Abbildung 26 zeigt das Signal und das Frequenzspektrum eines Originaltons eines

¹²Das vollständige CSound Programm befindet sich in Anhang B.3.

Snare-Drums.

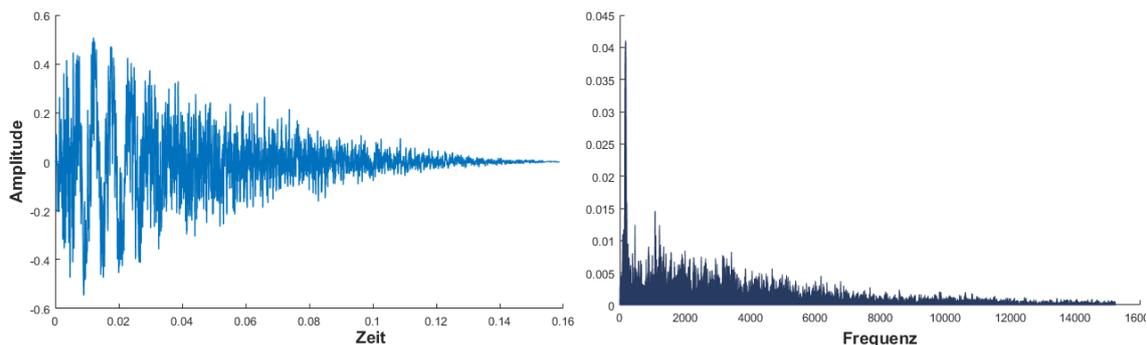


Abbildung 26: Signal (links) und Frequenzspektrum (rechts) eines Snare-Drum Klanges

Im Vergleich zum Kick-Drum fällt auf, dass das Snare-Drum einen wesentlich schwächeren zeitlichen Abfall der Amplitude besitzt. Als Hüllkurve zur Modellierung der Amplitude wird wieder der Opcode `expon` verwendet. Da der Klang eines Snare-Drums in der Regel höher als der eines Kick-Drums ist, wird als Frequenz 146.832 Hz, also die Note d, verwendet. Diese Wahl lässt sich auch anhand des Frequenzspektrums in Abbildung 26 bestätigen. Der typische Klang des obertonreichen Spektrums des Snare-Drums lässt sich durch weißes Rauschen modellieren. Weißes Rauschen wird in der Regel häufig verwendet, um Störungen in einem Modell abzubilden und zeichnet sich durch ein konstantes Leistungsdichtespektrum in einem bestimmten Frequenzbereich aus. Umgesetzt wird dieses Element mittels des Opcodes `arand`. Da sich die Amplitude jedoch nicht konstant, sondern innerhalb einer Hüllkurve, über die Zeit verhält, wird die gesamte Hüllkurve an `arand` übergeben. Zusammengesetzt ergibt sich mit einem einfachen Sinusoszillator folgendes Instrument¹³:

```
1 instr 1
2   aenv1   expon 146.832, 0.3, 100
3   a1     oscili aenv1, 146.832, 1
4   aamp   expon 10000, 0.2, 300
5   arand  rand   aamp
6   outs  a1+arand, a1+arand
7 endin
```

In Abbildung 27 ist das Signal für einen 0.3 Sekunden langen synthetischen Snare-Drum Klang und das zugehörige Frequenzspektrum abgebildet. Deutlich wird, wie bereits zuvor bei der Umsetzung eines synthetischen Kick-Drum Klanges, die idealistische Form des Signals und des Frequenzspektrums, die sich zurückführen lässt auf die Umsetzung der Klänge mit lediglich einfachen Elementen aus der Klangsynthese.

¹³Das vollständige CSound Programm befindet sich in Anhang B.4.

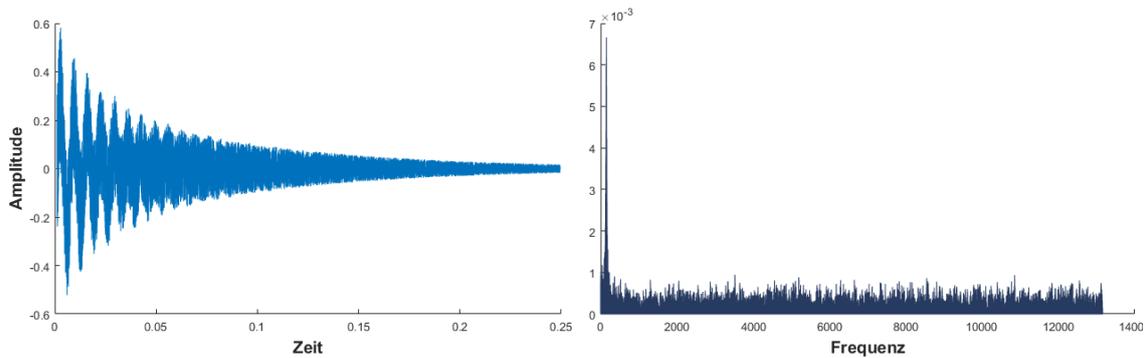


Abbildung 27: Signal (links) und Frequenzspektrum (rechts) des synthetischen Snare-Drum Klanges

4.3. Aerophone

Wird bei Blasinstrumenten der Luftstrom bekanntlich durch Pusten des Bläusers erzeugt, werden bei Harmonikainstrumenten und Orgeln Balgsysteme zur Luftstromerzeugung verwendet. Innerhalb der Klasse der Blasinstrumente wird aufgrund der Art, wie die Luftsäule in Schwingung versetzt wird, zwischen Holz- und Blechblasinstrumenten unterschieden. Bei den Holzblasinstrumenten gerät die Luftsäule in Schwingungen durch ein Luft- oder Rohrblatt, das dem schwingenden Teil des Instrumentenmundstücks entspricht. Der Ton der Blechblasinstrumente wird hingegen durch Schwingungen der Lippen des Spielers erzeugt.

Wie auch bei allen anderen Instrumenten ist die Frequenz des Tons beziehungsweise das Frequenzspektrum des Klanges mit den jeweiligen Eigenschaften die entscheidende Größe für die Beschreibung dieser Instrumentenklasse. Diese werden insbesondere durch die Länge des Rohrs und dessen Umfang determiniert. Dabei gilt, dass der Ton umso tiefer ist, je größer der Umfang und die Länge des Rohrs sind [Rossing, 2004]. Die Erscheinung des Frequenzspektrums und deren Anteile hängt zusätzlich von Parametern wie Material, Art der Bohrung und Beschaffenheit der Innenwand ab. In der folgenden Beschreibung wird nur die Art der Bohrung berücksichtigt. Als repräsentative Beispiele werden dabei für Holzblasinstrumente die Flöte und Klarinette als ein gerades Rohr mit einem konstanten Querschnitt betrachtet. Für Blechblasinstrumente wird ein hartes gebogenes Rohr mit einem variablen Querschnittverlauf, beispielsweise ein einfaches Horn, herangezogen, wobei insbesondere der Schallbecher den Klang determiniert.

4.3.1. Herleitung der Differentialgleichungen

Für die Herleitung der Differentialgleichungen, die im folgenden hauptsächlich auf [Benson, 2007] basiert, ist der Querschnittverlauf im Gegensatz zu der genauen Bauform des Instruments entscheidend. Die folgende allgemeine Herleitung lässt sich auf den Einzelfall spezifizieren.

Durch zwei entscheidende Größen, den Schalldruck $p(x, t)$ und die Verschiebung $\xi(x, t)$ im

Punkt x zum Zeitpunkt t , lassen sich Luftschwingungen in einem Rohr oder einer Säule beschreiben und erklären. Dazu treffen wir zunächst zwei Annahmen:

- Die Luft im Rohr habe eine Ruhelage.
- Bei den Schwingungen der Luftsäule im Blechblasinstrument handele es sich um eine ebene Welle, die sich entlang des Rohrs ausbreite.

Bezeichnet ρ den Umgebungsluftdruck, $P(x, t) = \rho + p(x, t)$ den Absolutdruck und B das Kompressionsmodul der Luft, das die notwendige Höhe der Druckänderung für eine festgelegte Volumenänderung angibt, dann folgt für den Schalldruck $p(x, t)$ nach dem Hookeschen Gesetz, das ein linear-elastisches Verhalten von Festkörpern zeigt, dass

$$p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (38)$$

Das zweite Newtonsche Gesetz, das wir in den vorherigen Kapiteln bereits angewendet haben, führt auf die Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (39)$$

Daraus ergeben sich die folgenden Gleichungen, wobei $c = \sqrt{B/\rho}$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit darstellt:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{\partial p}{\partial^2 x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial^2 t}, \\ (ii) \quad & \frac{\partial \xi}{\partial^2 x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \xi}{\partial^2 t}. \end{aligned} \quad (40)$$

Gleichung (40) beschreibt jeweils eine Wellengleichung für (i) den Schalldruck und (ii) die Verschiebung. Die Phasen der Wellengleichungen sind dabei verschieden. Im Fall eines variablen Querschnittverlaufs $\sigma(x)$ in Abhängigkeit des Punktes x ergibt sich für den Druck die sogenannte Webstersche Horngleichung [Benson, 2007, Ungeheuer, 1962]:

$$\frac{1}{\sigma(x)} \partial_x (\sigma(x) \partial_x p) = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 p \iff \partial_x^2 p + \frac{1}{\sigma(x)} \frac{d\sigma}{dx} \partial_x p = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 p. \quad (41)$$

Somit erfüllen die gesuchten Größen jeweils eine eindimensionale Wellengleichung, die einen Zusammenhang zwischen räumlicher und zeitlicher Änderung der jeweiligen Größe herstellt.

4.3.2. Lösung der Differentialgleichungen

Zur Lösung der Differentialgleichungen, die im folgenden wieder weitestgehend auf [Benson, 2007] basieren, werden Randbedingungen benötigt. Je nachdem, ob das Ende des Rohrs offen oder geschlossen ist, ergeben sich entsprechende Randbedingungen für den Schalldruck p und die

Verschiebung ξ . Im Folgenden wird ein Rohr mit offenen Enden betrachtet, wie beispielsweise die Querflöte.

Da an einem offenen Ende eines Rohrs mit Länge $l > 0$ kein Schalldruck vorhanden ist, liegen somit für $p(x, t)$ dieselben Randbedingungen vor, wie bei einer schwingenden Saite, nämlich

$$p(0, t) = p(l, t) \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (42)$$

Die Lösung der Differentialgleichung für den Schalldruck $p(x, t)$ ist damit durch die Lösung der Wellengleichung für Saiten von d'Alembert (vgl. Gleichung (11))

$$p_n(x, t) = 2C \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{l} + \phi\right), \quad C, \phi \in \mathbb{R} \text{ konstant, } n \in \mathbb{N} \quad (43)$$

gegeben. Demnach sind die Wellen des Drucks und aufgrund von (38) und (39) auch der Verschiebung und somit die Frequenzen der Luftvibrationen beliebige ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz. p_n stellt also die Schwingung der n -ten Harmonischen dar. Die Grundschwingung entspricht demnach p_1 . Die Welledarstellungen für $n = 1, 2, 3$ des Schalldrucks und der Verschiebung können Abbildungen 28 und 29 entnommen werden:

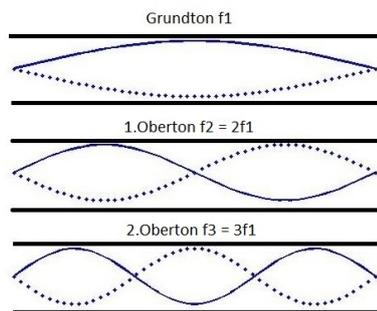


Abbildung 28: Wellendarstellung des Drucks

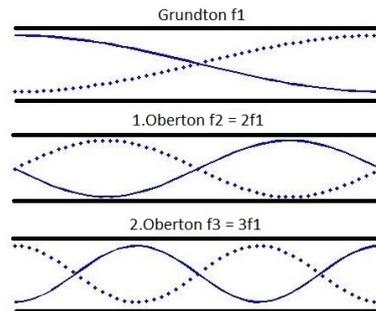


Abbildung 29: Wellendarstellung der Verschiebung

Die Bäuche der einen Welle entsprechen jeweils den Knoten der anderen Welle. Die Länge der Welle, die mit der Grundfrequenz schwingt, entspricht der doppelten Länge des offenen Rohrs, unter der Vorstellung einer Weiterführung der Welle über das Rohr hinaus. Blasinstrumente mit einer konischen Bohrung mit Länge l , wie beispielsweise Oboen, sind mathematisch zu denen mit offenen Enden derselben Länge äquivalent, sodass die Lösungen übereinstimmen und dieselben Sachverhalte für den Druck und die Verschiebung gelten.

