Wieland WILZEK, Essen

Anschauliche Analysis in der Hochschullehre?

Da die formale Begriffsbildung in der Hochschullehre für viele Studierende Überforderung mit sich bringt, kann versucht werden, diese Schwierigkeit durch anschauliche Lernangebote abzumildern. Doch stellt sich die Frage, inwiefern Anschauung und wissenschaftliche Mathematik miteinander vereinbar sind. Die Analysis steht dabei besonders im Fokus, da sich hier historisch die Entzweiung der anschaulichen und formalen Ebene besonders markant vollzogen hat. In diesem Beitrag wird zunächst eine Arbeitsdefinition von Anschauung gegeben. Anschließend werden verschiedene Funktionen von Anschauung unterschieden, wobei lediglich drei der Funktionen ausführlich beschrieben werden. Die Bedeutung für die Hochschullehre wird jeweils angedeutet.

Definition Anschauung

Im Folgenden soll Anschauung als ein ikonisches Denkwerkzeug verstanden werden, welches auf dem Kontinuum zwischen formal-syntaktischen und informell-semantischen Denk- und Schreibweisen tendenziell dem letzteren zuzuordnen ist. Verschiedene Arten von Anschauung werden unterschieden:

Art	Beispiel
Metaphorisch	Vektorfelder als Strömungen
Intuitiv	Evidenz des Nullstellensatzes oder Paschaxioms, da kein Gegenbeispiel vorstellbar ist
Diskursiv	Beweis über Nomogramme, dass eine Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig ist

Tab.: Arten von Anschauung

Funktionen von Anschauung

Um die Frage nach der Bedeutung von Anschauung in der Hochschullehre beantworten zu können, muss zunächst geklärt werden, welche verschiedenen Funktionen der Anschauung zukommen können, wobei die einzelnen Funktionen dann separat zu bewerten sind. Die nachstehende Abbildung zeigt einen Überblick über die Funktionen von Anschauung, die aus der Literatur und eigenen Überlegungen gewonnen wurden. Zwischen den einzelnen Funktionen gibt es sicherlich Überschneidungen und es lassen sich weitere Aspekte ergänzen. Im Folgenden werden die einzelnen Funktionen, beginnend mit der Funktion von Anschauung in Beweisen, kurz vorgestellt.

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

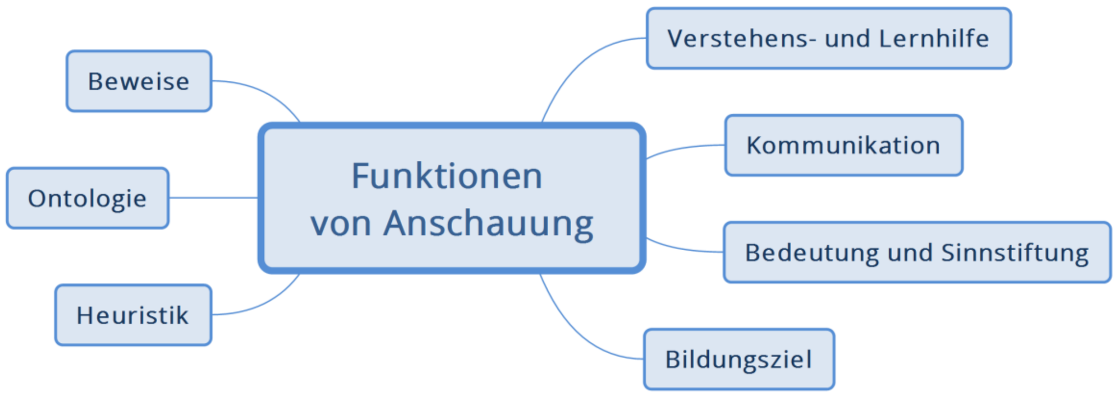

Abb. 1: Funktionen von Anschauung

Durch die Arithmetisierungsbewegung im 18. und 19. Jahrhundert wurde die Anschauung aus Beweisen verbannt, da sie durch das Aufkommen sogenannter Monster wie überall stetig, aber nirgends differenzierbarer Funktionen in Verruf geraten ist (Volkert, 1989). In der Philosophie der Mathematik erfährt die Anschauung in Beweisen aber zunehmend eine Rehabilitation (Gila & Sidoli, 2007). Doch gerade in der Analysis können unendliche Prozesse zu Vorstellungen führen, die der formalen Betrachtung widersprechen, wie das unten abgebildete Paradoxon zeigt.

