Michael MEYER, Köln & Julia REY, Kleve

Modellieren in der Grundschule – Größen als Mittler

L: Stell dir vor, du bist heute ein Straßenbauer und du hast eine Ampel und an der Ampel da müssen zehn Autos stehen können. Wie lange muss die Straße sein, damit zehn Autos an der Ampel stehen können?

Marlene (Klasse 1): Ähm wie? Also, weil wenn es so zum Beispiel Kilometer-wie soll ich es dann machen? Ein Stein ist ein Kilometer oder was?

In dem folgenden Beitrag geht es um das Modellieren in der Grundschule am Beispiel einer Abwandlung der bekannten Stauaufgabe (s. Peter-Koop 2003). Insbesondere wird die Funktion von Größen als Mittler zwischen Sachbezügen und deren mathematischer Bearbeitung diskutiert.

Modellieren zwischen Sachbezügen und mathematischem Arbeiten

Die oben dargestellte Aufgabe der Lehrerin lässt sich als eine Sachaufgabe (Greefrath et al. 2013, S. 25) verstehen: Zu ihrer Lösung sind Daten zu recherchieren, Vereinfachungen zu treffen und Mathematisierungsprozesse vorzunehmen. Mit Maaß (2007) lässt sich entsprechend von einer Modellierungsaufgabe sprechen.

In der mathematikdidaktischen Literatur finden sich zum Modellieren verschiedene Modelle, in denen die Relation von Sachbezügen und mathematischem Arbeiten hergestellt wird. Müller & Wittmann (1984, S. 253) sowie Blum & Leiß (2005, S. 18) trennen diese zwei Bereiche voneinander. Hingegen benutzen die Modelle von Bell (1993, S. 76), Fischer & Malle (1985, S. 101) sowie Voigt (2013) keine explizite Trennung dieser Bereiche zur Darstellung des Modellierungsprozesses.

Die Größe Länge

Die Größe Länge dient dazu, die Entfernung von Punkten voneinander und somit die lineare Ausdehnung eines Objektes zu beschreiben (Nührenbörger 2004). Hierzu lässt sich zwischen einer Größe und ihren Repräsentanten unterscheiden (Griesel 1973): Die Größe selbst stellt eine abstrakte Einheit dar, welche durch ein konkretes Objekt repräsentiert werden kann. Die Repräsentation ermöglicht wiederum ein Messen mit der Größe Länge. Peter-Koop & Nührenbörger (2011) beschreiben drei Kernideen dieses Messprozesses: Auswahl einer Einheit, Iteration von bzw. Zerlegen in Einheiten und Zählen der Anzahlen von Einheiten.

Zöllner (2020, S. 197) beschreibt ein Modell zwischen Komponenten des Längenkonzepts, welches die Komplexität dieser Größe aufzeigt: Neben den oben genannten Begriffen sind hierin direkte und indirekte Vergleiche enthalten und diese stehen wiederum in einer Beziehung zur Maßzahl und zur Maßeinheit.

In: Kerstin Hein, Cathleen Heil, Silke Ruwisch & Susanne Prediger (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2021. Münster: WTM Verlag. https://doi.org/10.37626/GA9783959871846.0
Online unter https://eldorado.tu-dortmund.de/handle/2003/30630

Methode

Im Folgenden wird exemplarisch ein Interviewtranskript zwischen einer Lehrperson und der Erstklässlerin Marlene (S) rekonstruiert. Das Interview entstand im Rahmen der Förderung der Schülerin im Kölner Projekt „Rechenstark!“.

Zur Analyse des Interviews wird ein interpretatives Verfahren angewendet, wie es von der Bielefelder Arbeitsgruppe um H. Bauersfeld für die Mathematikdidaktik aufbereitet wurde (s. Voigt 1984). Ziel der Analyse ist das Herausarbeiten der Funktion(en) der Größe Länge beim Modellieren.

Empirie

Der nachfolgende Transkriptausschnitt setzt nach der Interaktion zu Beginn dieses Beitrages und einer motivierenden Aufforderung der Lehrperson (L) ein.