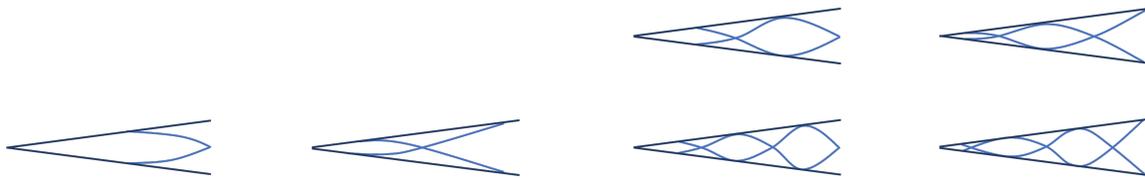


Abbildung 30: Wellendarstellung des Drucks (links) und der Verschiebung (rechts) bei einem konischen Rohr

Als nächstes werden Lösungen der Wellengleichungen (40) für ein Rohr mit nur einem offenen Ende, wie es beispielsweise bei Klarinetten und Blockflöten der Fall ist, hergeleitet. Ist eines der beiden Enden geschlossen, so folgt, dass keine Verschiebung an dem betreffenden Ende stattfinden kann, weil sich die Luftteilchen an diesem Ende nicht bewegen können. Am offenen Ende gibt es keine Veränderung der Verschiebung bezüglich des Ortes. Die Randbedingungen sind also durch

$$\xi(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}(l, t) = 0, \quad \xi(l, t) = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (44)$$

gegeben. Die Lösung der Differentialgleichung für ξ lautet in diesem Fall

$$\xi_n(x, t) = 2C \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi ct}{2l} + \phi\right), \quad C, \phi \in \mathbb{R} \text{ konstant, } n \in \mathbb{N}, \quad (45)$$

wobei o.B.d.A. das linke Ende als geschlossen und das rechte als offen angenommen wurde. Bei einem Rohr mit einem geschlossenen Ende sind die Frequenzen der Luftvibrationen nun ungerade Vielfache der Grundfrequenz. Die n -te Oberschwingung ist also durch ξ_n gegeben, für $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Die Grundschwingung entspricht demnach wieder dem Fall $n = 1$. Die Wellendarstellungen des Schalldrucks und der Verschiebung können den Abbildungen 31 und 32 entnommen werden.

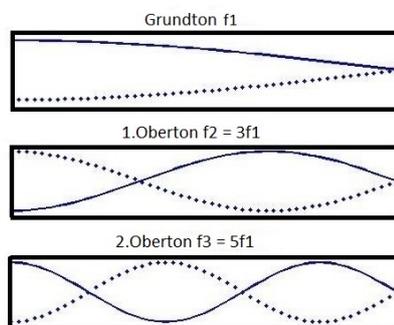


Abbildung 31: Wellendarstellung des Drucks

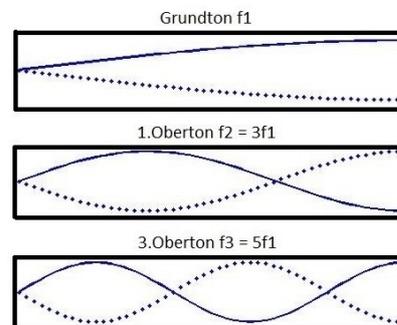


Abbildung 32: Wellendarstellung der Verschiebung

Hierbei ist die Länge der Welle, die mit der Grundfrequenz schwingt, sogar viermal so groß wie die des Rohrs. Dies ist die Erklärung dafür, dass eine Klarinette bei gleicher Beschaffenheit wie eine Querflöte tiefere Töne erzeugt.

Als nächstes erfolgt die Herleitung der Lösung der Websterschen Horngleichung (vgl. Gleichung (41)) für einen speziellen Fall. Die genaue mathematische Darstellung des Querschnittsverlaufs $\sigma(x)$ ist zwar für die Herleitung der Differentialgleichung nicht relevant, zur Lösung dieser aber zwingend erforderlich. Ist der Querschnittsverlauf konstant oder exponentiell, so lässt sich, im Gegensatz zu anderen Fällen, eine exakte Lösung angeben [Ungeheuer, 1962]. Daher wird exemplarisch das sogenannte Besselhorn herangezogen, das ein gutes Beispiel für einen variierenden Querschnittsverlauf darstellt und eine recht simple Lösung der Differentialgleichung besitzt [Benson, 2007, Rossing, 2004]. Das Besselhorn ist dadurch definiert, dass dessen Querschnittsradius $R(x)$ und dessen Querschnitt $\sigma(x)$ folgende Eigenschaften erfüllen [Benson, 2007, Seite 113]:

$$R(x) = bx^{-\alpha}, \quad \sigma(x) = \pi R(x)^2.$$

Die Konstante b und das Intervall $J = [x_0, x_0 + l]$, $x \in J$, werden so gewählt, dass der Radius des Rohrquerschnitts am Mundstück in x_0 und am Ende in $x_0 + l$ mit $R(x_0)$ und $R(x_0 + l)$ übereinstimmen [Benson, 2007]. Bei $\alpha = 0$ ist der Rohrquerschnitt konstant, die Webstersche Horngleichung (41) reduziert sich auf die Gleichung (40) (ii). Sind also beide Enden des Rohrs offen oder liegt ein Rohr mit einem offenen und einem geschlossenen Ende vor, so lassen sich die obigen Ergebnisse anwenden. Für $\alpha = -1$ ist das Rohr konisch. Falls der Radius am linken Ende Null beträgt, so kann erneut die obige Herleitung und Lösung herangezogen werden. Aufgrund der Formen der Instrumente in der Praxis und deren Bedeutung für den Klang ist es ausreichend, $\alpha \geq 0$ anzunehmen [Rossing, 2004].

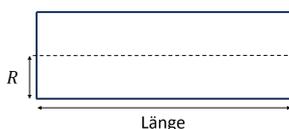


Abbildung 33: Rohr eines Besselhorns mit $R(x) \equiv R (= b)$ für $\alpha = 0$

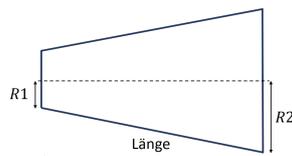


Abbildung 34: Konisches Rohr für ein Besselhorn bei $\alpha = -1$

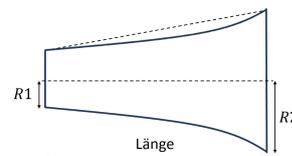


Abbildung 35: Rohrform eines Besselhorns für $\alpha > 0$

Die exakte Lösung der Gleichung (41) für ein Besselhorn lautet [Benson, 2007, Seite 113] [Rossing, 2004, Seite 197]:

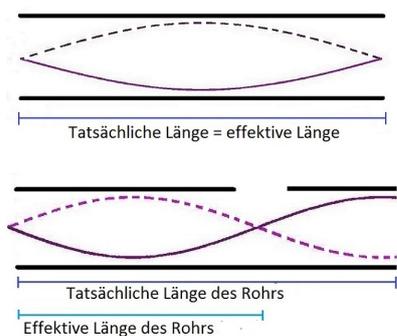
$$p(x, t) = x^{\alpha+0.5} J_{\alpha+0.5} \left(\frac{\omega x}{c} \right) (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)). \quad (46)$$

J_n ist dabei eine Besselfunktion erster Gattung und n -ter Ordnung, die die Besselsche Differentialgleichung

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} + (x^2 - n^2)f = 0,$$

löst, vgl. auch Kapitel 4.2.1. Der genaue Wert für die Winkelfrequenz ω hängt von den Randbedingungen ab und wird dementsprechend bestimmt.

Da die Länge des Instruments die Grundfrequenz und damit die Tonhöhe determiniert,



kommen bei den Holzblasinstrumenten meist Grifflöcher, bei den Blechblasinstrumenten je nach Instrument Grifflöcher, Klappen oder Ventile zum Einsatz, um die Tonhöhe variieren zu können. Daher wird nun der Begriff der effektiven Länge eingeführt, auf die sich die Grundfrequenz und Obertöne beziehen. Sind alle Grifflöcher geschlossen, so stimmen die tatsächliche Länge und die effektive Länge des Rohrs überein (s. Abbildung 36, obere Grafik). Die Veränderung der Tonhöhe erfolgt somit durch Schließen und Öffnen der Grifflöcher. Dadurch verändert sich die Grundfrequenz, da sich die Randbedingungen für den betreffenden Ortspunkt entsprechend ändern. Außerdem kann festgehalten werden, dass je größer das Griffloch ist, desto geringer ist die effektive Länge, und desto höher ist damit die Frequenz.

Abbildung 36: Effektive Länge bei (obere Grafik) geschlossenen Grifföchern und (untere Grafik) einem geöffneten Griffloch.

Außerdem kann festgehalten werden, dass je größer das Griffloch ist, desto geringer ist die effektive Länge, und desto höher ist damit die Frequenz.

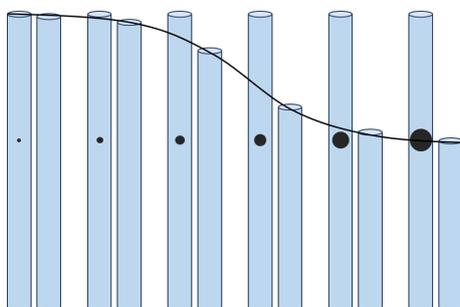


Abbildung 37: Effektive Länge eines Rohrs in Abhängigkeit der Größe des Grifflochs

4.3.3. Anwendung

Die unter idealisierten Zuständen hergeleitete Lösung der Differentialgleichung lässt sich zur synthetischen Generierung von Klängen verwenden. Erneut bedienen wir uns der Fourierreihe der Lösung, indem deren Fourierkoeffizienten berechnet werden und diese als Ansatz zur Klangerzeugung in CSound Verwendung finden. In diesem Kapitel erfolgt die Vorstellung jeweils eines CSound-Beispiels für eine Querflöte und eine Klarinette.

Zunächst betrachten wir ein Beispiel zur Implementierung einer Querflöte, wobei der Opco-

de `wgflute`, der auf Basis der mathematischen Beschreibung einer Flöte operiert, verwendet wird. Dieser Opcode benötigt folgende Variablen, die für die Implementierung des CSound-Instrumentes gewählt werden müssen:

```
1 | wgflute kamp, kfreq, kjet, iatt, idetk, kngain, kvibf, kvamp
```

Dabei steht `kamp` wieder für die Amplitude, die in diesem Fall gleich 0.9 gesetzt wird und `kfreq` für die Frequenz, die auf 440 Hz gesetzt wird. Sowohl der Parameter `iatt`, der für die Zeit bis das Anblasen des Musikers den vollen Luftdruck erzeugt hat steht, als auch `idetk`, der für die Dauer des Abbruchs des Anblasens steht, werden gleich 0.1 gesetzt. Der Parameter `kngain` gibt die Amplitude eines möglichen Störterms an, auf den in diesem Fall verzichtet wird, und `idetk` dient als Parameter für den erzeugten Luftstrom. Bei Blasinstrumenten lässt sich in der Praxis häufig ein vibrierender Klang wahrnehmen. Dies kann in der Klangsynthese zum Beispiel durch einen Vibrato (vgl. Kapitel 3.2) umgesetzt werden. Die Frequenz und die Amplitude des zu verwendenden Vibratos werden durch die Parameter `kvibf` und `kvamp` festgelegt und werden in diesem Fall gleich 0.3 bzw. 0.05 gesetzt, sind also kaum wahrnehmbar. Nach Einsetzen von Werten für die Variablen und Definieren der `f`-Anweisung ergibt sich folgendes CSound-Instrument:

```
1 | instr 1
2 | asig wgflute 0.9, 440, p4, 0.1, 0.1, 0, 0.3, 0.05
3 |     outs asig, asig
4 | endin
```

```
9 | f 1 0 16384 10 1 .5 .333 .25 .2
```

Beim Ausführen des CSound Programms (vgl. Anhang B.5) erklingt ein zwei Sekunden andauernder Klang als eine Stereo-Ausgabe bei einer Abtastrate von 44100 Hz und einer Amplitude von 0.9. Die Abbildung 38 zeigt den resultierenden Graphen des Signals.

