

**Durationskonzepte für die Praxis der  
Lebensversicherung zur Quantifizierung von  
Änderungsrisiken in Zins und Biometrie**

**DISSERTATION**

eingereicht zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doctor rerum politicarum (Dr. rer. pol.)  
an der  
Fakultät Wirtschaftswissenschaften der Technischen Universität Dortmund

von  
**Marius Radermacher, M.Sc.**

Erstgutachter: Prof. Dr. Peter Recht  
Zweitgutachter: Prof. Dr. Andreas Hoffjan

Dortmund, 2021

Veröffentlichung als Dissertation an der Fakultät Wirtschaftswissenschaften der  
Technischen Universität Dortmund

Dortmund, September 2021

# Inhaltsverzeichnis

|  |            |
|--|------------|
| <b>Abbildungsverzeichnis</b>   | <b>iii</b> |
| <b>Tabellenverzeichnis</b>   | <b>v</b>   |
| <b>1. Einleitung</b>   | <b>1</b>   |
| 1.1. Motivation . . . . .  | 1          |
| 1.2. Literaturüberblick . . . . .  | 3          |
| 1.3. Aufbau der Arbeit . . . . .   | 7          |
| <b>2. Finanzmathematische Grundlagen</b>   | <b>9</b>   |
| 2.1. Bewertung von Zahlungsreihen . . . . .                                      | 9          |
| 2.2. Zinsänderungsrisiko . . . . .   | 15         |
| 2.2.1. Definition Zinsänderungsrisiko . . . . .                                  | 16         |
| 2.2.2. Kennzahlen für das Zinsänderungsrisiko . . . . .                          | 17         |
| <b>3. Durationsmaße</b>  | <b>21</b>  |
| 3.1. Macaulay-Durationsmaße . . . . .  | 21         |
| 3.1.1. Macaulay-Duration . . . . .   | 21         |
| 3.1.2. Modifizierte Macaulay-Duration . . . . .                                  | 25         |
| 3.1.3. Eigenschaften der modifizierten Macaulay-Duration . . . . .               | 34         |
| 3.2. Effektive Durationen . . . . .  | 40         |
| 3.2.1. Effektive Duration . . . . .  | 40         |
| 3.2.2. Modifizierte Effektive Duration . . . . .                                 | 41         |
| 3.2.3. Key Rate Duration . . . . .   | 46         |
| <b>4. Forward Rate Duration</b>  | <b>51</b>  |
| 4.1. Forward Rate Duration als „Restlaufzeit“ . . . . .                          | 51         |
| 4.2. Modifizierte Forward Rate Duration . . . . .                                | 53         |
| 4.3. Forward Rate Duration als Verallgemeinerung des Durationskonzepts . . . . . | 63         |
| 4.4. Eigenschaften der Forward Rate Duration . . . . .                           | 70         |

|   |            |
|---|------------|
| <b>5. Durationsmaße für die Lebensversicherung</b>                | <b>79</b>  |
| 5.1. Versicherungsmathematische Grundlagen . . . . .              | 80         |
| 5.1.1. Biometrische Rechnungsgrundlagen . . . . .                 | 80         |
| 5.1.2. Erwarteter Barwert . . . . .                               | 82         |
| 5.2. Forward Rate Duration für Lebensversicherungen . . . . .     | 86         |
| 5.3. Biometrisches Änderungsrisiko . . . . .                      | 99         |
| 5.3.1. Arten von Sterblichkeitsänderungen . . . . .               | 103        |
| 5.3.2. Sterblichkeit als „negativer Zins“ . . . . .               | 107        |
| 5.4. Biometrische Duration . . . . .                              | 110        |
| 5.5. Eigenschaften der biometrischen Duration . . . . .           | 125        |
| 5.6. Kombinierte Duration . . . . .                               | 128        |
| 5.7. Approximation des Deckungskapitals . . . . .                 | 131        |
| <b>6. Weitere Anwendungen des Durationskonzepts</b>               | <b>145</b> |
| 6.1. Durationsmaße für Berufsunfähigkeitsversicherungen . . . . . | 145        |
| 6.2. Durationsmaße für Änderungen von Inflationsraten . . . . .   | 158        |
| <b>7. Fazit</b>   | <b>165</b> |
| <b>A. Anhang</b>  | <b>169</b> |
| A.1. Zinsstrukturkurven . . . . .                                 | 169        |
| A.1.1. Spot Rate Zinsstrukturkurven . . . . .                     | 169        |
| A.1.2. Forward Rate Zinsstrukturkurven . . . . .                  | 170        |
| A.2. Sterbetafeln . . . . .                                       | 172        |
| A.2.1. Allgemeine deutsche Sterbetafel (ADSt) 2014/16 . . . . .   | 172        |
| A.2.2. Ausgewählte Sterbetafeln der DAV . . . . .                 | 175        |
| A.3. Daten Beispiel Inflation . . . . .                           | 179        |
| A.4. Beweis zu Monotonie-Aussagen . . . . .                       | 180        |
| A.4.1. Beweis zu Satz 5.21 . . . . .                              | 180        |
| <b>Literatur</b>  | <b>185</b> |

# Abbildungsverzeichnis

|  |     |
|--|-----|
| 3.1. Darstellung des Kapitalwerts im Zeitverlauf . . . . .   | 23  |
| 3.2. Darstellung des Kapitalwerts als Funktion in Abhängigkeit des Zinssatzes . . . . .                                  | 24  |
| 3.3. Beispiel einer Parallelverschiebung einer flachen Zinsstrukturkurve . . . . .                                       | 25  |
| 3.4. Darstellung des Approximationsfehlers $R_1$ . . . . .   | 29  |
| 3.5. Darstellung des Approximationsfehlers $R_2$ . . . . .   | 32  |
| 3.6. Verwendete Zinsstrukturkurven in Beispiel 3.11. . . . .   | 33  |
| 3.7. Verlauf der Barwertfunktionen aus Beispiel 3.11. . . . .  | 34  |
| 3.8. Beispiel einer Parallelverschiebung einer Spot Rate Zinskurve. . . . .  | 40  |
| 3.9. Verwendete Spot Rate Kurven in Beispiel 3.22. . . . .   | 45  |
| 3.10. Verlauf der Barwertfunktionen aus Beispiel 3.22. . . . .   | 46  |
| 3.11. Beispiele nicht-paralleler Verschiebungen einer Spot Rate Kurve. . . . .   | 47  |
|  |     |
| 4.1. Nicht-parallele Veränderung einer Forward Rate Zinsstrukturkurve. . . . .   | 53  |
| 4.2. Verwendete Zinsstrukturkurven in Beispiel 4.8. . . . .  | 61  |
|  |     |
| 5.1. Vergleich Sterbetafeln DAV1994T und DAV2008T . . . . .  | 106 |
| 5.2. Anzahl lebender Personen nach Männern und Frauen getrennt . . . . .   | 108 |
| 5.3. Allgemeine deutsche Sterbetafel ADSt 2014/16 . . . . .  | 108 |
| 5.4. Vergleich geschlechtsspezifischer Sterbewahrscheinlichkeiten . . . . .  | 135 |
| 5.5. Vergleich Verlaufs des Deckungskapitals bei Änderung der Sterbetafel in Beispiel<br>5.32 . . . . .                  | 139 |
| 5.6. Zinsentwicklung in Beispiel 5.32 . . . . .  | 140 |
| 5.7. Verlauf des Deckungskapitals bei Änderung der Zinsstrukturkurve in Beispiel 5.32                                    | 141 |
| 5.8. Verlauf des Deckungskapitals bei Änderung der Sterbetafel und der Zinsstruktur-<br>kurve in Beispiel 5.32 . . . . . | 143 |
|  |     |
| 6.1. Übergänge in der Berufsunfähigkeitsversicherung . . . . .   | 148 |
| 6.2. Darstellung der Kapitalmarktzinsen und Inflationsraten von 1992 bis 2021 . . . . .                                  | 162 |
| 6.3. Darstellung der Szenarien der Kapitalmarktentwicklung . . . . .   | 163 |



# Tabellenverzeichnis

|   |     |
|---|-----|
| 3.1. Vergleich der Barwertapproximationen in Beispiel 3.11 . . . . .          | 33  |
| 3.2. Vergleich der Barwertapproximationen in Beispiel 3.22 . . . . .          | 45  |
| 4.1. Vergleich der Barwertapproximationen in Beispiel 4.8 . . . . .           | 61  |
| 4.2. Vergleich der Barwertänderung und Sensitivität in Beispiel 4.8 . . . . . | 62  |
| A.1. Daten Spot Rate Zinsstrukturkurven, Zinssätze in % angegeben . . . . .   | 169 |
| A.2. Daten Forward Rate Zinsstrukturkurven . . . . .                          | 170 |
| A.3. Daten Zinsstrukturkurve in Beispiel 5.32 . . . . .                       | 172 |
| A.4. Allgemeine deutsche Sterbetafel (ADSt) 2014/16 . . . . .                 | 172 |
| A.5. Ausgewählte Sterbetafeln der DAV . . . . .                               | 175 |
| A.6. Verwendete Werte in Beispiel 6.2 . . . . .                               | 179 |

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1. Motivation

Lebensversicherungen haben eine große Bedeutung für die Alters- und Hinterbliebenenvorsorge. Die Absicherung von wirtschaftlichen Risiken aus unsicheren Lebensumständen war in den letzten Jahrzehnten und ist heute noch ein wesentlicher Antrieb für den Abschluss von Lebensversicherungen. So zählt der Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft (GDV) im Jahr 2019 insgesamt 82,8 Millionen Lebensversicherungsverträge [Ges20]. Ein Großteil dieser Verträge sind Rentenversicherungen, die für viele ein wichtiges Element der privaten Altersvorsorge darstellen.

Solche Versicherungsverträge werden in der Regel mit sehr langen Laufzeiten, oft mehrere Jahrzehnte, abgeschlossen. Dabei wird typischerweise schon zu Vertragsbeginn ein Garantiezins über die gesamte Laufzeit festgelegt. Gerade in den 80er und 90er Jahren garantierte der Abschluss einer Lebensversicherung einen hohen Zins über die gesamte Laufzeit, wodurch Lebensversicherungen attraktive und sichere Finanzprodukte waren.

Die Höhe der Zinssätze hat dabei einen wesentlichen Einfluss auf die Berechnungen der Prämien- und Leistungskalkulation. Insbesondere bei Verträgen mit langen Laufzeiten beeinflussen die garantierten Zinssätze die konkreten Werte der Prämien bzw. Leistungen. Neben diesen Werten beeinflussen die angenommenen Zinssätze auch die Höhe des Deckungskapitals, d.h. das Guthaben des Versicherungsnehmers, innerhalb der Vertragslaufzeit. Während Prämien bzw. Leistungen vertraglich fest vereinbart werden, wird die Höhe des Deckungskapitals (auch) durch die tatsächlich erzielten Zinserträge bestimmt.

Aufgrund der Volatilität der Finanzmärkte lassen sich zukünftige Zinssätze nur schwer vorhersagen. Schwankungen in den Zinssätzen wirken sich damit auf die kalkulierten Größen wie z.B. die Höhe des Deckungskapitals aus. Sind die Zinserträge niedriger als angenommen, reicht das angesparte Guthaben nicht aus, um allen vertraglichen Verpflichtungen nachzukommen. Es müssen daher zusätzliche Rückstellungen gebildet werden, wodurch für Versicherungsunternehmen ein erhöhter Kapitalbedarf entsteht.

Somit stellen Auswirkungen, die sich aus Änderungen der bei Vertragsabschluss angenommenen Zinssätze ergeben, für Versicherungsunternehmen ein Risiko dar. Dieses Risiko wird als *Zinsänderungsrisiko* bezeichnet. Die Identifizierung, Messung und Steuerung des Zinsänderungsrisikos ist eine wesentliche Aufgabe des Risikomanagements [BH95; FMC03;

Ho92]. Insbesondere auf Finanzmärkten mit hoher Zinsvolatilität ist es zwingend erforderlich, die Auswirkungen von Zinsänderungen zu untersuchen.

Auch aufgrund von Solvabilitätsanforderungen durch Solvency II ist es für Versicherungsunternehmen erforderlich derartige Risiken zu berücksichtigen. Ein Kernpunkt der Regelungen von Solvency II ist u.a. die Anforderung an die Bestimmung von risikoadäquaten und angemessenen Eigenkapitalanforderungen an Versicherungsunternehmen. Es soll Solvenzkapital, d.h. eine sogenannte Solvabilitätsspanne gebildet werden, das als Sicherheitspolster Verluste durch „ungünstige Geschäftsschwankungen“ [Eur02, Ziffer (39)] ausgleichen kann, um alle vertraglichen Verpflichtungen zu erfüllen [Eur02; Eur09; HP07; RB05].

Dabei soll nach Art des Risikos unterschieden werden und entsprechend unterschiedlich hohe Rücklagen gebildet werden. Für Lebensversicherungsunternehmen ist demnach zu berücksichtigen, wie sich Änderungen der angenommenen Zinssätze, aber auch weiterer bei der Kalkulation verwendeter, risikobehafteter Größen, auswirken. Neben den Zinssätzen sind hierbei insbesondere die biometrischen Daten, wie Sterbewahrscheinlichkeiten oder Invalidisierungswahrscheinlichkeiten zu nennen.

Sterbewahrscheinlichkeiten werden bei der Prämien- und Leistungskalkulation von Lebensversicherungen verwendet, um die Unsicherheit des Eintritts von Erlebens- und Todesfalleistungen zu berücksichtigen. Die Werte der Sterbewahrscheinlichkeiten ändern sich allerdings im Laufe der Zeit. Stetig steigende Langlebigkeit durch medizinischen Fortschritt und steigendes Gesundheitsbewusstsein steht kurzfristigen Schwankungen durch Pandemien, Naturkatastrophen, Zuwanderung etc. entgegen. Auch die langfristigen Folgen des Klimawandels beeinflussen die Sterblichkeiten in noch nicht quantifizierbarem Ausmaß. Solche Entwicklungen zu berücksichtigen ist bei Versicherungsverträgen aufgrund der langen Vertragslaufzeiten oft nicht möglich.

Zukünftige Sterblichkeitsverbesserungen können zu einem erheblichen Anstieg der Versicherungsleistungen im Bereich der Pensions- und Altersversicherung führen. Daher ist es insbesondere für Rentenversicherungen von essentieller Bedeutung, derartige Trends zu erfassen [Ort16].

Neben dem Zinsänderungsrisiko ist somit auch das Risiko zu beachten, das sich aus den Auswirkungen von Schwankungen in den biometrischen Daten ergibt. Dieses Risiko wird als *biometrisches Änderungsrisiko* bezeichnet. Führt der Anstieg der Sterbewahrscheinlichkeiten zu einem Anstieg des Werts der Verbindlichkeiten, spricht man vom sogenannten Sterblichkeitsrisiko. Führt der Rückgang der Sterblichkeitsraten zu einem Anstieg des Werts der Verbindlichkeiten, spricht man hingegen vom sogenannten Langlebigkeitsrisiko [Bec+16; Eur09; Hul14; Kah18; KV17; Wag17].

Es ist allgemein anerkannt, dass auch das biometrische Risiko in der Lebensversicherung eine wesentliche Rolle spielt, da es die Höhe der erwarteten Prämien und Leistungen, sowie die Entwicklung des Deckungskapitals beeinflusst [Bau+08; CBD06; GW14]. Damit wird das Ausmaß der notwendigen Kapitalanforderungen eines Versicherungsunterneh-

mens auch durch dieses Risiko beeinflusst.

Für das Risikomanagement von Versicherungsunternehmen ist es nun eine zentrale Aufgabe, die Auswirkungen der Veränderungen sämtlicher bei der Kalkulation verwendeter Größen zu kennen. Es besteht die Notwendigkeit einer angemessenen Quantifizierung und Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos, sowie des biometrischen Risikos (siehe z.B. [CBD06; Chr07; Pla11]).

## 1.2. Literaturüberblick

In der Literatur existieren bereits seit vielen Jahren zahlreiche Arbeiten, die sich mit der Messung des Zinsänderungsrisikos befassen. Viele Resultate dieser Arbeiten gehören zur gängigen Lehrpraxis und sind in Lehrbüchern zur Finanzmathematik und zum Risikomanagement aufgeführt.

Im Risikomanagement der Praxis sind die wohl am häufigsten verwendeten Maße für das Zinsänderungsrisiko die Durationsmaße. Sie sind weitverbreitet und stellen das Standardkonzept zur Analyse des Zinsänderungsrisikos dar [BH95; Ell01a; Hul14]. Das erste Durationsmaß wurde von Frederick R. Macaulay im Jahre 1938 in [Mac38] eingeführt. Es ist definiert als die durchschnittliche Restlaufzeit einer Zahlungsreihe. Diese *Macaulay-Duration* wurde von Hicks modifiziert, um sie für die Messung der *Zinssensitivität*, d.h. die relative Änderung des Barwerts einer Zahlungsreihe im Bezug auf Änderungen einer Zinsstrukturkurve, anwenden zu können [Hic39]. Diese modifizierte Duration nähert den relativen Wert an, um den sich der Barwert ändert, wenn sich der zugrundeliegende konstante Zinssatz um einen Prozentpunkt ändert. Da somit das Ausmaß einer Zinsänderung auf den Barwert quantifiziert wird, kann diese Größe direkt als Maß für das Zinsänderungsrisiko verwendet werden. Macaulay und Hicks gehen dabei von einer flachen Zinsstrukturkurve, d.h. einem über die gesamte Laufzeit konstanten Zinssatz aus. Die modifizierte Duration stellt somit ein Maß für das Zinsänderungsrisiko bzgl. einer Parallelverschiebung einer flachen Zinsstrukturkurve dar.

Um die durchschnittliche Restlaufzeit einer Zahlungsreihe auf Grundlage einer nicht-flachen Spot Rate Zinsstrukturkurve berechnen zu können, kann die von Fisher und Weil definierte, sogenannte effektive Duration (auch Fisher-Weil-Duration genannt) verwendet werden [FW71]. Darauf aufbauend misst die sogenannte *modifizierte effektive Duration* die Zinssensitivität eines Barwerts bezüglich einer Parallelverschiebung einer Spot Rate Zinsstrukturkurve.

Thomas Ho beschreibt in [Ho92] ein Durationsmaß zur Messung der Zinssensitivität bzgl. der Änderung einer einzelnen Key Rate. Mit Hilfe dieser sogenannten *Key Rate Duration* kann die Zinssensitivität auch bzgl. einer nicht-parallelen Verschiebung der Zinsstrukturkurve quantifiziert werden [Ho92].

Mit all diesen Durationsmaßen wird die relative Barwertänderung aufgrund einer Än-

derung der zugrundeliegenden Zinsstrukturkurve durch eine lineare Approximation angenähert. Da die Barwertfunktion in der Regel keine lineare Funktion ist, nimmt man einen Approximationsfehler in Kauf. Um diesen Fehler zu verringern, kann die sogenannte *Konvexitätsgröße* verwendet werden, die die Krümmung der Barwertfunktion berücksichtigt [Tra07].

Neben den Durationsmaßen, stellen Konvexitätsgrößen somit ein ergänzendes Instrument bei der Analyse des Zinsänderungsrisikos dar. Die Kombination von Durationsmaßen und Konvexitätsmaßen führt zu einer verbesserten Risikokennzahl. Analog zur Entwicklung der Durationsmaße, existiert neben der Konvexitätsgröße zur Betrachtung einer Parallelverschiebung einer flachen Zinsstrukturkurve, die effektive Konvexität für die Anwendung einer Parallelverschiebung einer nicht-flachen Spot Rate Zinsstrukturkurve. Passend zur Key Rate Duration lässt sich schließlich auch eine Key Rate Konvexität definieren und anwenden.

Typischerweise wird in gängigen Lehrwerken lediglich die Möglichkeit der Analyse des Zinsänderungsrisikos bei flachen Zinsstrukturkurven und entsprechenden Parallelverschiebungen vorgestellt. Bei der Prämien- und Leistungskalkulation von Lebensversicherungen wird häufig mit einem über die gesamte Laufzeit konstantem Zinssatz gerechnet. In der Lebensversicherungsmathematik finden sich dementsprechend auch (nur) Ansätze zur Analyse des Zinsänderungsrisiko bzgl. Parallelverschiebungen einer flachen Zinsstrukturkurve [Mül12; Ort16].

Gerade im Bereich der Lebensversicherung ist aufgrund der angesprochenen Solvabilitätsanforderungen durch das Regelwerk von Solvency II eine angemessene Berücksichtigung des Zinsänderungsrisikos notwendig. Bei langen Laufzeiten von bspw. Rentenversicherungen ist schlicht nicht von einem über die gesamte Laufzeit konstantem Zinssatz auszugehen, sowie von einer konstanten Änderung dieses Zinssatzes über viele Jahre.

Um für versicherungsmathematische Berechnungen nicht mehr einen über die gesamte Laufzeit konstanten Zinssatz zu verwenden, ist es sinnvoll, anfallende Zahlungen, wie erwartete Leistungen und Prämien mit jährlichen Forward Rate Zinssätzen zu diskontieren.

Im Gegensatz zu Spot Rates, passt die Verwendung von Forward Rates zur typischerweise jährlichen Betrachtung bei versicherungsmathematischen Berechnungen. Hier findet eine solche jährliche Betrachtung aller Zahlungen statt, um die jährlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten der Leistungsfälle berücksichtigen zu können. So ist auch im Rahmen der Bewertung künftiger Zahlungen in der Solvenzbilanz gemäß Solvency II die Verwendung von Forward Rate Zinssätzen vorgesehen [Eur09; Grü+17].

Mit den bisher in der Literatur vorgestellten (Durations-)Größen ist es Versicherungsunternehmen allerdings nicht möglich, das Zinsänderungsrisiko angemessen zu quantifizieren, da diese Größen keine Anwendung von Forward Rate Zinssätzen ermöglichen. Hier besteht Bedarf an Instrumenten, mit denen das Zinsänderungsrisiko aufgrund von Änderungen in einer Forward Rate Zinsstrukturkurve gemessen werden kann. Für die Praxis ist es insbesondere wünschenswert, dass diese Instrumente mit den dort angewandten mathemati-

schen Methoden kompatibel sind. Es ist somit zwingend notwendig derartig anwendbare Risikokennzahlen zu entwickeln und die Anwendung von Forward Rates im Risikomanagement von Versicherungsunternehmen zu ermöglichen.

Wie bereits erwähnt, ist ein weiterer zentraler Bestandteil des Risikomanagements im Bereich der Lebensversicherung die Berücksichtigung biometrischer Risiken. Da auch die Verwendung der biometrischen Daten die Berechnung versicherungstechnischer Größen beeinflusst, besteht Bedarf an einer angemessenen Berücksichtigung der Auswirkungen dieser Risiken [Bau+08; CBD06; GW14; Pla11].

Eine Möglichkeit mit biometrischen Risiken umzugehen, besteht in der Modellierung der Sterbewahrscheinlichkeiten mittels stochastischer Prozesse. Dieser Ansatz konzentriert sich auf eine möglichst genaue Vorhersage zukünftiger Trends in den biometrischen Daten. Dadurch werden Abweichungen der prognostizierten Daten von den tatsächlichen Daten weniger wahrscheinlich und das Ausmaß des biometrischen Risikos ist entsprechend gering. Viele der für die Biometrie verwendeten Modelle orientieren sich in ihrer Struktur an stochastischen Prozessen für die Vorhersagen von Zinsstrukturkurvenverläufen, um die Sterbewahrscheinlichkeiten zu bestimmen [Bau+08; Bif05; CBD06; Dah04; LRV12; Sch06].

Ein alternativer Ansatz befasst sich nicht mit der unmittelbaren Vorhersage von Sterblichkeitsänderungen, sondern untersucht die Auswirkungen von Änderungen in den biometrischen Daten. Wird eine (simulierte) Änderung der biometrischen Daten angenommen, lassen sich die unmittelbaren Auswirkungen quantifizieren. Wie schon bei der Untersuchung des Zinsänderungsrisikos, kann über das Ausmaß der Barwertänderung das biometrische Risiko bemessen werden.

Inspiziert durch die Methoden zur Messung des Zinsänderungsrisikos wurde in [Cou+07] der Begriff der *q-Duration* eingeführt. Analog zur Zins-Duration beschreibt die *q-Duration* die Veränderung des Barwerts einer Zahlungsreihe bedingt durch die Änderungen der Sterbewahrscheinlichkeiten „um eine Einheit“ [Cou+07]. Damit misst dieses Durationsmaß die sogenannte *Sterblichkeitssensitivität*, d.h. die relative Änderung des erwarteten Barwerts aufgrund einer Änderung der Sterbewahrscheinlichkeiten.

Das Ziel bei der Anwendung dieser *q-Duration* ist es, den Wert der Verpflichtungen (bspw. eines Versicherungsunternehmens) gegenüber Sterblichkeitsverbesserungen und damit gegenüber Änderungen in der Sterbetafel abzusichern [Cou09].

Um die Auswirkungen des biometrischen Risikos gering zu halten, kann die Gegensätzlichkeit des Langlebigkeits- und Sterblichkeitsrisikos ausgenutzt werden, da sich diese beiden Risiken bis zu einem gewissen Grad „ausgleichen“ [Hul14; Wan+10]. So soll ein Portfolio von Renten- und Risikolebensversicherungsverträgen derart zusammengestellt werden, dass Änderungen in der Sterbetafel nicht den Wert der Verpflichtungen beeinflussen. In diesem Fall nimmt die *q-Duration* dieser Verpflichtungen den Wert Null an. Man spricht dann von einer optimalen, risikoneutralen (oder auch immunisierten) Zusam-

mensetzung der Verpflichtungen („Hedging“) [GW14; Wan+10]. Gleichen sich die Risiken der Renten- und Risikolebensversicherungen innerhalb des Bestands eines Versicherungsunternehmens aus, spricht man auch von einer „natürlichen Hedging Strategie“ [Wan+10].

Der Begriff der  $q$ -Duration wird zwar in [Cou+07] bzw. [Cou09] eingeführt, wird allerdings ohne formale Definitionen angegeben [LT13]. Erst Wang et al. [Wan+10] beschreiben eine konkrete Sterblichkeitsduration, mit dem Ziel eine Immunisierungsstrategie für das Langlebighkeitsrisiko anzugeben. Ausgehend von der Annahme einer konstanten Sterblichkeit orientieren sie sich an der modifizierten Macaulay Duration zur Messung des Zinsänderungsrisikos und leiten ein entsprechendes Durationsmaß her [Wan+10]. Mithilfe dieser Sterblichkeitsduration kann die Auswirkung einer Änderung der Sterblichkeit auf den Wert der Verpflichtungen eines Versicherungsunternehmens approximiert werden. Eine Schwäche dieses Ansatzes zeigt sich in der Annahme einer konstanten Sterblichkeit, da Sterbewahrscheinlichkeiten für verschiedene Altersjahre typischerweise unterschiedlich sind [LL12; Pla11; Wan+10].