4	S	*(Nimmt eine 10-er Stange des Dienes-Materials)* (..) *(Zieht die Box mit den Würfeln des Dienes-Materials zu sich und holt einige Würfel heraus)* Also das ist ja eigentlich logisch, weil wenn 10 Autos da steh‘n da stehen müssen- müssen ja eigentlich 10 Kilometer sein deswegen.
5	L	Wie lang ist denn ein Auto so?
6	S	Wie lang ist also so lang wie ein Klotz? Vielleicht- *(schiebt 10 Würfel neben die Stange, legt die Stange dann auf die Würfel)* also ja. Also das sind die Autos *(zeigt auf die Würfel)* und das ist die Straße. Und ja ein Klotz ist ein Kilometer lang. Und äh deswegen 10 Kilometer. (*Die Länge eines Meters wird daraufhin im Interview geklärt.*) (…)
26	S	*(Schiebt wiederholt drei Würfel zusammen, sodass immer drei Würfel direkt aneinander mit etwas Abstand zu den nächsten dreien in einer Reihe liegen. Anschließend nimmt sie zwei Zehnerstangen aus der Box und zeigt auf jedes Dreierpäckchen einmal. Sie legt die Stangen neben die Reihe und schiebt die Würfel so daran, dass immer drei Würfel und dann ein Würfel Abstand liegen)* Also das ist also ein Klotz ist ein Meter lang. Und das da sind die Autos *(zeigt auf drei Würfel)* immer ein Klotz Abstand *(zeigt zwischen die Würfel)* zwischen dem nächsten Auto und dann muss man einfach ausrechnen wie viele Stangen das sind *(zeigt auf die Stangen)* und den da weglassen *(zeigt auf den letzten angedeuteten Würfel der Zehnerstange, neben dem kein Würfel liegt).* 

Zu Beginn der Szene wählt die Schülerin die Einheit „Kilometer“, um die Länge eines Autos zu beschreiben. Dieses Vorgehen lässt sich als ein Vergleich zwischen einer Maßeinheit und der Autolänge interpretieren. Durch den Vergleich zwischen dem Klotz und dem Auto lässt sich der Klotz als Repräsentant der Länge (Kilo-)Meter verstehen. Im Anschluss ist es möglich einen transitiven Vergleich der Schülerin zu rekonstruieren: Wenn ein Auto einen Kilometer lang ist und ein Klotz so lang wie ein Auto, dann entspricht ein Klotz einem Kilometer.

Mit der Thematisierung der Länge eines Meters erfolgt die Repräsentation der aneinandergereihten Autos (Iteration) mit einem Abstand zwischen den Autos (Turn 26). Die Straßenlänge wird dann durch Zehnerstangen repräsentiert, welche später zur Beantwortung der Ausgangsfrage benutzt wird: Die Zehnerstangen dienen dann zum Messen (konkreter Vergleich) der zusammengesetzten Autolängen mit Abständen (Ruwisch 2017).

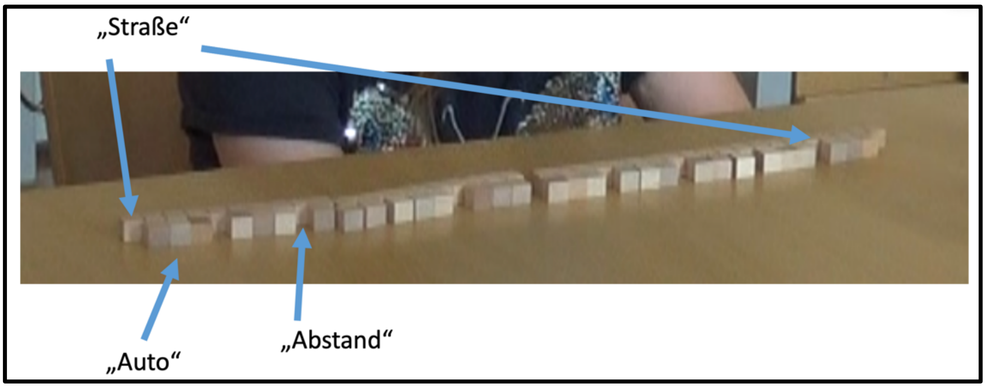

Abb.: Finale Darstellung zur Aufgabenbearbeitung durch Marlene

Abschließend wird der Abstand zwischen den Autos bzw. den „Klötzen“ im Interview zum Gegenstand des Interviews:

35	L	Ich brauch noch ein bisschen eine Erklärung von dir. Warum hast du hier *(zeigt auf den Abstand)* denn immer ein Klotz Abstand gelassen? ...
36	S	Weil man sonst nicht ausrechnen konnte, wie viel Autos das halt sind. Also ob das jetzt genau zehn sind, wenn ich jetzt so mache *(schiebt sechs Würfel zusammen, sodass dazwischen keine Lücke mehr ist)*, dann weiß man nicht wie viele das sind.