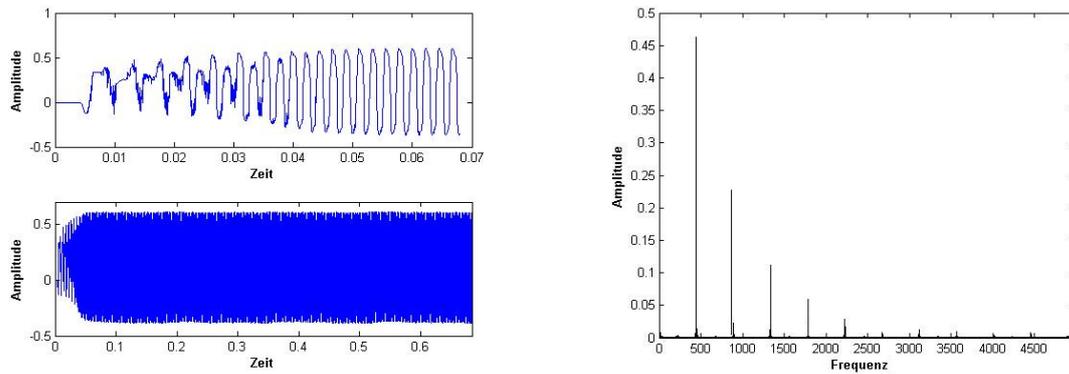


Abbildung 38: Grafische Darstellung eines synthetisch erstellten Klanges einer Querflöte: Signal (links), Frequenzspektrum (rechts)

Die Grundfrequenz von 440 Hz ist mit der höchsten Amplitude vertreten. Anhand der Abbildung 38 ist klar zu erkennen, dass das Frequenzspektrum harmonisch ist und die ersten vier Obertöne mitschwingen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass laut der f-Anweisung die ersten fünf Harmonische erklingen sollen und nach Wahl der Parameter kaum Rausch- oder Vibratoanteile vorhanden sind. Abbildung 39 zeigt eine grafische Darstellung eines Originaltons.

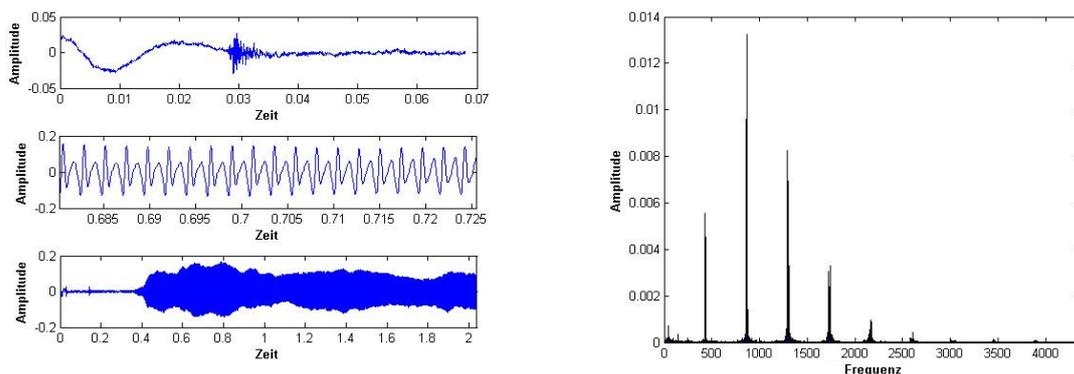


Abbildung 39: Grafische Darstellung eines Originaltons einer Querflöte: Signal (links), Frequenzspektrum (rechts)

Das Signal beinhaltet eine längere anfängliche Phase vor dem eigentlichen Erklingen des Tons. Das Frequenzspektrum ist ebenfalls harmonisch mit leichten Rauschteilen, wobei aber in diesem Beispiel nicht die Grundfrequenz, sondern der erste Oberton die höchste Amplitude besitzt. Sowohl der Original- als auch der synthetisch erstellte Klang weisen Obertöne auf, die ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz sind. Dies stimmt mit der Theorie überein.

Als nächstes wird ein synthetisches Beispiel für eine Klarinette vorgestellt. Hierbei kommt der Opcode `wgclar` zum Einsatz, der wie `wgflute` auf der ermittelten Wellengleichung basiert. Da die Frequenzen der Luftvibrationen ungerade Vielfache der Grundfrequenz sind, nähert sich die Schwingungsform der hergeleiteten Lösung mit steigender Anzahl der Oberschwingungen der

Rechteckschwingung an. Der Opcode `wgclar` benötigt folgende Variablen, die für die Implementierung des CSound-Instrumentes festzulegen sind:

```
1 | wgclar kamp, kfreq, kstiff, iatt, idetk, kngain, kvibf, kvamp
```

Die benötigten Variablen stimmen weitestgehend mit denen des Opcodes `wgflute` überein. Der dritte Parameter wird dabei durch `kstiff` ersetzt, der sich als Maß für die Steifigkeit des Rohrs der Klarinette interpretieren lässt. Es ergibt sich folgendes CSound-Instrument:

```
1 | instr 1
2 | asig wgclar .9, kfreq, kstiff, iatt, idetk, kngain, kvibf, kvamp
3 |     outs asig, asig
4 | endin
5 |
6 | f 1 0 16384 10 1 0 .33 0 .2 0 .14 0 .11 0 .09
```

Führen wir den vollständigen Code aus, ertönt ein Signal, das in der Abbildung 40 dargestellt wird. Hier wurde in der `f`-Anweisung festgelegt, dass die ersten fünf Obertöne erklingen sollen.

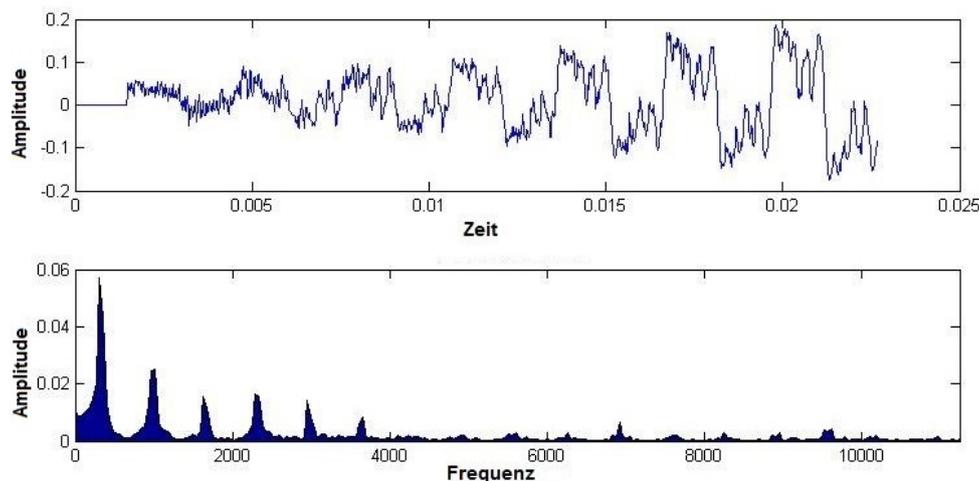


Abbildung 40: Grafische Darstellung eines synthetisch erzeugten Klages einer Klarinette: Signal in den ersten 0.7 Sekunden (oben), Signal in den ersten ca. 0.023 Sekunden (Mitte), Frequenzspektrum (unten)

Dies spiegelt sich auch im Frequenzspektrum wider, wobei die Rechteckschwingung ganz deutlich zu erkennen ist. Die Grundfrequenz von 330 Hz hat die höchste Amplitude und die vorhandenen ersten fünf Obertöne sind ungerade Vielfache der Grundfrequenz mit fallenden Amplituden, so wie es im vorangehenden Kapitel vorgestellt wurde.

Die Abbildung 41 veranschaulicht einen etwa 0.7 Sekunden andauernden Originalklang. Dieses Beispiel weist ein obertonarmes Frequenzspektrum mit leichten Rauschanteilen auf. Dies ist ebenfalls aus der Wellenform (mittlere Grafik) ersichtlich.

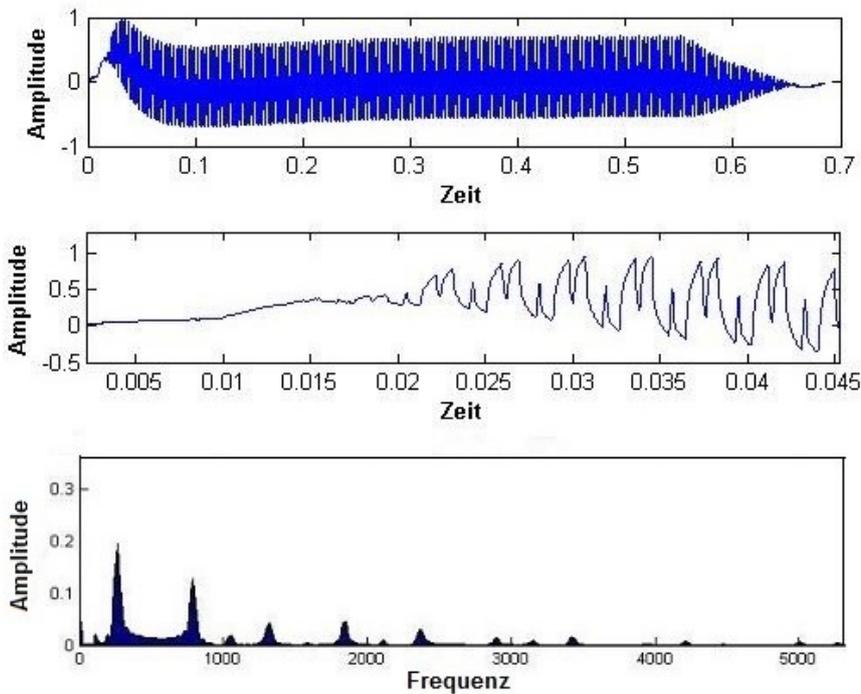


Abbildung 41: Grafische Darstellung eines Originalklanges einer Klarinette: Signal des Klanges (oben), Signal in den ersten ca. 0.045 Sekunden (Mitte), Frequenzspektrum (unten)

Weder für die Querflöte noch Klarinette wurde ein Opcode zur Variation der Amplitude verwendet. Anders als beispielsweise bei einer Trommel oder einer gezupften Saite hört der Klang eines Aerophones meistens unmittelbar nach der Unterbrechung des Anblasens auf.

4.4. Idiophone

Wie bereits in der Einleitung angemerkt, können Idiophone aufgrund der Art der Klangerzeugung in weitere Untergruppen unterschieden werden. Dadurch entstehen vier sekundäre Einteilungen. Zu den Aufschlagidiophonen zählen beispielsweise Xylophone, Glocken und Becken, zu den Zupfidiophonen gehören Lamellophone, ein Beispiel für ein Reibidiophon ist die Singende Säge, und Blasidiophone beinhalten beispielsweise das Aeolsklavier. Da Zupfidiophone und insbesondere Aufschlagidiophone in der Praxis am meisten Verwendung finden werden nur diese analysiert. Repräsentativ für diese beiden Klassen werden im Folgenden Xylophone bzw. Lamellophone herangezogen.

Xylophone bestehen aus mehreren Klangstäben aus Hartholz oder Bambus unterschiedlicher Länge, die mit Schlägeln angeschlagen werden. Die Länge, Steifigkeit und Masse eines Stabs legen dessen Tonhöhe fest. Somit lassen sich verschiedene Tonhöhen durch Veränderung dieser Parameter erzielen. Lamellophone bestehen aus einem Resonanzkörper, auf dem Lamellen verschiedener Länge angebracht sind. Die Tonerzeugung geschieht durch Anzupfen der Lamellen

mit den Fingern. Die erzielbare Tonhöhe ist ebenfalls von Länge, Steifigkeit und Masse der Lamellen abhängig. Bei diesen Instrumenten gilt ebenfalls, dass der Ton umso tiefer ist, je länger und massiver der Stab beziehungsweise die Lamelle ist. Alle befestigten Lamellen lassen sich vor- und zurückschieben, wodurch sich tiefere und höhere Töne erzielen lassen. Die folgende Herleitung und Lösung der Differentialgleichung für Xylophone und Lamellophone beruht weitestgehend auf [Benson, 2007].