Um diese Dynamik in den Sterblichkeiten besser abbilden zu können, beschreiben sowohl Wang et al. [Wan+10] als auch Plat [Pla11] mit der effektiven Sterblichkeitsduration bzw. effektiven  $q$ -Duration eine Größe, die nicht-konstante Sterblichkeiten berücksichtigt. Dabei adaptieren sie die modifizierte effektive Duration zur Messung der Zinssensitivität bzgl. einer Parallelverschiebung einer Zinsstrukturkurve zur Messung des biometrischen Risikos [Pla11; Wan+10]. Analog wird auch die effektive Konvexität adaptiert und als Sterblichkeitskonvexität bzw.  $q$ -Konvexität verwendet, um die Approximation des Werts der Verpflichtungen nach einer Änderung der Sterblichkeiten verbessern zu können.

Sowohl die in [Cou09], als auch in [Pla11] oder [Wan+10] beschriebenen Größen ermöglichen lediglich die Betrachtung einer konstanten Änderung der Sterbewahrscheinlichkeiten und damit einer Parallelverschiebung der zugrundeliegenden Sterbetafel. Eine Schwäche in der Messung des biometrischen Risikos liegt dadurch in der Bestimmung des Ausmaßes der angenommenen Änderung, da sich Sterbewahrscheinlichkeiten in der Regel unterschiedlich für unterschiedliche Altersgruppen und zukünftige Jahre ändern [LL12; Pla11].

Um diese Schwäche zu beseitigen, orientieren sich auch Li und Luo an Maßen zur Messung des Zinsänderungsrisikos. Analog zu Ho’s Key Rate Duration beschreiben sie in [LL12] mit der Key  $q$ -Duration ein Maß, das die Schätzung der Sterblichkeitssensitivität bei Änderung einzelner Sterbewahrscheinlichkeiten ermöglicht. Damit erweitern sie die effektive  $q$ -Duration und stellen eine Möglichkeit dar, das biometrische Risiko zu messen, wenn nicht-parallele Änderungen einer Sterbetafel vorliegen. Um optimale Hedging Strategien zur Absicherung des Langlebighkeitsrisikos zu wählen, verwenden Sie jedoch nur spezielle  $q$ -Forward Verträge, für die die Key  $q$ -Durationen leicht berechnet werden können. Dazu ist die Berechnung der Key  $q$ -Duration nicht von einem bestimmten Sterblichkeitsmodell abhängig. Im Allgemeinen ist es daher in den „meisten Fällen“ nicht möglich, die Key  $q$ -Duration analytisch zu berechnen [LH11; LL12].

Bei all diesen Ansätzen zur Bestimmung von Durationsmaßen zur Quantifizierung des Ausmaßes von Änderungen in einer Sterbetafel werden stark vereinfachende Annahmen getroffen. So wird grundsätzlich von einem konstanten Zinssatz ausgegangen [LH11; LL12; Pla11; Wan+10], es werden nur Änderungen einzelner Sterbewahrscheinlichkeiten [LL12; LH11] oder Parallelverschiebungen [LT13; Pla11; Wan+10] betrachtet. Da diese Ansätze das Ziel verfolgen optimale Hedging Strategien zur Absicherung des Langlebigkeitsrisikos zu beschreiben, werden die Durationsmaße stets für die gesamten Verpflichtungen eines Versicherungsunternehmens und nicht für einzelne Versicherungsverträge betrachtet. Diese ganzheitliche Betrachtungsweise ist nicht geeignet, um einzelne, konkrete Zahlungsreihen, die in der Versicherungsmathematik einen Versicherungsvertrag charakterisieren, zu untersuchen. Für die versicherungsmathematische Praxis ist es somit nicht möglich, Auswirkungen von Änderungen in der zugrundeliegenden Sterbetafel mit den beschriebenen Durationsmaßen zu quantifizieren.

Im Sinne des praktischen Risikomanagements ist es allerdings erforderlich und wünschenswert, Risikomaße zu kennen, die mit der Methodik der Versicherungsmathematik kompatibel und unmittelbar anwendbar sind. Die Anforderungen, die das Regelwerk von Solvency II an die ständige Überwachung der Risiken stellt, erfordern „einfach anwendbare“ Instrumente für das Zinsänderungsrisiko, sowie für das biometrische Änderungsrisiko.

Mithilfe von Durationsmaßen können Zinsrisiken auf einfache Weise analytisch identifiziert und interpretiert werden. Das grundlegende Konzept dieser Durationsmaße wurde bereits auf biometrische Risiken übertragen. Für die Praxis von Versicherungsunternehmen lassen sich diese Größen aber nur eingeschränkt zur Messung der Risiken verwenden. Zum einen findet sich bislang kein Durationsmaß, das die Berücksichtigung von Forward Rates ermöglicht, die für die Betrachtung versicherungsmathematischer Zahlungen notwendig sind. Zum anderen sind die  $q$ -Durationsmaße bei der Beurteilung biometrischer Risiken für die versicherungsmathematische Praxis ungeeignet.

Das Ziel dieser Arbeit ist es daher diese Lücken zu schließen und zunächst ein Durationsmaß für die Anwendung einer Forward Rate Zinsstrukturkurve zu entwickeln. Außerdem soll auch ein Durationskonzept vorgestellt werden, das als Risikokennzahl für das biometrische Risiko anwendbar ist. Vor allem sollen so Instrumente zur Verfügung gestellt werden, welche direkt für das praktische, versicherungsmathematische Risikomanagement anwendbar und interpretierbar sind.

### 1.3. Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 werden Begrifflichkeiten aus der Finanzmathematik wiederholt. Sie bilden eine formale Grundlagen für die vorliegende Arbeit darstellen. Insbesondere werden die unterschiedlichen Typen von Zinsstrukturkurven und die jeweils daraus resultierende Bewertung von Zahlungsreihen beschrieben. Der Begriff des Zinsänderungsrisiko wird in Abschnitt 2.2 formal eingeführt.

Kapitel 3 stellt eine Übersicht über die bestehenden Durationsmaße zusammen, die als Risikokennzahlen für das Zinsänderungsrisiko verwendet werden können. Durch die genaue Betrachtung dieser Größen, soll die grundsätzliche Idee des Durationskonzepts offengelegt werden, um analytische Gemeinsamkeiten erkennen zu können. Dies erlaubt es in Kapitel 4 die sogenannte Forward Rate Duration zur Messung des Zinsänderungsrisikos herzuleiten. Neben der Forward Rate Duration wird auch die sogenannte Forward Rate Konvexität definiert und analysiert. Es wird sich herausstellen, dass die Forward Rate Duration als Verallgemeinerung der bestehenden Durationsmaße verstanden werden kann. Darüber hinaus werden Eigenschaften der neu definierten Größen untersucht.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit Durationsmaßen für die Lebensversicherungsmathematik. Zunächst werden dazu in Abschnitt 5.1 die Grundlagen der Prämien- und Leistungskalkulation von Lebensversicherungen beschrieben. In Abschnitt 5.2 werden die Resultate aus Kapitel 4 auf versicherungsmathematische Zahlungsreihen angewendet, um das Zinsänderungsrisiko von erwarteten Barwerten in der Lebensversicherungsmathematik bemessen zu können.

Weiterhin wird in Abschnitt 5.3 der Begriff des biometrischen Risikos definiert und erläutert. Abschnitt 5.3.2 beschreibt den strukturellen Zusammenhang zwischen Sterbewahrscheinlichkeiten und Zinssätzen. Dieser Abschnitt ist insofern von großer Bedeutung für die weitere Arbeit, da der Zusammenhang es auf einfache Art und Weise ermöglicht, die Ideen der Forward Rate Duration aus Abschnitt 4 auf biometrische Größen zu übertragen und für die Messung des biometrischen Risikos anzuwenden. Diese Herleitung und Beschreibung der biometrischen Duration ist in Abschnitt 5.4 enthalten. Auch hier wird analog zu Abschnitt 4 eine sogenannte biometrische Konvexität definiert und Eigenschaften der definierten Größen betrachtet. In Abschnitt 5.6 werden die Konzepte der Forward Rate Duration und der biometrischen Duration kombiniert, um gleichzeitig die Auswirkungen von Änderungen in der Zinsstrukturkurve und der Sterbetafel zu bestimmen. Abschließend zu Kapitel 5 wird in Abschnitt 5.7 die Anwendbarkeit der entwickelten Durationsmaße dargestellt. Die biometrische Duration wird auf das Deckungskapital, als zentrale Größe der Lebensversicherungsmathematik, angewendet.

Darüber hinaus wird auch die Anwendbarkeit des Konzepts der biometrischen Duration auf weitere risikobehaftete Größen verdeutlicht. Dazu wird in Kapitel 6 das Konzept auf die biometrischen Größen erweitert, die für die Kalkulation von Berufsunfähigkeitsversicherungen benötigt werden, d.h. Invalidisierungs- und Reaktivierungswahrscheinlichkeiten. Schließlich wird das Konzept auch auf Inflationsraten als nicht-biometrische Größen angewendet.

Die Arbeit schließt mit einem Fazit in Kapitel 7.

# Kapitel 2

## Finanzmathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die finanzmathematischen Grundlagen vorgestellt, die im weiteren Verlauf der Arbeit benötigt werden. Dabei werden insbesondere drei unterschiedliche Arten von Zinsstrukturkurven, d.h. eine flache Zinsstrukturkurve, eine Spot Rate Zinsstrukturkurve, sowie eine Forward Rate Zinsstrukturkurve, eingeführt, sowie die sich jeweils daraus ergebende Bewertung von Zahlungsreihen. Außerdem wird der Begriff des Zinsänderungsrisiko definiert und eingeführt.

### 2.1. Bewertung von Zahlungsreihen

Die Finanzmathematik stellt quantitative Methoden bereit, mit deren Hilfe der Wert eines Kapitalbetrags zu verschiedenen Zeitpunkten dargestellt werden kann. Ebenso lassen sich mit diesen finanzmathematischen Instrumenten zu verschiedenen Zeitpunkten fällige Kapitalbeträge miteinander vergleichen oder zusammenfassen [Tie15]. In dieser Arbeit wird grundsätzlich ein Zeithorizont von  $n$  Perioden betrachtet, wobei für die Länge einer Periode üblicherweise ein Jahr angesehen wird. Zahlungen können zu den  $n + 1$  diskreten Zeitpunkten innerhalb des Zeithorizonts  $[0, n]$  anfallen. Um den Wert eines Kapitalbetrags auf einen anderen Zeitpunkt zu übertragen, wird die Zinseszinsrechnung angewandt. Der Zins kann hierbei als Nutzungsentgelt für zeitweilige Kapitalüberlassung verstanden werden [Tie15].

Für das Verhältnis eines Anfangswerts  $K_0$  und eines Endwerts  $K_n$  gilt der Zusammenhang [Ort16]:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n.$$

Der Zinssatz  $i$  kann dadurch als Änderungsrate einer Periode verstanden werden, mit der das Kapital  $K_0$  in  $n$  Perioden auf den Wert  $K_n$  anwächst:

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1. \quad (2.1)$$

Sind die Werte  $K_0$  und  $K_n$  gegeben, so lässt sich auf diese Weise die Änderungsrate bestimmen, mit der das Anfangskapital  $K_0$  in einer Periode anwächst. Mit dieser periodischen Änderungsrate  $i$  lassen sich, neben dem Anfangs- und dem Endwert, auch die

Kapitalwerte  $K_t$  zu Zeitpunkten  $t \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  angeben. Insgesamt gilt dann:

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t, \quad \text{für } t = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

### Bemerkung 2.1

Es wird in der gesamten Arbeit nicht unterstellt, dass  $|K_t|$  monoton steigend sein muss, allerdings, dass keine vollständige Kapitalvernichtung vorliegt, d.h. es gilt  $|K_t| > 0$ , für alle  $0 < t \leq n$ . Damit lässt sich für den Zins  $i$  der Wertebereich durch  $i > -1$  einschränken. Insbesondere ist so auch ein negativer Zinssatz  $-1 < i < 0$  möglich, was einem negativen Wachstum von  $K_0$  auf  $K_t < K_0$  entspricht.

Weiterhin lässt sich mit (2.2) auch der Wert des Kapitals  $K_t$  zum Zeitpunkt 0 durch

$$K_0 = K_t \cdot (1+i)^{-t}$$

ausdrücken oder allgemeiner auch auf vergangene Zeitpunkte  $0 < t \leq t+m$ :

$$K_t = K_{t+m} \cdot (1+i)^{-m}, \quad \text{mit } m \geq 0. \quad (2.3)$$

Durch die Verwendung des *Aufzinsungsfaktors*  $(1+i)$  bzw. Diskontierungsfaktors (oder *Abzinsungsfaktor*)  $v = (1+i)^{-1}$  ist es möglich, das Kapital zu beliebigen Zeitpunkten zu bewerten. Die Bewertung  $K_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  bezeichnet man als Barwert [Ort16].

Sei  $Z_t$  eine Zahlung, die zu einem festen Zeitpunkt  $t$  fällig ist, d.h. zu diesem Zeitpunkt geleistet bzw. gezahlt wird. Beschreibt  $Z_t$  beispielsweise die Auszahlung bzw. Rückzahlung einer Anleihe, so wird der Zeitpunkt  $t$  dabei auch Fälligkeitszeitpunkt genannt. Dieser Zeitpunkt wird hier synonym mit der Fristigkeit, also der Laufzeit der Anleihe verwendet, da die Betrachtung stets im Zeitpunkt  $t = 0$  stattfindet.

Häufig werden in der Realität Zahlungen mit unterschiedlichen Fälligkeitszeitpunkten auch mit unterschiedlichen Zinssätzen bewertet [SU01]. Damit ist die Änderungsrate  $i$  vom betrachteten Zeitpunkt  $t$  und damit von der Laufzeit einer Anleihe abhängig.

Es liegen somit  $n$  Zinssätze vor, die abhängig vom Fälligkeitstermin  $t$  für den Zeitraum  $[0, t]$  angewendet werden. Daher spricht man in diesem Fall auch von fristgerechten Kassazinssätzen oder auch *Spot Rates*  $i_{[0,t]}$  [SU01].

Der Barwert  $K_0$  einer Zahlung  $Z_t$  ergibt sich dann aus der Diskontierung mit dem Zinssatz  $i_{[0,t]}$  über  $t$  Perioden auf den Zeitpunkt 0:

$$K_0 = Z_t \cdot (1+i_{[0,t]})^{-t}, \quad \text{für } t = 1, \dots, n.$$

Fasst man die  $n$  Spot Rates in einem Vektor  $I^S \in \mathbb{R}^n$  zusammen, so spricht man im

Allgemeines von einer (Frist-) Zinsstrukturkurve oder *Spot Rate Kurve*

$$I^S = (i_{[0,1]}, i_{[0,2]}, \dots, i_{[0,n]}) \in \mathbb{R}^n.$$

Gilt wiederum  $i_{[0,t]} = i$  für alle  $t = 1, \dots, n$ , so spricht man von einer *flachen Zinsstrukturkurve*  $\bar{I}$  [SB17], mit

$$\bar{I} = (i, i, \dots, i) \in \mathbb{R}^n.$$

Wird eine solche flache Zinsstrukturkurve betrachtet, lässt sich, anstelle von (2.1), der Zinssatz  $i$  auch als Änderungsrate zwischen zwei aufeinander folgenden Zeitpunkten darstellen. Dafür kann Gleichung (2.3) für  $m = 1$  umgestellt werden zu

$$i = \frac{K_{t+1}}{K_t} - 1, \quad \text{für alle } t = 0, \dots, n-1.$$

Der Zinssatz  $i$  wird damit direkt als Änderungsrate des Kapitals in einer Periode  $[t, t+1]$  definiert. Sind die Kapitalwerte  $K_0, K_1, \dots, K_n$  gegeben, so lässt sich auf diese Weise für jede Periode ein unterschiedlicher Zinssatz  $i_{[t,t+1]}$  bestimmen, der nicht notwendigerweise für alle Perioden identisch sein muss und damit von der  $t+1$ -ten Periode abhängt. Es ist

$$i_{[t,t+1]} = \frac{K_{t+1}}{K_t} - 1, \quad \text{für } t = 0, \dots, n-1. \quad (2.4)$$

Diese Zinssätze  $i_{[t,t+1]}$  sind für die zugehörige Periode  $[t, t+1]$  definiert und damit - im Gegensatz zu Spot Rates - unabhängig von der Fristigkeit einer Zahlung. Solche Zinssätze werden als periodenadäquate Terminzinssätze oder *Forward Rates* bezeichnet [Ort17].

Für eine Zahlung  $Z_t$  zum Zeitpunkt  $t$  ergibt sich die Bewertung zum Zeitpunkt 0 aus dem Produkt der jährlichen Diskontierungsfaktoren  $v_j = (1 + i_{[j-1,j]})^{-1}$  für  $j \leq t$ :

$$K_0 = Z_t \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_t, \quad \text{für } t = 1, \dots, n.$$

Für  $t = 1, \dots, n$  ergeben sich daraus die Diskontierungsfaktoren

$$v^{(t)} := \prod_{j=1}^t v_j = \prod_{j=1}^t (1 + i_{[j-1,j]})^{-1}. \quad (2.5)$$

Der 0-jährige Diskontierungsfaktor sei durch  $v^{(0)} = \prod_{j=1}^0 v_j := 1$  definiert. Für die Forward Rates  $i_{[t-1,t]}$  wird im Folgenden die Kurzschreibweise  $i_t := i_{[t-1,t]}$  verwendet.

Den Vektor

$$I^F = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbb{R}^n$$

bezeichnet man als Termin-Zinsstrukturkurve oder auch *Forward Rate Zinsstrukturkurve* [SB17].

**Definition 2.2 (Zinsstrukturkurven)**

1. Liegt ein konstanter Zinssatz  $i$  vor, so nennt man

$$\bar{I} = (i, i, \dots, i)$$

eine *flache Zinsstrukturkurve*.

2. Liegen  $n$  Spot Rates  $i_{[0,1]}, i_{[0,2]}, \dots, i_{[0,n]}$  vor, so nennt man

$$I^S = (i_{[0,1]}, i_{[0,2]}, \dots, i_{[0,n]})$$

eine (Frist-) Zinsstrukturkurve oder auch *Spot Rate Zinsstrukturkurve*.

3. Liegen  $n$  Forward Rates  $i_1, i_2, \dots, i_n$  vor, so nennt man

$$I^F = (i_1, i_2, \dots, i_n)$$

eine (Termin-) Zinsstrukturkurve oder auch *Forward Rate Zinsstrukturkurve*.

Häufig wird anstelle einer Zinsstrukturkurve<sup>1</sup> abkürzend auch von einer Zinskurve gesprochen.

Die Anwendung einer flachen Zinsstrukturkurve kann als Spezialfall der beiden weiteren vorgestellten Zinsarten betrachtet werden. Werden für eine Zinsstrukturkurve  $I^S$  Spot Rates  $i_{[0,t]} = i$  für alle  $t = 1, \dots, n$  gewählt, so entspricht  $I^S$  einer flachen Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$ . Ebenso erhält man eine flache Zinskurve  $\bar{I}$ , falls Forward Rates  $i_t = i$  für alle Perioden  $t = 1, \dots, n$  gewählt werden.

Neben diesen Zusammenhängen zu einer flachen Zinskurve, lässt sich auch ein formaler Zusammenhang zwischen einer Spot Rate- und einer Forward Rate Zinsstrukturkurve formulieren.

**Bemerkung 2.3**

Sind Spot Rates  $i_{[0,t]}$  für alle  $t = 1, \dots, n$  gegeben, lässt sich aus diesen - formal - eine Zinsstrukturkurve ermitteln, die aus Forward Rates  $i_t$  besteht und die Eigenschaft besitzt, dass der Barwert einer Zahlung in beiden Zinsmodellen identisch ist. Es soll also gelten:

$$(1 + i_{[0,t]})^{-t} = \prod_{j=1}^t (1 + i_{[j-1,j]})^{-1}.$$

Aufgrund dieser Forderung lässt sich für Forward Rates  $i_t$  die folgende Vorschrift angeben, mit der aus gegebenen Spot Rates  $i_{[0,t]}$ , auf eindeutige Art und Weise Forward Rates  $i_t$

<sup>1</sup>Wird in der Literatur von einer Zinsstrukturkurve gesprochen, so ist üblicherweise eine Spot Rate Zinskurve gemeint.

ermittelt werden können:

$$i_t = \begin{cases} i_{[0,1]}, & \text{für } t = 1, \\ \left(1 + i_{[0,t]}\right)^t \cdot \left(1 + i_{[0,t-1]}\right)^{-(t-1)} - 1, & \text{für } t = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2.6)$$

Umgekehrt lässt sich ebenso angeben, wie sich Spot Rates durch gegebene Forward Rates ausdrücken lassen:

$$i_{[0,t]} = \begin{cases} i_1, & \text{für } t = 1, \\ \sqrt[t]{\prod_{j=1}^t (1 + i_j)} - 1, & \text{für } t = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Eine Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  besteht aus mehreren Zahlungen  $Z_t$ , die zu unterschiedlichen Zeitpunkten  $t = 0, 1, \dots, n$  fällig sind. Um den Wert einer Zahlungsreihe angeben zu können, werden alle Zahlungen zu einem gemeinsamen Zeitpunkt  $t_0$  bewertet, d.h. auf diesen Zeitpunkt auf- bzw. abgezinst. Die Summe dieser Bewertungen wird auch als Kapitalwert zum Zeitpunkt  $t_0$  bezeichnet und mit  $KW_{t_0}$  bezeichnet. Für eine flache Zinsstrukturkurve gilt für den Kapitalwert  $KW_{t_0}(\bar{I})$ :

$$KW_{t_0}(\bar{I}) = \sum_{j=0}^n Z_j \cdot (1 + i)^{t_0 - j}.$$

Werden die Zahlungen zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  bewertet, so spricht man vom (*finanzmathematischen*) Barwert der Zahlungsreihe [Ort16; SU01].

Die Berechnung des Barwerts ist abhängig von den Zinssätzen, die für die Bewertung der Zahlungen herangezogen werden. Ist eine flache Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  gegeben, so bezeichnet man den Barwert mit  $BW(Z, \bar{I})$ . Er berechnet sich durch [SU01]:

$$BW(Z, \bar{I}) = \sum_{j=0}^n Z_j \cdot (1 + i)^{-j}. \quad (2.7)$$

Der Barwert  $BW_S(Z, I^S)$  einer Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  bei gegebener Zinsstrukturkurve  $I^S$  berechnet sich durch (vgl. [SU01]):

$$BW_S(Z, I^S) = \sum_{j=0}^n Z_j \cdot \left(1 + i_{[0,j]}\right)^{-j}. \quad (2.8)$$

Eine sofort fällige Zahlung wird nicht abgezinst, wodurch die Höhe des Zinssatzes den Barwert nicht verändert. Für  $t = 0$  kann daher wegen  $\left(1 + i_{[0,0]}\right)^0 = 1$  der Zinssatz  $i_{[0,0]} = 0$  angenommen werden. Auf diese Weise kann in (2.8) auch die Zahlung  $t = 0$  berücksichtigt werden, wenn die Spot Rates  $i_{[0,t]}$  erst für  $t \geq 1$  durch die Zinsstrukturkurve

$I^S$  gegeben sind.

Wird schließlich eine periodenadäquate Verzinsung mittels einer Forward Rate Zinsstrukturkurve  $I^F$  betrachtet, bezeichnet man den Barwert einer Zahlungsreihe  $Z$  mit  $BW_F(Z, I^F)$ , mit (s. [SU01])

$$BW_F(Z, I^F) = \sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)}. \quad (2.9)$$

Für die drei in Definition 2.2 dargestellten Zinsstrukturkurven werden die entsprechenden Barwertfunktionen einer Zahlungsreihe  $Z$  noch einmal festgehalten.

**Definition 2.4 (Barwerte)**

1. Ist eine flache Zinsstrukturkurve  $\bar{I} = (i, i, \dots, i)$  mit  $i > -1$  gegeben, so ist der Barwert  $BW(Z, \bar{I})$  einer Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  gegeben durch

$$BW(Z, \bar{I}) = \sum_{j=0}^n Z_j \cdot (1 + i)^{-j}.$$

2. Liegt eine (Frist-) Zinsstrukturkurve  $I^S = (i_{[0,1]}, i_{[0,2]}, \dots, i_{[0,n]})$ , mit  $i_{[0,t]} > -1$ , für  $t = 1, \dots, n$ , vor, so ist der Barwert einer Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  gegeben durch

$$BW_S(Z, I^S) = \sum_{j=0}^n Z_j \cdot (1 + i_{[0,j]})^{-j}.$$

3. Liegt eine Forward Rate Kurve  $I^F = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  vor, mit  $i_t > -1$ , für  $t = 1, \dots, n$ , so ist der Barwert einer Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  gegeben durch

$$BW_F(Z, I^F) = \sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)}, \quad \text{mit } v^{(j)} = \prod_{k=1}^j (1 + i_{[k-1,k]})^{-1}.$$

Häufig werden Zahlungsreihen der Form  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$  verwendet. Eine Zahlung  $Z_0$  in  $t = 0$  wird demnach nicht betrachtet. In diesen Fällen werden für den Barwert nur die diskontierten Zahlungen für  $t \geq 1$  aufsummiert. Da über  $Z_0 = 0$  dieser Fall auch betrachtet werden kann, wird in dieser Arbeit die allgemeinere Variante gemäß Definition 2.4 verwendet und die Zahlung  $Z_0$  berücksichtigt.

Die erwähnten Zusammenhänge zwischen den Zinsstrukturkurven lassen sich leicht auf die Barwerte aus Definition 2.4 übertragen. Ist eine Zahlungsreihe  $Z$  gegeben, so gilt für Spot Rates  $i_{[0,t]} = i$ , für  $t = 1, \dots, n$ :

$$BW_S(Z, I^S) = BW(Z, \bar{I}).$$

Ebenso gilt für Forward Rates  $i_t = i$ , für  $t = 1, \dots, n$ :

$$BW_F(Z, I^F) = BW(Z, \bar{I}).$$

Außerdem gilt  $BW_F(Z, I^F) = BW_S(Z, I^S)$ , wenn Forward Rates  $I^F$  entsprechend Bemerkung 2.3 bei gegebenen Spot Rates  $I^S$  gewählt werden. Umgekehrt gilt dies analog, wenn Forward Rates gegeben sind.

### Notation 2.5

Die Bezeichnung der Barwerte mit  $BW(Z, \bar{I})$ ,  $BW_S(Z, I^S)$  bzw.  $BW_F(Z, I^F)$  verdeutlicht, dass diese Größen von der Zahlungsreihe und der Art der Zinsstrukturkurve abhängig sind. Da der Barwert in jedem Fall für eine Zahlungsreihe  $Z$  bestimmt wird, wird im weiteren Verlauf der Arbeit auf der Berücksichtigung der Größe  $Z$  als Input in der Bezeichnung der Barwerte verzichtet. Vielmehr steht dann die Art der Zinsstrukturkurve im Vordergrund, sodass über  $BW(\bar{I})$ ,  $BW_S(I^S)$  bzw.  $BW_F(I^F)$  deutlich wird, dass die entsprechende Verzinsung Anwendung findet.

Wird jedoch der Barwert einer speziellen Zahlungsreihe betrachtet, so wird dies an der jeweiligen Stelle durch explizite Angabe in der Notation deutlich gemacht.

## 2.2. Zinsänderungsrisiko

Die Zinsstrukturkurve ist für die Bewertung einer Zahlungsreihe von großer Bedeutung, da die Höhe der Zinssätze einen wesentlichen Einfluss auf die Höhe des Barwerts einer Zahlungsreihe hat.