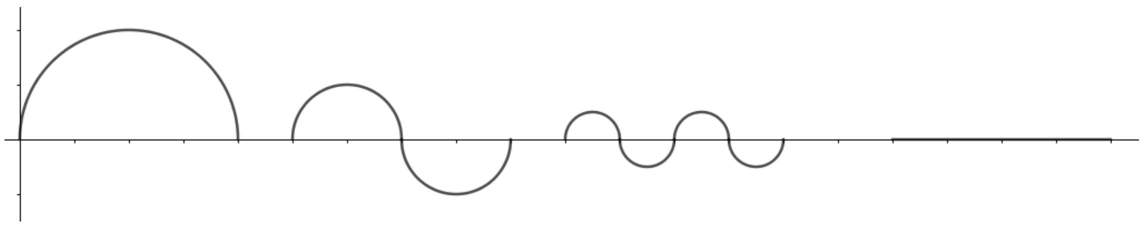

Abb. 2: In jedem Schritt bleibt die Bogenlänge gleich, im Grenzwert scheint aber eine andere Bogenlänge vorzuliegen (vgl. auch Balacheff, 2010, S. 127f.)

Auch für ontologische Fragestellungen hat die Anschauung historisch einen höheren Stellenwert als heute gehabt. So wurden einst Axiome durch Anschauung evident, während durch Hilberts Einfluss seither nur noch die Widerspruchsfreiheit als Existenzgrundlage ausreicht. Hierbei wird allerdings unterstellt, dass der Formalismus die vorherrschende Auffassung von wissenschaftlicher Mathematik sei. Doch neben vielen Vorteilen bringt der Formalismus auch Schwierigkeiten, wie z.B. eine fehlende Erklärung von der Anwendbarkeit der Mathematik auf die Welt oder die gödelschen Unvollständigkeitssätze, mit sich. Soziologische Studien und Selbstbekenntnisse bekannter Mathematiker weisen außerdem daraufhin, dass die Praxis des forschenden Mathematikers keine rein formale ist. „Der typische Mathematiker ist sowohl Platonist wie ein Formalist – ein versteckter Platonist mit einer formalistischen Maske, die er aufsetzt, wenn der Anlaß dies erfordert" (Davis & Hersh, 1985, S. 338).

Eine weniger umstrittene Funktion der Anschauung ist die heuristische. Auch wenn in Publikationen die Entstehung von Mathematik häufig nicht mehr sichtbar ist, spielt im „context of discovery“ Anschauung neben anderen informellen Arbeitsweisen eine große Rolle. Es geht darum, Sätze zu bewerten, Vermutungen zu generieren, Gegenbeispiele zu finden, formale Beweisideen aus anschaulichen Beweisen zu entnehmen (s. untenstehende Abbildung) und schließlich hat Anschauung auch eine Kontrollfunktion.