4.4.1. Herleitung der Differentialgleichungen

Xylophone

In diesem Kapitel werden Transversalwellen eines schmalen starren Stabs untersucht. Schmal bedeutet in diesem Zusammenhang, dass der Querschnitt des Stabs im Vergleich zu dessen Länge sehr gering ist. Die resultierenden Ergebnisse lassen sich auf Xylophone übertragen. Wir wollen zunächst einige vereinfachende Annahmen treffen:

- Der Bewegungswiderstand des Stabs resultierend aus dem horizontalen Trägheitsmoment sei wesentlich geringer als derjenige resultierend aus der vertikalen linearen Massenträgheit¹⁴, woraus folgt, dass der Gesamtdrehmoment des Stabs gleich Null ist.
- Das Material sei isotrop, es reagiere also auf äußere Einflüsse in jeder Richtung gleich und es liegt linear-elastisches Verhalten vor.

Unter den getroffenen Annahmen lässt sich zur Herleitung der Differentialgleichung die Balkentheorie heranziehen. Es wirke die Querkraft $V(x, t)$ auf das linke Ende eines horizontal ausgerichteten Stabs zu einem Zeitpunkt t , wodurch eine Querkraft $V(x + \Delta x, t)$ ebenfalls auf das rechte Ende des Stabs

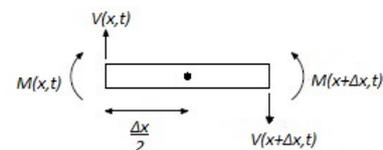


Abbildung 42: Schmalen Balken unter Querkraft $V(x, t)$

mit Länge $\Delta x = l$ wirkt. Dies wird in der Abbildung 42 veranschaulicht, wobei $M(x, t)$ den Dreh-/Biegemoment in x zum Zeitpunkt t darstellt. Wegen des Auftretens der Querkraft gilt für das Drehmoment

$$-V(x, t) \frac{\Delta x}{2} - V(x + \Delta x, t) \frac{\Delta x}{2} \approx -V(x, t) \Delta x.$$

Aufgrund der Annahme, dass der Bewegungswiderstand des Stabs resultierend aus dem Träg-

¹⁴Dies ist vertretbar, da ein schmaler Stab untersucht wird.

heitsmoment sehr gering ist, erfüllt das Biegemoment

$$M(x + \Delta x, t) - M(x, t) - V(x, t)\Delta x \approx 0$$

$$\Leftrightarrow V(x, t) \approx \frac{M(x + \Delta x, t) - M(x, t)}{\Delta x}.$$

Daraus folgt mit $\Delta x \rightarrow 0$

$$V(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x}. \quad (47)$$

Somit ergibt sich für die aufwärtsgerichtete Kraft

$$V(x, t) - V(x + \Delta x, t) \approx -\Delta x \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \approx -\Delta x \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2}.$$

Das zweite Newtonsche Gesetz liefert

$$-\Delta x \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \rho \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (48)$$

wobei ρ die Dichte des Stabs und somit ρl die Masse des Stabs ist. Diese Gleichung besagt, dass der Stab unter dem Biegemoment M verbogen wird, und somit müssen M und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ stark zusammenhängen. Dieser Zusammenhang wird im Folgenden erklärt und gezeigt.

Der Stab verforme sich unter einer äußeren Kraft F , sodass es zur Stauchung oder Dehnung des Stabs um die Längenänderung Δl kommt. Durch die äußere Einwirkung entstehen im Stab Spannungen $\sigma = \frac{F}{A}$ als Relation zwischen der einwirkenden Kraft F und der Querschnittsfläche A . Das Hookesche Gesetz besagt, dass Spannung σ und Dehnung $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ linear zusammenhängen, nämlich

$$\sigma = E\epsilon. \quad (49)$$

Mit der Materialkonstanten E wird das Elastizitätsmodul bezeichnet. E hängt also von den Materialeigenschaften ab, wobei Temperatur und Feuchte eine Rolle spielen. Der Stab befindet sich nun unter Verbiegung, wie beispielsweise in der nebenstehenden Abbildung dargestellt. Dabei treten sowohl Stauchungen als auch Dehnungen auf. Der untere Teil des Stabs dehnt sich, wohingegen es im oberen Teil zu Stauchungen kommt. In der Mitte des Stabs befindet sich eine Fläche, eine neutrale Faser (auch Nulllinie genannt), die ihre Länge beim Verbiegen behält. Jeder beliebige Querschnitt des Balkens ist senkrecht zu der Nulllinie. R bezeichne den Radius der entstandenen Verbiegung der neutralen Faser des Stabs und η sei der Abstand von dieser bis zum oberen Ende des Balkens. Aufgrund

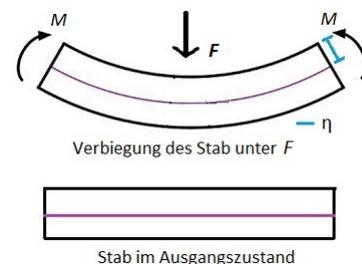


Abbildung 43: Verbiegung des Stabs unter äußerer Einwirkung

getroffener Annahmen gilt

$$-\frac{E}{R} \int \eta \, dA = 0 \iff \int \eta \, dA = 0,$$

sodass die Nulllinie also durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche verläuft. Der Gesamtdrehmoment des Stabs kann folgendermaßen berechnet werden:

$$M = \frac{EI}{R}, \quad I := \int \eta^2 \, dA. \quad (50)$$

Für den Radius R gilt nun unter der Annahme, dass $\frac{\partial y}{\partial x}$ vernachlässigbar ist

$$R = \frac{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = \frac{1}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}. \quad (51)$$

I ist dabei das Flächenträgheitsmoment des Querschnitts. R eingesetzt in (50) ergibt

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (52)$$

Einsetzen des Zwischenergebnisses (48) in die obige Gleichung (52) führt auf die gesuchte Differentialgleichung für die Transversalwellen

$$\frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (53)$$

die einen Zusammenhang zwischen räumlicher und zeitlicher Änderung der vertikalen Verschiebung y herstellt. Diese ist unter dem Namen Euler-Bernoulli-Balkendifferentialgleichung oder Euler-Bernoulli-Gleichung bekannt.

Lamellophone

Es wird die Annahme getroffen, dass alle Lamellen einen konstanten Querschnitt haben. Unter dieser Voraussetzung ist die Herleitung der Differentialgleichung für Lamellophone absolut identisch zu der der Xylophone.

4.4.2. Lösung der Differentialgleichungen

Xylophone

Zur Lösung der Euler-Bernoulli-Balkendifferentialgleichung (53) wird der Separationsansatz herangezogen, die Lösung habe also die Form $y(x, t) = f(x)g(t)$. Nach Berechnen benötigter

Ableitungen, Einsetzen in (53) und Umformen ergibt sich

$$\frac{-EI f^{(4)}(x)}{\rho f(x)} = \frac{g''(t)}{g(t)}.$$

Da nun die linke und rechte Seite jeweils von nur einer Variablen abhängen, müssen diese konstant sein, sodass sich für f und g Differentialgleichungen aufstellen lassen, die unabhängig voneinander gelöst werden können:

$$(i) f^{(4)}(x) = \frac{\omega^2 \rho}{EI} f(x),$$

$$(ii) g''(t) = -\omega^2 g(t).$$

Die Lösungen der beiden Differentialgleichungen lauten

$$(i) f(x) = \tilde{A}\sin(\kappa x) + \tilde{B}\cos(\kappa x) + \tilde{C}\sinh(\kappa x) + \tilde{D}\cosh(\kappa x), \quad \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D} \in \mathbb{R} \quad (54)$$

$$(ii) g(t) = \hat{C}\sin(\omega t + \phi), \quad \hat{C}, \phi \in \mathbb{R}$$

Die Konstante κ ist dabei der folgende Ausdruck:

$$\kappa = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho}{EI}}. \quad (55)$$

Die allgemeine Lösung von (53) ist demnach gegeben durch

$$y(x, t) = f(x)g(t) = (A\sin(\kappa x) + B\cos(\kappa x) + C\sinh(\kappa x) + D\cosh(\kappa x)) \sin(\omega t + \phi) \quad (56)$$

mit $A = \hat{C}\tilde{A}$, $B = \hat{C}\tilde{B}$, $C = \hat{C}\tilde{C}$, $D = \hat{C}\tilde{D}$. Diese Lösung sagt zunächst nichts über die Wahl der Konstanten aus. Wie die Lösung für einen speziellen Fall aussieht, hängt von den Randbedingungen ab. Dabei sind die Konstanten A , B , C und D für gegebene Randbedingungen eindeutig bestimmt, sodass die Lösung für ein konkretes Problem ebenfalls eindeutig ist. Im Folgenden werden konkrete Lösungen angegeben, die für den hier behandelten Sachverhalt relevant sind.

Es werden zwei Fälle unterschieden, nämlich, ob eines der Enden des Stabs (oder beide Enden) befestigt ist (sind) oder nicht. O.B.d.A sei $x \in [0, l]$. Ist das linke (rechte) Ende nicht befestigt, so muss $V(0, t) = M(0, t) = 0$ ($V(l, t) = M(l, t) = 0$) für alle t gelten, woraus unter Verwendung von (52) und (47)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(0, t) = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l, t) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(l, t) = 0 \right) \quad (57)$$

folgt. Ist das linke (rechte) Ende hingegen geklemmt, so gilt zwingend

$$y(x_0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x_0, t) = 0 \quad \forall t \quad \left(y(l, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(l, t) = 0 \quad \forall t \right). \quad (58)$$

Bei den Xylophonen sind beide Enden freischwingend, die Randbedingungen sind also für $x = 0$ und $x = l$ durch (57) gegeben. Nach Berechnung der Ableitungen der allgemeinen Lösung (56) ergeben sich folgende Beziehungen:

$$(i) \quad x = 0 \text{ in (57) : } B = D, \quad A = C, \\ (ii) \quad x = l \text{ in (57) : } \begin{cases} A(\sinh(\kappa)l - \sin(\kappa l)) + B(\cosh(\kappa l) - \cos(\kappa l)) = 0, \\ A(\cosh(\kappa)l - \cos(\kappa l)) + B(\sinh(\kappa l) + \sin(\kappa l)) = 0. \end{cases} \quad (59)$$

$A = B = 0$ erfüllen zwar die Bedingung (ii), daraus folgt aber $y = 0$ und somit befindet sich der Stab in einer Ruhelage. Für eine nicht triviale Lösung gilt:

$$A \neq 0, B \neq 0 \iff (\sinh(\kappa l) - \sin(\kappa l))(\sinh(\kappa)l + \sin(\kappa l)) - (\cosh(\kappa)l - \cos(\kappa l)) = 0 \\ \iff \cosh(\lambda)\cos(\lambda) = 1, \quad \lambda := \kappa l. \quad (60)$$

(60) folgt aus $\cosh^2(\lambda) - \sinh^2(\lambda) = 1$, $\sin^2(\lambda) + \cos^2(\lambda) = 1 \quad \forall \lambda$. Die Berechnung der Winkelfrequenz ω und der Frequenz der Transversalwellen $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ kann nun mit Hilfe von (55) erfolgen:

$$\omega = \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \frac{\lambda^2}{l^2}, \quad \nu = \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \frac{\lambda^2}{2\pi l^2}. \quad (61)$$

Es sind abzählbar viele Werte für λ , die (60) erfüllen. Unter Verwendung numerischer Verfahren lassen sich diese beliebig präzise berechnen. Diese Lösungen werden im Folgenden als λ_n , $n \in \mathbb{N}$, bezeichnet. Für alle λ_n gilt: $\lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es gibt eine Näherungslösung für λ_n , die ab $n > 4$ den tatsächlichen Wert λ_n auf mindestens 20 Nachkommastellen genau wiedergibt:

$$\lambda_n \approx (n + 0.5)\pi - (-1)^n 2e^{-(n+0.5)\pi} - 4e^{-2(n+0.5)\pi}. \quad (62)$$

Die ersten vier Näherungswerte für λ_n , $n = 1, \dots, 4$ lauten:

$$\lambda_1 \approx 4.7300407448627040260240481, \\ \lambda_2 \approx 7.8532046240958375564770667, \\ \lambda_3 \approx 10.9956078380016709066690325, \\ \lambda_4 \approx 14.1371654912574641771059179.$$

Wie auch bei anderen Instrumenten und Instrumentenklassen bereits gesehen, nimmt auch hier $y(x, t)$ (56) in Abhängigkeit der Frequenz verschiedene Lösungen $y_n(x, t)$ an, die wiederum unterschiedliche Schwingungen darstellen. Dabei entspricht die zu λ_1 gehörende Lösung $y_1(x, t)$ der Grundfrequenz. Alle $y_n(x, t)$ für $n > 1$ stellen somit Obertöne dar.