Aufgrund der hohen Zinsvolatilität auf den Finanzmärkten unterliegen die Zinssätze allerdings Schwankungen, sodass sie sich häufig im Zeitverlauf verändern.

Insbesondere bei der Bewertung von Zahlungsreihen mit langen Laufzeiten sind solche Schwankungen von Bedeutung. Dies betrifft nicht nur Anleihen oder Kredite mit langen Laufzeiten, sondern auch Versicherungsverträge, wie Rentenversicherungen, die typischerweise über einen Zeitraum von mehr als 30 oder 40 Jahren abgeschlossen werden. Prognosen über den Verlauf einer Zinsstrukturkurve lassen sich für solche Zeiträume nicht präzise treffen. Somit sind Veränderungen in der Zinsstrukturkurve zu erwarten, die den Barwert einer Zahlungsreihe beeinflussen.

Die daraus resultierende Änderung des Barwerts impliziert ein Risiko, welches allgemein Zinsänderungsrisiko genannt wird. Aufgrund des hohen Einflusses der Zinssätze auf die Höhe des Barwerts einer gegebenen Zahlungsreihe, ist die Untersuchung des Zinsänderungsrisikos von großem Interesse. Dieses Risiko zu identifizieren, zu bemessen und zu kontrollieren ist eine wesentliche Aufgabe des Risikomanagements [BH95; Fab07; Ho92].

### 2.2.1. Definition Zinsänderungsrisiko

Der Begriff des Risikos wird im Bereich der Finanzwirtschaft für die Möglichkeit des Eintretens eines negativen Ereignisses oder einer adversen Entwicklung verwendet [Wag17]. Das Eintreten günstiger Ereignisse wird als Chance bezeichnet. Das Eintreten solcher Ereignisse lässt sich auch als Änderung oder Abweichung von erwarteten Werten verstehen. Solche Abweichungen liegen in der unvollständigen Information über zukünftige Ereignisse und in der Unsicherheit über den Verlauf zukünftiger Entwicklungen begründet [Reu08; Wag17].

Treten Abweichungen aufgrund von Änderungen in der Zinsstrukturkurve ein, z.B. Abweichungen in der Bewertung einer Zahlungsreihe, so führt dies zum Begriff des *Zinsänderungsrisikos* (oder auch kurz *Zinsrisiko*<sup>2</sup>).

Der Begriff des *Zinsänderungsrisikos* wird in der Regel sehr allgemein definiert (s. bspw. [Gar17; SU01; Wag17]). Durch die Fokussierung der Auswirkungen auf den Barwert einer Zahlungsreihe lässt sich das Risiko mit der Ergänzung als *barwertiges* Zinsänderungsrisiko konkretisieren [Reu08].

#### Definition 2.6 (Zinsänderungsrisiko)

Das *Zinsänderungsrisiko* liegt in der Unsicherheit, die sich aus Änderungen in der Zinsstrukturkurve ergibt.

Das *barwertige Zinsänderungsrisiko* versteht man als das Risiko, das sich aus den Auswirkungen einer Zinsänderung auf den Barwert einer Zahlungsreihe ergibt.

Die Änderung in der Zinsstrukturkurve wirkt sich gegenläufig auf den Barwert und den Endwert einer Zahlungsreihe aus. Ein im Zeitverlauf steigender Zinssatz führt zu höheren Zinserträgen und folglich zu einem höheren Endwert. Gleichzeitig führt ein Zinsanstieg aber auch zu niedrigeren Diskontierungsfaktoren und damit zu einem niedrigeren Barwert. Für festverzinsliche Wertpapiere entsteht hierdurch ein Wertverlust, da der Verkaufspreis des Papier sinkt. Daher bezeichnet man das Risiko eines niedrigeren Barwerts als Barwertrisiko oder Kurswertrisiko bezeichnet [Ort17; PS12].

Sinkt hingegen ein Zinssatz, so führt das zu einem höheren Barwert. Gleichzeitig sinkt aber auch der Endwert der Zahlungsreihe. Betrachtet man die Zahlungen  $Z_t$  als Rückzahlungen einer Anleihe, bspw. Rückflüsse aus Zins- oder Tilgungsleistungen, so können diese Zahlungen nur zu einem geringeren Zinssatz angelegt werden. Damit sinken die Zinserträge und folglich auch der Endwert. Daher wird das Risiko, das aus einer Zinssenkung entsteht auch als Wiederanlagerisiko oder Endwertrisiko bezeichnet [Ort17; PS12].

Der Begriff des Zinsänderungsrisikos fasst diese beiden Risikobegriffe zusammen, da als Zinsänderungsrisiko sowohl Änderungen resultierend aus Zinsanstiegen, als auch aus Zins-

<sup>2</sup>Die Begriffe Zinsänderungsrisiko und Zinsrisiko werden in dieser Arbeit synonym verwendet.

senkungen verstanden werden [Bie02; Kar01; SB17].

Als Zinsschwankung wird grundsätzlich die Abweichung einer zum Zeitpunkt  $t = 0$  unterstellten von einer (expost) tatsächlichen Zinsstrukturkurve verstanden. Als mögliche Zinsschwankung wird dazu in den meisten Werken eine *Parallelverschiebung* einer flachen Zinsstrukturkurve betrachtet. Eine solche Parallelverschiebung unterstellt, dass sich alle Zinssätze einer flachen Zinsstrukturkurve in gleicher Höhe ändern.

So forderte beispielsweise 2011 die Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (BaFin) in einem Rundschreiben, dass Kreditinstitute „festgelegte Zinsänderungen als ad hoc eintretende parallele Verschiebung der Zinsstrukturkurve“ anzuwenden haben [Baf11]. Allerdings sind durchaus auch nicht-parallele Änderungen denkbar. Häufig wird beschrieben, dass kurzfristige Zinssätze stärker schwanken als langfristige Zinssätze [Sch97; SLK08] und sogenannte Drehungen einer Zinsstrukturkurve auftreten, d.h. dass kurzfristige Zinssätze steigen, während bei langfristigen Zinssätzen fallende Werte beobachtet werden [SLK08].

Insbesondere bei der Kalkulation von Lebensversicherungsprodukten wird typischerweise mit dem sogenannten Garantiezins ein konstanter Zinssatz, d.h. eine flache Zinsstrukturkurve zugrunde gelegt. Die Wahl dieses Kalkulationszinssatzes, sowie alle weiteren Rechnungsgrundlagen, dürfen gemäß §163 VVG nur unter sehr strengen Voraussetzungen nachträglich geändert werden. Daher muss die Wahl zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses über einen sehr langen Zeitraum getroffen werden. Bei der Kalkulation wird dabei das sogenannte Vorsichtsprinzip<sup>3</sup> angewandt, das Versicherungsunternehmen dazu zwingt, so „vorsichtige“ Rechnungsgrundlagen zu verwenden, um allen Verpflichtungen sicher nachkommen zu können („dauernde Erfüllbarkeit“)[FG10]. Zukünftige Zinsentwicklungen auf den Finanzmärkten können aufgrund dieser Einschränkungen bei der Bewertung versicherungsspezifischer Zahlungen, wie Beiträge oder Leistungen, nicht adäquat abgebildet und berücksichtigt werden. Somit tritt auch bei der Kalkulation von Lebensversicherungsverträgen das Zinsänderungsrisiko auf.

Für risikobewusste Investoren ist es also wichtig, den Einfluss von Zinsänderungen und damit das Ausmaß des Zinsänderungsrisikos zu kennen. Dabei wird es als hilfreich angesehen, das Risiko durch geeignete Kennzahlen darzustellen. Die Quantifizierung dient der Kontrolle, Überwachung und Limitierung des Risikos [Bie02; Tra07].

### 2.2.2. Kennzahlen für das Zinsänderungsrisiko

Entsprechend der Definition des barwertigen Zinsänderungsrisikos, folgen die meisten Methoden zur Messung dieses Risikos dem sogenannten Barwertansatz [Bie02; Gra02]. Während die Definition des Zinsänderungsrisikos die Art der Auswirkungen von Zinsänderungen offen lässt, werden bei diesem Ansatz die Auswirkungen auf den Barwert untersucht. Für die Bemessung des Zinsänderungsrisikos ist es also entscheidend, die Änderung des

<sup>3</sup>Die Grundlage für dieses Vorsichtsprinzip ist gesetzlich in §11 Absatz 1 VAG des Versicherungsaufsichtsgesetzes geregelt.

Barwerts bei einer Änderung der Zinsstrukturkurve zu berechnen [TS11]. Diese Berechnung ist grundsätzlich abhängig von der verwendeten Zinsstrukturkurve. Daher soll im Folgenden ein Überblick über verschiedene Ansätze zur Messung des Zinsänderungsrisikos gegeben werden.

### Sensitivitätsansatz

Die *Zinssensitivität* ist definiert als relative Änderung des Barwerts einer Zahlungsreihe gegenüber einer Änderung der Zinsstrukturkurve und liefert damit ein relatives Maß für das Zinsänderungsrisiko. Sensitivitätsmaße erklären, wie stark ein Barwert auf eine bestimmte Zinsveränderung reagiert [SLK08].

Diese Betrachtung wird häufig auch als Sensitivitätsanalyse einer Zahlungsreihe bzgl. Zinsschwankungen bezeichnet [Mül12; Ort17; Tie15; Tra07].

Die gängigste Kennzahl zur Schätzung des Zinsänderungsrisikos sind sogenannte *Durationsmaße* [BFH03]. Mit ihnen lässt sich die Zinssensitivität abschätzen, da sie die relative Änderung eines Barwerts aufgrund einer Zinsänderung angeben. Häufig wird hierbei eine Parallelverschiebung einer flachen Zinsstrukturkurve betrachtet. Analytisch ergeben sie sich in diesem Fall aus der ersten Ableitung des Barwerts nach dem Zinssatz, dividiert durch den Barwert [SLK08]. Das Durationsmaß stellt damit die relative Änderung des Barwerts bei einer Änderung des Zinssatzes von einem Prozentpunkt dar.

Durationsmaße sind einfach und schnell zu berechnen, sowie leicht verständlich [TS11; FMC03], weswegen sie häufig als Risikokennzahlen für das Zinsänderungsrisiko verwendet werden und sich so in der Praxis durchgesetzt haben [Bie02; Ort17; SLK08; Tra07; TS11].

### Basispoint Value

Eine weitere Risikokennzahl liefert der Price-Value-of-a-Basispoint (kurz PVBP) oder auch Basispoint Value (kurz BPV). Dieser spiegelt die absolute Barwertänderung wider, wenn sich ein einzelner Zinssatz um einen Basispunkt ändert. Analytisch ergeben sich Basispoint Values aus den partiellen Ableitungen des Barwerts nach den einzelnen Zinssätzen, sowie der Multiplikation mit einem Basispunkt [SLK08].

Oft wird auch hier von einer flachen Zinsstrukturkurve ausgegangen, sowie eine Parallelverschiebung unterstellt [Bie02]. In diesem Fall gibt der Basispoint Value die absolute Änderung des Barwerts an, wenn sich der konstante Zinssatz um einen Basispunkt ändert.

Im Gegensatz zu Durationsmaßen, die relative Risikokennzahlen liefern, gibt der Basispoint Value ein absolutes Risikomaß an. Beide Ansätze sind offenbar eng miteinander verwandt [Ell01b]. Üblicherweise wird für einen Basispunkt ein Hundertstel Prozentpunkt angenommen. Wird die absolute Änderung des Barwerts betrachtet, wenn sich ein Zinssatz um 100 Basispunkte ändert, so spricht man von der sogenannten Dollar-Duration.

Analytisch entspricht diese folglich dem 100-fachen Wert des Basispoint Values [Ell01b; Fab07].

### Value-at-Risk

Die bisher betrachteten Risikomaße stellen Kennzahlen dar, die das Zinsrisiko aufgrund von deterministisch unterstellten Zusammenhängen („erwartete“ Zinssatzentwicklung) beschreiben. Im Gegensatz dazu schätzt der sogenannte Value at Risk (kurz VaR) den Verlust aufgrund einer Zinsänderung mithilfe von statistischen Verfahren. Damit wird die Quantifizierung der negativen Abweichung mit einer Wahrscheinlichkeitsaussage verknüpft [SLK08; Bie02].

Der Value at Risk ist definiert als der maximal zu erwartende Verlust, der innerhalb eines festgelegten Zeitraums mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit eintreten kann [Hul14; SB17; SLK08]. Im Sinne der Barwertbetrachtung des Zinsänderungsrisikos wird der Verlust dabei – wie oben beschrieben – als die negative Abweichung des Barwerts verstanden. Für den Verlauf des Barwerts werden Verteilungsannahmen getroffen, die auf statistischen Werten der Vergangenheit beruhen und auf Änderungen in der Zinsstrukturkurve zurückzuführen sind [Bie02; Gar17].

Der Value at Risk lässt sich für viele verschiedene Finanzinstrumente und Risiken abbilden. Daher wird er häufig dazu verwendet, um einzelne Risiken zu spezifizieren und zu einem Gesamtrisiko zusammenzuführen. Damit ist es im Banken- und Versicherungsbe- reich möglich, das gesamte Risikopotential zu messen und im Hinblick auf regulatorische Anforderungen das (Mindest-)Risikokapital von Beständen an Versicherungen zu bestimmen [SLK08; Wag17].

### Simulationen

Bei der Anwendung der bisher beschriebenen Risikokennzahlen werden stets Annahmen getroffen, die die Modellierung des Risikos einschränken. So wird bei Durationsmaßen eine vorgegebene Zinsänderung angenommen, und der VaR trifft Aussagen über den Verlust unter Vorgabe einer Irrtumswahrscheinlichkeit. Gerade die Berücksichtigung von Beobach- tungen aus der Vergangenheit stellt eine Unsicherheit in Bezug auf die Einflussgrößen des Risikos dar. Damit bleibt bei diesen Modellansätzen ein „Restrisiko“, das durch die An- wendung geeigneter Simulationen weiter minimiert werden kann. Dabei werden aufgrund von Annahmen über die zukünftige Zinssatzentwicklung verschiedene Szenarien von Zins- änderungen erstellt und deren Auswirkungen simuliert. Durch die Veranschaulichung der Auswirkungen vieler Zinsszenarien können Simulationsrechnungen zu einer verständlichen Gesamtschau des Zinsrisikos beitragen und eine sinnvolle Ergänzung der beschriebenen Instrumentarien darstellen [Bie02; HWPW15].

Die wichtigste Kennzahl im Umgang mit dem Zinsänderungsrisiko stellen Durationsmaße dar. Durch die Interpretation als Zinssensitivität lassen sie sich direkt für die Quantifizierung des Zinsänderungsrisikos anwenden. Zusätzlich ist es möglich für Durationsmaße eine einfache, direkt anwendbare Darstellung anzugeben. Diese Möglichkeit der praktisch anwendbaren Darstellung, sowie die einfache Interpretierbarkeit ermöglichen es, das Risiko verschiedener Wertpapiere oder Anleihen leicht miteinander zu vergleichen. Dadurch finden Durationsmaße in der Praxis häufig Anwendung und sind für die Risikoanalyse von großer Bedeutung [BFH03; Bie02; SLK08; TS11].

# Kapitel 3

## Durationsmaße

Durch die praktische Anwendbarkeit und die Möglichkeit der direkten Interpretation besitzen Durationsmaße hohe Relevanz für das Risikomanagement in der Praxis. Sie werden daher in dieser Arbeit als zentrale Risikokennzahl betrachtet. Im folgenden Kapitel werden dazu die (modifizierte) Macaulay-Duration, die (modifizierte) effektive Duration, sowie die Key Rate Duration hergeleitet und diskutiert. Diese Größen sind anwendbar, falls eine flache Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  oder eine Spot Rate Zinsstrukturkurve  $I^S$  vorliegt. Durch die Betrachtung dieser Größen sollen analytische Gemeinsamkeiten, sowie die zugrunde liegende Struktur des Durationskonzepts erkannt und herausgearbeitet werden. Dieses Konzept dient dann als Grundlage, um ein Durationsmaß für die Anwendung von Forward Rates entwickeln zu können.

### 3.1. Macaulay-Durationsmaße

In diesem Abschnitt liegt eine Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  vor, die mittels einer flachen Zinsstrukturkurve  $\bar{I} = (i, i, \dots, i)$  durch  $BW(Z, \bar{I})$  gemäß (2.7) bewertet wird:

$$BW(Z, \bar{I}) = BW(\bar{I}) = \sum_{j=0}^n Z_j \cdot (1+i)^{-j}. \quad (2.7)$$

Wird eine nicht näher charakterisierte Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  betrachtet, so wird, wie bereits in Bemerkung 2.5 erwähnt, auf die Angabe von  $Z$  verzichtet und die Notation  $BW(\bar{I})$  verwendet.

#### 3.1.1. Macaulay-Duration

Für den Fall einer flachen Zinsstrukturkurve hat Frederic R. Macaulay im Jahr 1938, die nach ihm benannte Macaulay-Duration in [Mac38] vorgestellt. Dieses erste bekannte Durationsmaß wurde ursprünglich als durchschnittliche Restlaufzeit von Zahlungsreihen eingeführt und später modifiziert, um es, als *modifizierte* Macaulay-Duration, im Rahmen der Sensitivitätsanalyse anwenden zu können.

Die Macaulay-Duration ist wie folgt definiert (vgl. [Mac38]):

**Definition 3.1 (Macaulay-Duration)**

Sei eine Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  und eine flache Zinsstrukturkurve  $\bar{I} = (i, i, \dots, i)$  gegeben. Dann ist die *Macaulay-Duration*  $\bar{D}_{Mac}(\bar{I})$  gegeben durch:

$$\bar{D}_{Mac}(\bar{I}) = \frac{\sum_{j=1}^n j \cdot Z_j \cdot (1+i)^{-j}}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot (1+i)^{-j}}. \quad (3.1)$$

In vielen Publikationen (siehe bspw. [KH12; PS12; SB17; SU01; Tra07]) wird die Macaulay-Duration zur Beschreibung des *Schwerpunkts einer Zahlungsreihe* herangezogen. Bei dieser häufig verwendeten Deutung beschreibt der Schwerpunkt den „gewichteten Mittelwert der Zahlungszeitpunkte  $j$ “. Die Macaulay-Duration kann als ein solcher Schwerpunkt interpretiert werden.

$$\begin{aligned} \bar{D}_{Mac}(\bar{I}) &= \frac{\sum_{j=1}^n j \cdot Z_j \cdot (1+i)^{-j}}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot (1+i)^{-j}} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n j \cdot Z_j \cdot (1+i)^{-j}}{BW(\bar{I})} \\ &= \sum_{j=1}^n j \cdot \underbrace{\left( \frac{Z_j \cdot (1+i)^{-j}}{BW(\bar{I})} \right)}_{:=g_j} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Die Gewichte  $g_j = \frac{Z_j \cdot (1+i)^{-j}}{BW(\bar{I})}$  für  $j = 0, \dots, n$ , entsprechen den Anteilen der diskontierten Zahlungen am Gesamtbarwert. Stellen die Zahlungen  $Z_j$  die Rückflüsse einer Festgeldanlage dar, so entsprechen die Zeitpunkte  $j$  den Auszahlungs- bzw. Fälligkeitszeitpunkten des eingesetzten Kapitals und damit der Dauer, die das jeweilige Kapital gebunden ist. So gibt die Macaulay-Duration den Zeitpunkt an, der auch als „*durchschnittliche Restlaufzeit*“ bzw. „*durchschnittliche Bindungsdauer*“ des eingesetzten Kapitals [PS12; SB17] oder als „*durchschnittlich gewichtete Fälligkeit*“ der Kapitalanlage [Tie15] interpretiert werden kann. Vor diesem Hintergrund erklärt sich auch der Begriff „Duration“, der sich als Synonym für Laufzeit oder Dauer für das von Macaulay eingeführte Durationsmaß durchgesetzt hat [Tie15].

Die Macaulay-Duration kann auch für die Analyse von Barwertänderungen bei kleinen Änderungen der flachen Zinsstrukturkurve angewendet werden. Dafür wird die relative Barwertänderung  $\frac{dBW(\bar{I})}{BW(\bar{I})}$  bei einer relativen Änderung des Aufzinsungsfaktors  $\frac{d(1+i)}{1+i}$

untersucht. Die Zinselastizität  $\varepsilon_{BW,r}$  des Barwerts  $BW(\bar{I})$  in Bezug auf den Aufzinsungsfaktor  $r = 1 + i$  ist definiert als das Verhältnis der relativen Änderungen des Barwerts und des Aufzinsungsfaktors [Tie15]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{BW,r} &= \frac{\frac{dBW(\bar{I})}{BW(\bar{I})}}{\frac{d(1+i)}{1+i}} = \frac{dBW(\bar{I})}{d(1+i)} \cdot \frac{1+i}{BW(\bar{I})} \\ &= \frac{dBW(\bar{I})}{di} \cdot \frac{1+i}{BW(\bar{I})} \\ &= -(1+i)^{-1} \cdot \sum_{j=0}^n j \cdot Z_j \cdot (1+i)^{-j} \cdot \frac{1+i}{BW(\bar{I})} \\ &= -\frac{\sum_{j=1}^n j \cdot Z_j \cdot (1+i)^{-j}}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot (1+i)^{-j}} = -\bar{D}_{Mac}(\bar{I}).\end{aligned}$$

Die Macaulay-Duration entspricht also der negativen Zinselastizität bzgl. des Aufzinsungsfaktors  $(1+i)$ . Damit stellt sie näherungsweise die relative Änderung des Barwerts bei einer relativen Veränderung des Aufzinsungsfaktors dar und liefert somit eine Sensitivitätsgröße für Zinsänderungen [KH12].

Weiterhin gibt die Macaulay-Duration  $\bar{D}_{Mac}$  auch den Zeitpunkt an, bei der sich die gegenläufigen Effekte des Barwertrisikos und Endwertrisikos ausgleichen [SB17]. In Abbildung 3.1 erkennt man, dass bei einem niedrigeren Zinssatz der Barwert höher ist und der Endwert geringer, während bei einem höheren Zinssatz der Barwert geringer und der Endwert höher ist (vgl. auch Abschnitt 2.2.1). Dazu ist in Abbildung 3.1 der Verlauf des Kapitalwerts der Zahlungsreihe  $Z = \mathbb{1}_{11} = (1, 1, \dots, 1, 1) \in \mathbb{R}^{11}$  dargestellt, die mit den flachen Zinsstrukturkurven  $\bar{I}^{(0)}$  mit Zinssatz  $i^{(0)} = 0,09$ ,  $\bar{I}^{(1)}$  mit  $i^{(1)} = 0,11$  und  $\bar{I}^{(2)}$  mit  $i^{(2)} = 0,07$  bewertet wird. Im Schnittpunkt der Kurven  $KW_t(\bar{I}^{(0)})$  und  $KW_t(\bar{I}^{(1)})$  bzw.

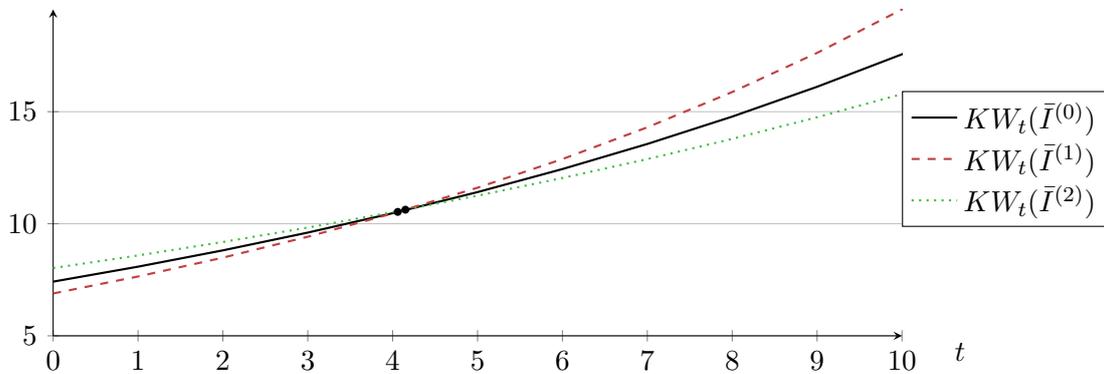


Abbildung 3.1.: Darstellung des Kapitalwerts im Zeitverlauf bei Bewertung mit  $i^{(0)} = 0,09$ ,  $i^{(1)} = 0,11$  und  $i^{(2)} = 0,07$ , in Anlehnung an [Tra07].

$KW_t(\bar{I}^{(0)})$  und  $KW_t(\bar{I}^{(2)})$  gleicht sich das Barwert- und das Endwertrisiko aus, da trotz einer Zinsänderung die Kapitalwerte identisch sind. Für jede Zahlungsreihe existiert ein solcher Zeitpunkt, in dem für eine angenommene Zinsänderung die Kapitalwerte übereinstimmen [SU01]. Der Wert der Macaulay-Duration  $\bar{D}_{Mac}(\bar{I}^{(0)})$  stellt den Zeitpunkt dar, bei dem sich die Kapitalwertkurven bei einer infinitesimal kleinen Änderung des konstanten Zinssatzes  $i^{(0)}$  schneiden.

Es lässt sich auch zeigen, dass der Kapitalwert  $KW_{\bar{D}_{Mac}(\bar{I}^{(0)})}(\bar{I}^{(0)})$  zum Zeitpunkt  $t = \bar{D}_{Mac}(\bar{I}^{(0)})$  bei Bewertung mit Zinssatz  $i^{(0)}$  geringer ist, als der Kapitalwert bei Bewertung mit einem beliebigem anderen Zinssatz. D.h. die Funktion  $KW_{\bar{D}_{Mac}(\bar{I}^{(0)})}(\bar{I})$  in Abhängigkeit des Zinssatzes  $i$  ist minimal für  $i = i^{(0)}$  [Ort17; SU01].

Für die Zahlungsreihe  $Z = (1, 1, \dots, 1, 1) \in \mathbb{R}^{11}$  bei Bewertung mit der flachen Zinsstrukturkurve mit Zinssatz  $i^{(0)} = 0,09$  ergibt sich für die Macaulay-Duration der Wert  $\bar{D}_{Mac}(\bar{I}^{(0)}) = 4,15$ . Der Kapitalwert  $KW_t(\bar{I})$  zum Zeitpunkt  $t = \bar{D}_{Mac}(\bar{I}^{(0)})$  als Funktion des Zinssatzes  $i$  ist in Abbildung 3.2 dargestellt.

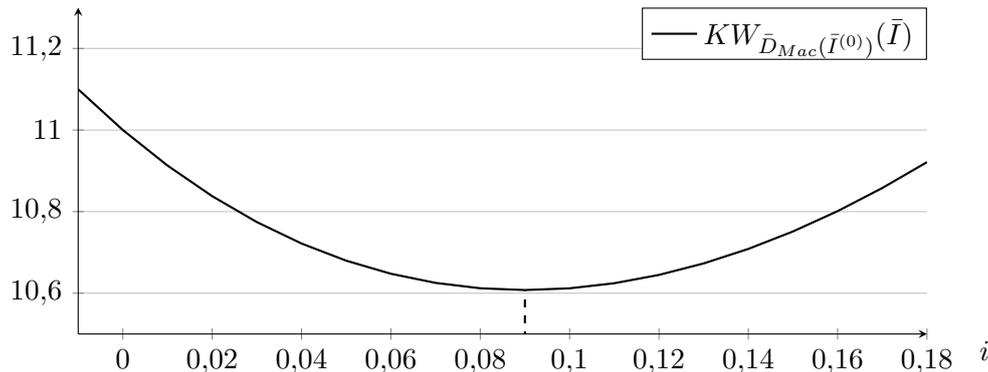


Abbildung 3.2.: Darstellung des Kapitalwerts als Funktion in Abhängigkeit des Zinssatzes, in Anlehnung an [Tra07].