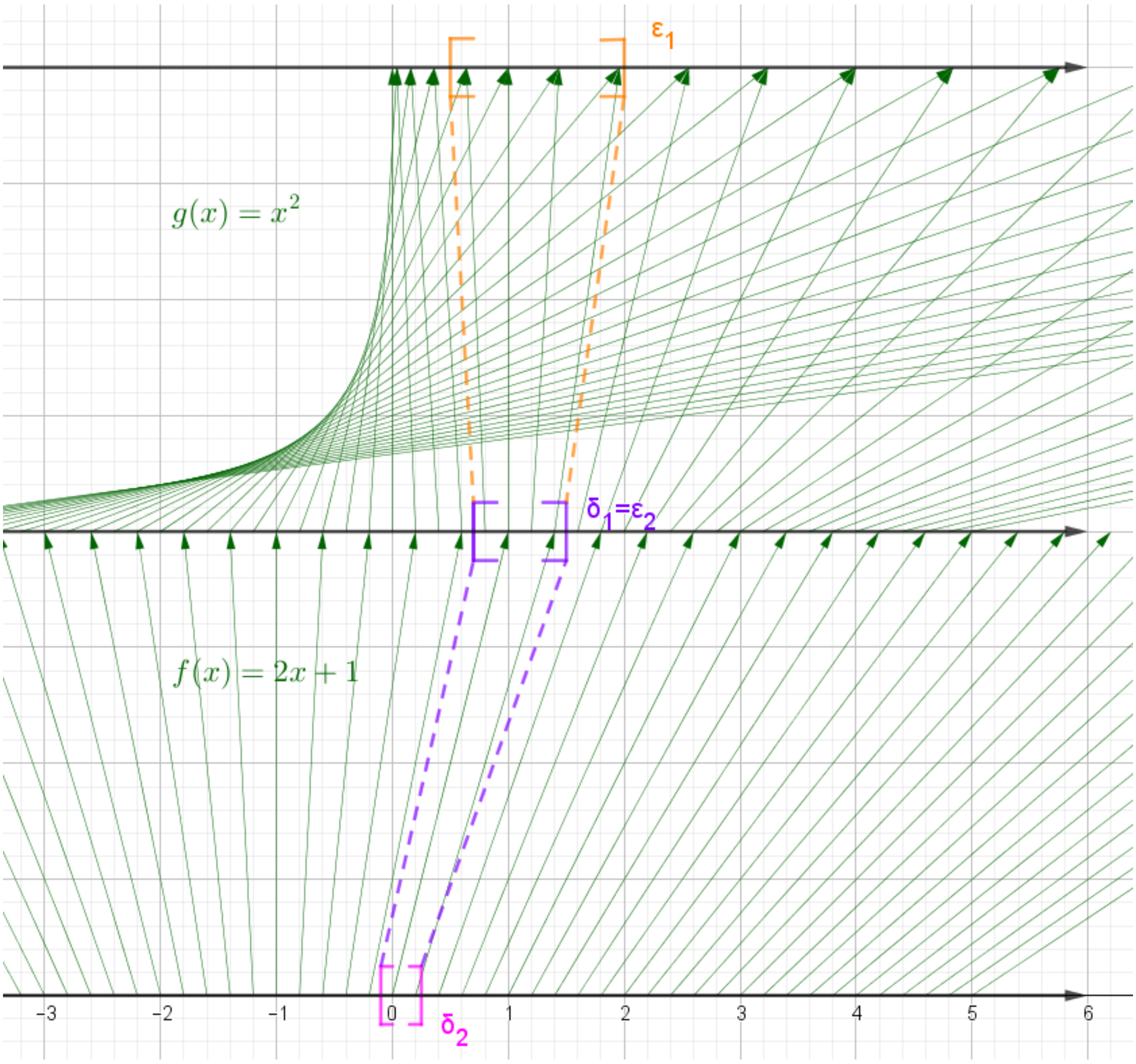

Abb. 3: Aus diesem Bild lässt sich die formale Beweisidee für den Satz, dass die Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig ist, gewinnen

Ein didaktischer Wert kommt der Anschauung als Verstehens- und Lernhilfe zu. Visuelle Repräsentationen können eine Gedächtnisstütze sein, aber auch beim Lesen von Beweisen können mentale Vorstellungen oder Skizzen als Lesestrategie eingesetzt werden. Obwohl der Kommunikationsstil der wissenschaftlichen Mathematik durch die Bourbaki-Ära geprägt ist, spielt Anschauung auch in der Kommunikation eine Rolle. Eine weitere Funktion betrifft die Bedeutung und Sinnstiftung. „Die Anschauung ist als sinn- und bedeutungsstiftende Instanz für die Mathematik unabdingbar“ behauptet Volkert (1989, S. 28f) und auch Poincaré spricht sich dafür aus, dass die ursprüngliche Idee hinter den formalen Definitionen nicht verloren gehen dürfe. Schließlich kann Anschauung auch als eigenes Bildungsziel erhoben werden. Es geht also um die Frage, ob eine Absolventin oder ein Absolvent des Mathematikstudiums mehr als nur den formalen Umgang mit Mathematik kennengelernt haben soll.

Fazit

Je nachdem, um welchen Studiengang es geht, kann die Bewertung der einzelnen Funktionen unterschiedlich ausfallen. Vor allem die ontologische und die Beweisfunktion von Anschauung scheinen am wenigsten mit den wissenschaftlichen Standards des Faches vereinbar zu sein. Für alle anderen Funktionen können positive Argumente angeführt werden. Dennoch sollte Anschauung immer mit der nötigen kritischen Reflexion einhergehen, die bewusst thematisiert werden sollte. Für die Thematisierung auch anderer informeller Denk- und Handlungsweisen (z.B. Heuristiken und Schreibweisen) soll an dieser Stelle geworben werden.

An der Universität Duisburg-Essen wird bereits versucht, anschauliche Elemente in die Analysis-Vorlesungen zu integrieren. Dies geschieht in Form von interaktiven dynamischen Visualisierungen mit zugehörigen Reflexionsaufträgen, die der Autor an anderer Stelle ausführlicher vorstellt (Wilzek, 2019).

Literatur

Davis, P. J. & Hersh, R. (1985). *Erfahrung Mathematik*. Basel [u.a.]: Birkhäuser.

Gila, H. & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *ZDM*, 39(1), 73-78.

Balacheff, N. (2010). Bridging Knowing and Proving in Mathematics: A Didactical Perpective. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Hrsg.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (S. 115-135). Boston, MA: Springer Science+Business Media LLC.

Volkert, K. T. (1989). Die Bedeutung der Anschauung für die Mathematik: historisch und systematisch betrachtet. In H. Kautschitsch (Hrsg.), *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik: Vol. 18. Anschauliches Beweisen* (S. 9-31). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Wilzek, W. (2019). Interaktive dynamische Visualisierungen als Unterstützungsangebot im fachmathematischen Studium: Chancen und Gefahren der Anschauung. In M. Klinger (Hrsg.), *Schriften zur Hochschuldidaktik Mathematik: Vol. 6. Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2018: Beiträge zum gleichnamigen Symposium am 9. & 10. November 2018 an der Universität Duisburg-Essen* (S. 187-195). Münster: WTM - Verl. für Wiss. Texte und Medien.