Neben der möglichen Frequenzen sind insbesondere die jeweiligen Schwingungsmoden des Balkens von Interesse. Für jede Lösung $y_n(x, t)$ nimmt die Welle eine andere Form an, die dem Schwingungsmodus des Balkens entspricht. Die Randbedingungen können zu deren Berechnung Einsatz finden. Für vorliegende Randbedingungen lässt sich $y_n(x, t) = f_n(x)g_n(t)$, vgl. (56), umschreiben als

$$f_n(x) = A \left(\sinh(\lambda_n x) + \sin(\lambda_n x) - \frac{\sin(\lambda_n l) - \sinh(\lambda_n l)}{\cos(\lambda_n l) - \cosh(\lambda_n l)} (\cosh(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x)) \right), \quad (63)$$

$$g_n(t) = \sin(\omega_n t + \phi).$$

Die ersten vier Schwingungsmoden sind in Abbildung 44 dargestellt. Zum Zweck der Veranschaulichung wurde dabei $A = 1$ verwendet. Die zu λ_n gehörende Winkelfrequenz sei mit ω_n bezeichnet und ν_n sei die entsprechende Frequenz. Das Frequenzverhältnis zur Grundfrequenz ist laut (61) durch den Quotienten $q_n = \frac{\lambda_n^2}{\lambda_1^2}$ gegeben. Das Verhältnis der ersten vier Frequenzen zur Grundfrequenz beträgt

$$q_1 = 1, \quad q_2 \approx 2.75653850709996, \quad q_3 \approx 5.40391763238332, \quad q_4 \approx 8.93295035238193. \quad (64)$$

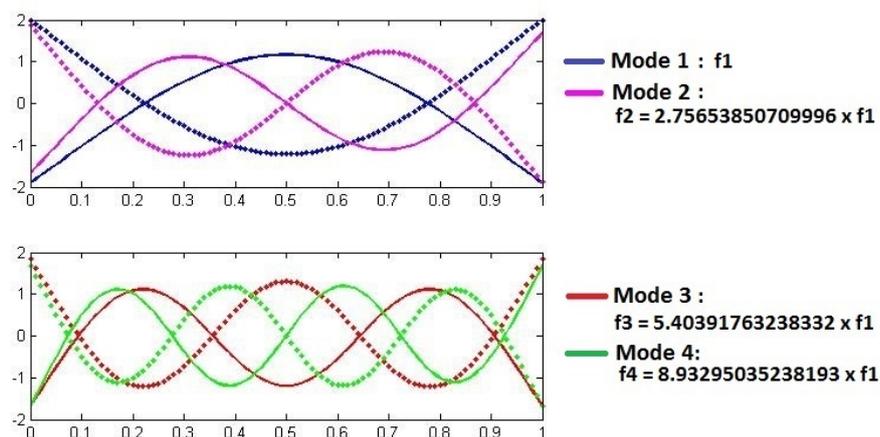


Abbildung 44: Die ersten vier Schwingungsmoden bei freien Enden des Stabs

Lamellophone

Wie oben bereits erwähnt, gilt für die Transversalwellen der Lamellophone dieselbe Differenti-

gleichung (53). Da hierbei jedoch andere Randbedingungen vorliegen, eines der Enden jeder Lamelle ist nämlich auf dem Resonanzkörper befestigt, hat diese entsprechend eine andere Lösung. Sei erneut $x \in [0, l]$, und o.B.d.A. sei das Ende in $x = 0$ befestigt und das Ende in $x = l$ freischwingend. Dieselbe Vorgehensweise wie bei den Xylophonen liefert dann folgende Bedingungen

$$(i) \ x = 0 \text{ in (57) : } A = -C, \ B = -D,$$

$$(ii) \ x = l \text{ in (57) : } \begin{cases} A(\sinh(\kappa l) + \sin(\kappa l)) + B(\cosh(\kappa l) + \cos(\kappa l)) = 0, \\ -A(\cosh(\kappa l) + \cos(\kappa l)) + B(\sinh(\kappa l) - \sin(\kappa l)) = 0. \end{cases} \quad (65)$$

Erneut sind nur nicht triviale Lösungen von Interesse. Mit gleichen Überlegungen folgt

$$A \neq 0, B \neq 0 \iff \cosh(\lambda)\cos(\lambda) = -1, \ \lambda := \kappa l. \quad (66)$$

Die Näherungslösung für λ_n , die ab $n > 5$ den tatsächlichen Wert λ_n auf mindestens 20 Nachkommastellen genau wiedergibt, lautet hierbei

$$\lambda_n \approx (n - 0.5)\pi - (-1)^n 2e^{-(n-0.5)\pi} - 4e^{-2(n-0.5)\pi}.$$

Für die ersten vier Näherungswerte für λ_n , $n = 1, \dots, 4$ ergeben sich:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx 1.8751040687119611664453082, \\ \lambda_2 &\approx 4.6940911329741745764363918, \\ \lambda_3 &\approx 7.8547574382376125648610086, \\ \lambda_4 &\approx 10.9955407348754669906673491. \end{aligned}$$

Analog zu Xylophonen lassen sich die Randbedingungen ausnutzen, um Schwingungsmoden der Lamellen darzustellen, indem die Lösung $y_n(x, t) = f_n(x)g_n(t)$ umgeschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} f_n(x) &= A \left(\cosh(\lambda_n x) - \cos(\lambda_n x) + \frac{\cosh(\lambda_n l) + \cos(\lambda_n l)}{\sinh(\lambda_n l) + \sin(\lambda_n l)} (\sin(\lambda_n x) - \sinh(\lambda_n x)) \right), \\ g_n(t) &= \sin(\omega_n t + \phi). \end{aligned} \quad (67)$$

Die ersten vier Moden sind in der Abbildung 45 zu sehen.

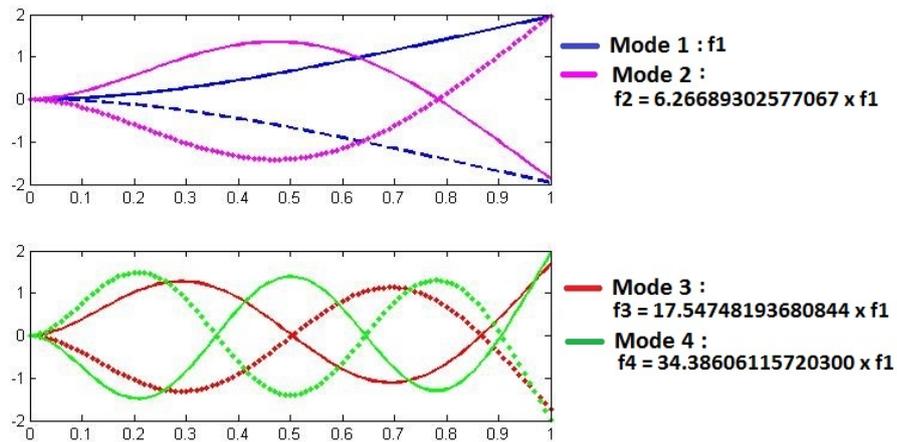


Abbildung 45: Die ersten vier Schwingungsmoden einer an einem Ende befestigten Lamelle

Wie bei Xylophonen entspricht das Frequenzverhältnis zur Grundfrequenz dem Quotienten $q_n = \frac{\lambda_B^2}{\lambda_1^2}$. Die ersten vier Quotienten sind damit durch

$$q_1 = 1, q_2 \approx 6.26689302577067, q_3 \approx 17.54748193680844, q_4 \approx 34.38606115720300 \quad (68)$$

gegeben. Hierbei ist das Frequenzspektrum wie bei Xylophonen ebenfalls nicht harmonisch. Was aber auffällt, ist das rasche Ansteigen des Frequenzverhältnisses.

Es ist nicht außer Acht zu lassen, dass sowohl die Herleitung als auch die Lösung der Euler-Bernoulli-Gleichung (53) auf idealisierten Zuständen basiert. So variieren Stäbe bei Xylophonen in der Praxis oft nicht nur in der Länge sondern auch in der Dichte und Breite. Die grundlegende Voraussetzung, dass der sich unter äußerer Kraft befindende Stab sehr schmal ist, ist somit oft nicht gegeben. Bei den Lamellophonen ist es selten der Fall, dass die einzelnen Lamellen einen konstanten Querschnitt aufweisen. Manche Querschnittsverläufe lassen sich schwer mathematisch brauchbar approximieren. Die Ergebnisse unter vereinfachten Annahmen sind dennoch zumindest in erster Näherung zur Beschreibung und Erklärung der durch das Instrument produzierten Klänge geeignet.

4.4.3. Anwendung

In der Abbildung 46 ist ein Beispiel eines in etwa eine Sekunde andauernden Originalklanges eines Xylophons dargestellt.

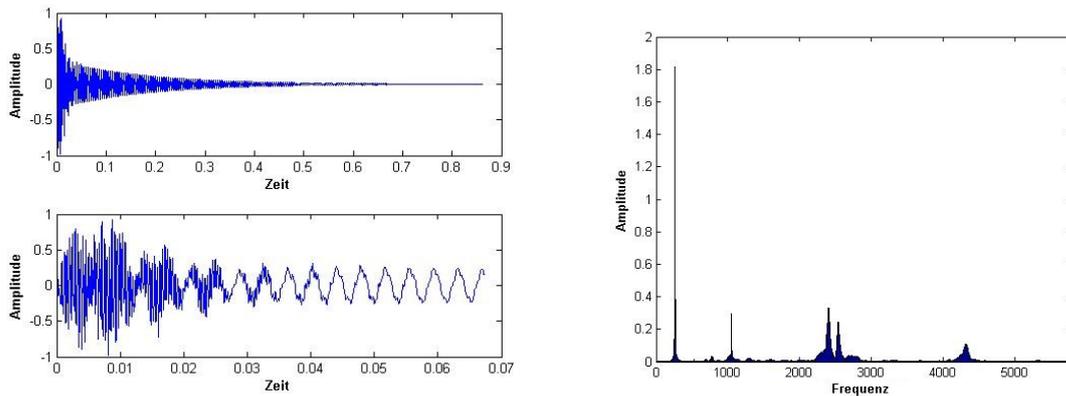


Abbildung 46: Signal (links) und Frequenzspektrum (rechts) eines Originaltons eines Xylophonstabs

Das Frequenzspektrum ist unharmonisch und unregelmäßig, was mit der Theorie im Einklang steht. Der unharmonische Charakter trifft in diesem Beispiel auch auf die Amplituden der Obertöne zu. Das Verhältnis der Obertöne zu der Grundfrequenz, hier etwa 200 Hz, scheint zunächst nicht mit dem in (64) vergleichbar zu sein. Jedoch entsprechen die drei Obertöne, die in der Abbildung deutlich erkennbar sind, in etwa dem dritten, fünften und siebten Oberton. Am Anfang des Signals ist die Amplitude im Verhältnis zum weiteren Verlauf des Signals recht hoch. Der Verlauf des Signals entspricht also weitestgehend dem, was beim Anschlagen eines Xylophonstabs zu hören ist. Der dadurch entstehende Klang ist nämlich zu Beginn laut und klingt daraufhin schnell ab.