Zum Zeitpunkt  $t = \bar{D}_{Mac}(\bar{I}^{(0)})$  lässt sich also für den Kapitalwert  $KW_{\bar{D}_{Mac}(\bar{I}^{(0)})}(\bar{I})$  einer Zahlungsreihe eine Mindesthöhe bestimmen. Eine beliebige Zinsänderung in  $t = 0$  würde nur zu einem höheren Kapitalwert in  $t = \bar{D}_{Mac}(\bar{I})$  führen. Eine Zinsänderung hätte somit keine (negativen) Auswirkungen auf den Kapitalwert, sodass in dieser Zinsänderung kein Risiko liegt. Damit entspricht  $\bar{D}_{Mac}(\bar{I})$  auch dem Zeitpunkt, bei dem „vollständige Immunisierung“ gegenüber dem Zinsänderungsrisiko eintritt. Der Zeitpunkt der Duration wird daher auch als „Immunisierungszeitpunkt“ bezeichnet [BK77; Ort17; SU01; Tie15; Tra07]. Für einen Investor, der ein Portfolio aus festverzinslichen Wertpapieren hält, kann dieser Zeitpunkt der Duration der Zahlungsreihe des Portfolios als „optimale Haltedauer“ genutzt werden, da bei Verkauf des Portfolios im Zeitpunkt  $t = \bar{D}_{Mac}(\bar{I})$  ein Mindest-Kapitalwert und damit eine Mindest-Rendite realisiert werden kann [Tie15; Tra07].

### 3.1.2. Modifizierte Macaulay-Duration

Es soll nun im Zeitpunkt  $t = 0$  eine Änderung der Zinsstrukturkurve und damit eine Änderung des Zinssatzes  $i$  angenommen werden. Dieser Zinssatz ändere sich um den Wert  $\Delta i$  zu  $i + \Delta i$ . Damit liegt eine Parallelverschiebung einer flachen Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  um  $\Delta \bar{I} = (\Delta i, \Delta i, \dots, \Delta i)$  vor, d.h.

$$\bar{I} + \Delta \bar{I} = (i + \Delta i, i + \Delta i, \dots, i + \Delta i).$$

Das Ziel ist es nun, die Auswirkungen einer solchen Parallelverschiebung der flachen Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  und damit das Ausmaße des Zinsänderungsrisikos zu untersuchen.

Es werde angenommen, dass für den geänderten Zinssatz  $i + \Delta i > -1$  gilt. Ein Beispiel für eine Parallelverschiebung ist in Abbildung 3.3 dargestellt.

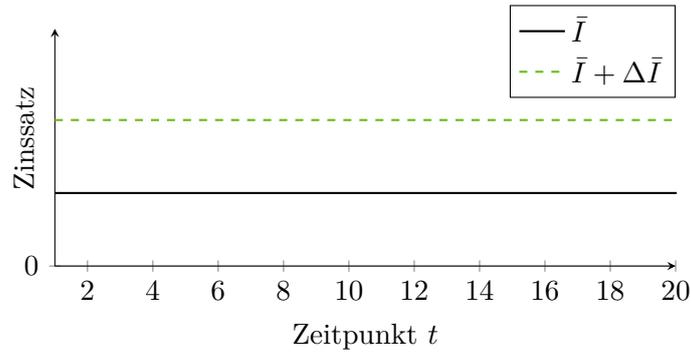


Abbildung 3.3.: Beispiel einer Parallelverschiebung einer flachen Zinsstrukturkurve zum Zinssatz  $i = 2\%$ .

Ein absolutes Maß für das Zinsänderungsrisiko ist die Änderung des Barwerts

$$\Delta BW(\bar{I}) := BW(\bar{I} + \Delta \bar{I}) - BW(\bar{I}).$$

Der Barwert  $BW(\bar{I} + \Delta \bar{I})$ , der also die Zinsänderung  $\Delta \bar{I}$  berücksichtigt, lässt sich mittels der Taylorreihenentwicklung in Abhängigkeit der Änderung  $\Delta i$  ausdrücken. Für kleine Änderungen  $\Delta i$  ergibt sich die Taylorreihenentwicklung der Barwertfunktion durch [Mül12]:

$$BW(\bar{I} + \Delta \bar{I}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \cdot BW^{(j)}(\bar{I}) \cdot (\Delta i)^j \quad (3.3)$$

$$= BW(\bar{I}) + BW'(\bar{I}) \cdot \Delta i + \underbrace{\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \cdot BW^{(j)}(\bar{I}) \cdot (\Delta i)^j}_{=R_1} \quad (3.4)$$

Hierbei wird mit  $BW^{(j)}(\bar{I})$  die  $j$ -te Ableitung des Barwerts nach dem Zinssatz  $i$  bezeichnet.

Vernachlässigt man in (3.4) die Summanden für  $j \geq 2$ , also das Restglied  $R_1$ , so erhält

man eine Approximation für  $BW(\bar{I} + \Delta\bar{I})$ . Es gilt:

$$BW(\bar{I} + \Delta\bar{I}) \approx BW(\bar{I}) + BW'(\bar{I}) \cdot \Delta i. \quad (3.5)$$

Die Änderung des Barwerts  $\Delta BW(\bar{I})$  als Riskomaß für das Zinsänderungsrisiko lässt sich dann berechnen durch:

$$\Delta BW(\bar{I}) = BW(\bar{I} + \Delta\bar{I}) - BW(\bar{I}) \approx BW'(\bar{I}) \cdot \Delta i. \quad (3.6)$$

Um daraus ein relatives Maß für das Zinsänderungsrisiko zu erhalten, lässt sich Approximation (3.6) leicht für die Zinssensitivität des Barwerts umformen:

$$\frac{\Delta BW(\bar{I})}{BW(\bar{I})} \approx \frac{BW'(\bar{I})}{BW(\bar{I})} \cdot \Delta i. \quad (3.7)$$

Für  $\Delta i = 0,0001$  erhält man aus (3.6) den Basispoint Value des Barwerts  $BW(\bar{I})$  (vgl. Abschnitt 2.2.2). Die Darstellung für die Zinssensitivität (3.7) zählt zu den Sensitivitätsansätzen und führt zum Durationsmaß  $D_{Mac}(\bar{I})$ , das als modifizierte Macaulay-Duration (oder auch kurz modifizierte Duration) bekannt ist<sup>1</sup>.

**Definition 3.2 (Modifizierte Macaulay-Duration)**

Sei eine Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  und eine flache Zinsstrukturkurve  $\bar{I} = (i, i, \dots, i)$  gegeben. Dann ist die *modifizierte Macaulay-Duration*  $D_{Mac}(\bar{I})$  gegeben durch:

$$D_{Mac}(\bar{I}) := -\frac{BW'(\bar{I})}{BW(\bar{I})} \quad (3.8)$$

Die modifizierte Macaulay-Duration geht auf Hicks [Hic46] zurück und nähert die Zinssensitivität des Barwerts bei einer Parallelverschiebung der Zinsstrukturkurve um  $\Delta i = 1$  an, d.h. (vgl. (3.7)):

$$\frac{\Delta BW(\bar{I})}{BW(\bar{I})} \approx \frac{BW'(\bar{I})}{BW(\bar{I})} \cdot \Delta i = -D_{Mac}(\bar{I}) \cdot \underbrace{\Delta i}_{=1}.$$

Hieraus ergibt sich die folgende, häufig verwendete Interpretation der modifizierten Duration als prozentuale Barwertänderung bei Änderung des Zinssatzes um einen Prozentpunkt (s. z.B. [PS12]):

*Sinkt der Zinssatz um einen Prozentpunkt, so steigt der Barwert um  $D_{Mac}(\bar{I})$  Prozentpunkte.*

<sup>1</sup>Die Bezeichnung *modifizierte Macaulay-Duration* resultiert aus einem Zusammenhang zwischen den Größen  $D_{Mac}(\bar{I})$  und  $D_{Mac}(\bar{I})$ , der in Abschnitt 3.1.3 beschrieben wird.

Über den Ansatz der Taylorreihenentwicklung (3.3) lässt sich die modifizierte Duration ebenso für die (direkte) Approximation des Barwerts nach Veränderung der Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  in  $\bar{I} + \Delta\bar{I}$  verwenden:

$$\begin{aligned} BW(\bar{I} + \Delta\bar{I}) &\approx BW(\bar{I}) + BW'(\bar{I}) \cdot \Delta i \\ \Leftrightarrow BW(\bar{I} + \Delta\bar{I}) &\approx BW(\bar{I}) + BW(\bar{I}) \cdot \underbrace{\frac{BW'(\bar{I})}{BW(\bar{I})}}_{=-D_{Mac}(\bar{I})} \cdot \Delta i. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt so die lineare Approximation des Barwerts unter Verwendung der modifizierten Duration:

$$BW(\bar{I} + \Delta\bar{I}) \approx BW(\bar{I}) - BW(\bar{I}) \cdot D_{Mac}(\bar{I}) \cdot \Delta i =: \widetilde{BW}^D(\bar{I} + \Delta\bar{I}), \quad (3.9)$$

bzw. die lineare Approximation der Zinssensitivität:

$$\frac{\Delta BW(\bar{I})}{BW(\bar{I})} = \frac{BW(\bar{I} + \Delta\bar{I}) - BW(\bar{I})}{BW(\bar{I})} \approx -D_{Mac}(\bar{I}) \cdot \Delta i. \quad (3.10)$$

### Bemerkung 3.3

In der Literatur findet man oft explizit Einschränkungen an den Zinssatz  $i$  und die Zahlungen  $Z_t$ . So wird häufig ein positiver Zinssatz  $i > 0$  angenommen (s. bspw. [CD09; Jor+03; MPP; PS12; SB17; SU01; Sun09]). Sundaesan hält es sogar für notwendig, sicherzustellen, dass ein positiver Zinssatz vorliegt [Sun09].

Auch für die Zahlungen  $Z_t$  findet man die Annahme der Nichtnegativität, siehe ([CD09; KH12; PS12; SB17; SU01]). García merkt an, dass der Wert des Durationsmaß stets positiv ist [Gar17]. Dies lässt sich nur sicherstellen, falls nur positive Zahlungen bzw. nur negative Zahlungen vorliegen.

Insbesondere die Annahme nicht-negativer Zinssätze ist sehr restriktiv. Seit Beginn der Finanzkrise im Jahr 2008 und der damit verbundenen längeren Niedrigzinsphase sind negative Zinssätze häufiger zu beobachten. So haben beispielsweise mehrere europäische Zentralbanken, sowie die japanische Zentralbank die Leitzinsen in den vergangenen Jahren unter Null gesenkt.

Tatsächlich ist es nicht notwendig solche Einschränkungen an den Zinssatz und die Zahlungsreihe zu fordern. Sowohl die Herleitung des Durationsmaßes, als auch die Interpretation dieser Größe gelten auch für negative Zinssätze und Zahlungen.

### Bemerkung 3.4

Für positive Zahlungen  $Z_t$ ,  $t = 0, 1, \dots, n$ , ist der Wert der Ableitung  $BW'(\bar{I})$  in (3.6) negativ. Üblicherweise wird es in der Literatur als nützlich angesehen, finanzmathematische Kennzahlen durch positive Größen darzustellen. Dass  $D_{Mac}(\bar{I})$  für positive Inputs

$Z$  und  $\bar{I}$  auch eine positive Kennzahl liefert, wird über das negative Vorzeichen in (3.8) sichergestellt.

Im Folgenden soll eine geschlossene Form für  $D_{Mac}(\bar{I})$  angegeben werden, um eine praktisch anwendbare Darstellung zu erhalten.

**Satz 3.5 (Modifizierte Macaulay-Duration)**

Für eine gegebene Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  und eine flache Zinsstrukturkurve  $\bar{I} = (i, i, \dots, i)$  mit  $i > -1$  gilt für die modifizierte Macaulay-Duration  $D_{Mac}(\bar{I})$ :

$$D_{Mac}(\bar{I}) = \frac{1}{BW(\bar{I})} \left( (1+i)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^n j \cdot Z_j \cdot (1+i)^{-j} \right). \quad (3.11)$$

**Beweis** Es wird die Ableitung  $BW'(\bar{I})$  betrachtet:

$$\begin{aligned} BW'(\bar{I}) &= \frac{d}{di} BW(\bar{I}) \\ &= \frac{d}{di} \sum_{j=0}^n Z_j \cdot (1+i)^{-j} \\ &= \sum_{j=1}^n -j \cdot Z_j \cdot (1+i)^{-j-1} \\ &= -(1+i)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^n j \cdot Z_j \cdot (1+i)^{-j}. \end{aligned}$$

Zusammen mit (3.8) folgt die zu zeigende Darstellung der modifizierten Duration  $D_{Mac}(\bar{I})$  in (3.11). □

Durch die Approximation des Barwerts in (3.9) wird mittels der modifizierten Duration eine lineare Näherung an den Barwert bei einer Parallelverschiebung der flachen Zinsstrukturkurve um  $\Delta i$  beschrieben. Die Barwertfunktion  $BW(\bar{I})$  hat als Funktion in der Variablen  $i$  für nicht-negative Zahlungsreihen  $Z$  einen konvexen Verlauf [KH12].

**Bemerkung 3.6**

Die Barwertfunktion  $BW(\bar{I})$  ist für nicht-negative Zahlungsreihen  $Z$  mit  $Z_t \geq 0$ , für alle  $t = 0, 1, \dots, n$  konvex, da die zweite Ableitung  $BW''(\bar{I})$  nach dem Zinssatz  $i$  positiv für

alle  $i > -1$  ist:

$$\begin{aligned}
 BW''(\bar{I}) &= \frac{d^2}{di} BW(\bar{I}) = \frac{d}{di} \left( - \sum_{j=0}^n j \cdot Z_j \cdot (1+i)^{-(j+1)} \right) \\
 &= \sum_{j=0}^n j \cdot (j+1) \cdot Z_j \cdot (1+i)^{-j-2} \\
 &= (1+i)^{-2} \cdot \sum_{j=0}^n j \cdot (j+1) \cdot Z_j \cdot (1+i)^{-j} \geq 0. \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Dementsprechend ist die Barwertfunktion für Zahlungsreihen mit Zahlungen  $Z_t \leq 0$  konkav.

Auch für Zahlungsreihen, die nicht nur nicht-negative Zahlungen beinhalten, ist der Barwert  $BW(\bar{I})$  aufgrund der vorkommenden Diskontierungsfaktoren  $(1+i)^{-t}$ , für  $t = 2, \dots, n$ , eine nichtlineare Funktion. Durch die lineare Approximation der Barwertfunktion entsteht somit ein Fehler, der umso größer wird, je größer die Änderungsgröße  $\Delta i$  ist [Tie15]. Daher gilt, wie bei der allgemeinen Taylorreihenentwicklung, auch hier, dass die Approximation der Barwertänderung mittels des Durationsmaß nur für „kleine“ Änderungen  $\Delta i$  „gute“ Ergebnisse liefert.

In Abbildung 3.4 wird der Fehler dargestellt, der durch die lineare Approximation an die Barwertfunktion entsteht. Durch die Approximation von  $\Delta BW(\bar{I})$  wird mit der Näherungsformel (3.9) der Einfluss sinkender Zinsen auf den Barwert unterschätzt und der Einfluss steigender Zinsen überschätzt [CD09].

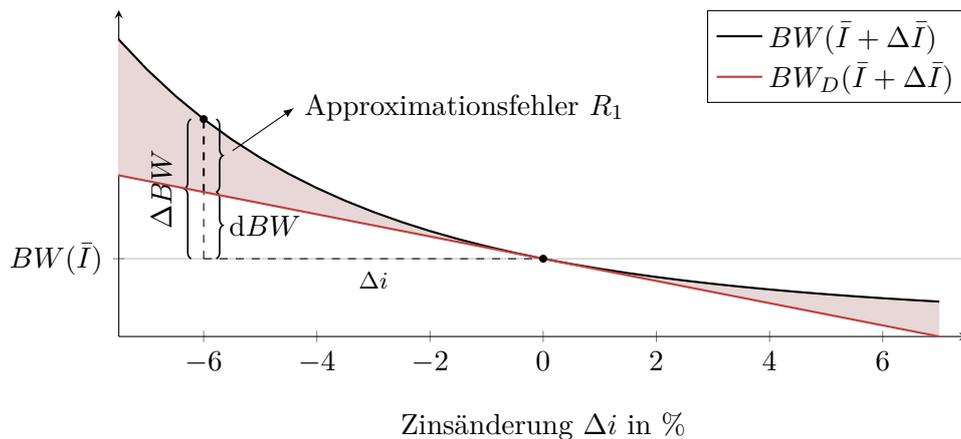


Abbildung 3.4.: Darstellung des Approximationsfehlers  $R_1$

### Bemerkung 3.7

Der Approximationsfehler ist durch die Differenz des approximierten Barwerts  $BW(\bar{I}) + BW'(\bar{I})$  und des Barwerts  $BW(\bar{I} + \Delta\bar{I})$  definiert. Dieser ist gerade durch das Restglied

$R_1$  in (3.4) gegeben (vgl. [For16])

$$R_1 = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \cdot BW^{(j)}(\bar{I}) \cdot (\Delta i)^j.$$

Mit der Lagrangeschen Form des Restglieds lässt sich  $R_1$  darstellen durch

$$R_1 = \frac{1}{2} \cdot BW''(\bar{I}_\xi) \cdot (\Delta i)^2,$$

wobei  $\bar{I}_\xi = (\xi, \xi, \dots, \xi)$  die flache Zinsstrukturkurve bezeichnet mit Zinssatz  $\xi \in ]i, i + \Delta i[$ , für  $\Delta i > 0$  bzw.  $\xi \in ]i + \Delta i, i[$  für  $\Delta i < 0$ .

Damit gilt für  $\xi \in ]i, i + \Delta i[$  mit  $\Delta i > 0$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2} \cdot BW''(\bar{I}_\xi) \cdot (\Delta i)^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot BW''(\bar{I}) \cdot (\Delta i)^2 \end{aligned}$$

bzw. für  $\xi \in ]i + \Delta i, i[$  mit  $\Delta i < 0$  gilt:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2} \cdot BW''(\bar{I}_\xi) \cdot (\Delta i)^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot BW''(\bar{I} + \Delta \bar{I}) \cdot (\Delta i)^2. \end{aligned}$$

Da der Barwert für nicht-negative Zahlungsreihen eine monoton fallende Funktion darstellt, d.h.  $dBW(\bar{I}) < 0$  für  $\Delta i > 0$ , wird durch die Barwertapproximation mittels des Durationsmaß der tatsächliche Wert für  $BW(\bar{I} + \Delta \bar{I})$  für nicht-negative Zahlungsreihen stets unterschätzt.

Für negative Zahlungsreihen gilt umgekehrt  $dBW(\bar{I}) > 0$ , sodass die Barwertapproximation den tatsächlichen Wert für  $BW(\bar{I} + \Delta \bar{I})$  für negative Zahlungsreihen überschätzt.

Eine Möglichkeit den Approximationsfehler zu verringern ist es, in der Taylorreihenentwicklung (3.3) den zweiten Summanden und damit die zweite Ableitung zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} BW(\bar{I} + \Delta \bar{I}) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \cdot BW^{(j)}(\bar{I}) \cdot (\Delta i)^j \\ &= BW(\bar{I}) + BW'(\bar{I}) \cdot \Delta i + \frac{1}{2} \cdot BW''(\bar{I}) \cdot (\Delta i)^2 + R_2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Man erhält anstelle von (3.5) die Approximation für  $BW(\bar{I} + \Delta \bar{I})$ :

$$BW(\bar{I} + \Delta \bar{I}) \approx BW(\bar{I}) + BW'(\bar{I}) \cdot \Delta i + \frac{1}{2} \cdot BW''(\bar{I}) \cdot (\Delta i)^2 \quad (3.14)$$

und anstelle von (3.7) die Approximation für die Zinssensitivität:

$$\frac{\Delta BW(\bar{I})}{BW(\bar{I})} \approx \frac{BW'(\bar{I})}{BW(\bar{I})} \cdot \Delta i + \frac{1}{2} \cdot \frac{BW''(\bar{I})}{BW(\bar{I})} \cdot (\Delta i)^2. \quad (3.15)$$

Aus Approximation (3.15) lässt sich nun die Definition der sogenannten *Konvexitätsgröße*  $e^2 C_{Mac}(\bar{I})$  ableiten [Mül12]:

**Definition 3.8 (Konvexität)**

Sei eine Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  und eine flache Zinsstrukturkurve  $\bar{I} = (i, i, \dots, i)$  gegeben. Dann ist die *Konvexität*  $C_{Mac}(\bar{I})$  definiert durch:

$$C_{Mac}(\bar{I}) := \frac{BW''(\bar{I})}{BW(\bar{I})}. \quad (3.16)$$

Mit den Definitionen (3.8) für  $D_{Mac}(\bar{I})$  und (3.16) für  $C_{Mac}(\bar{I})$  lassen sich die Approximationen (3.14) und (3.15) entsprechend darstellen. Es ist

$$\begin{aligned} BW(\bar{I} + \Delta \bar{I}) &\approx BW(\bar{I}) - BW(\bar{I}) \cdot D_{Mac}(\bar{I}) \cdot \Delta i + \frac{1}{2} \cdot BW(\bar{I}) \cdot C_{Mac}(\bar{I}) \cdot \Delta i^2 \\ &=: \widetilde{BW}^C(\bar{I} + \Delta \bar{I}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

bzw.

$$\frac{\Delta BW(\bar{I})}{BW(\bar{I})} \approx -D_{Mac}(\bar{I}) \cdot \Delta i + \frac{1}{2} \cdot C_{Mac}(\bar{I}) \cdot (\Delta i)^2. \quad (3.18)$$

Weiterhin lässt sich mit der zweiten Ableitung des Barwerts  $BW''(\bar{I})$ , analog zur Darstellung (3.11) für die modifizierte Duration, auch eine geschlossene Darstellung für die Konvexitätsgröße  $C_{Mac}(\bar{I})$  angeben.

**Satz 3.9 (Konvexität)**

Sei eine Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  und eine flache Zinsstrukturkurve  $\bar{I} = (i, i, \dots, i)$  gegeben. Dann lässt sich die Konvexität  $C_{Mac}(\bar{I})$  berechnen durch:

$$C_{Mac}(\bar{I}) = \frac{1}{BW(\bar{I})} \cdot \left( (1+i)^{-2} \cdot \sum_{j=0}^n j \cdot (j+1) \cdot Z_j \cdot (1+i)^{-j} \right).$$

**Beweis** Die zu zeigende Darstellung ergibt sich direkt aus (3.16) in Definition 3.8 unter Verwendung von (3.12) aus Bemerkung 3.6.  $\square$

<sup>2</sup>Der Name der Größe  $C_{Mac}(\bar{I})$  ergibt sich aus der Konvexitätseigenschaft des Barwerts  $BW(\bar{I})$  für nicht-negative Zahlungsreihen  $Z$ .

**Bemerkung 3.10**

Mit der Lagrangeschen Form des Restglieds lässt der Approximationsfehler  $R_2$  der Approximation (3.13) darstellen mittels (vgl. [For16])

$$\begin{aligned} R_2 &= \sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{j!} \cdot BW^{(j)}(\bar{I}) \cdot (\Delta i)^j \\ &= \frac{1}{6} \cdot BW'''(\bar{I}_\xi) \cdot (\Delta i)^3, \end{aligned}$$

für ein  $\xi \in ]i, i + \Delta i[$  (bzw.  $\xi \in ]i + \Delta i, i[$ , falls  $\Delta i < 0$ ).

Durch die Verwendung dieser Konvexitätsgröße ist es möglich die Barwertänderung durch eine quadratische Funktion anzunähern [Tie15]. Der Approximationsfehler fällt somit geringer aus und bessere Näherungen sind möglich (siehe dazu auch Abbildung 3.5).

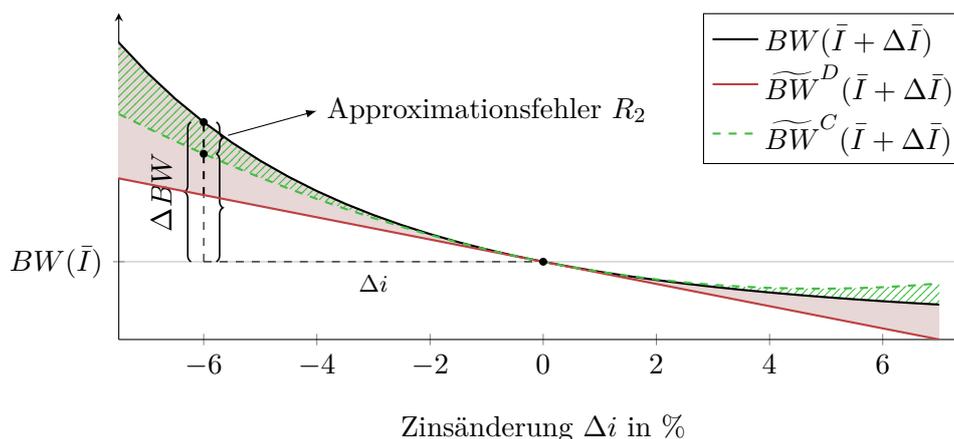


Abbildung 3.5.: Darstellung des Approximationsfehlers  $R_2$

Das folgende Beispiel verdeutlicht die Bedeutung der Approximationen  $\widetilde{BW}^D(\bar{I} + \Delta\bar{I})$  und  $\widetilde{BW}^C(\bar{I} + \Delta\bar{I})$ .

**Beispiel 3.11**

Für das Beispiel wird die Zahlungsreihe  $Z = (0, 1.000, 1.000, \dots, 1.000)$  mit  $n = 30$  und einer flachen Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  zum Niveau von 1%, d.h. mit einem konstanten Zinssatz  $i = 0,01$ , bewertet. Für den Barwert  $BW(\bar{I})$  der Zahlungsreihe  $Z$  ergibt sich der Wert

$$\begin{aligned} BW(\bar{I}) &= \sum_{j=0}^{30} Z_j \cdot (1+i)^{-j} \\ &= 1000 \cdot \sum_{j=1}^{30} \left(\frac{1}{1,01}\right)^j = 25.807,71. \end{aligned}$$

Es soll nun untersucht werden, wie sich eine Zinsänderung von  $i$  zu  $i + \Delta i$  auf die Höhe

des Barwerts auswirkt. Dazu wird die exakte Berechnung des Barwerts  $BW(\bar{I} + \Delta\bar{I})$  mit den Werten verglichen, die sich aus den Approximationen  $\widetilde{BW}^D(\bar{I} + \Delta\bar{I})$  aus (3.9) und  $\widetilde{BW}^C(\bar{I} + \Delta\bar{I})$  aus (3.17) ergeben.

