Tobias WOLLENWEBER, Dortmund

Dezimalzahlen im Kontext von Größen – Vorstellungen und Schwierigkeiten in der Grundschule

Die systematische Behandlung von Dezimalzahlen im Rahmen der Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Q}+$ ist eines der zentralen Lerninhalte der frühen Sekundarstufe. Dies liegt u. a. darin begründet, dass für ein vollinhaltliches Verständnis von Dezimalzahlen – insbesondere in Hinblick auf die Bedeutung der Bündelungseinheiten in den Nachkommastellen – auch ein grundlegendes Wissen im Umgang mit Brüchen (z. B. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$) benötigt wird (z. B. Sprenger, 2017). In der Regel sammeln Schülerinnen und Schüler wesentlich früher Erfahrungen im Umgang mit Dezimalzahlen, zum Beispiel im Zusammenhang mit Größen. Aus diesem Grund hat bereits Oehl (1962) dafür geworben, mit der Thematisierung der dezimalen Schreibweise frühzeitiger zu beginnen, denn „das Kind sieht und erlebt diese Schreibung überall in seiner Umwelt" (Oehl, 1962, S. 125).

Dementsprechend findet heutzutage der Lerngegenstand der Dezimalzahlen bereits im Mathematikunterricht der Grundschule als *Kommazahlen* oder als *Kommaschreibweise* im Kontext von Größen Berücksichtigung. Damit Schülerinnen und Schüler trotz mangelnder Kenntnisse in der systematischen Bruchrechnung ein erstes inhaltliches Verständnis für die Bedeutung von Nachkommastellen aufbauen können, hat sich in der Grundschule ein alternativer, didaktischer ‚Umweg' etabliert: Kommazahlen werden in vielen Schulbüchern größenbereichsspezifisch eingeführt, indem mithilfe des Kommas zwei Maßeinheiten eines Größenbereichs voneinander getrennt werden, wodurch eine vermeintlich feste Anzahl an Nachkommastellen je nach Größenbereich assoziiert wird (s. Tab.).

Umwandlungen	**Größenbereichsspezifische Merksätze**
2,50 € = 2 € 50 ct	*„Das Komma trennt Euro und Cent."*
1,60 m = 1 m 60 cm	*„Das Komma trennt Meter und Zentimeter."*
3,500 kg = 1 kg 500 g	*„Das Komma trennt Kilogramm und Gramm."*

Tab.: Typische Merksätze in Schulbüchern der Grundschule

Dass sich eine solche Vorstellung vom Komma als Trennmarke auf Dauer als problematisch und wenig tragfähig auf den Lernprozess auswirken kann, darauf weisen sowohl quantitative (z. B. Heckmann, 2006; Steinle & Stacey,

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

1998) als auch qualitative (z. B. Sprenger, 2017) Studien zum Dezimalzahlverständnis aus der Sekundarstufe 1 hin. So finden sich in allen Studien zahlreiche Belege für eine sog. Komma-Trennt-Vorstellung (kurz: KT), die – mutmaßlich begünstigt durch die Behandlung der Kommazahlen in der Grundschule – zu einer fortgesetzten, fehlerhaften Vorstellung von Dezimalzahlen als zwei durch ein Komma getrennte natürliche Zahlen (auch ohne Größenbezug!) führen kann, zum Beispiel beim Zahlvergleich (3,14 > 3,2, weil gilt: 14 > 2).

Forschungsinteresse

Mit Blick auf die bereits bestehende Forschungslage aus der Sekundarstufe 1 wurde im Rahmen eines *qualitativen* Forschungsprojektes untersucht, welche subjektiven Vorstellungen von Dezimalzahlen im Kontext von Größen (Geldwerte, Längen, Gewichte) bei Kindern am Ende der Grundschule (3. und 4. Klasse) vorliegen und inwiefern diese über eine KT-Vorstellung hinausgehend inhaltlich ausgebaut werden können.

Zu diesem Zweck wurden mit fünf Schülerpaaren fünf halbstandardisierte Interviews geführt. Die Lernenden sollten – immer ausgehend von einem größenbereichsspezifischen Kontext – verschiedene Größenangaben in dezimaler Schreibweise miteinander in Beziehung setzen und ihre größengebundenen Dezimalzahlvorstellungen erläutern. Ein Designelement war dabei die bewusste Konfrontation mit eher unkonventionellen Schreibweisen, zum einen mit dem Ziel einer differenzierteren Diagnostik der individuellen Vorstellungen über Dezimalzahlen im Kontext von Größen, zum anderen sollten dadurch „*produktive Irritationen*“ (Nührenbörger & Schwarzkopf, 2013, S. 719) bei den Lernenden ausgelöst werden, indem eine „klärungsbedürftige Abweichung von der eingenommenen Erwartung“ (Schwarzkopf, 2015, S. 39) entsteht.

Forschungseinblick

Der nun folgende Transkriptausschnitt stammt aus dem ersten Interview mit den beiden Drittklässlerinnen Jennifer (J) und Sina (S). Nachdem die Kinder Preise von zwei fiktiven Imbissbuden paarweise verglichen haben, sollten sie im Anschluss – losgelöst vom Kontext – Preiskärtchen mit unterschiedlichen dezimalen Schreibweisen der Geldwerte vergleichend ordnen. Das Transkript setzt ein, nachdem die Kinder bereits neun Preiskärtchen sortiert haben. Dabei gingen die beiden immer so vor, dass sie die Nachkommastellen – ganz im Sinne der KT-Vorstellung – wie natürliche Zahlen gelesen, paarweise miteinander verglichen und entsprechend sortiert haben (z. B. 1,10 € > 1,9 €; aber auch 1,09 € = 1,9 €). Um die Vorgehensweise produktiv zu irritieren, erhielten die Kinder daraufhin vom Interviewer (I) ein weiteres

Kärtchen mit der alltagsunüblichen Aufschrift „1,200 €“. Dieses schob Sina sofort zielsicher an das Ende der bisherigen Sortierung (s. Abb., grau markiert).