Für die Nachbildung des Klanges eines Xylophones oder Lamellophons in CSound nehmen wir u.a. den bereits kennengelernten Opcode `expon` zur Modellierung der Amplitude zur Hilfe. Die Amplitude fällt von 1 auf 0.001 innerhalb der festgelegten Zeit exponentiell. Diese Hüllkurve wird an die Variable `aenv` übergeben. Anschließend wird ein Signal mittels des Oszillators `poscil` erzeugt, der die Amplitude 0.1 und Frequenz 400 hat, wobei auf die Amplitude die Hüllkurve gelegt wird und die Frequenz mit dem Faktor `iq` aus (64) multipliziert wird, um den entsprechenden Schwingungsmodus zu erhalten. Insgesamt werden 4 Signale mit unterschiedlichen Schwingungsmoden erzeugt, die als Summe in der Variablen `a5` zusammengefasst und ausgegeben werden. Da der Code für Xylophone und Lamellophone sich lediglich im Verhältnits der Obertöne zur Grundfrequenz (vgl. (64) und (68)) unterscheiden, werden im Folgenden die Implementierung beider Instrumente aufgeführt.

```

1 | instr 1      ;Xylophone
2 |   aenv expon 1, p3*(1/iq1), 0.001
3 |   a1 poscil 0.1*aenv, 400*iq1
4 |   aenv expon 1, p3*(1/iq2), 0.001

```

```

5   a2 poscil 0.1*aenv, 400*iq2
6   aenv expon 1, p3*(1/iq3), 0.001
7   a3 poscil 0.1*aenv, 400*iq3
8   aenv expon 1, p3*(1/iq4), 0.001
9   a4 poscil 0.1*aenv, 400*iq4
10  a5 sum a1, a2, a3, a4
11  out a5
12  endin
13
14  instr 2 ;Lamellophone
15  aenv expon 1, p3*(1/iq1), 0.001
16  a1 poscil 0.1*aenv, 600*iq1
17  aenv expon 1, p3*(1/iq2), 0.001
18  a2 poscil 0.1*aenv, 600*iq2
19  aenv expon 1, p3*(1/iq3), 0.001
20  a3 poscil 0.1*aenv, 600*iq3
21  aenv expon 1, p3*(1/iq4), 0.001
22  a4 poscil 0.1*aenv, 600*iq4
23  a5 sum a1, a2, a3, a4
24  out a5
25  endin

```

Der resultierende Graph ist gegeben durch die Abbildung 47.

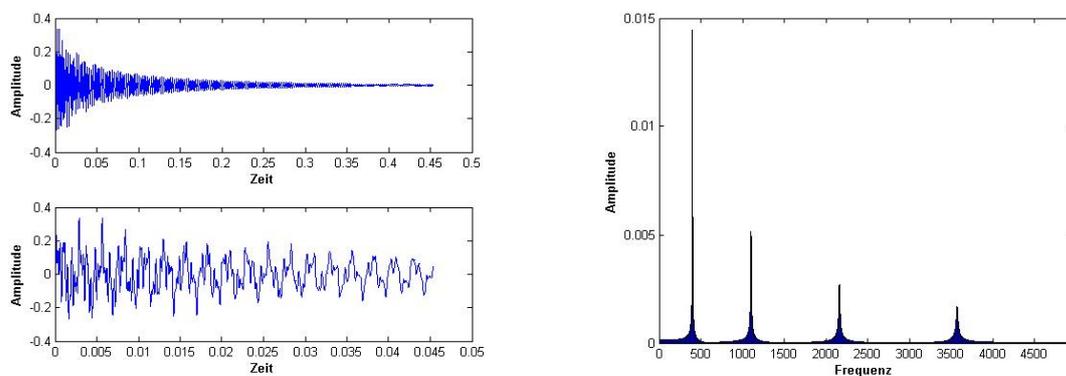


Abbildung 47: Signal (links) und Frequenzspektrum (rechts) des synthetischen Klanges eines Xylophonstabs

Das hervorgehende Signal ist regelmäßig. Wie laut Code (vgl. Anhang B.7) erscheinen die ersten drei Obertöne mit stetig, aber weniger exponentiell als im Originalklang abfallenden Amplituden. Das Frequenzspektrum weist zudem kaum bis keine Rauschanteile auf.

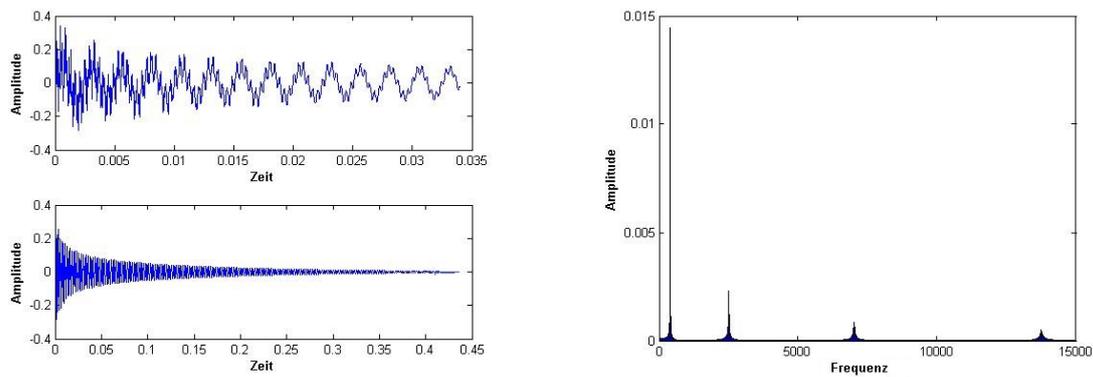


Abbildung 48: Signal (links) und Frequenzspektrum (rechts) des synthetischen Klanges einer Lamelle

Das grafische Resultat des synthetisch erzeugten Klanges einer Lamelle ist in der Abbildung 48 zu sehen. Wie aus dem oben aufgeführten Code ersichtlich, wurde für Xylophone und Lamellophone derselbe Code verwendet, der Unterschied liegt nur in der Übergabe des Frequenzverhältnisses. Daher bestehen hierbei gleiche Gegebenheiten bezüglich des Signals und der Rauschanteile. Auffällig sind jedoch die stärker abfallenden Amplituden des Signals und des Frequenzspektrums. Das liegt daran, dass der zur Variation der Amplituden verwendete Opcode das Frequenzverhältnis des jeweiligen Instruments berücksichtigt.

Abbildung 49 präsentiert das grafische Ergebnis eines circa 2.5 Sekunden andauernden Originalklanges eines Lamellophons. Das Signal ist wesentlich unregelmäßiger als das mit CSound erstellte. Der exponentiell abfallende Charakter der Amplituden ist jedoch ebenfalls vertreten. Das Frequenzspektrum weist mehrere Verdichtungen und Rauschanteile auf, insbesondere um die Grundfrequenz, hier in etwa zwischen 600 und 700 Hz. Unter Vernachlässigung von diesen sind drei Obertöne mit Frequenzen von circa 4500 Hz, 10500 Hz und 20000 Hz klar erkennbar, die sich genau durch das in (68) ermittelte Verhältnis berechnen lassen.

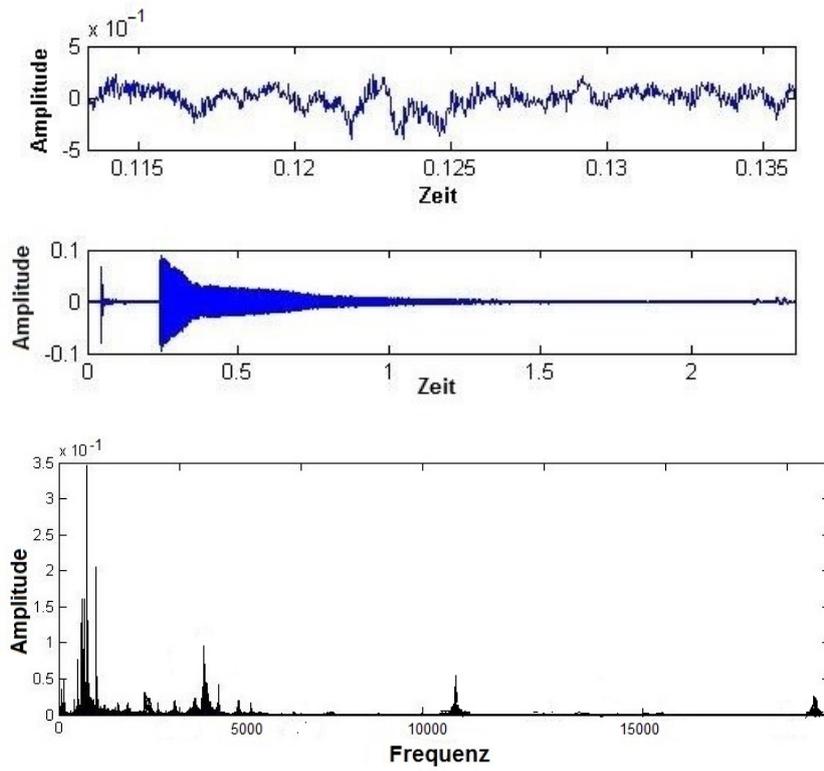


Abbildung 49: Signal und Frequenzspektrum eines Originaltons eines Lamellophons

5. Zusammenfassung und Ausblick

Durch die Erkenntnis über die sinusförmige Bewegung des Schalls, ergab sich die Möglichkeit der Darstellung eines Tons als Sinus- bzw. Kosinusfunktion. Aufgrund des Zusammenhanges zwischen der Welleneigenschaft und dem Schalleindruck lassen sich durch die Variation von Frequenz und Amplitude Töne unterschiedlicher Höhen und Lautstärke darstellen. In Kapitel 4 befassten wir uns mit den Instrumentengruppen und betrachteten jeweils mindestens einen Repräsentanten dieser Gruppen und leiteten die Differentialgleichungen her, die die Schwingungen der erzeugten Klänge beschreiben. Als Lösung dieser Differentialgleichungen ergab sich eine Summe aus Sinus- und Kosinusfunktionen, was wiederum die Tatsache, dass der musizierte Klang aus einer Überlagerung von mehreren Tönen besteht, unterstreicht. Mit Hilfe der durch die Analyse der Wellengleichungen gewonnenen Erkenntnisse und des Audioprogramms CSound ließen sich synthetische Klänge erzeugen.

Ein erster Vergleich der künstlichen Klänge mit den Originalklängen ergab, dass das synthetische Signal einen idealisierten Verlauf aufweist. Dieser Unterschied lässt sich dadurch erklären, dass wir bei der Herleitung der Differentialgleichungen unter Acht ließen, dass beim Spielen eines Tons andere Faktoren den zu hörenden Ton ebenfalls beeinflussen. Beispielsweise schafft es kaum ein Geigenspieler beim Streichen der Saite den Druck auf dem Bogen so zu variieren, dass die Amplitude exponentiell abnimmt. Gleiches gilt auch beim Abblasen eines Blasinstrumentes. Insbesondere fällt die Abweichung beider Signale in den ersten 0.1-0.3 Sekunden auf. Dieser lässt sich durch den erhöhten Rauschanteil im Klang erklären. Für eine genauere Untersuchung wurde weiterhin das Signal in dessen Frequenzspektrum zerlegt. Es ließ sich beobachten, dass sowohl beim synthetischen als auch beim Originalklang die Klangintensität beim Grundton in den meisten Fällen am höchsten war. Außerdem konnte festgestellt werden, dass der aufgenommene Klang von mehreren Obertönen begleitet wurde, während der künstliche Klang weniger obertonreich war. Dabei fiel auf, dass die Frequenzen beim Originalklang unterschiedlich stark ausfielen. Dies und ebenfalls der Rauschanteil resultieren durch die Eigenschwingung des Korpus bzw. Resonanzkörpers des Musikinstrumentes. Insgesamt bietet CSound vielfältige Möglichkeiten zur Erzeugung von Klängen und eine recht gute Approximation der aufgenommenen Klänge, jedoch schafft es nicht alle in den Klang einfließende Kriterien, wie die Eigenschwingung des Resonanzkörpers, zu berücksichtigen.