Für  $\Delta i = 0,01$  ergibt sich bei exakter Berechnung der Barwert  $BW(\bar{I} + \Delta\bar{I}) = 22.396,46$ . Die Approximation mittels der Macaulay-Duration führt zum Wert  $\widetilde{BW}^D(\bar{I} + \Delta\bar{I}) = 22.037,31$ . Wird die Konvexitätsgröße berücksichtigt, so erhält man die Approximation  $\widetilde{BW}^C(\bar{I} + \Delta\bar{I}) = 22.425,74$ . Die Abweichung zum exakten Wert kann also deutlich verringert werden:

$$|\widetilde{BW}^D(\bar{I} + \Delta\bar{I}) - BW(\bar{I} + \Delta\bar{I})| = 359,15 \gg 29,28 = |\widetilde{BW}^C(\bar{I} + \Delta\bar{I}) - BW(\bar{I} + \Delta\bar{I})|$$

Dies zeigt sich auch, wenn weitere Parallelverschiebungen der Zinskurve unterstellt werden. Die Parallelverschiebungen für  $\Delta i \in \{-0,015, -0,005, 0,01, 0,015, 0,03\}$  sind in Abbildung 3.6 dargestellt.

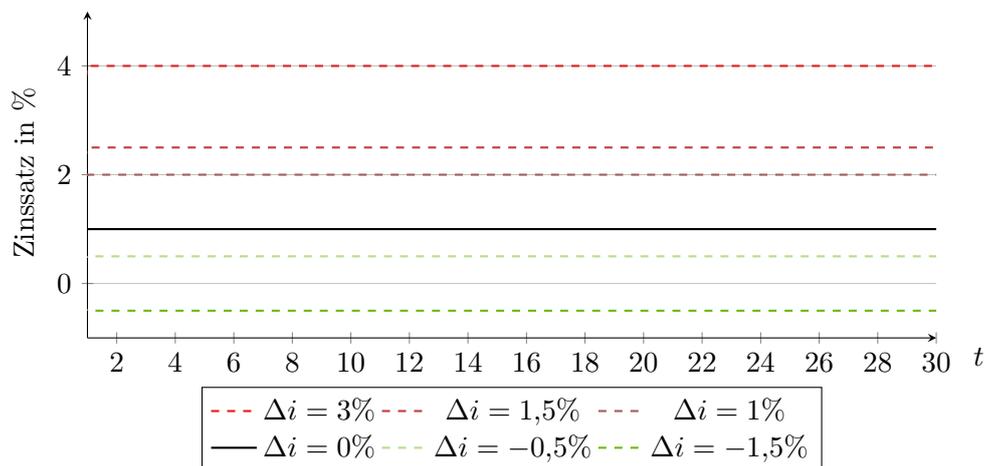


Abbildung 3.6.: Verwendete Zinsstrukturkurven in Beispiel 3.11.

Die aus diesen Zinsänderungen resultierenden Barwerte  $BW(\bar{I}^{(j)} + \Delta\bar{I}^{(j)})$ ,  $\widetilde{BW}^D(\bar{I}^{(j)} + \Delta\bar{I}^{(j)})$  und  $\widetilde{BW}^C(\bar{I}^{(j)} + \Delta\bar{I}^{(j)})$  für  $j = 1, \dots, 5$  sind in Tabelle 3.1 angegeben.

| $\Delta\bar{I}^{(j)}$ | -1,5%     | -0,5%     | 0%        | 1%        | 1,5%      | 3%        |
|-----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $BW$                  | 32.454,29 | 27.794,05 | 25.807,71 | 22.396,46 | 20.930,29 | 17.292,03 |
| $\widetilde{BW}^D$    | 31.463,30 | 27.692,91 | 25.807,71 | 22.037,31 | 20.152,12 | 14.496,53 |
| $\widetilde{BW}^C$    | 32.337,27 | 27.790,01 | 25.807,71 | 22.425,74 | 21.026,08 | 17.992,39 |

Tabelle 3.1.: Vergleich der Barwertapproximationen in Beispiel 3.11

Abbildung 3.7 zeigt die Verläufe der Barwertfunktion  $BW(\bar{I} + \Delta\bar{I})$ , sowie der approxi-

mierten Barwertfunktionen  $\widetilde{BW}^D(\bar{I} + \Delta\bar{I})$  und  $\widetilde{BW}^C(\bar{I} + \Delta\bar{I})$  in Abhängigkeit der Zinsänderung  $\Delta i$  für  $\Delta i \in [-0,06, 0,9]$ . Neben dem konvexen Verlauf der Barwertfunktion ist hier der Fehler, der durch die lineare Approximation mittels der Macaulay-Duration  $D_{Mac}(\bar{I})$  entsteht, gut zu erkennen. Ebenso sieht man, dass dieser Fehler unter Verwendung der Konvexität  $C_{Mac}(\bar{I})$  zwar verringert werden kann, aber auch für größere Änderungen  $\Delta i \leq -4\%$  und  $\Delta i \geq 4\%$  hohe Abweichungen entstehen.

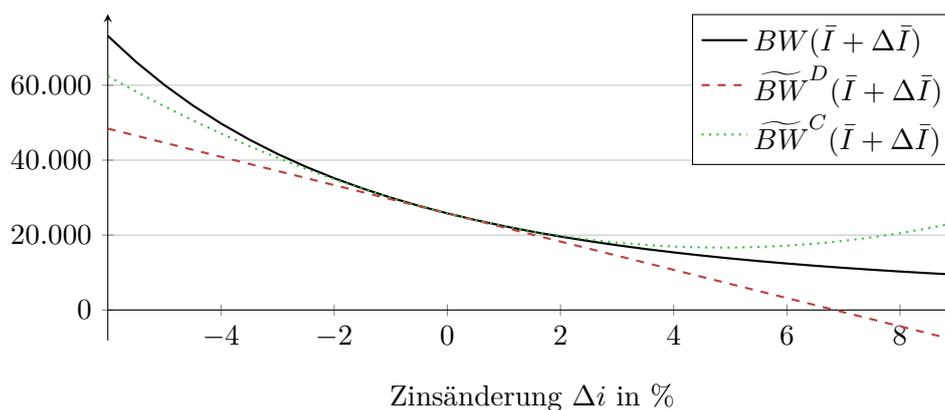


Abbildung 3.7.: Verlauf der Barwertfunktionen aus Beispiel 3.11.

In Abbildung 3.7 erkennt man dazu auch deutlich den konvexen Verlauf der Barwertfunktion  $BW(\bar{I})$  (schwarze Kurve). Außerdem ist zu erkennen, dass die lineare Approximation (3.10) (rote, gestrichelte Kurve) unterhalb des Barwerts verläuft und das Zinsänderungsrisiko somit unterschätzt wird.  $\diamond$

### 3.1.3. Eigenschaften der modifizierten Macaulay-Duration

In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften der modifizierten Macaulay-Duration  $D_{Mac}(\bar{I})$  diskutiert, die typischerweise für die Anwendung zur Risikoanalyse in der Praxis von Bedeutung sind.

Zunächst wird ein Zusammenhang der modifizierten Macaulay-Duration  $D_{Mac}(\bar{I})$  zur Macaulay-Duration  $\bar{D}_{Mac}(\bar{I})$  beschrieben. Es gilt

$$\begin{aligned} D_{Mac}(\bar{I}) &= (1+i)^{-1} \cdot \frac{\sum_{j=1}^n j \cdot Z_j \cdot (1+i)^{-j}}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot (1+i)^{-j}} \\ &= (1+i)^{-1} \cdot \bar{D}_{Mac}(\bar{I}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Aus diesem Zusammenhang wird die Bezeichnung „modifizierte“ Macaulay-Duration für  $D_{Mac}(\bar{I})$  ersichtlich, da  $D_{Mac}(\bar{I})$  aus der Modifikation der Macaulay-Duration  $\bar{D}_{Mac}(\bar{I})$ ,

d.h. der Multiplikation mit dem Diskontierungsfaktor  $(1+i)^{-1}$ , hervorgeht.

Man erkennt, dass auch die Macaulay-Duration  $\bar{D}_{Mac}(\bar{I})$  zur Messung der Sensitivität einer Zahlungsreihe gegenüber Zinsschwankungen eingesetzt werden kann. Aus (3.7) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dBW(\bar{I})}{BW(\bar{I})} &= \frac{1}{BW(\bar{I})} \cdot BW'(\bar{I}) \cdot \Delta i \\ &= -(1+i)^{-1} \cdot \underbrace{\frac{\sum_{j=0}^n j \cdot Z_j \cdot (1+i)^{-j}}{BW(\bar{I})}}_{:=\bar{D}_{Mac}(\bar{I})} \cdot \Delta i \\ &= -(1+i)^{-1} \cdot \bar{D}_{Mac}(\bar{I}) \cdot \Delta i. \end{aligned}$$

Mithilfe des Zusammenhangs (3.19) ist es häufig möglich formulierte Eigenschaften für die Macaulay-Duration auf die modifizierte Duration zu übertragen. Viele dieser Eigenschaften gelten allerdings oft nur unter speziellen Einschränkungen an die Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  und die Zahlungsreihe  $Z$  (vgl. Bemerkung 3.3).

Dazu wird eine Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  *nicht-negativ* genannt, falls  $Z_t \geq 0$  für  $t = 0, 1, \dots, n$  gilt. Analog liegt eine *negative* Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  vor, falls  $Z_t \leq 0$  für  $t = 0, 1, \dots, n$  gilt.

Für nicht-negative Zahlungsreihen  $Z = (Z_0, \dots, Z_n)$  lässt sich das Ausmaß des Zinsänderungsrisikos abschätzen, falls ein positiver Zinssatz  $i > 0$  angenommen wird.

### Satz 3.12

Für eine nicht-negative Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, \dots, Z_n)$  mit mindestens einer Zahlung  $Z_k > 0$ , sowie  $i > 0$  gilt

$$D_{Mac}(Z, \bar{I}) \in [0, n).$$

**Beweis** Es gilt

$$\begin{aligned} j \cdot v \cdot Z_j &< n \cdot Z_j, \text{ für alle } j = 0, \dots, n \\ \Rightarrow \sum_{j=0}^n j \cdot Z_j \cdot v \cdot v^j &< \sum_{j=0}^n n \cdot Z_j \cdot v^j \\ &\Leftrightarrow D_{Mac}(Z, \bar{I}) < n. \end{aligned}$$

Für nicht-negative Zahlungsreihen  $Z$  ist offensichtlich  $D_{Mac}(Z, \bar{I}) \geq 0$ , sodass die Behauptung folgt.  $\square$

Wird ein negativer Zinssatz  $i < 0$  betrachtet, so ist für nicht-negative Zahlungsreihen auch  $D_{Mac}(Z, \bar{I}) > n$  möglich bzw. für negative Zahlungsreihen auch

$D_{Mac}(Z, \bar{I}) < -n$ . Falls ein negativer Zinssatz vorliegt, lassen sich daher keine allgemeingültigen Aussagen für den Wertebereich treffen.

**Satz 3.13**

Für eine nicht-negative Zahlungsreihe  $Z$  ist die modifizierte Macaulay-Duration  $D_{Mac}(Z, \bar{I})$  monoton fallend im Zinssatz  $i$ .

**Beweis** Sei  $D_0 \in \mathbb{R}$  beliebig, aber fest. Es gilt für die Ableitung der Macaulay-Duration  $(\bar{D}_{Mac}(Z, \bar{I}))'$  (vgl. [Mül12]):

$$\begin{aligned} (\bar{D}_{Mac}(Z, \bar{I}))' &= \frac{d}{di} \left( \bar{D}_{Mac}(Z, \bar{I}) \right) = \frac{d}{di} \left( \bar{D}_{Mac}(Z, \bar{I}) - D_0 \right) \\ &= \frac{d}{di} \left( \frac{\sum_{j=0}^n (j - D_0) \cdot Z_j \cdot v^j}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^j} \right) \\ &= \frac{d}{di} \left( \frac{\sum_{j=0}^n (j - D_0) \cdot Z_j \cdot v^{j-D_0}}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{j-D_0}} \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Für  $D_0 := D_{Mac}(Z, \bar{I})$ , den Wert der modifizierten Duration für einen festen Zinssatz  $i$ , ist die Ableitung des Nenners in (3.20) = 0, d.h.  $\left( \sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{j-D_0} \right)' = 0$ . Dadurch muss für die Ableitung von  $(\bar{D}_{Mac}(Z, \bar{I}))'$  nur die Ableitung des Zählers in (3.20) berücksichtigt werden und man erhält nach Anwendung der Quotientenregel (vgl. [Mül12])

$$(\bar{D}_{Mac}(Z, \bar{I}))' = -v \cdot \frac{\sum_{j=0}^n (j - D_0)^2 \cdot Z_j \cdot v^j}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^j}.$$

Dann gilt zusammen mit (3.19):

$$\begin{aligned} (D_{Mac}(Z, \bar{I}))' &= \frac{dD_{Mac}(Z, \bar{I})}{di} = \frac{d}{di} \left( (1+i)^{-1} \cdot \bar{D}_{Mac}(Z, \bar{I}) \right) \\ &= -(1+i)^{-2} \cdot \left( \frac{\sum_{j=0}^n j \cdot Z_j \cdot v^j}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^j} \right) + (1+i)^{-1} \cdot \left( -v \cdot \frac{\sum_{j=0}^n (j - D_0)^2 \cdot Z_j \cdot v^j}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^j} \right) \\ &= \underbrace{-v^2}_{\leq 0} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^j}_{\geq 0}} \cdot \underbrace{\left( \sum_{j=0}^n \underbrace{Z_j \cdot v^j}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(j + (j - D_0)^2)}_{\geq 0} \right)}_{\geq 0} \leq 0 \end{aligned}$$

und somit die Monotonie-Aussage für  $D_{Mac}(Z, \bar{I})$ .  $\square$

Durch die Monotonie-Aussage in Satz 3.13 wird deutlich, dass eine Zinsänderung weniger Auswirkung auf den Barwert  $BW(\bar{I} + \Delta \bar{I})$  hat, je höher der konstante Zinssatz  $i$  der flachen Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  ist.

Für negative Zahlungsreihen mit nicht-positiven Zahlungen  $Z_t \leq 0$ , für alle  $t = 0, 1, \dots, n$  und mindestens einer Zahlung  $Z_k < 0$  gilt offensichtlich auch  $D_{Mac}(Z, \bar{I}) \in [0, n)$ , sowie die Monotonie-Aussage. Allerdings sind für Zahlungsreihen mit sowohl positiven, als auch negativen Zahlungen auch negative Werte für  $D_{Mac}(Z, \bar{I})$  möglich, sowie  $D_{Mac}(Z, \bar{I}) > n$ . Auch lässt sich bei Zahlungsreihen mit sowohl positiven, als auch negativen Zahlungen keine Aussage über monotonen Verhalten treffen.

Hat die Zahlungsreihe die spezielle Form  $Z^{(t)} = (0, \dots, 0, Z_t, 0, \dots, 0)$ , so ist der Barwert  $BW(Z^{(t)}, \bar{I})$  der Wert der diskontierten Zahlung  $Z_t$ :

$$BW(Z^{(t)}, \bar{I}) = Z_t \cdot (1 + i)^{-t}.$$

Damit ergibt sich für die modifizierte Duration  $D_{Mac}(Z^{(t)}, \bar{I})$ :

$$\begin{aligned} D_{Mac}(Z^{(t)}, \bar{I}) &= \frac{1}{BW(Z^{(t)}, \bar{I})} \cdot BW'(Z^{(t)}, \bar{I}) \\ &= \frac{1}{Z_t \cdot (1 + i)^{-t}} \cdot \left( (1 + i)^{-1} \cdot t \cdot Z_t \cdot (1 + i)^{-t} \right) \\ &= t \cdot (1 + i)^{-1}. \end{aligned}$$

Das Ausmaß des Zinsänderungsrisiko einer einzelnen Zahlung hängt somit nicht der Höhe der Zahlung selbst ab, sondern lediglich vom Zeitpunkt der Zahlung, sowie der Höhe des konstanten Zinssatzes  $i$ .

#### Satz 3.14

Es seien  $m$  Zahlungsreihen  $Z^1, Z^2, \dots, Z^m$  mit  $Z^k = (Z_0^k, Z_1^k, \dots, Z_n^k)$ , für  $k = 1, \dots, m$  gegeben, sowie eine flache Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$ . Für  $Z = \sum_{k=1}^m Z^k$  gilt:

$$D_{Mac}(Z, \bar{I}) = \sum_{k=1}^m \frac{BW(Z^k, \bar{I})}{BW(Z, \bar{I})} \cdot D_{Mac}(Z^k, \bar{I}).$$

**Beweis** Für den Barwert der Zahlungsreihe  $Z = \sum_{k=1}^m Z^k$  gilt:

$$BW(Z, \bar{I}) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^m Z_j^k \cdot (1 + i)^{-j} = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^n Z_j^k \cdot (1 + i)^{-j} = \sum_{k=1}^m BW(Z^k, \bar{I}).$$

Für die modifizierte Macaulay-Duration  $D_{Mac}(Z, \bar{I})$  der Zahlungsreihe  $Z$  erhält man aus (3.8):

$$\begin{aligned} D_{Mac}(Z, \bar{I}) &= \frac{-BW'(Z, \bar{I})}{BW(Z, \bar{I})} \\ &= \frac{-1}{BW(Z, \bar{I})} \cdot \sum_{k=1}^m BW'(Z^k, \bar{I}) = \sum_{k=1}^m -\frac{BW(Z^k, \bar{I})}{BW(Z, \bar{I})} \cdot \frac{BW'(Z^k, \bar{I})}{BW(Z^k, \bar{I})} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{BW(Z^k, \bar{I})}{BW(Z, \bar{I})} \cdot D_{Mac}(Z^k, \bar{I}). \quad \square \end{aligned}$$

Analog ergibt sich die Konvexität der Zahlungsreihe  $Z = \sum_{k=1}^m Z^k$  (s. [Tra07]).

### Satz 3.15

Es seien  $m$  Zahlungsreihen  $Z^1, Z^2, \dots, Z^m$  mit  $Z^k = (Z_0^k, Z_1^k, \dots, Z_n^k)$ , für  $k = 1, \dots, m$  gegeben, sowie eine flache Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$ . Für  $Z = \sum_{k=1}^m Z^k$  gilt:

$$C_{Mac}(Z, \bar{I}) = \sum_{k=1}^m \frac{BW(Z^k, \bar{I})}{BW(Z, \bar{I})} \cdot C_{Mac}(Z^k, \bar{I}).$$

**Beweis** Mit (3.16) gilt:

$$\begin{aligned} C_{Mac}(Z, \bar{I}) &= \frac{BW''(Z, \bar{I})}{BW(Z, \bar{I})} \\ &= \frac{1}{BW(Z, \bar{I})} \cdot \sum_{k=1}^m BW''(Z^k, \bar{I}) = \sum_{k=1}^m \frac{BW(Z^k, \bar{I})}{BW(Z, \bar{I})} \cdot \frac{BW''(Z^k, \bar{I})}{BW(Z^k, \bar{I})} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{BW(Z^k, \bar{I})}{BW(Z, \bar{I})} \cdot C_{Mac}(Z^k, \bar{I}). \quad \square \end{aligned}$$

Die modifizierte Duration der Zahlungsreihe  $Z$  lässt sich also als gewichtete Summe der modifizierten Durationsen der  $m$  einzelnen Zahlungsreihen  $Z^k$  ausdrücken. (Vgl. bspw. [Mül12; TS11]). Diese Aussage ist von besonderem praktischen Interesse, wenn mehrere Zahlungsreihen vorliegen. Liegt bspw. ein Portfolio von Zinsanleihen oder ein Bestand von Versicherungsverträgen vor, so ist nicht nur das Ausmaß des Zinsänderungsrisikos einzelner Zahlungsreihen von Interesse. Vielmehr soll das gesamte Zinsänderungsrisiko quantifiziert werden. Mit der Anwendung der Summenregeln aus Satz 3.14 und 3.15 ist dies möglich.

Aus diesen Summenregeln wird auch deutlich, wie sich die Größen berechnen lassen, falls die einzelnen Zahlungsreihen  $Z^k$  mit unterschiedlichen, flachen Zinskurven  $\bar{I}^k$  bewertet werden. In diesem Fall ergibt sich der Barwert von  $Z$  durch

$$BW(Z, \bar{I}^{(1)}, \dots, \bar{I}^{(m)}) = \sum_{k=1}^m BW(Z^k, \bar{I}^k).$$

Für das zugehörige Durationsmaß gilt dann

$$D(Z, \bar{I}^{(1)}, \dots, \bar{I}^{(m)}) = \sum_{k=1}^m \frac{BW(Z^k, \bar{I}^k)}{BW} \cdot D_{Mac}(Z^k, \bar{I}^k)$$

und für die Konvexitätsgröße

$$C(Z, \bar{I}^{(1)}, \dots, \bar{I}^{(m)}) = \sum_{k=1}^m \frac{BW(Z^k, \bar{I}^k)}{BW} \cdot C_{Mac}(Z^k, \bar{I}^k).$$

Mittels dieser Größen kann nun das Zinsänderungsrisiko der Summe der Zahlungsreihen bemessen werden, falls sich die unterschiedlich flachen Zinskurven in identischer Höhe verändern.

Für die spezielle Zahlungsreihe  $Z = z \cdot \mathbb{1}_n = (z, z, \dots, z)$ ,  $z \neq 0$ , lässt sich die modifizierte Duration in Abhängigkeit des Diskontierungsfaktors  $v = (1 + i)^{-1}$  und der Laufzeit  $n$  ausdrücken. Für  $D_{Mac}(Z, \bar{I})$  ergibt sich die Form:

$$\begin{aligned} D_{Mac}(Z, \bar{I}) &= \frac{1}{BW(Z, \bar{I})} \cdot \sum_{j=0}^n (1+i)^{-1} \cdot j \cdot z \cdot (1+i)^{-j} = \frac{1}{\sum_{j=0}^n z \cdot v^j} \cdot \sum_{j=0}^n j \cdot z \cdot v^{j+1} \\ &= \frac{1-v}{1-v^{n+1}} \cdot v \cdot \frac{n \cdot v^{n+2} - (n+1) \cdot v^{n+1} + v}{(1-v)^2} \\ &= v^2 \cdot \frac{n \cdot v^{n+1} - (n+1) \cdot v^n + 1}{1-v-v^{n+1}+v^{n+2}}. \end{aligned}$$

Solche Zahlungsreihen sind typisch für Rentenversicherungen, bei denen Rentenzahlungen in gleicher Höhe vereinbart werden. In diesem Fall hängt der Wert der modifizierten Macaulay-Duration und damit das Zinsänderungsrisiko nicht von der Höhe der Rentenzahlungen ab, sondern nur von der Laufzeit  $n$  und dem Zinssatz  $i$ .

Betrachtet man eine Zahlungsreihe unendlicher Länge mit Zahlungen in konstanter Höhe (bspw. Zahlungen einer „ewigen Rente“), also  $Z_\infty = (z, z, z, \dots)$ , d.h.  $Z_\infty = z \cdot \mathbb{1}_\infty$ , so ergibt sich die modifizierte Duration aus

$$\begin{aligned} D_{Mac}(Z_\infty, \bar{I}) &= D_{Mac}(\mathbb{1}_\infty, \bar{I}) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_{Mac}(\mathbb{1}_n, \bar{I}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} v^2 \cdot \frac{n \cdot v^{n+1} - (n+1) \cdot v^n + 1}{1-v-v^{n+1}+v^{n+2}} \\ &= v^2 \cdot \frac{1}{1-v} = \frac{1}{i \cdot (1+i)}. \end{aligned}$$

Für konstante Zahlungsreihen ist es somit möglich, die modifizierte Macaulay Duration in einer Form darzustellen, die lediglich vom Zinssatz  $i$  abhängt.

## 3.2. Effektive Durationen

Die Betrachtung flacher Zinsstrukturkurven  $\bar{I}$ , sowie deren Parallelverschiebungen stellen eine stark einschränkende Annahme dar. Es ist nicht realistisch, von einer flachen Zinsstrukturkurve und damit von einem über viele Jahre konstanten Zinssatz auszugehen. Hängt ein nicht-konstant angenommener Zinssatz, mit dem eine Zahlung  $Z_t$  bewertet wird, vom Zeitpunkt  $t$  ab, so führt dies anstelle von  $\bar{I}$  zur Betrachtung einer (Frist-) Zinsstrukturkurve  $I^S$ , die aus  $n$  Spot Rates  $i_{[0,t]}$  für  $t = 1, \dots, n$ , besteht [Tra07].

Für eine Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  ist damit der Barwert  $BW_S(I^S)$  gemäß (2.8) aus Abschnitt 2.1 gegeben durch:

$$BW_S(I^S) = \sum_{j=0}^n Z_j \cdot (1 + i_{[0,j]})^{-j}.$$

Für  $t = 0$  sei der Zinssatz  $i_{[0,0]}$  weiterhin durch  $i_{[0,0]} = 0$  definiert.

In Abschnitt 3.2.1, sowie 3.2.2 wird zunächst eine Parallelverschiebung der Spot Rate Kurve  $I^S$  betrachtet, bei der sich jede Spot Rate um den gleichen Betrag  $\Delta i$  ändert. Der Vektor  $\Delta \bar{I}$  enthält diese Änderungen  $\Delta i_{[0,t]} = \Delta i$  für alle  $t = 1, \dots, n$ , sodass sich die veränderte Zinsstrukturkurve durch

$$I^S + \Delta \bar{I} = (i_{[0,1]} + \Delta i, i_{[0,2]} + \Delta i, \dots, i_{[0,n]} + \Delta i)$$

ergibt. Abbildung 3.8 zeigt beispielhaft eine Spot Rate Kurve  $I^S$ , sowie eine Parallelverschiebung um  $\Delta i = 0,01$ .

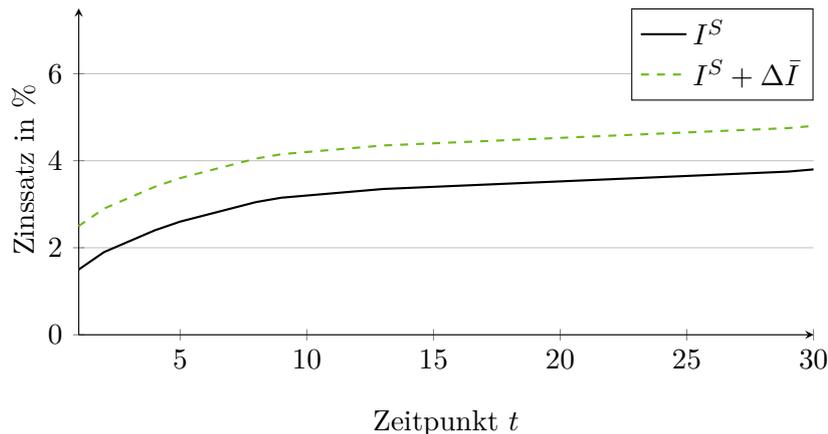


Abbildung 3.8.: Beispiel einer Parallelverschiebung einer Spot Rate Zinskurve.