Abb.: Sortierung der Preiskärtchen

Auf Nachfrage des Interviewers kam es zu folgendem Gespräch:

S hier sind zwei Hunderter (deutet auf die drei Nachkommastellen in „1,200 €“)

J hier sind zweihundert Cent (deutet ebenfalls auf die drei Nachkommastellen in „1,200 €)

I zweihundert Cent‘

S mhm (nickend) deswegen

J dann wären das zwei Euro und hier ist ja auch noch ein Euro (deutet auf den ganzzahligen Anteil) und dann wären es eigentlich drei Euro.

Der Transkriptausschnitt in Kombination mit der Sortierung zeigt sehr deutlich, wie dominant eine KT-Vorstellung bei den beiden Schülerinnen bereits wirkt. Die Schülerin Sina greift offensichtlich auf ihr Verständnis von Stellenwerten aus den natürlichen Zahlen zurück, um sich die Bedeutung der ‚Zahlen‘ nach dem Komma zu erklären: „*Hier sind zwei Hunderter*“. Dabei hat sie mit Blick auf den Größenbereich Geldwerte offenbar gelernt: Vor dem Komma stehen Euro, nach dem Komma stehen Cent.

Zugleich entwickeln die Schülerinnen im Zuge der Konfrontation mit den drei Nachkommastellen eine *Bündelungsidee*, die Faktenwissen über die Beziehung zwischen Cent und Euro aufgreift: Da es sich schließlich um „*zweihundert Cent*“ (J) handele, „*wären das zwei Euro*“ (J). Folglich handele es sich insgesamt um „*drei Euro*“ (J). Aus mathematikdidaktischer Sicht ist dies gewiss keine wünschenswerte Vorstellung. Dennoch unterscheidet sich diese Vorstellung erheblich von den vielfach diagnostizierten KT-Vorstellungen der Lernenden aus der Sekundarstufe 1. Dies liegt an der Möglichkeit einer gegenstandsspezifischen Verknüpfung von Dezimalzahlen mit einem Größenbereich durch die Lernenden. Aufgrund ihres Wissens um Einheiten und Untereinheiten (hier: Euro und Cent) versuchen die beiden Schülerinnen, mithilfe ihrer Bündelungsidee bewusst eine Beziehung zwischen den Stellen vor und nach dem Komma herzustellen. Sie wissen also grundsätzlich um das dekadische Beziehungsgefüge zwischen der Einheit Euro und der (kleineren) Untereinheit Cent. Eine Idee, die in anderen Kontexten (z. B. bei einer additiven Verknüpfung wie 1,50 € + 1,50 €) durchaus hätte Sinn ergeben können, in dem vorliegenden Kontext allerdings zu kurz greift. Denn die Lesart der Nachkommastellen als natürliche Zahlen in Kombination mit der KT-Vorstellung verbaut letztlich eine tragfähige *Teil-Ganzes-Vorstellung*, die wichtig für den Aufbau von Dezimalzahlvorstellungen ist.

Der hier dargestellte Transkriptausschnitt steht exemplarisch für eine Reihe größenbereichsspezifischer Vorstellungen, die im Rahmen der Untersuchung aufgetreten sind. Die verschiedenen Vorstellungen der Kinder variieren dabei je nach Größenbereich. Häufig sind sie geprägt von einer KT-Vorstellung. Gleichwohl sind sie nicht immer ausschließlich auf diese Vorstellung fixiert. Vielmehr zeigt die Untersuchung deutlich auf, wie sehr die Vorstellungen der Lernenden in Relation zum größenbereichsspezifischen Wissen stehen und wie die Lernenden ihre Dezimalzahlvorstellungen im Kontext von Größen im Zuge der Auseinandersetzung mit ungewöhnlichen Darstellungen verändern und mitunter auch weiter entwickeln können.

Literatur

Heckmann, K. (2006). *Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern. Theoretische Analyse und empirische Befunde*. Berlin: Logos Verlag.

Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2013). Gleichungen zwischen „Ausrechnen“ und „Umrechnen“. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 716–719). Münster: WTM Verlag.

Oehl, W. (1962). *Der Rechenunterricht in der Grundschule*. Hannover: Schroedel.

Schwarzkopf, R. (2015). Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht der Grundschule: Ein Einblick. In A. Budke et al. (Hrsg.), *Fachlich argumentieren lernen. Didaktische Forschungen zur Argumentation in den Unterrichtsfächern* (S. 31–45). Münster: Waxmann.

Sprenger, L. (2017). *Zum Begriff des Dezimalbruchs. Eine empirische Studie zum Dezimalbruchverständnis aus inferentialistischer Perspektive*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Steinle, V. & Stacey, K. (1998). The incidence of misconceptions of decimal notation amongst students in Grades 5 to 10. In C. Kanes et al. (Hrsg.), *Teaching mathematics in new times. Proceedings. Vol. 2.* (S. 548–555). Brisbane (Australien): MERGA.

Wollenweber, T. (2017). „Genauso wie ’ne Geheimschrift, die kann auch keiner lesen“ – Kommazahlen im Kontext von Größen in der Grundschule. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (S. 1057–1060). Münster: WTM Verlag.