Für weitreichende Analysen besteht die Möglichkeit der Klangerzeugung mit weiteren Syntheseverfahren, wie u.a. der subtraktiven Synthese, der Wavetable-Synthese, der Frequenzmodulation und des Physical Modeling, und diese mit der im Studienprojekt behandelten additiven Synthese zu vergleichen. Bei der subtraktiven Synthese lassen sich Wellenformen, wie die Sinus-,

Rechteck-, Sägezahn- und Dreiecksschwingung, mit den Elementen aus der Klangsynthese, die wir bereits in Kapitel 3.2 kennengelernt haben, manipulieren. Dabei werden unerwünschte Obertöne vermindert oder herausgefiltert bis sich der gewünschte Klang ergibt. Die Wavetable-Synthese unterscheidet sich von der subtraktiven Synthese lediglich durch die Möglichkeit der Änderung der Wellenformen, die in der Wavetable abgespeichert sind, während des Spielens, wodurch eine höhere Flexibilität der Klangfarbe besteht. Bei der Frequenzmodulation jedoch wird die Frequenz eines Träger-Signals durch die Modulation mit einem anderen Signal, dem Modulationssignal, verändert. Daraus resultieren komplexe, obertonreiche Klänge verschiedener Höhen. Anders als bei den bisher genannten Klangsyntheseverfahren werden beim Physical Modelling Musikinstrumente in ihrem Aufbau und Funktion analysiert und anschließend mit einem mathematischen Modell beschrieben. Um festzustellen welcher der oben genannten Klangsyntheseverfahren am effektivsten ist und einen realitätsnahen Klang erzeugt, könnte deren Aufwand und Flexibilität der klanglichen Möglichkeiten, sowie ein Vergleich der Frequenzspektren der synthetischen Klänge mit denen der Originalklänge untersucht werden.

A. Verwendete Matlab-Programme

Die folgend verwendeten Programme wurden mit Matlab (Version R2016b) verfasst. Die Erklärungen der einzelnen Schritte befinden sich als Kommentare im Quellcode.

Fourier-Transformation anhand eines beispielhaften Signals

Dieses Beispiel wurde in Anlehnung an <https://de.mathworks.com/help/matlab/ref/fft.html> verfasst.

```
1 Fs = 1000;           % Abtastrate
2 T = 1/Fs;           % Delta t
3 L = 1000;           % Laenge des Signals
4 t = (0:L-1)*T;      % Zeitvektor
5
6 %Signal
7 S = 0.6*sin(2*pi*220*t) + sin(2*pi*440*t);
8 %Stoerterm, normalverteilt mit Varianz 3
9 X = S + 1.5*randn(size(t));
10
11 %Plot
12 figure
13 plot(1000*t(1:50),X(1:50))
14 title('Signal mit normalverteiltem Stoerterm')
15 xlabel('t in ms')
16 ylabel('X(t)')
17
18 %Fourier Transformation
19 Y = fft(X);
20 P2 = abs(Y/L);
21 P1 = P2(1:L/2+1);
22 P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
23 f = Fs*(0:(L/2))/L;
24
25 %Plot
26 figure
27 plot(f,P1)
28 title('Frequenzspektrum von X(t)')
29 xlabel('Frequenz in Hz')
30 ylabel('Amplitude')
```

Eigenschwingungen einer kreisrunden Membran

```
1 %%Festlegen der Parameter
2 %%Ablezen der Nullstelle fuer n und k aus Tabelle ... in Kapitel ...
3 n=2;
4 k=3;
5 omega=11.61984;
6
7 %Weitere festlegbare Parameter
8 A=1;           %Konstante
9 T=1;           %gleichmaessige Spannung der Membran
10 p=1;          %Dichte der Membran
11 c=sqrt(T/p);  %Beschleunigung der Membran
12 t=0.001;      %Zeitpunkt
13
14 %Plot Parameter
15 a=linspace(0,1,100);
```

```

16 th=linspace(0,2*pi,100);
17 [theta,r]=meshgrid(th,a);
18 [xx,yy]=pol2cart(theta,r);
19
20 %Berechnung der Loesung der zweidimensionalen Wellengleichung
21 %Vgl. Formel (36) Kapitel 4.2.2
22 besst=A*besselj(n,omega*r/c).*cos(n*theta).*sin(omega*t);
23 surf(xx,yy,besst)
24 shading flat

```

Eigenschwingungen eines Stabs bei Verbiegungen

```

1 % Xylophone: Schwingungsmoden 1 bis 4
2 % Zur Demonstration:
3 % 1) Die Zeitpunkte werden so angepasst, dass die beiden Extrema
4 %   der jeweiligen Schwingungsmoden gezeigt werden koennen
5 % 2) rho=E=I=A=1
6
7 x=0:0.01:1;
8 l1 = length(x);
9 % Die ersten 4 lambda_n, n=1,2,3,4:
10 lambda_1 = 4.7300407448627040260240481;
11 lambda_2 = 7.8532046240958375564770667;
12 lambda_3 = 10.9956078380016709066690325;
13 lambda_4 = 14.1371654912574641771059179;
14
15 % Die dazu gehoerigen Winkelfrequenzen omega_n, n=1,2,3,4
16 omega_1 = lambda_1^2;
17 omega_2 = lambda_2^2;
18 omega_3 = lambda_3^2;
19 omega_4 = lambda_4^2;
20
21 % y_n(x,t)= f_n(x)g_n(t):
22 % Berechnung der Werte von g_n in Abhaengigkeit von lambda_n und t
23 g_01 = sin(omega_1*0.01+1); % g_1 zum Zeitpunkt t = 0.01
24 g_l1 = sin(omega_1*1+1); % g_1 zum Zeitpunkt t = 1
25 g_02 = sin(omega_2*0+1); % g_2 t = 0
26 g_l2 = sin(omega_2*0.36+1); % g_2 t = 0.36
27 g_03 = sin(omega_3*0+1); % g_3 t = 0
28 g_l3 = sin(omega_3*0.19+1); % g_3 t = 0.19
29 g_04 = sin(omega_4*0+1); % g_4 t = 0
30 g_l4 = sin(omega_4*0.11+1); % g_4 t = 0.11
31
32 % Berechnung der Werte von f_n in Abhaengigkeit von lambda_n und x
33 for i=1:length(x)
34     f_1(i) = sin(lambda_1*x(i))+sinh(lambda_1*x(i)) - (sin(lambda_1)
35             -sinh(lambda_1))/(cos(lambda_1)-cosh(lambda_1))
36             *(cos(lambda_1*x(i))+cosh(lambda_1*x(i)));
37     f_2(i) = sin(lambda_2*x(i))+sinh(lambda_2*x(i)) -
38             (sin(lambda_2)-sinh(lambda_2))/(cos(lambda_2)-cosh(lambda_2))
39             *(cos(lambda_2*x(i))+cosh(lambda_2*x(i)));
40     f_3(i) = sin(lambda_3*x(i))+sinh(lambda_3*x(i)) -
41             (sin(lambda_3)-sinh(lambda_3))/(cos(lambda_3)-cosh(lambda_3))
42             *(cos(lambda_3*x(i))+cosh(lambda_3*x(i)));
43     f_4(i) = sin(lambda_4*x(i))+sinh(lambda_4*x(i)) -
44             (sin(lambda_4)-sinh(lambda_4))/(cos(lambda_4)-cosh(lambda_4))
45             *(cos(lambda_4*x(i))+cosh(lambda_4*x(i)));
46 end
47
48 % y_n(x,t)=f_n(x)g_n(t)

```

```

45 y_01 = f_1*g_01;
46 y_11 = f_1*g_11;
47 y_02 = f_2*g_02;
48 y_12 = f_2*g_12;
49 y_03 = f_3*g_03;
50 y_13 = f_3*g_13;
51 y_04 = f_4*g_04;
52 y_14 = f_4*g_14;
53
54 % Plot der Schwingungsmoden 1 und 2
55 subplot(2,1,1)
56 Mode12 = plot(x, y_01,'b',x, y_11,'b.',x, y_02,'m',x, y_12,'m.')
57 set(Mode12(1), 'linewidth',2);
58 set(Mode12(2), 'linewidth',2);
59 set(Mode12(3), 'linewidth',2);
60 set(Mode12(3), 'linewidth',2);
61
62 % Plot der Schwingungsmoden 3 und 4
63 subplot(2,1,2)
64 Mode34 = plot(x, y_03,'r',x, y_13,'r.',x, y_04,'g',x, y_14,'g.')
65 set(Mode34(1), 'linewidth',2);
66 set(Mode34(2), 'linewidth',2);
67 set(Mode34(3), 'linewidth',2);
68 set(Mode34(3), 'linewidth',2);

```

Eigenschwingungen einer Lamelle beim Zupfen

```

1 % Lamellophone: Schwingungsmoden 1 bis 4
2 % Zur Demonstration:
3 % 1) Die Zeitpunkte werden so angepasst, dass die beiden Extrema
4 %    der jeweiligen Schwingungsmoden gezeigt werden koennen
5 % 2) rho=E=I=A=1
6
7 x=0:0.01:1;
8 l1 = length(x);
9 % Die ersten 4 lambda_n, n=1,2,3,4:
10 lambda_1 = 1.8751040687119611664453082;
11 lambda_2 = 4.6940911329741745764363918;
12 lambda_3 = 7.8547574382376125648610086;
13 lambda_4 = 10.9955407348754669906673491;
14
15 % die dazu gehoerigen Winkelfrequenzen omega_n, n=1,2,3,4
16 omega_1 = lambda_1^2;
17 omega_2 = lambda_2^2;
18 omega_3 = lambda_3^2;
19 omega_4 = lambda_4^2;
20
21 % y_n(x,t)= f_n(x)g_n(t):
22 % Berechnung der Werte von g_n in Abhaengigkeit von lambda_n und t
23 g_01 = sin(omega_1*0.1+1);
24 g_11 = sin(omega_1*1+1);
25 g_02 = sin(omega_2*0.01+1);
26 g_12 = sin(omega_2*0.16+1);
27 g_03 = sin(omega_3*0+1);
28 g_13 = sin(omega_3*1.8+1);
29 g_04 = sin(omega_4*0.5+1);
30 g_14 = sin(omega_4*0.11+1);
31
32 % Berechnung der Werte von f_n in Abhaengigkeit von lambda_n und x
33 for i=1:length(x)

```

```

34 f_1(i) = cosh(lambda_1*x(i))-cos(lambda_1*x(i)) +
      (cosh(lambda_1)+cos(lambda_1))/(sinh(lambda_1)+sin(lambda_1))
35 * (sin(lambda_1*x(i))-sinh(lambda_1*x(i)));
36 f_2(i) = cosh(lambda_2*x(i))-cos(lambda_2*x(i)) +
      (cosh(lambda_2)+cos(lambda_2))/(sinh(lambda_2)+sin(lambda_2))
37 * (sin(lambda_2*x(i))-sinh(lambda_2*x(i)));
38 f_3(i) = cosh(lambda_3*x(i))-cos(lambda_3*x(i)) +
      (cosh(lambda_3)+cos(lambda_3))/(sinh(lambda_3)+sin(lambda_3))
39 * (sin(lambda_3*x(i))-sinh(lambda_3*x(i)));
40 f_4(i) = cosh(lambda_4*x(i))-cos(lambda_4*x(i)) +
      (cosh(lambda_4)+cos(lambda_4))/(sinh(lambda_4)+sin(lambda_4))
41 * (sin(lambda_4*x(i))-sinh(lambda_4*x(i)));
42 end
43
44 % y_n(x,t)=f_n(x)g_n(t)
45 y_01 = f_1*g_01;
46 y_11 = f_1*g_11;
47 y_02 = f_2*g_02;
48 y_12 = f_2*g_12;
49 y_03 = f_3*g_03;
50 y_13 = f_3*g_13;
51 y_04 = f_4*g_04;
52 y_14 = f_4*g_14;
53
54 % Plot der Schwingungsmoden 1 und 2
55 subplot(2,1,1)
56 Mode12 = plot(x, y_01, 'b', x, y_11, 'b--', x, y_02, 'm', x, y_12, 'm.')
57 set(Mode12(1), 'linewidth', 2);
58 set(Mode12(2), 'linewidth', 2);
59 set(Mode12(3), 'linewidth', 2);
60 set(Mode12(3), 'linewidth', 2);
61
62 % Plot der Schwingungsmoden 3 und 4
63 subplot(2,1,2)
64 Mode34 = plot(x, y_03, 'r', x, y_13, 'r.', x, y_04, 'g', x, y_14, 'g.')
65 set(Mode34(1), 'linewidth', 2);
66 set(Mode34(2), 'linewidth', 2);
67 set(Mode34(3), 'linewidth', 2);
68 set(Mode34(3), 'linewidth', 2);