### 3.2.1. Effektive Duration

Die effektive Duration ist für eine nicht-flache Spot Rate Zinsstrukturkurve  $I^S$  und eine Zahlungsreihe  $Z$  wie folgt definiert (vgl. bspw. [HWPW15]):

**Definition 3.16 (Effektive Duration)**

Für eine gegebene Spot Rate Kurve  $I^S = (i_{[0,1]}, i_{[0,2]}, \dots, i_{[0,n]})$  mit  $i_{[0,t]} > -1$  für alle  $t = 1, \dots, n$  ist die *effektive Duration*  $\bar{D}_{Eff}(I^S)$  der Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  definiert durch:

$$\bar{D}_{Eff}(I^S) = \frac{\sum_{j=1}^n j \cdot Z_j \cdot (1 + i_{[0,j]})^{-j}}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot (1 + i_{[0,j]})^{-j}}. \quad (3.21)$$

Die effektive Duration stellt das Analogon zur Macaulay-Duration (3.1) dar. Sie lässt sich daher ebenfalls als Schwerpunkt einer Zahlungsreihe interpretieren (vgl. Kap. 3.1.1 oder [HWPW15]). Vergleicht man  $\bar{D}_{Eff}(I^S)$  und  $\bar{D}_{Mac}(\bar{I})$ , so stellt man fest, dass formal gilt:

$$D_{eff}(\bar{I}) = D_{Mac}(\bar{I}).$$

**3.2.2. Modifizierte Effektive Duration**

Für eine Näherung der Zinssensitivität bei Parallelverschiebung  $\Delta\bar{I} = (\Delta i, \Delta i, \dots, \Delta i)$  einer nicht-flachen Spot Rate Kurve  $I^S$  kann erneut der Ansatz über die Taylorreihenentwicklung gewählt werden, wie dies bereits mit (3.6) bzw. (3.7) in Abschnitt 3.1.2 geschehen ist. Da eine nicht-flache Zinsstrukturkurve  $I^S$  möglicherweise  $n$  verschiedene, von  $t$  abhängige Spot Rates  $i_{[0,t]}$ ,  $t = 1, \dots, n$ , enthält, liegt hier jedoch nicht, wie in Abschnitt 3.1.2, eine Funktion in einer Variablen vor. Für die Betrachtung einer Parallelverschiebung ist es allerdings möglich, den Barwert in Abhängigkeit der Änderungsrate  $\Delta i$  auszudrücken und somit nur eine variable Größe zu betrachten.

Die Barwertfunktion in Abhängigkeit von  $\Delta i$  wird mit  $BW_S^\Delta(\Delta i)$  bezeichnet und lässt sich für eine gegebene Zahlungsreihe  $Z$ , sowie eine gegebene Zinsstrukturkurve  $I^S$  ausdrücken durch:

$$BW_S^\Delta(\Delta i) = \sum_{j=0}^n Z_j \cdot (1 + i_{[0,j]} + \Delta i)^{-j}.$$

Es ist klar, dass für  $\Delta i = 0$  die Identität  $BW_S^\Delta(0) = BW_S(I^S)$  gilt, sowie mit  $\Delta\bar{I} = (\Delta i, \dots, \Delta i)$  der allgemeinere Zusammenhang

$$BW_S^\Delta(\Delta i) = BW_S(I^S + \Delta\bar{I}).$$

Analog zu Definition 3.2 aus Abschnitt 3.1.2 wird nun über die negative Ableitung der Barwertfunktion  $(BW_S^\Delta(\Delta i)')$  die sogenannte modifizierte effektive Duration  $D_{Eff}(I^S)$  definiert (vgl. [Tra07]).

**Definition 3.17 (Modifizierte Effektive Duration)**

Für eine gegebene Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$ , eine Spot Rate Zinsstrukturkurve  $I^S = (i_{[0,1]}, i_{[0,2]}, \dots, i_{[0,n]})$  mit  $i_{[0,t]} > -1$  für alle  $t = 1, \dots, n$  ist die *modifizierte effektive Duration*  $D_{Eff}(I^S)$  definiert durch:

$$\begin{aligned} D_{Eff}(I^S) &= -\frac{(BW_S^\Delta)'(0)}{BW_S^\Delta(0)} \\ &= \frac{-1}{BW_S^\Delta(0)} \cdot \frac{dBW_S^\Delta(0)}{d(\Delta i)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Über die Ableitung  $\frac{dBW_S^\Delta(0)}{d(\Delta i)}$  lässt sich aus (3.22) eine geschlossene Darstellung für die modifizierte effektive Duration angeben:

$$\begin{aligned} \frac{dBW_S^\Delta(0)}{d(\Delta i)} &= \frac{d}{d(\Delta i)} \sum_{j=0}^n Z_j \cdot (1 + i_{[0,j]})^{-j} \\ &= \sum_{j=1}^n -j \cdot Z_j \cdot (1 + i_{[0,j]})^{-t-1}. \end{aligned}$$

Mit  $BW_S(I^S) = \sum_{t=0}^n Z_t \cdot (1 + i_{[0,t]})^{-t}$  erhält man schließlich die folgende Form für  $D_{Eff}(I^S)$ .

**Satz 3.18 (Modifizierte Effektive Duration)**

Für eine Spot Rate Kurve  $I^S = (i_{[0,1]}, i_{[0,2]}, \dots, i_{[0,n]})$  mit  $i_{[0,t]} > -1$  für alle  $t = 1, \dots, n$  gilt für die modifizierte effektive Duration  $D_{Eff}(I^S)$  der Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$ :

$$D_{Eff}(I^S) = \frac{1}{BW_S(I^S)} \cdot \sum_{t=1}^n t \cdot Z_t \cdot (1 + i_{[0,t]})^{-(t+1)}. \quad (3.23)$$

Mithilfe von Definition 3.17 lässt sich eine Approximation der absoluten Barwertänderung aufgrund einer Parallelverschiebung der Spot Rate Kurve im Zeitpunkt  $t = 0$  darstellen, um das Zinsänderungsrisiko zu bemessen [Tra07]:

$$\begin{aligned} \Delta BW_S(I^S) &= BW_S^\Delta(\Delta i) - BW_S^\Delta(0) \approx \frac{dBW_S^\Delta(0)}{d(\Delta i)} \cdot \Delta i \\ &= -BW_S^\Delta(0) \cdot D_{Eff}(I^S) \cdot \Delta i. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Analog zur modifizierten Macaulay-Duration beschreibt die modifizierte effektive Duration auch hier die relative Änderung des Barwerts  $BW_S(I^S)$  bei einer Parallelverschiebung der Spot Rate Kurve um  $\Delta i = 1$  [Tra07]. So liefert die modifizierte effektive Duration  $D_{Eff}(I^S)$  eine lineare Näherung der Zinssensitivität:

$$\frac{\Delta BW_S(I^S)}{BW_S(I^S)} \approx -D_{Eff}(I^S) \cdot \Delta i.$$

Um wiederum den aufgrund der Linearität entstehenden Approximationsfehler zu reduzieren, kann auch hier, analog zur Konvexität  $C(\bar{I})$ , die sogenannte effektive Konvexität definiert werden [Tra07].

**Definition 3.19 (Effektive Konvexität)**

Für eine Spot Rate Kurve  $I^S = (i_{[0,1]}, i_{[0,2]}, \dots, i_{[0,n]})$  mit  $i_{[0,t]} > -1$  für alle  $t = 1, \dots, n$  ist die effektive Konvexität  $C_{Eff}(I^S)$  der Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  definiert durch:

$$C_{Eff}(I^S) = \frac{1}{BW_S^\Delta(0)} \cdot \frac{d^2 BW_S^\Delta(0)}{d(\Delta i)^2}. \quad (3.25)$$

Der folgende Satz formuliert eine explizite Darstellung für  $C_{Eff}(I^S)$ .

**Satz 3.20 (Effektive Konvexität)**

Sei eine Spot Rate Kurve  $I^S = (i_{[0,1]}, i_{[0,2]}, \dots, i_{[0,n]})$  mit  $i_{[0,t]} > -1$  für alle  $t = 1, \dots, n$  gegeben, dann lässt sich die effektive Konvexität  $C_{Eff}(I^S)$  der Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  darstellen durch:

$$C_{Eff}(I^S) = \frac{1}{BW_S(I^S)} \cdot \sum_{j=1}^n j \cdot (j+1) \cdot Z_j \cdot (1 + i_{[0,j]})^{-(j+2)}.$$

**Beweis** Die zweite Ableitung des Barwerts,  $\frac{d^2 BW_S^\Delta(\Delta i)}{d(\Delta i)^2}$  hat die Darstellung

$$\begin{aligned} \frac{d^2 BW_S^\Delta(\Delta i)}{d(\Delta i)^2} &= \frac{d}{d\Delta i} \left( \sum_{j=1}^n -j \cdot (1 + i_{[0,j]} + \Delta i)^{-j-1} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n j \cdot (j+1) \cdot (1 + i_{[0,j]} + \Delta i)^{-j-2}. \end{aligned}$$

Aus (3.25) folgt die Darstellung für  $C_{Eff}(I^S)$ . □

Unter Berücksichtigung der effektiven Konvexität lässt sich die Approximation (3.24) der Barwertänderung aufgrund einer Parallelverschiebung der Spot Rate Kurve um  $\Delta i$  erweitern zu

$$\Delta BW_S(I^S) \approx -BW_S^\Delta(0) \cdot D_{Eff}(I^S) \cdot \Delta i + \frac{1}{2} \cdot BW_S^\Delta(0) \cdot C_{Eff}(I^S) \cdot (\Delta i)^2. \quad (3.26)$$

Für die Approximation der Zinssensitivität folgt entsprechend:

$$\frac{\Delta BW_S(I^S)}{BW_S(I^S)} \approx -D_{Eff}(I^S) \cdot \Delta i + \frac{1}{2} \cdot C_{Eff}(I^S) \cdot (\Delta i)^2.$$

Diese Approximationen liefern durch die Verwendung der Konvexitätsgröße auch für größere Zinsänderungen gute Ergebnisse [Tra07].

Die modifizierte effektive Duration stellt eine Verallgemeinerung der modifizierten Macaulay-Duration dar, wie in folgender Bemerkung festgehalten wird.

**Bemerkung 3.21**

Es ist leicht ersichtlich, dass bei Wahl identischer Spot Rates  $i_{[0,t]} = i$  für  $t = 1, \dots, n$  eine flache Zinsstrukturkurve  $\bar{I} = (i, i, \dots, i)$  beschrieben wird (s. auch Abschnitt 2.1). Dementsprechend erhält man für diesen Fall die beschriebenen Größen aus Abschnitt 3.1. Es gilt:

$$\begin{aligned} D_{Eff}(\bar{I}) &= \frac{1}{BW_S(IS)} \cdot \sum_{t=1}^n t \cdot Z_t \cdot (1 + i_{[0,t]})^{-(t+1)} \\ &= \frac{1}{BW(\bar{I})} \cdot \sum_{t=1}^n t \cdot Z_t \cdot (1 + i)^{-(t+1)} \\ &= D_{Mac}(\bar{I}). \end{aligned}$$

Ebenso gilt im Fall einer flachen Spot Rate Kurve für die effektive Konvexität  $C_{Eff}(\bar{I})$ :

$$\begin{aligned} C_{Eff}(\bar{I}) &= \frac{1}{BW_S(IS)} \cdot \sum_{j=1}^n j \cdot (j+1) \cdot Z_j \cdot (1 + i_{[0,j]})^{-(j+2)} \\ &= \frac{1}{BW(\bar{I})} \cdot \sum_{j=1}^n j \cdot (j+1) \cdot Z_j \cdot (1 + i)^{-(j+2)} \\ &= C_{Mac}(\bar{I}). \end{aligned}$$

Die modifizierte effektive Duration (3.23) entspricht demnach für eine flache Spot Rate Kurve der modifizierten Macaulay-Duration (3.11) und die effektive Konvexität entspricht der Macaulay-Konvexitätsgröße. In diesem Sinne kann das Konzept der effektiven Duration als eine Verallgemeinerung des Konzepts der Macaulay-Duration angesehen werden.

**Beispiel 3.22**

Für das folgende Beispiel werden die in Abbildung 3.9 gezeigten Spot Rate Kurven verwendet<sup>3</sup>. Die schwarz dargestellte Kurve für  $\Delta i = 0$  dient dabei als Ausgangskurve, die parallel verschoben wird. Zu jedem Zeitpunkt der Laufzeit,  $n = 30$ , wird eine Zahlung  $Z_t = 1.000$ , für  $t = 1, \dots, 30$  betrachtet. Der Barwert dieser Zahlungsreihe unter der dargestellten Spot Rate Kurve beträgt  $BW_S^\Delta(0) = 18.604,13$ . Gemäß der Approximation der Barwertänderung (3.24) bzw. (3.26) unter Berücksichtigung der Konvexität, lässt sich

<sup>3</sup>Die Werte der verwendeten Spot Rate Zinsstrukturkurven sind in Tabelle A.1 in Anhang A.1.1 aufgeführt.

$BW_S^\Delta(\Delta i)$  annähern mittels

$$\begin{aligned} BW_S^\Delta(\Delta i) &\approx BW_S^\Delta(0) - BW_S^\Delta(0) \cdot D_{Eff}(I^S) \cdot \Delta i \\ &=: \widetilde{BW}_S^\Delta{}^D(\Delta i), \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} BW^\Delta(\Delta i) &\approx BW^\Delta(0) - BW^\Delta(0) \cdot D_{Eff}(I^S) \cdot \Delta i + \frac{1}{2} \cdot BW^\Delta(0) \cdot C_{Eff}(I^S) \cdot (\Delta i)^2 \\ &=: \widetilde{BW}_S^\Delta{}^C(\Delta i). \end{aligned}$$

Der Wert des Barwerts nach der Parallelverschiebung der Spot Rate Kurve wird weiterhin mit  $BW^\Delta(\Delta i)$  bezeichnet.

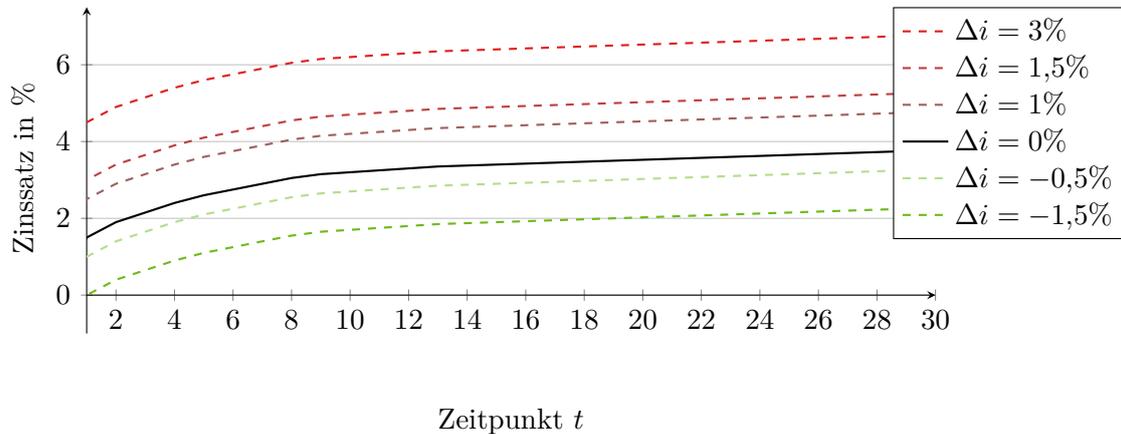


Abbildung 3.9.: Verwendete Spot Rate Kurven in Beispiel 3.22.

Für die Änderungen  $\Delta i^{(1)} = -1,5\%$ ,  $\Delta i^{(2)} = -0,5\%$ ,  $\Delta i^{(3)} = 0,5\%$ ,  $\Delta i^{(4)} = 1\%$  und  $\Delta i^{(5)} = 3\%$  wird der Barwert unter der veränderten Spot Rate Kurve  $BW_S^\Delta(\Delta i^{(j)})$  berechnet, sowie die approximierten Barwerte  $\widetilde{BW}_S^\Delta{}^D(\Delta i^{(j)})$  und  $\widetilde{BW}_S^\Delta{}^C(\Delta i^{(j)})$ ,  $j = 1, \dots, 5$ . Die Werte werden in Tabelle 3.2 dargestellt.

| $\Delta i^{(j)}$                              | -1,5%     | -0,5%     | 0%        | 1%        | 1,5%      | 3%        |
|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $BW_S^\Delta(\Delta i^{(j)})$                 | 22.573,08 | 19.803,65 | 18.604,13 | 16.512,06 | 15.598,53 | 13.286,11 |
| $\widetilde{BW}_S^\Delta{}^D(\Delta i^{(j)})$ | 22.037,72 | 19.748,66 | 18.604,13 | 16.315,06 | 15.170,53 | 11.736,94 |
| $\widetilde{BW}_S^\Delta{}^C(\Delta i^{(j)})$ | 22.514,36 | 19.801,62 | 18.604,13 | 16.526,90 | 15.647,17 | 13.643,50 |

Tabelle 3.2.: Vergleich der Barwertapproximationen in Beispiel 3.22

Abbildung 3.10 stellt den Verlauf der Barwertfunktion  $BW_S^\Delta(\Delta i)$ , sowie der approxi-

mierten Barwertfunktionen  $\widetilde{BW}_S^D(\Delta i)$  und  $\widetilde{BW}_S^C(\Delta i)$  in Abhängigkeit der Zinsänderung  $\Delta i$  dar. Erneut lässt sich der konvexe Verlauf, sowie die lineare und die quadratische Approximation gut erkennen.

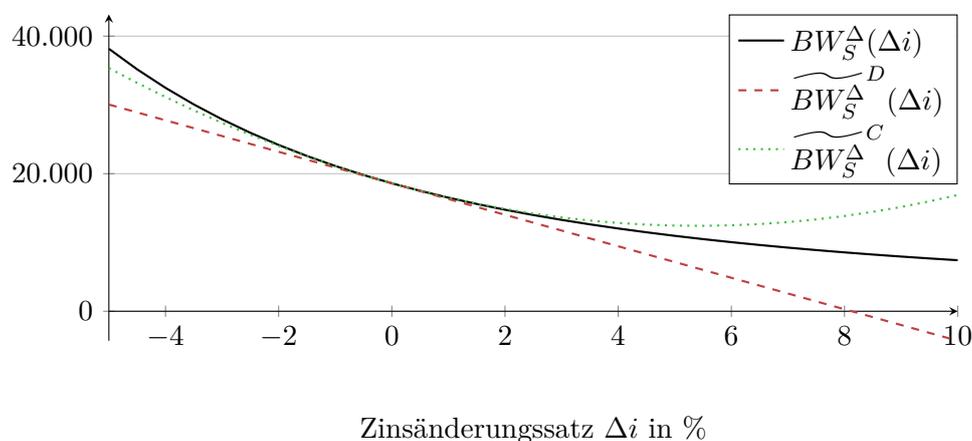


Abbildung 3.10.: Verlauf der Barwertfunktionen aus Beispiel 3.22.

Sowohl durch die Werte in Tabelle 3.2 als auch durch Abbildung 3.10 ist ersichtlich, dass die Approximationen für kleinere Abweichungen nahezu zum exakten Wert für den Barwert führen, während für größere Änderungen die Werte stark voneinander abweichen.  $\diamond$

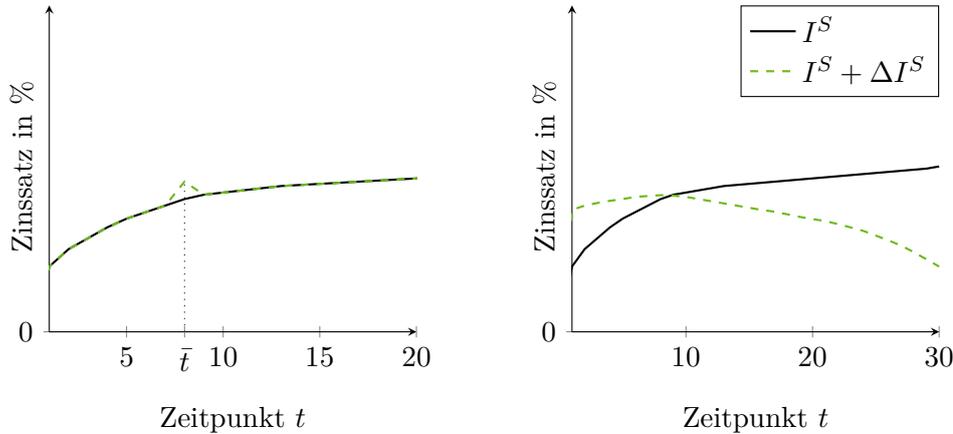
### 3.2.3. Key Rate Duration

Bis hierhin wurde eine einmalige, im Zeitpunkt  $t = 0$  auftretende Änderung  $\Delta \bar{I} = (\Delta i, \Delta i, \dots, \Delta i)$  der Zinsstrukturkurve unterstellt, die sich auf alle Zinssätze in gleichem Maße auswirkt. Solche Parallelverschiebungen von Zinsstrukturkurven sind im Allgemeinen keine realistische Annahme an zukünftige Zinsentwicklungen. Vielmehr sind unterschiedliche Entwicklungen von zukünftigen Zinssätzen anzunehmen. So lassen sich kurzfristige Änderungen typischerweise genauer abschätzen als langfristige Änderungen. Kurzfristige Zinssätze schwanken stärker und nehmen höhere Abweichungen an, als langfristige Zinssätze [Sch97]. Auch gehen häufig Anstiege zeitnaher Zinssätze mit Zinssenkungen für spätere Zeitpunkte einher. Es ist daher grundsätzlich nicht sinnvoll davon auszugehen, dass sich alle betrachteten Zinssätze in gleicher Höhe ändern. Daher wird in diesem Abschnitt eine nicht-parallele Änderung

$$\Delta I^S = (\Delta i_{[0,1]}, \Delta i_{[0,2]}, \dots, \Delta i_{[0,n]})$$

einer Spot Rate Zinsstrukturkurve  $I^S = (i_{[0,1]}, i_{[0,2]}, \dots, i_{[0,n]})$  angenommen.

Zu nicht-parallelen Änderungen einer Zinsstrukturkurve zählen auch beispielsweise Änderungen nur einzelner oder weniger Zinssätze, sowie Drehungen der Zinsstrukturkurve. In Abbildung 3.11 sind solche Änderungen beispielhaft dargestellt.



(a) Beispiel einer Veränderung einer Spot Rate  
Rate

(b) Beispiel einer Drehung einer Spot Rate  
Kurve

Abbildung 3.11.: Beispiele nicht-paralleler Verschiebungen einer Spot Rate Kurve.

Mit dem Konzept der effektiven Duration ist es nicht möglich die Auswirkungen von nicht-parallelen Änderungen  $\Delta I^S$  einer Zinsstrukturkurve zu untersuchen [PS12]. Reitano schlägt daher in [Rei92] vor, ein Durationsmaß zu verwenden, bei dem nur eine Spot Rate verändert wird, während die anderen Raten unverändert bleiben. Auch Thomas S.Y. Ho hat in diesem Zusammenhang Änderungen einzelner Spot Rates untersucht, um die Auswirkungen von nicht-parallelen Veränderungen auf den Barwert bestimmen zu können [Ho92].

Die Veränderung der Zinsstrukturkurve wird dabei durch die Variation einzelner Spot Rates erreicht. Die variablen Größen werden dabei als sogenannte Key Rates bezeichnet. Welche Zinssätze als Key Rates in Frage kommen, lässt sich nach subjektivem Ermessen festlegen [SB17]. Im Folgenden wird der Fall betrachtet, bei dem die gewählten Key Rates den zugrundeliegenden Spot Rates entsprechen.

Die Betrachtung der Änderung einer Key Rate für die Ermittlung des zugehörigen Zinsänderungsrisikos führt zur sogenannten Key Rate Duration. Die  $t$ -te Key Rate Duration ist durch die negative relative Änderung des Barwerts bei einer marginalen Änderung der  $t$ -ten Key Rate definiert [Ho92; SB17].

**Definition 3.23 ( $t$ -te Key Rate Duration)**

Für eine Spot Rate Kurve  $I^S = (i_{[0,1]}, i_{[0,2]}, \dots, i_{[0,n]})$  mit  $i_{[0,t]} > -1$  für alle  $t = 1, \dots, n$  ist die  $t$ -te Key Rate Duration  $D_{KR}^{(t)}(I^S)$  der Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  definiert durch:

$$\begin{aligned}
 D_{KR}^{(t)}(I^S) &= \frac{-1}{BW_S(I^S)} \cdot \frac{dBW_S(I^S)}{di_{[0,t]}} \\
 &= \frac{t \cdot Z_t \cdot (1 + i_{[0,t]})^{-(t+1)}}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot (1 + i_{[0,j]})^{-j}}.
 \end{aligned}$$

Für die Untersuchung der Auswirkungen einzelner Änderungen der  $t$ -ten Key Rate auf den Barwert  $BW_S(I^S)$  sei  $\Delta i_{[0,t]}$  die Änderung der Spot Rate  $i_{[0,t]}$ .

Die Approximation der Barwertänderung erhält man dann aus der Taylorreihenentwicklung, analog zu Abschnitt 3.1.2, Gleichung (3.9) durch (vgl. [SB17]):

$$\Delta BW_S(I^S) \approx -BW_S(I^S) \cdot D_{KR}^{(t)}(I^S) \cdot \Delta i_{[0,t]}.$$

Für die Approximation der Zinssensitivität folgt entsprechend

$$\frac{\Delta BW_S(I^S)}{BW_S(I^S)} \approx -D_{KR}^{(t)}(I^S) \cdot \Delta i_{[0,t]}.$$

Hierbei wird nur die Änderung der  $t$ -ten Spot Rate berücksichtigt. Mittels der Key Rate Durationen kann aber auch die Änderung des Barwerts  $\Delta BW_S(I^S)$  angenähert werden, falls eine beliebige Änderung der gegebenen Spot Rate Kurve angenommen wird. Die möglichen Änderungen  $\Delta i_{[0,t]}$ , für alle  $t = 1, \dots, n$  seien im Vektor

$$\Delta I^S = \left( \Delta i_{[0,1]}, \Delta i_{[0,2]}, \dots, \Delta i_{[0,n]} \right)$$

gegeben, sodass sich die veränderte Spot Rate Kurve  $I^S + \Delta I^S$  ergibt, mit

$$I^S + \Delta I^S = \left( i_{[0,1]}, i_{[0,2]}, \dots, i_{[0,n]} \right) + \left( \Delta i_{[0,1]}, \Delta i_{[0,2]}, \dots, \Delta i_{[0,n]} \right).$$

Die Änderung des Barwerts  $\Delta BW_S(I^S)$  bei einer Änderung der Zinsstrukturkurve um  $\Delta I^S$  lässt sich dann über die Summe der einzelnen Änderungen annähern [Tra07]:

$$\Delta BW_S(I^S) \approx -BW_S(I^S) \cdot \sum_{j=1}^n D_{KR}^{(j)}(I^S) \cdot \Delta i_{[0,j]}.$$

Die Approximation der Sensitivität ergibt sich aus:

$$\frac{\Delta BW_S(I^S)}{BW_S(I^S)} \approx - \sum_{j=1}^n D_{KR}^{(j)}(I^S) \cdot \Delta i_{[0,j]}.$$

Durch diese Betrachtung lassen sich nun die unterschiedlichen Änderungen  $\Delta i_{[0,t]}$  gleichzeitig anwenden, um das Zinsänderungsrisiko bei nicht-parallelen Veränderungen einer Spot Rate Kurve zu quantifizieren.