Die Größe Länge als Abstand zwischen den Autos scheint in dieser Situation eine rein mathematische Bedeutung zu haben: Der Abstand wird gelegt, um die Autos zählen zu können. Ein Bezug zu Abständen zwischen Autos in der Realität kommt weder hier noch im weiteren Verlauf des Interviews zum Vorschein.

Fazit

Schwarzkopf kommt auf der Grundlage seiner Rekonstruktion von Modellierungsprozessen in der Grundschule zu dem folgenden Schluss: „Die Beziehung zwischen Sachverhalt und Mathematik wird nicht hergestellt durch *Vernachlässigung von ausreichend vielen sachlichen Details zur Vorbereitung*

einer Übersetzung, sondern durch eine *theoretische Veränderung des empirischen Sachverhalts zur strukturellen Erweiterung des Sachverhalts*."
Ein vergleichbares Ergebnis konnte in der hier thematischen Szene rekonstruiert werden. Die Verwendung der Größe (Länge) wurde bei einer Abwandlung der Stauaufgabe zum einen durch reale Bezüge (Auto- und Straßenlängen) und zum anderen durch die Mathematik (Abstand zur Ermöglichung des Ausrechnens) legitimiert. Diese Verwendung zeigt die enge Beziehung zwischen Sachbezügen und deren mathematischen Verarbeitung: Unabhängig von ihrem Ursprung bzw. der Ursache ihres Ursprunges können Größen zwischen Deutungen im Sachverhalt und mathematischen Lösungen vermitteln. Nicht nur der Sachverhalt kann dessen mathematische Bearbeitung bedingen, sondern auch die im individuellen bzw. interaktiven Horizont liegenden Möglichkeiten der mathematischen Bearbeitung können Einfluss auf den Sachverhalt haben; unabhängig davon, ob dieser Einfluss ein bewusster ist. Mit Schwarzkopf (s. o.) gesprochen: Durch die zusätzlichen Informationen aus seiner Bearbeitung kann der bisherige Sachverhalt zu einem erweiterten Sachverhalt werden.

Literatur

Bell, M. (1993). Modelling and applications of mathematics in the primary curriculum. In T. Breiteig et al. (Hrsg.), Teaching and learning mathematics in context (71-79). Chichester: Ellis Horwood.

Blum, W. & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken"- Aufgabe. mathematik lehren, 128, 18-21.

Fischer, R. & Malle, G. (1985). Mensch und Mathematik. Mannheim: BI.

Griesel, H. (1973). Die neue Mathematik für Lehrer und Studenten. Hannover: Schroedel.

Maaß, K. (2007). Mathematisches Modellieren. Berlin: Cornelsen.

Nührenbörger, M. (2004). Das Mess-Denken von Kindern. In P. Scherer & D. Bönig (Hrsg.), Mathematik für Kinder-Mathematik von Kindern (97-106). Hemsbach: Beltz.

Peter-Koop, A. (2003). „Wie viele Autos stehen in einem 3-km-Stau?" In S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Hrsg.), Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule (111-130). Offenburg: Mildenberger.

Peter-Koop, A. & Nührenbörger, M. (2011). Größen und Messen. In G. Walther et al. (Hrsg.), Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret (89-117). Berlin: Cornelsen.

Ruwisch, S. (2017). Individuelle mathematische Lernprozesse erfassen, herausfordern und begleiten. In T. Leuders et al. (Hrsg.), Mit Heterogenität im Mathematikunterricht umgehen lernen (103-112). Wiesbaden: Springer.

Schwarzkopf, R. (2006). Elementares Modellieren in der Grundschule. In A. Büchter et al. (Hrsg.), Realitätsnaher Mathematikunterricht (95-105). Hildesheim: Franzbecker.

Voigt, J. (1984). Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen. Weinheim: Beltz.

Voigt, J. (2013). Eine Alternative zum Modellierungskreislauf. In: G. Greefrath et al. (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht, (S. 1046-1049). Münster: WTM.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. (1984). Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Braunschweig: Vieweg

Zöllner, J. (2020). Längenkonzepte von Kindern im Elementarbereich. Wiesbaden: Springer.