```

B. Verwendete CSound-Programme

B.1. Gezupfte Saite

Eine leicht veränderte Version des Beispiels aus <http://www.csounds.com/manual/html/pluck.html> wird unten aufgeführt.

```

1 <CsoundSynthesizer>
2
3 <CsOptions>
4 </CsOptions>
5
6 <CsInstruments>
7
8     sr = 44100
9     ksmps = 32
10    nchnls = 2
11    0dbfs = 1
12
13    instr 1

```

```

14     ifn = 0
15     imeth = p4
16     asig pluck 0.7, 440,440, ifn, imeth
17     outs asig, asig
18     endin
19
20 </CsInstruments>
21
22 <CsScore>
23
24     i1 0 1 6
25
26 </CsScore>
27 </CsoundSynthesizer>

```

B.2. Gestrichene Saite

Das folgende Beispiel entstammt aus <http://www.csounds.com/chapter1/> (instr 123) und wurde leicht verändert.

```

1 <CsoundSynthesizer>
2
3 <CsOptions>
4 </CsOptions>
5
6 <CsInstruments>
7
8     instr 1
9         idur = p3
10        iamp = ampdb(p4)
11        ifrq = cpspch(p5)
12        ifun = p6
13        iatk = p7
14        irel = p8
15        iatfun = p9
16        imodpth = p10
17        imodfrq = p11
18        imodfun = p12
19        kenv envlpx iamp, iatk, idur, irel, iatfun, 1, .01
20        klfo oscil imodpth, imodfrq, imodfun
21        asig oscil klfo, ifrq, ifun
22        out asig*kenv
23    endin
24
25 </CsInstruments>
26 <CsScore>
27
28     f1 0 4096 10 1
29     f2 0 4096 10 1 .5 .333 .25 .2 .166 .142 .125 .111 .1 .09 .083 .076
30     .071 .066 .062
31     f9 0 513 5 .001 128 .8 128 .6 256 1
32     f16 0 513 7 0 256 1 256 0
33
34     ;ins  strt  dur  amp  frq  fn  atk  rel  atfun  modpth  modfrq  modfun
35     i 123  0  1  80  7.2  2  .01  .01  9  1  1  16
36 </CsScore>
37 </CsoundSynthesizer>

```

B.3. Kick-Drum

Die folgenden Drums sind veränderte Versionen von <http://csound.1045644.n5.nabble.com/simple-drums-td3211289.html>. Es wurde beispielsweise ein ASDR Envelope integriert.

```
1 <CsoundSynthesizer>
2
3 <CsOptions>
4 </CsOptions>
5
6 <CsInstruments>
7
8     sr = 44100
9     ksmps = 32
10    nchnls = 2
11    0dbfs = 1
12
13    instr 1
14        k1 expon    p4, .5, 10
15        aenv adsr 0.025, 0.025,0.1, 0.35
16        a1 poscil    1, k1, 1
17        outs a1*aenv, a1*aenv
18    endin
19
20 </CsInstruments>
21
22 <CsScore>
23
24     f1 0 1024 10 1
25     i1 0 0.5 73.4162
26
27 </CsScore>
28 </CsoundSynthesizer>
```

B.4. Snare-Drum

```
1 <CsoundSynthesizer>
2
3 <CsOptions>
4 </CsOptions>
5
6 <CsInstruments>
7
8     sr = 44100
9     ksmps = 32
10    nchnls = 2
11    0dbfs = 1
12
13    instr 1
14        aenv1 expon p4, 0.3, 100
15        a1 oscili aenv1, 150, 1
16        aamp    expon    1, 0.2, 300
17        arand    rand    aamp
18        outs a1+arand, a1+arand
19    endin
20
21 </CsInstruments>
22
23 <CsScore>
```

```

24
25     f1 0 1024 10 1
26     i1 0 0.3 146.832
27
28 </CsScore>
29 </CsoundSynthesizer>

```

B.5. Querflöte

Das folgende Beispiel wird aus <http://www.csounds.com/manual/html/wgflute.html> entnommen.

```

1 <CsoundSynthesizer>
2
3 <CsOptions>
4 </CsOptions>
5
6 <CsInstruments>
7
8     sr = 44100
9     ksmps = 32
10    nchnls = 2
11    0dbfs = 1
12
13    instr 1
14        kamp = 0.9           ; Amplitude des Tons/Klages
15        kfreq = 440         ; Grundfrequenz
16        kjet init p4        ; Variierung des Luftstrahls, p4 in <CsScore>
17        definiert
18        iatt = 0.1         ; Dauer (in sek), bis der Blasdruck maximal ist
19        idetk = 0.1        ; Dauer (in sek), bis keine Luft mehr geblasen wird
20        kngain = 0.1       ; Amplitude des Rauschanteils
21        kvibf = 3.00       ; Frequenz des Vibrato
22        kvamp = 0.05       ; Amplitude des Vibrato
23        asig wgflute kamp, kfreq, kjet, iatt, idetk, kngain, kvibf, kvamp, 1
24        outs asig, asig
25    endin
26 </CsInstruments>
27
28 <CsScore>
29
30     f 1 0 16384 10 1
31     i 1 0 1 0.32
32
33 </CsScore>
34 </CsoundSynthesizer>

```

B.6. Klarinette

In Anlehnung an <http://www.csounds.com/manual/html/wgclar.html> wurde der Beispie-
codel verfasst.

```

1 <CsoundSynthesizer>
2
3 <CsOptions>
4 </CsOptions>
5

```

```

6 <CsInstruments>
7
8     sr = 44100
9     ksmps = 32
10    nchnls = 2
11    0dbfs = 1
12
13    instr 1
14        kfreq = 330                ; Grundfrequenz
15        kstiff = -0.3              ; Steifigkeitsparameter fuer das Rohr
16        iatt = 0.1                 ; Dauer (in sek), bis der Blasdruck maximal ist
17        idetk = 0.1               ; Dauer (in sek), bis keine Luft mehr geblasen
18        kngain init p4             ; Amplitude des Rauschanteils
19        kvibf = 5.735              ; Frequenz des Vibrato
20        kvamp = 0.1               ; Amplitude des Vibrato
21        asig wgclar .9, kfreq, kstiff, iatt, idetk, kngain, kvibf, kvamp, 1
22        outs asig, asig
23    endin
24
25 </CsInstruments>
26
27 <CsScore>
28
29     f 1 0 16384 10 1 0 0.33 0 0.2 0 0.14 0 0.11 0 0.09
30     i 1 0 1 0.2
31
32 </CsScore>
33 </CsoundSynthesizer>

```

B.7. Xylophone und Lamellophone

In Anlehnung an <http://write.flossmanuals.net/csound/h-macros/> wurde das folgende Beispiel verfasst.

```

1 <CsoundSynthesizer>
2
3 <CsOptions>
4 </CsOptions>
5
6 <CsInstruments>
7
8     sr = 44100
9     ksmps = 16
10    nchnls = 1
11    0dbfs = 1
12
13    instr 1 ;Xylophone
14        iamp = 0.1
15        kfreq = 400
16        iq1=1 ;Frequenzverhaeltnisse
17        iq2=2.7565
18        iq3=5.4039
19        iq4=8.933
20        aenv expon 1,p3*(1/iq1),0.001
21        a1 poscil iamp*aenv,kfreq*iq1
22        aenv expon 1,p3*(1/iq2),0.001
23        a2 poscil iamp*aenv,kfreq*iq2
24        aenv expon 1,p3*(1/iq3),0.001
25        a3 poscil iamp*aenv,kfreq*iq3
26        aenv expon 1,p3*(1/iq4),0.001

```

```

27     a4 poscil iamp*aenv,kfreq*iq4
28     a5 sum a1,a2,a3,a4
29     out a5
30   endin
31
32   instr 2 ;Lamellophone
33     iamp = 0.1
34     kfreq = 600
35     iq1=1 ;Frequenzverhältnisse
36     iq2=6.2669
37     iq3=17.5475
38     iq4=34.3861
39     aenv expon 1,p3*(1/iq1),0.001
40     a1 poscil iamp*aenv,kfreq*iq1
41     aenv expon 1,p3*(1/iq2),0.001
42     a2 poscil iamp*aenv,kfreq*iq2
43     aenv expon 1,p3*(1/iq3),0.001
44     a3 poscil iamp*aenv,kfreq*iq3
45     aenv expon 1,p3*(1/iq4),0.001
46     a4 poscil iamp*aenv,kfreq*iq4
47     a5 sum a1,a2,a3,a4
48     out a5
49   endin
50
51 </CsInstruments>
52
53 <CsScore>
54
55     i1 0 1
56     i2 1 2
57
58 </CsScore>
59 </CsoundSynthesizer>

```

Literatur

- [Abramowitz, 1964] Abramowitz M.; Stegun I. (1964). *Handbook of Mathematical Functions*. 9 Auflage. http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/abramowitz_and_stegun.pdf. [Zuletzt aufgerufen am 18.04.2017].
- [Benson, 2007] Benson, D. (2007). *Music: a mathematical offering*. Cambridge University Press. <https://homepages.abdn.ac.uk/mth192/pages/html/music.pdf>. [Zuletzt aufgerufen am 18.04.2017].
- [Blackham, 1988] Blackham, E. D. (1988). *Die gestrichene Saite. Die Physik der Musikinstrumente*. Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft.
- [Chao, 2009] Chao, K.-I. (2009). Herleitung der Bessel-Funktionen mit dem Integral-Integrationsverfahren.
- [Comtesse-Weidner, 2007] Comtesse-Weidner, P. (2007). Untersuchungen am Kopf des fetalen Narwals *Monodon monoceros*: Ein Atlas zur Entwicklung und funktionellen Morphologie des Sonarapparates. Dissertation: Universität Gießen. <http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2007/5100/pdf/Comtesse-WeidnerPia-2007-05-18.pdf>. [Zuletzt aufgerufen am 18.04.2017].
- [Debnath, 2007] Debnath, L.; Myint-U, T. (2007). *Linear partial differential equations for scientists and engineers*. Boston: Birkhaeuser, 4. Auflage.
- [Felix, 1995] Felix, R. (1995) Schwingungen in beschränkten und unbeschränkten Systemen. Vortrag auf Eichstaetter Kolloquium. Katholische Universitaet Eichstaett-Ingolstadt. <http://www.ku-eichstaett.de/fileadmin/150102/Did-Koll.pdf>. [Zuletzt aufgerufen am 18.04.2017].
- [Fletcher, 1998] Fletcher, N.; Rossing T. (1998). *The Physics of Musical Instruments*. Springer, 2. Auflage.
- [Folland, 2009] Folland, G. (2009). *Fourier Analysis and Its Applications*. American Mathematical Society, 4. Auflage.
- [Fourier, 1878] Fourier, J. B. (1878). *The analytical theory of heat*. The University Press.
- [Grigoryan, 2014] Grigoryan, V. Partial Differential Equations. (Kapitel 3). Vorlesungsskript SS2014. <https://sites.oxy.edu/vgrigoryan/342/lectures.html>. [Zuletzt aufgerufen am 18.04.2017].
- [Mehr, 2007] Mehr, F. J. (2007) Mechanik mit MuPAD, Vorlesungsskript (Kapitel 7.2). <http://www.instructioneducation.info/Inhaltdeutsch.html>. [Zuletzt aufgerufen am 18.04.2017].
- [Meier, 2008] Meier, T. (2008) Physik A. Vorlesungsskript WS2008/09. http://homepages.uni-paderborn.de/tmeier/Theorieteile_NEU.pdf. [Zuletzt aufgerufen am 18.04.2017].
- [Roederer, 2000] Roederer, J. (2000). *Physikalische und psychoakustische Grundlagen der Musik*. Springer, 3. Auflage.
- [Rossing, 2004] Rossing T.; Fletcher, N. (2004). *Principles of Vibration and Sound*. Springer, 2. Auflage.
- [Ungeheuer, 1962] Ungeheuer, G. (1962). *Elemente einer akustischen Theorie der Vokalartikulation*. Springer 1. Auflage.

[von Hornbostel, 1914] von Hornbostel, E. M.; Sachs, C. (1914) Systematik der Musikinstrumente. Ein Versuch. Zeitschrift für Ethnologie, 46.H. 4/5: 553-590.