**Definition 3.24 ((Totale) Key Rate Duration)**

Für eine Spot Rate Kurve  $I^S = (i_{[0,1]}, i_{[0,2]}, \dots, i_{[0,n]})$  mit  $i_{[0,t]} > -1$  für alle  $t = 1, \dots, n$  und Änderungsgrößen  $\Delta I^S = (\Delta i_{[0,1]}, \Delta i_{[0,2]}, \dots, \Delta i_{[0,n]})$  ist die (totale) Key Rate Duration  $D_{KR}(I^S, \Delta I^S)$  der Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  definiert durch:

$$\begin{aligned} D_{KR}(I^S, \Delta I^S) &= \sum_{j=1}^n D_{KR}^{(j)}(I^S) \cdot \Delta i_{[0,j]} \\ &= \frac{1}{BW_S(I^S)} \cdot \left( \sum_{j=1}^n j \cdot Z_j \cdot (1 + i_{[0,j]})^{-(j+1)} \Delta i_{[0,j]} \right). \end{aligned}$$

Die Key Rate Durationen können dazu verwendet werden, um die modifizierte effektive Duration  $D_{Eff}(I^S)$  zu berechnen. Es gilt der einfache Zusammenhang:

$$D_{Eff}(I^S) = \sum_{j=1}^n D_{KR}^{(j)}(I^S).$$

Für den Fall einer Parallelverschiebung der Spot Rate Kurve erhält man die modifizierte effektive Duration. Daher kann die Größe  $D_{KR}(I^S, \Delta I^S)$  als Verallgemeinerung von  $D_{Eff}(I^S)$  angesehen werden, mit der auch nicht-parallele Änderungen betrachtet werden können.

Diese Verallgemeinerung lässt sich auch auf die effektive Konvexität  $C_{Eff}(I^S)$  übertragen und führt zur Definition der Key Rate Konvexität.

**Definition 3.25 (Key Rate Konvexität)**

Für eine Spot Rate Kurve  $I^S = (i_{[0,1]}, i_{[0,2]}, \dots, i_{[0,n]})$  mit  $i_{[0,t]} > -1$  für alle  $t = 1, \dots, n$  und Änderungsgrößen  $\Delta I^S = (\Delta i_{[0,1]}, \Delta i_{[0,2]}, \dots, \Delta i_{[0,n]})$  ist die Key Rate Konvexität  $KRC_{Eff}(I^S, \Delta I^S)$  der Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  definiert durch:

$$KRC_{Eff}(I^S, \Delta I^S) = \frac{1}{BW_S(I^S)} \cdot \sum_{j=1}^n j \cdot (j+1) \cdot Z_j \cdot (1 + i_{[0,j]})^{-(j+2)} \cdot (\Delta i_{[0,j]})^2.$$

Unter Verwendung der Key Rate Konvexität erhält man die Approximation der Barwertänderung  $\Delta BW_S(I^S)$  mit

$$\Delta BW_S(I^S) \approx -BW_S(I^S) \cdot D_{KR}(I^S, \Delta I^S) + \frac{1}{2} \cdot BW_S(I^S) \cdot KRC_{Eff}(I^S, \Delta I^S),$$

woraus sich die folgende Approximation für die Sensitivität ergibt:

$$\frac{\Delta BW_S(I^S)}{BW_S(I^S)} \approx -D_{KR}(I^S, \Delta I^S) + \frac{1}{2} \cdot KRC_{Eff}(I^S, \Delta I^S).$$

**Bemerkung 3.26**

Wird eine flache Spot Rate Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  betrachtet, so lässt sich mittels der Key Rate Duration und der Key Rate Konvexität auch das Zinsänderungsrisiko bemessen, wenn eine nicht-parallele Änderung einer flachen Zinsstrukturkurve vorliegt.

Durch die Möglichkeit zum einen eine Spot Rate Kurve und zum anderen eine beliebige Veränderung dieser Kurve betrachten zu können, zeigt sich in der größeren Flexibilität ein Vorteil der (totalen) Key Rate Duration gegenüber anderen Durationsmaßen. Es ist allerdings auch ersichtlich, dass im Gegensatz zu diesen anderen Durationsmaßen ein größerer Aufwand in den einzelnen Berechnungsschritten notwendig ist (s. z.B. [Elt+09; SB17]).

## Kapitel 4

# Forward Rate Duration

Neben der flachen Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  und der Spot Rate Zinsstrukturkurve  $I^S$  wurde in Abschnitt 2.1 auch das Zinsmodell vorgestellt, das periodenadäquate Forward Rates beinhaltet. Dabei liegt weiterhin eine Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  vor, die nun anhand der Zinsstrukturkurve  $I^F = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  mit periodenadäquaten Forward Rates  $i_t > -1$ , für  $t = 1, \dots, n$  bewertet wird. Der zugehörige Barwert ist gemäß (2.9) durch

$$BW_F(I^F) = \sum_{j=0}^n Z_j \cdot \prod_{k=1}^j (1 + i_k)^{-1} \quad (2.9)$$

gegeben.

Für die Bewertung einer Zahlungsreihe mittels Forward Rates findet sich in der Literatur kein geeigneter Ansatz zur Messung des Zinsänderungsrisikos mittels des Durationskonzepts. In der Praxis der Lebensversicherungen haben Forward Rates allerdings eine große Bedeutung. Vor allem für versicherungsmathematische Berechnungen ist eine jährliche Betrachtung wesentlich, weswegen es geboten ist, bei der Anwendung von nicht-flachen Zinsstrukturkurven auf Forward Rate Zinsstrukturkurven zurückzugreifen.

Darüber hinaus stellt das Forward Rate-Zinsmodell einen Zugang zur Betrachtung von weiteren Risiken dar. Es liefert vor allem die theoretische Grundlage und damit einen Ansatz für die Bemessung von biometrischen Risiken in Kapitel 5.

Aufgrund dieser theoretischen und praktischen Anwendungsmöglichkeiten sollen auch für das Forward Rate-Zinsmodell die Auswirkungen einer Änderung der Zinskurve quantifiziert werden. Dazu wird zunächst in Analogie zur Betrachtung der Durationsmaße  $\bar{D}_{Mac}(\bar{I})$  und  $\bar{D}_{Eff}(I^S)$  ein Durationsmaß angegeben, das wiederum als „Schwerpunkt einer Zahlungsreihe“ interpretiert werden kann. Anschließend soll analog zur Herleitung der modifizierten Durationsmaße  $D_{Mac}(\bar{I})$  und  $D_{Eff}(I^S)$  eine Größe hergeleitet werden, mit der das Zinsänderungsrisiko gemessen und die Zinssensitivität berechnet werden kann.

### 4.1. Forward Rate Duration als „Restlaufzeit“

Ist eine Forward Rate Zinsstrukturkurve  $I^F = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  gegeben, lässt sich die Forward Rate Duration der Zahlungsreihe  $Z$  definieren (siehe auch [FW71]).

**Definition 4.1 (Forward Rate Duration)**

Sei eine Forward Rate Zinsstrukturkurve  $I^F = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  gegeben. Für eine Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  ist die *Forward Rate Duration* der Zahlungsreihe  $Z$  definiert durch:

$$\bar{D}_F(Z, I^F) := \frac{\sum_{j=1}^n j \cdot Z_j \cdot v^{(j)}}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)}}.$$

Die Größen  $\bar{D}_{Mac}(\bar{I})$  und  $\bar{D}_{Eff}(I^S)$  wurden als „Schwerpunkt“ oder „durchschnittliche Restlaufzeit“ einer Zahlungsreihe interpretiert. Im Allgemeinen ergibt sich dieser Schwerpunkt einer Zahlungsreihe als gewichteter Mittelwert der Zahlungszeitpunkte. Die Gewichte werden entsprechend der Anteile der jeweiligen diskontierten Zahlungen am Barwert der gesamten Zahlungsreihe gewählt [SLK08].

Mit diesen Gewichten

$$g_t = \left( \frac{Z_t \cdot v^{(t)}}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)}} \right), \text{ für } t = 1, \dots, n$$

gilt:

$$\bar{D}_F(I^F) = \sum_{j=1}^n j \cdot g_j.$$

Damit kann auch die Forward Rate Duration  $\bar{D}_F(I^F)$  als „Schwerpunkt der Zahlungsreihe“, d.h. als gewichteter Mittelwert der Zahlungszeitpunkte, interpretiert werden (vgl. Abschnitt 3.1.1).

Es ist leicht ersichtlich, dass man, sofern eine flache Zinsstrukturkurve  $I^F = \bar{I}$  vorliegt, die Macaulay-Duration aus (3.2) erhält. Für  $\bar{I} = (i, \dots, i)$  gilt:

$$\bar{D}_F(\bar{I}) = \frac{\sum_{j=1}^n j \cdot Z_j \cdot v^{(j)}}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)}} = \frac{\sum_{j=1}^n j \cdot Z_j \cdot v^j}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^j} = \bar{D}_{Mac}(\bar{I}).$$

Ist eine Spot Rate Kurve  $I^S$  gegeben und ermittelt man die Forward Rates  $i_j \in I^F$  gemäß Transformation (2.6) aus Bemerkung 2.3, so gilt  $v^{(j)} = (1 + i_{[0,j]})^{-j}$ ,  $j = 0, \dots, n$  und

$$\bar{D}_F(I^F) = \frac{\sum_{j=1}^n j \cdot Z_j \cdot v^{(j)}}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)}} = \frac{\sum_{j=1}^n j \cdot Z_j \cdot (1 + i_{[0,j]})^{-j}}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot (1 + i_{[0,j]})^{-j}} = \bar{D}_{Eff}(I^S).$$

Aus diesem Grund kann  $\bar{D}_F(I^F)$  als Verallgemeinerung der Macaulay-Duration  $\bar{D}_{Mac}(\bar{I})$ , sowie der effektiven Duration  $\bar{D}_{Eff}(I^S)$  (vgl. (3.21) aus Abschnitt 3.2.1) angesehen werden.

## 4.2. Modifizierte Forward Rate Duration

Ähnlich wie in Kapitel 3 wird nun eine Veränderung der Forward Rate Zinsstrukturkurve  $I^F$  in  $I^F + \Delta I^F$  unterstellt, um die Auswirkung einer solchen Änderung untersuchen und das Zinsänderungsrisiko bestimmen zu können. Diese Veränderung sei durch den Änderungsvektor

$$\Delta I^F = (\Delta i_1, \Delta i_2, \dots, \Delta i_n)$$

induziert, der die absoluten Änderungen  $\Delta i_t$  der einzelnen Zinssätze beschreibt. Dabei soll  $i_t + \Delta i_t > -1$  für alle  $t = 1, \dots, n$  gelten, sodass auch die Änderungen nicht zu vollständigem Kapitalverlust führen. Der Barwert nach dieser Veränderung der Forward Rate Zinsstrukturkurve ist dann  $BW_F(I^F + \Delta I^F)$ .

Abbildung 4.1 zeigt ein Beispiel einer Zinsstrukturkurve, sowie einer nicht-parallelen Veränderung der Zinsstrukturkurve.

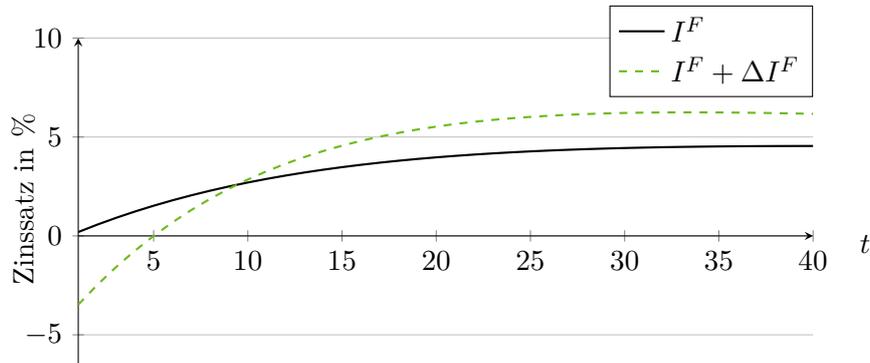


Abbildung 4.1.: Nicht-parallele Veränderung einer Forward Rate Zinsstrukturkurve.

In Kapitel 3 wurde die Herleitung des Durationsmaß als Sensitivitätskennzahl deutlich. Mithilfe der Taylorreihenentwicklung wurde der Barwert nach einer Veränderung der Zinsstrukturkurve approximiert und die absolute bzw. relative Barwertänderung als Risikomaße für das Zinsänderungsrisiko betrachtet.

Im Gegensatz zu den Ansätzen in Kapitel 3 liegt hier weder eine flache Zinsstrukturkurve vor, noch soll eine Parallelverschiebung angenommen werden. Die Barwertfunktion  $BW_F(I^F)$  kann somit nicht mehr in nur einer variablen Größe ausgedrückt werden. Stattdessen wird hier jeder Eintrag der Zinskurve  $I^F = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  als Variable betrachtet. Für festes  $Z$  wird  $BW_F(I^F)$  als Funktion von  $I^F$  aufgefasst,  $BW_F : ]-1, \infty[^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Für eine Approximation des Barwerts  $BW_F(I^F + \Delta I^F)$  muss daher nun die mehrdimensionale Taylorreihenentwicklung verwendet werden.

Für ein  $n$ -Tupel  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  sei  $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  und  $\alpha! := \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$ . Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $|\alpha|$ -mal stetig differenzierbare Funktion, setzt man  $D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ . Damit gilt der Satz von Taylor [For17]:

**Satz 4.2 (Satz von Taylor)**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\xi \in U$  ein Punkt und  $h \in \mathbb{R}^n$  ein Vektor derart, dass die Strecke  $\xi + \theta h$ ,  $0 < \theta < 1$  ganz in  $U$  liegt. Weiter sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $(m + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann existiert ein  $\theta \in (0, 1)$ , so dass

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + R_m \quad (4.1)$$

mit

$$R_m = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(x + \theta\xi)}{\alpha!} \xi^\alpha = \frac{(\xi_1 D_1 + \dots + \xi_n D_n)^{m+1} f(x + \theta\xi)}{(m+1)!}.$$

**Beweis** s. [For17]. □

Der Barwert  $BW_F(I^F)$  in (2.9) ist als Funktion  $BW_F : ]-1, \infty[^n \rightarrow \mathbb{R}$  in den Zinssätzen  $i_1, \dots, i_n$  offensichtlich beliebig oft stetig differenzierbar. Insbesondere existieren daher die partiellen Ableitungen erster Ordnung  $\frac{\partial}{\partial i_j} (BW_F(I^F))$  für  $j = 1, \dots, n$ , sowie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung  $\frac{\partial^2}{\partial i_k \partial i_l} (BW_F(I^F))$  für  $k, l = 1, \dots, n$ .

Somit lässt sich der Satz von Taylor für die Barwertfunktion anwenden und  $BW_F(I^F + \Delta I^F)$  ausdrücken durch:

$$BW_F(I^F + \Delta I^F) = BW_F(I^F) + dBW_F(I^F) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial}{\partial i_k} \frac{\partial}{\partial i_l} (BW_F(I^F)) \Delta i_k \Delta i_l + \dots + R_m. \quad (4.2)$$

Hierbei gilt für das Restglied  $R_m$ : Es gibt ein  $\theta \in ]0, 1[$ :

$$\begin{aligned} R_m &= \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} BW(I^F + \theta \Delta I^F)}{\partial i_1^{\alpha_1} \partial i_2^{\alpha_2} \dots \partial i_n^{\alpha_n}} (\Delta I^F)^\alpha \\ &= o(\|\Delta I^F\|^m). \end{aligned}$$

Aus (4.2) erhält man für  $m = 1$  die folgende Approximation der Barwertfunktion  $BW_F(I^F + \Delta I^F)$  bei Veränderung der Zinsstrukturkurve  $I^F$ :

$$BW_F(I^F + \Delta I^F) \approx BW_F(I^F) + dBW_F(I^F). \quad (4.3)$$

Hier beschreibt  $dBW_F(I^F)$  das totale Differential von  $BW_F(I^F)$ . Es ist definiert als die

Summe der partiellen Ableitungen des Barwerts

$$dBW_F(I^F) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial i_j} (BW_F(I^F)) \Delta i_j$$

und beinhaltet somit auch die Änderungsgrößen  $\Delta i_t$ ,  $t = 1, \dots, n$  [Wal90]. Dieser Ansatz über die Betrachtung der mehrdimensionalen Taylorreihenentwicklung ermöglicht die Ermittlung eines Maß für das Zinsänderungsrisiko bei einer Änderung der Forward Rate Zinsstrukturkurve  $I^F$ . Hierbei ist es insbesondere auch möglich nicht-parallele Änderungen der Zinsstrukturkurve zu betrachten.

Als Maß für das Zinsänderungsrisiko wird weiterhin die absolute Änderung des Barwerts aufgrund einer Änderung der Zinsstrukturkurve verwendet:

$$\Delta BW_F(I^F) = BW_F(I^F + \Delta I^F) - BW_F(I^F) \approx dBW_F(I^F)$$

Als relative Kennzahl für das Zinsänderungsrisiko dient wie bisher die Zinssensitivität des Barwerts. Man erhält die Approximation:

$$\frac{\Delta BW_F(I^F)}{BW_F(I^F)} \approx \frac{dBW_F(I^F)}{BW_F(I^F)}.$$

Diese Approximation führt zur Definition der *Forward Rate Duration*  $D_F(I^F, \Delta I^F)$ .

**Definition 4.3 ((modifizierte) Forward Rate Duration)**

Es sei  $I^F = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  eine Forward Rate Zinsstrukturkurve und  $\Delta I^F = (\Delta i_1, \Delta i_2, \dots, \Delta i_n)$  der Vektor der zugehörigen Änderungsgrößen. Für eine Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  bezeichnet

$$\begin{aligned} D_F(Z, I^F, \Delta I^F) &:= \frac{-1}{BW_F(I^F)} \cdot dBW_F(I^F) \\ &= \frac{-1}{BW_F(I^F)} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial i_j} (BW_F(I^F)) \Delta i_j. \end{aligned} \quad (4.4)$$

die *(modifizierte) Forward Rate Duration*.

**Bemerkung 4.4**

Analog zu Notation 2.5 wird im weiteren Verlauf der Arbeit in der Bezeichnung  $D_F(Z, I^F, \Delta I^F)$  auf die Angabe der Zahlungsreihe  $Z$  verzichtet. Liegt jedoch eine spezielle Zahlungsreihe vor, wird dies in der Notation deutlich gemacht.

Die Bezeichnung *modifizierte Forward Rate Duration* für  $D_F(I^F, \Delta I^F)$  wurde in Analogie zur modifizierten Macaulay-Duration  $D_{Mac}(\bar{I})$  und modifizierten effektiven Duration  $D_{Eff}(I^S)$ , sowie zur Abgrenzung von der Forward Rate Duration  $\bar{D}_F(I^F)$  gewählt. Im

weiteren Verlauf der Arbeit ist der Begriff *Forward Rate Duration* stets als Zinssensitivität  $D_F(I^F, \Delta I^F)$  zu verstehen.

Mit Definition 4.3 erhält man die Approximation für den Barwert  $BW_F(I^F + \Delta I^F)$ :

$$BW_F(I^F + \Delta I^F) \approx BW_F(I^F) - BW_F(I^F) \cdot D_F(I^F, \Delta I^F) =: \widetilde{BW}_F^D. \quad (4.5)$$

Für die Zinssensitivität folgt die Darstellung:

$$\frac{\Delta BW_F(I^F)}{BW_F(I^F)} = \frac{BW_F(I^F + \Delta I^F) - BW_F(I^F)}{BW_F(I^F)} \approx -D_F(I^F, \Delta I^F).$$

Für die praktische Verwendbarkeit der Forward Rate Duration  $D_F(I^F, \Delta I^F)$  als Maß für das Zinsänderungsrisiko ist eine explizite Darstellung wesentlich. Es ist dazu:

**Satz 4.5 ((modifizierte) Forward Rate Duration)**

Es sei eine Forward Rate Zinsstrukturkurve  $I^F = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  und zugehörige Änderungsgrößen  $\Delta I^F = (\Delta i_1, \Delta i_2, \dots, \Delta i_n)$  gegeben. Für eine Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$  hat  $D_F(I^F, \Delta I^F)$  die Darstellung:

$$D_F(I^F, \Delta I^F) = \frac{1}{BW_F(I^F)} \cdot \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j v_k \cdot \Delta i_k \right) \cdot Z_j \cdot v^{(j)}. \quad (4.6)$$

**Beweis** Für die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial v^{(j)}}{\partial i_k}$ , für  $k = 1, \dots, n$  und  $j = 0, \dots, n$  der Diskontierungsfaktoren  $v^{(t)}$  (s. (2.5)) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^{(j)}}{\partial i_k} &= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial i_k} 1, & \text{für } j = 0, \\ \frac{\partial}{\partial i_k} \left( \prod_{l=1}^j (1 + i_l)^{-1} \right), & \text{für } j \neq 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{für } j = 0, \\ -(1 + i_k)^{-1} \cdot \prod_{l=1}^j (1 + i_l)^{-1}, & \text{für } k \leq j, \\ 0, & \text{für } j < k. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Unter Verwendung von (4.7) ergibt sich aus (4.4):

$$\begin{aligned} D_F(I^F, \Delta I^F) &= \frac{-1}{BW_F(I^F)} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial i_k} (BW_F(I^F)) \Delta i_k \\ &= \frac{-1}{BW_F(I^F)} \cdot \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=0}^n Z_j \cdot \frac{\partial v^{(j)}}{\partial i_k} \cdot \Delta i_k \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{BW_F(I^F)} \cdot \sum_{j=0}^n Z_j \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial v^{(j)}}{\partial i_k} \right) \cdot \Delta i_k \\
&\stackrel{(4.7)}{=} \frac{-1}{BW_F(I^F)} \cdot \sum_{j=1}^n Z_j \sum_{k=1}^j -(1+i_k)^{-1} \cdot \prod_{l=1}^j (1+i_l)^{-1} \cdot \Delta i_k \\
&= \frac{1}{BW_F(I^F)} \cdot \left( \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j v_k \cdot \Delta i_k \right) \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \right).
\end{aligned}$$

□

Bei der Approximation von  $BW_F(I^F + \Delta I^F)$  in (4.3) entsteht durch die Betrachtung der Taylorreihenentwicklung erster Ordnung der Approximationsfehler  $R_1$  (vgl. (4.2) oder auch Abschnitt 3.1).

Für ein  $\theta \in ]0, 1[$  gilt für den Fehler  $R_1$  ([For17]):

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 BW(I^F + \theta \Delta I^F)}{\partial i_j \partial i_k} \Delta i_j \Delta i_k \\
&= o(\|\Delta I^F\|^2).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Für große Zinsänderungen  $\Delta I^F$  ist auch der Approximationsfehler  $R_1$  groß, sodass die Approximation zu ungenau ist, um die Auswirkungen der Zinsänderungen zu berechnen. Durch die Berücksichtigung weiterer Glieder in der Taylorreihe, lässt sich auch hier der Approximationsfehler verringern und die Approximation für  $BW_F(I^F + \Delta I^F)$  verbessern.

Für  $m = 2$  erhält man aus (4.2) die Anwendung der mehrdimensionalen Taylorreihenentwicklung zweiter Ordnung auf die Barwertfunktion  $BW_F(I^F)$ :

$$BW_F(I^F + \Delta I^F) = BW_F(I^F) + dBW_F(I^F) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial}{\partial i_k} \frac{\partial}{\partial i_l} (BW_F(I^F)) \Delta i_k \Delta i_l + R_2.$$

Es gelten die folgenden Abschätzungen für  $\Delta BW_F(I^F) = BW_F(I^F + \Delta I^F) - BW_F(I^F)$ , bzw. die Zinssensitivität:

$$\Delta BW_F(I^F) \approx dBW_F(I^F) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial i_k \partial i_l} (BW_F(I^F)) \Delta i_k \Delta i_l$$

und

$$\frac{\Delta BW_F(I^F)}{BW_F(I^F)} \approx \frac{dBW_F(I^F)}{BW_F(I^F)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{BW_F(I^F)} \cdot \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial i_k \partial i_l} (BW_F(I^F)) \Delta i_k \Delta i_l.$$

**Definition 4.6 (Forward Rate Konvexität)**

Es sei  $I^F = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  eine Forward Rate Zinsstrukturkurve und  $\Delta I^F = (\Delta i_1, \Delta i_2, \dots, \Delta i_n)$  zugehörige Änderungsgrößen. Für eine Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  bezeichnet

$$C_F(I^F, \Delta I^F) := \frac{1}{BW_F(I^F)} \cdot \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial i_k \partial i_l} (BW_F(I^F)) \Delta i_k \Delta i_l. \quad (4.9)$$

die *Forward Rate Konvexität*.

Mit den Definitionen 4.3 und 4.6 lässt sich die Approximation des Barwerts nach Änderung der Forward Rate Kurve darstellen durch:

$$\begin{aligned} BW_F(I^F + \Delta I^F) &\approx BW_F(I^F) + dBW_F(I^F) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial i_k \partial i_l} (BW_F(I^F)) \Delta i_k \Delta i_l \\ &\approx BW_F(I^F) - BW_F(I^F) \cdot D_F(I^F, \Delta I^F) + \frac{1}{2} \cdot BW_F(I^F) \cdot C_F(I^F, \Delta I^F) \\ &=: \widetilde{BW}_F^C. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Für die Sensitivität als relatives Maß für das Zinsänderungsrisiko ergibt sich dann:

$$\frac{\Delta BW_F(I^F)}{BW_F(I^F)} \approx -D_F(I^F, \Delta I^F) + \frac{1}{2} \cdot C_F(I^F, \Delta I^F). \quad (4.11)$$

Für den Approximationsfehler  $R_2$ , der bei Anwendung von (4.10) entsteht, gilt für ein  $\theta \in ]0, 1[$ :

$$\begin{aligned} R_2 &= \sum_{|\alpha|=3} \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^{|\alpha|} BW(I^F + \theta \Delta I^F)}{\partial i_1^{\alpha_1} \partial i_2^{\alpha_2} \dots \partial i_n^{\alpha_n}} (\Delta I^F)^\alpha. \\ &= o(\|\Delta I^F\|^3). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Auch für die Forward Rate Konvexität  $C_F(I^F, \Delta I^F)$  kann für praktische Berechnungen eine Darstellung explizit angegeben werden.

**Satz 4.7 (Forward Rate Konvexität)**

Es sei eine Forward Rate Zinsstrukturkurve  $I^F = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  und zugehörige Änderungsgrößen  $\Delta I^F = (\Delta i_1, \Delta i_2, \dots, \Delta i_n)$  gegeben. Für eine Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$  gilt dann:

$$C_F(I^F, \Delta I^F) = \frac{1}{BW_F(I^F)} \cdot \sum_{j=1}^n Z_j \cdot v^{(j)} \cdot 2 \cdot \sum_{l=1}^j \sum_{k=l}^j v_l \Delta i_l \cdot v_k \Delta i_k. \quad (4.13)$$

**Beweis** Betrachte die Funktionen der Diskontierungsfaktoren  $v^{(j)} : ]-1, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$ ,  $j =$

$1, \dots, n$ . Für  $1 \leq k \leq j \leq n$  gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial^2 i_k} &= \frac{\partial}{\partial i_k} \left( -(1+i_k)^{-1} \cdot \prod_{\nu=1}^j (1+i_\nu)^{-1} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial i_k} \left( -(1+i_k)^{-2} \cdot \prod_{\nu=1, \nu \neq k}^j (1+i_\nu)^{-1} \right) \\ &= 2 \cdot (1+i_k)^{-2} \cdot \prod_{\nu=1}^j (1+i_\nu)^{-1} \end{aligned}$$

und für  $k > j$  gilt

$$\frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial^2 i_k} = 0.$$

Da der Barwert  $BW_F(I^F)$  als Funktion der Zinssätze  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  zweimal stetig differenzierbar ist, gilt für die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial i_k \partial i_l} = \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial i_l \partial i_k}$ , für  $k, l = 1, \dots, n$  mit  $k < l$ . Für diese Ableitungen erhält man, für  $k < l \leq j$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial i_k \partial i_l} &= \frac{\partial}{\partial i_k} \left( -v_l \cdot v^{(j)} \right) \\ &= v_k \cdot v_l \cdot v^{(j)}. \end{aligned}$$

Für  $k > j$  oder  $l > j$  gilt  $\frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial i_k \partial i_l} = 0$ .

Zusammengefasst erhält man für  $k, l = 1, \dots, n$  und  $j = 1, \dots, n$  die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial i_k \partial i_l} = \begin{cases} v_k \cdot v_l \cdot v^{(j)}, & 1 \leq k < l \leq j, \\ 2 \cdot v_k^2 \cdot v^{(j)}, & 1 \leq k = l \leq j, \\ v_k \cdot v_l \cdot v^{(j)}, & 1 \leq l < k \leq j, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

bzw. als Matrixdarstellung in der Form

$$\left( \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial i_k \partial i_l} \right)_{k,l=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} 2 \cdot v_1^2 \cdot v^{(j)} & v_1 \cdot v_2 \cdot v^{(j)} & v_1 \cdot v_3 \cdot v^{(j)} & \dots & v_1 \cdot v_n \cdot v^{(j)} \\ v_1 \cdot v_2 \cdot v^{(j)} & 2 \cdot v_2^2 \cdot v^{(j)} & v_2 \cdot v_3 \cdot v^{(j)} & \dots & v_2 \cdot v_n \cdot v^{(j)} \\ v_1 \cdot v_3 \cdot v^{(j)} & v_2 \cdot v_3 \cdot v^{(j)} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ v_1 \cdot v_{n-1} \cdot v^{(j)} & & & \dots & v_{n-1} \cdot v_n \cdot v^{(j)} \\ v_1 \cdot v_n \cdot v^{(j)} & v_2 \cdot v_n \cdot v^{(j)} & \dots & \dots & 2 \cdot v_n^2 \cdot v^{(j)} \end{pmatrix}.$$

Insgesamt folgt damit:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial i_k \partial i_l} (BW_F(I^F)) \cdot \Delta i_k \cdot \Delta i_l \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial i_k \partial i_l} \left( \sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)} \right) \cdot \Delta i_k \cdot \Delta i_l \\
&= \sum_{j=0}^n Z_j \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial i_k \partial i_l} \cdot \Delta i_k \cdot \Delta i_l.
\end{aligned}$$

Da  $\frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial i_k \partial i_l} = 0$  für  $k, l > j$  gilt:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^n Z_j \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^j \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial i_k \partial i_l} \cdot \Delta i_k \cdot \Delta i_l \\
&= \sum_{j=0}^n Z_j \left( \underbrace{\sum_{k=1}^{j-1} \sum_{l=k+1}^j \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial i_k \partial i_l} \cdot \Delta i_k \cdot \Delta i_l}_{k < l} + \underbrace{\sum_{k=1}^j \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial^2 i_k} \cdot (\Delta i_k)^2}_{k=l} \right. \\
&\quad \left. \underbrace{\sum_{l=1}^{j-1} \sum_{k=l+1}^j \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial i_k \partial i_l} \cdot \Delta i_k \cdot \Delta i_l}_{k > l} \right) \\
&= \sum_{j=0}^n Z_j \cdot \left( \sum_{k=1}^j \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial^2 i_k} \cdot (\Delta i_k)^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{l=k+1}^j \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial i_k \partial i_l} \cdot \Delta i_k \cdot \Delta i_l \right) \\
&= \sum_{j=0}^n Z_j \cdot \left( \sum_{k=1}^j 2 \cdot v_k^2 \cdot v^{(j)} \cdot (\Delta i_k)^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{l=k+1}^j v_k \cdot v_l \cdot v^{(j)} \cdot \Delta i_k \cdot \Delta i_l \right) \\
&= 2 \cdot \sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)} \cdot \left( \sum_{k=1}^j v_k^2 \cdot (\Delta i_k)^2 + \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{l=k+1}^j v_k \cdot v_l \cdot \Delta i_k \cdot \Delta i_l \right) \\
&= 2 \cdot \sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)} \cdot \left( \sum_{k=1}^j \sum_{l=k}^j v_k \cdot v_l \cdot \Delta i_k \cdot \Delta i_l \right).
\end{aligned}$$

Mit (4.9) ergibt sich dann die Darstellung für  $C_F(I^F, \Delta I^F)$  in (4.13).  $\square$

Das folgende Beispiel verdeutlicht die Verwendung der Forward Rate Duration  $D_F(I^F, \Delta I^F)$ , sowie der Forward Rate Konvexität  $C_F(I^F, \Delta I^F)$ .

#### Beispiel 4.8

Die Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  mit  $n = 40$  Zahlungen der Höhe  $Z_t = 1.000$ , für  $t = 0, \dots, n$  wird gemäß der Zinsstrukturkurve  $I^F$  bewertet, die in Abbildung 4.2 dargestellt ist<sup>1</sup>. Der Barwert dieser Zahlungsreihe ist  $BW_F(I^F) = 22.443,26$ .

<sup>1</sup>Alle in diesem Beispiel verwendeten Werte sind in Tabelle A.2 in Anhang A.1.2 aufgeführt.

Es werden drei unterschiedliche Szenarien für Änderungen der Zinsstrukturkurve betrachtet, um das Zinsänderungsrisiko beurteilen zu können. Das erste Szenario beinhaltet eine moderate Steigung der Zinskurve, bei der der wesentliche Verlauf der Kurve unverändert bleibt.

Im zweiten Szenario wird eine positive Steigung der Zinsstrukturkurve unterstellt, die im Zeitverlauf größer wird und die Zinsstrukturkurve stark ansteigen lässt. Die Änderungen des dritten Szenarios sind durch die negativen Werten des zweiten Szenarios gewählt, sodass eine stark fallende Zinskurve entsteht.

Die verwendeten Zinskurven  $I^F + \Delta I^{F(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3$  sind ebenfalls in Abbildung 4.2 dargestellt.

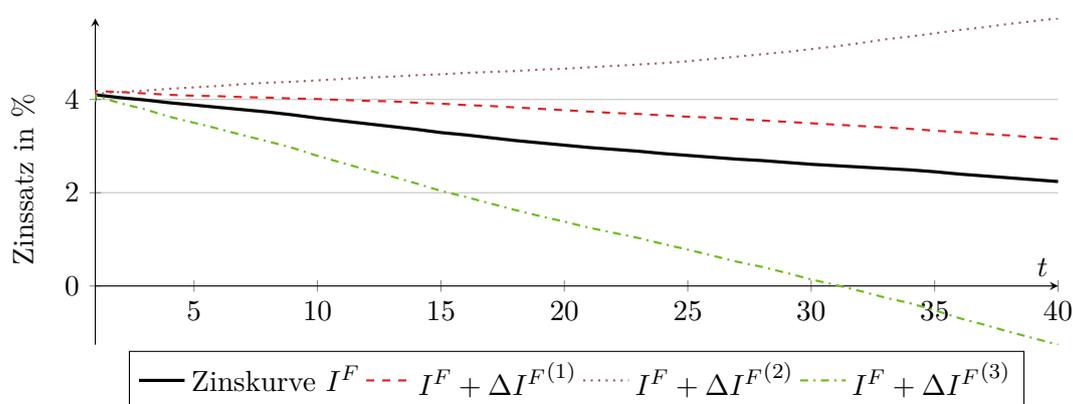


Abbildung 4.2.: Verwendete Zinsstrukturkurven in Beispiel 4.8.

Für jedes dieser drei Szenarien wird der Barwert  $BW_F(I^F + \Delta I^{F(j)})$ ,  $j = 1, 2, 3$ , berechnet, sowie die Approximationen  $\widetilde{BW}_F^D$  mit (4.5) und  $\widetilde{BW}_F^C$  mit (4.10). Die Werte für die Forward Rate Duration, die Forward Rate Konvexität, sowie die sich daraus berechneten Werte  $\widetilde{BW}_F^D$  und  $\widetilde{BW}_F^C$  sind in Tabelle 4.1 dargestellt.

|                               | Ausgangswert | Szenario 1 | Szenario 2 | Szenario 3 |
|-------------------------------|--------------|------------|------------|------------|
| $BW_F(I^F)$                   | 22.443,26    |            |            |            |
| $BW_F(I^F + \Delta I^{F(j)})$ |              | 20.978,34  | 19.507,89  | 26.743,61  |
| $D_F(I^F, \Delta I^{F(j)})$   |              | 0,0703     | 0,1562     | -0,1562    |
| $\widetilde{BW}_F^D$          |              | 20.865,33  | 18.937,13  | 25.949,39  |
| $C_F(I^F, \Delta I^{F(j)})$   |              | 0,0107     | 0,0594     | 0,0594     |
| $\widetilde{BW}_F^C$          |              | 20.985,62  | 19.603,84  | 26.616,11  |

Tabelle 4.1.: Vergleich der Barwertapproximationen in Beispiel 4.8

Durch die unterstellten Änderungen der Zinsstrukturkurve reduziert sich der Barwert im ersten Szenario zu  $BW_F(I^F + \Delta I^{F(1)}) = 20.978,34$  und im zweiten Szenario zu  $BW_F(I^F +$

$\Delta I^{F(2)} = 19.507,89$ . Die Zinssenkung im dritten Szenario führt zu einem höheren Barwert mit  $BW_F(I^F + \Delta I^{F(3)}) = 26.743,61$ . Für die Forward Rate Durationen ergeben sich die Werte  $D_F(I^F, \Delta I^{F(1)}) = 0,0703$ ,  $D_F(I^F, \Delta I^{F(2)}) = 0,1562$  und  $D_F(I^F, \Delta I^{F(3)}) = -0,1562$  und für die Forward Rate Konvexitäten  $C_F(I^F, \Delta I^{F(1)}) = 0,0107$ , sowie  $C_F(I^F, \Delta I^{F(2)}) = C_F(I^F, \Delta I^{F(3)}) = 0,0594$ .

Aus diesen Werten kann mit  $\Delta BW_F(I^F)^{(j)} = BW_F(I^F + \Delta I^{F(j)}) - BW_F(I^F)$  ein absolutes Maß für das Zinsänderungsrisiko der jeweiligen Szenarien angegeben werden. Ebenso wird das absolute Maß mittels der Forward Rate Duration bzw. Forward Rate Konvexität approximiert.

Diese Werte, sowie die mit  $\frac{\Delta BW_F(I^F)^{(j)}}{BW_F(I^F)}$  berechneten Zinssensitivitäten sind in Tabelle 4.2 dargestellt.

|  | Szenario 1 | Szenario 2 | Szenario 3 |
|--|------------|------------|------------|
| $\Delta BW_F(I^F)^{(j)}$                     | -1.464,92  | -2.935,37  | 4.300,35   |
| $\Delta BW_F(I^F)_D^{(j)}$                   | -1.577,93  | -3.506,13  | 3.506,13   |
| $\Delta BW_F(I^F)_C^{(j)}$                   | -1.457,64  | -2.839,42  | 4.172,85   |
| $\frac{\Delta BW_F(I^F)^{(j)}}{BW_F(I^F)}$   | -6,53%     | -13,08%    | 19,16%     |
| $\frac{\Delta BW_F(I^F)_D^{(j)}}{BW_F(I^F)}$ | -7,03%     | -15,62%    | 15,62%     |
| $\frac{\Delta BW_F(I^F)_C^{(j)}}{BW_F(I^F)}$ | -6,49%     | -12,65%    | 18,59%     |

Tabelle 4.2.: Vergleich der Approximationen der Barwertänderungen und Sensitivitäten in Beispiel 4.8

Zunächst erkennt man, dass das Zinsänderungsrisiko für die Szenarien 2 und 3 aufgrund der stärkeren Zinsänderungen deutlich größer ist, als für Szenario 1. Auch ist das Ausmaß des Zinsänderungsrisikos für Szenario 3 deutlich größer ( $\frac{\Delta BW_F(I^F)^{(3)}}{BW_F(I^F)} = 19,16\%$ ), als in Szenario 2 ( $\frac{\Delta BW_F(I^F)^{(2)}}{BW_F(I^F)} = -13,08\%$ ), obwohl betragsmäßig die gleiche Zinsänderung unterstellt wurde ( $\Delta I^{F(3)} = -\Delta I^{F(2)}$ ).

An den dargestellten Werte erkennt man auch, dass in allen Szenarien durch die Approximation  $\Delta BW_F(I^F)_C^{(j)}$ , d.h. durch die Verwendung der Forward Rate Konvexität, das Zinsänderungsrisiko besser approximiert werden kann, als durch die Approximationen  $\Delta BW_F(I^F)_D^{(j)}$ . So liefert bspw. die Approximation  $\Delta BW_F(I^F)_C^{(2)}$  für Szenario 2 den Wert  $\Delta BW_F(I^F)_C^{(2)} = -2.839,42$ , der näher an  $\Delta BW_F(I^F)^{(2)} = -2.935,37$  liegt, als  $\Delta BW_F(I^F)_D^{(2)} = -3.506,13$ . Ebenso liegt auch der mittels (4.11) approximierte Wert für die Zinssensitivität in Szenario 2 mit  $-6,49\%$  nahe am exakten Wert von  $-6,53\%$ .

Am Vergleich der Werte für die Forward Rate Duration  $D_F(I^F, \Delta I^{F(j)})$  bzw. die Forward Rate Konvexität  $C_F(I^F, \Delta I^{F(j)})$  und  $\Delta BW_F(I^F)_D^{(j)}$  in den Szenarien 2 und 3 wird aber auch eine Schwäche der Forward Rate Duration deutlich:

Durch die spezielle Wahl der Änderungsgrößen  $\Delta I^{F(3)} = -\Delta I^{F(2)}$  im zweiten und

dritten Szenario gilt:

$$D_F(I^F, \Delta I^{F(3)}) = -D_F(I^F, \Delta I^{F(2)}) \text{ und } C_F(I^F, \Delta I^{F(3)}) = C_F(I^F, \Delta I^{F(2)}).$$

Damit ergibt sich betragsmäßig das gleiche Maß für das Zinsänderungsrisiko:

$$|\Delta BW_F(I^F)_D^{(2)}| = |\Delta BW_F(I^F)_D^{(3)}| = 3.506,13.$$

Dies ist intuitiv durchaus nachvollziehbar, da es bei einer linearen Betrachtung für das Ausmaß der Zinsänderung keine Rolle spielt, ob positive oder negative Zinsänderungen vorliegen. Allerdings zeigt der Vergleich der Berechnung der Barwertänderungen  $BW_F(I^F + \Delta I^{F(2)})$  und  $BW_F(I^F + \Delta I^{F(3)})$  für die Szenarien 2 und 3, sowie die Approximation  $\widetilde{BW}_F^C$  mittels der Konvexität, dass sich die Werte, auch betragsmäßig, deutlich unterscheiden können.

◇

### 4.3. Forward Rate Duration als Verallgemeinerung des Durationskonzepts

Eine flache Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  lässt sich sowohl als Spezialfall einer Spot Rate Zinsstrukturkurve  $I^S$  als auch einer Forward Rate  $I^F$  Zinsstrukturkurve auffassen. Gegebene Forward Rates  $I^F$  implizieren (formal) auf eindeutige Weise eine Spot Rate Zinsstrukturkurve  $I^S$  und umgekehrt (s. Bemerkung 2.3). Diese bereits bekannten Zusammenhänge sollen in diesem Abschnitt genutzt werden, um sie auf die Durationsmaße zu übertragen. Damit können auch dann die Forward Rate Duration, sowie die Forward Rate Konvexität genutzt werden, um das Zinsänderungsrisiko zu quantifizieren, falls eine flache Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  oder eine Spot Rate Zinsstrukturkurve  $I^S$  vorliegen.

Zunächst wird der Fall einer flachen Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  betrachtet.

#### Satz 4.9 (Verallgemeinerung der modifizierten Macaulay-Duration)

Gegeben sei eine flache Zinsstrukturkurve  $\bar{I} = (i, i, \dots, i)$ , sowie zugehörige Änderungsgrößen  $\Delta \bar{I} = (\Delta i, \dots, \Delta i)$ . Dann gilt für eine beliebige Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ :

$$D_F(\bar{I}, \Delta \bar{I}) = D_{Mac}(\bar{I}) \cdot \Delta i.$$

**Beweis** Für eine flache Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  gilt  $v^{(j)} = \prod_{l=1}^j (1+i)^{-1} = (1+i)^{-j}$ . Damit

folgt aus der Definition der Forward Rate Duration (4.6):

$$\begin{aligned}
 D_F(\bar{I}, \Delta\bar{I}) &= \frac{1}{BW_F(\bar{I})} \cdot \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j (1+i)^{-1} \cdot \Delta i \right) \cdot Z_j \cdot (1+i)^{-j} \\
 &= \frac{1}{BW(\bar{I})} \cdot (1+i)^{-1} \cdot \Delta i \cdot \sum_{j=1}^n j \cdot Z_j \cdot (1+i)^{-j} \\
 &= D_{Mac}(\bar{I}) \cdot \Delta i.
 \end{aligned}$$

□

Damit kann die Forward Rate Duration  $D_F(I^F, \Delta\bar{I})$  genutzt werden, um im Falle einer flachen Zinsstrukturkurve die modifizierte Macaulay-Duration zu berechnen.

Analog zu Satz 4.9, gilt dieser Zusammenhang ebenso für die Forward Rate Konvexität (4.13).

**Satz 4.10 (Verallgemeinerung der Konvexität)**

Gegeben sei eine flache Zinsstrukturkurve  $\bar{I} = (i, i, \dots, i)$ , sowie zugehörige Änderungsgrößen  $\Delta\bar{I} = (\Delta i, \dots, \Delta i)$ . Dann gilt für eine beliebige Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ :

$$C_F(\bar{I}, \Delta\bar{I}) = C_{Mac}(\bar{I}) \cdot (\Delta i)^2.$$

**Beweis** Es gilt erneut  $v^{(j)} = \prod_{l=1}^j (1+i)^{-1} = (1+i)^{-j}$ . Aus Definition (4.13) folgt:

$$\begin{aligned}
 C_F(\bar{I}, \Delta\bar{I}) &= \frac{1}{BW_F(\bar{I})} \cdot \left( \sum_{j=1}^n Z_j \cdot (1+i)^{-j} \cdot 2 \cdot \sum_{l=1}^j \sum_{k=l}^j (1+i)^{-2} \cdot (\Delta i)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{BW(\bar{I})} \cdot \left( (1+i)^{-2} \cdot \sum_{j=1}^n Z_j \cdot (1+i)^{-j} \cdot 2 \cdot \sum_{l=1}^j (j-l+1) \cdot (\Delta i)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{BW(\bar{I})} \cdot \left( (1+i)^{-2} \cdot \sum_{j=1}^n Z_j \cdot (1+i)^{-j} \cdot 2 \cdot \left( j^2 - \frac{j \cdot (j+1)}{2} + j \right) \right) \cdot (\Delta i)^2 \\
 &= \frac{1}{BW(\bar{I})} \cdot \left( (1+i)^{-2} \cdot \sum_{j=1}^n Z_j \cdot (1+i)^{-j} \cdot j \cdot (j+1) \right) \cdot (\Delta i)^2 \\
 &= C_{Mac}(\bar{I}) \cdot (\Delta i)^2.
 \end{aligned}$$

□

Gemäß Satz 4.9 und Satz 4.10 können die Größen  $D_F(\bar{I}, \Delta\bar{I})$  und  $C_F(\bar{I}, \Delta\bar{I})$  verwendet werden, um über

$$BW(\bar{I} + \Delta\bar{I}) \approx BW(\bar{I}) - BW(\bar{I}) \cdot D_F(\bar{I}, \Delta\bar{I}) + \frac{1}{2} \cdot BW(\bar{I}) \cdot C_F(\bar{I}, \Delta\bar{I})$$

den Barwert  $BW(\bar{I} + \Delta\bar{I})$  nach einer Parallelverschiebung der flachen Zinsstrukturkurve zu approximieren. Wird hier anstatt einer Parallelverschiebung  $\Delta\bar{I}$  eine beliebige Änderung  $\Delta I^F = (\Delta i_1, \Delta i_2, \dots, \Delta i_n)$  unterstellt, kann ebenso das Zinsänderungsrisiko quantifiziert werden, wenn eine nicht-parallele Änderung der flachen Zinsstrukturkurve  $\bar{I} = (i, i, \dots, i)$  vorliegt.

Auch für den Fall, dass eine Spot Rate Zinsstrukturkurve  $I^S$  vorliegt, lässt sich über die Forward Rate Duration  $D_F(I^F, \Delta I^F)$  die (totale) Key Rate Duration berechnen.

**Satz 4.11 (Verallgemeinerung totale Key Rate Duration)**

Gegeben sei eine Spot Rate Kurve  $I^S = (i_{[0,1]}, i_{[0,2]}, \dots, i_{[0,n]})$  und zugehörige Änderungsgrößen  $\Delta I^S = (\Delta i_{[0,1]}, \Delta i_{[0,2]}, \dots, \Delta i_{[0,n]})$ , sowie eine Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ .

Dann existieren Größen  $\tilde{I}^F = (\tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \dots, \tilde{i}_n)$  und  $\Delta \tilde{I}^F = (\Delta \tilde{i}_1, \Delta \tilde{i}_2, \dots, \Delta \tilde{i}_n)$ , sodass gilt:

$$D_F(\tilde{I}^F, \Delta \tilde{I}^F) = D_{KR}(I^S, \Delta I^S).$$

**Beweis** Definiere die Größen  $\tilde{i}_t$  des Vektors  $\tilde{I}^F := (\tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \dots, \tilde{i}_n)$  gemäß Transformation (2.6) wie folgt:

$$\tilde{i}_t = \begin{cases} i_{[0,1]}, & \text{für } t = 1, \\ (1 + i_{[0,t-1]})^{-(t-1)} \cdot (1 + i_{[0,t]})^t - 1, & \text{für } t = 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.6)$$

und setze  $i_{[0,0]} := 0$ . Es sei  $\tilde{v}_t = (1 + \tilde{i}_t)^{-1}$  und  $\tilde{v}^{(t)} = \prod_{j=1}^t \tilde{v}_j$ . Dann gilt:

$$\tilde{v}^{(1)} = (1 + \tilde{i}_1)^{-1} = (1 + i_{[0,1]})^{-1},$$

sowie für  $t = 2, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} \tilde{v}^{(t)} &= \prod_{j=1}^t (1 + \tilde{i}_j)^{-1} \\ &= \prod_{j=1}^t \left( (1 + i_{[0,j-1]})^{-(j-1)} \cdot (1 + i_{[0,j]})^j \right)^{-1} \\ &= \underbrace{(1 + i_{[0,0]})^{-0}}_{=1} \cdot (1 + i_{[0,t]})^{-t} = (1 + i_{[0,t]})^{-t}. \end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$BW_F(\tilde{I}^F) = \sum_{t=0}^n Z_t \cdot \tilde{v}^{(t)} = \sum_{t=0}^n Z_t \cdot (1 + i_{[0,t]})^{-t} = BW_S(I^S).$$

Aufgrund der Transformation (2.6) kann  $\tilde{i}_t$  als Funktion zweier Variablen

$$\tilde{i}_t(i_{[0,t-1]}, i_{[0,t]}) : ] - 1, \infty[^2 \rightarrow ] - 1, \infty[,$$

interpretiert werden, die die Größen  $i_{[0,t-1]}$  und  $i_{[0,t]}$  auf das Intervall  $] - 1, \infty[$  abbildet.

Die Änderungsgröße  $\Delta\tilde{i}_t$  stellt sich daher für  $t = 1, \dots, n$  jeweils als Differential in den Größen  $\Delta i_{[0,t]}$  dar:

$$\Delta\tilde{i}_t := \frac{\partial\tilde{i}_t}{\partial i_{[0,t-1]}} \cdot \Delta i_{[0,t-1]} + \frac{\partial\tilde{i}_t}{\partial i_{[0,t]}} \cdot \Delta i_{[0,t]}.$$

Für die hierzu benötigten partiellen Ableitungen  $\frac{\partial\tilde{i}_t}{\partial i_{[0,t-1]}} \cdot \Delta i_{[0,t-1]}$ ,  $t = 1, \dots, n$  rechnet man aus:

$$\frac{\partial\tilde{i}_t}{\partial i_{[0,t-1]}} \cdot \Delta i_{[0,t-1]} = -(t-1) \cdot (1 + i_{[0,t-1]})^{-t} \cdot (1 + i_{[0,t]})^t \cdot \Delta i_{[0,t-1]},$$

bzw. für  $\frac{\partial\tilde{i}_t}{\partial i_{[0,t]}} \cdot \Delta i_{[0,t]}$ ,  $t = 1, \dots, n$ :

$$\frac{\partial\tilde{i}_t}{\partial i_{[0,t]}} \cdot \Delta i_{[0,t]} = \begin{cases} \Delta i_{[0,1]} & \text{für } t = 1, \\ t \cdot (1 + i_{[0,t-1]})^{-(t-1)} (1 + i_{[0,t]})^{t-1} \cdot \Delta i_{[0,t]} & \text{für } 2 \leq t \leq n. \end{cases}$$

Für  $\Delta\tilde{i}_t$ ,  $t = 1, \dots, n$  folgt damit:

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{i}_t &= \frac{\partial\tilde{i}_t}{\partial i_{[0,t-1]}} \cdot \Delta i_{[0,t-1]} + \frac{\partial\tilde{i}_t}{\partial i_{[0,t]}} \cdot \Delta i_{[0,t]} \\ &= -(t-1) \cdot \left( \frac{1 + i_{[0,t]}}{1 + i_{[0,t-1]}} \right)^t \cdot \Delta i_{[0,t-1]} + t \cdot \left( \frac{1 + i_{[0,t]}}{1 + i_{[0,t-1]}} \right)^{t-1} \cdot \Delta i_{[0,t]}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Für das Differential  $dBW_F(\tilde{I}^F)$  ist mit (4.7) und nach Satz 4.5 aus Abschnitt 4.2:

$$\begin{aligned} dBW_F(\tilde{I}^F) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \tilde{i}_j} BW_F(\tilde{I}^F) \Delta\tilde{i}_j = - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \tilde{v}_k \Delta\tilde{i}_k \cdot Z_j \cdot \tilde{v}^{(j)} \\ &= - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \left( \underbrace{\frac{(1 + i_{[0,k-1]})^{k-1}}{(1 + i_{[0,k]})^k}}_{=\tilde{v}_k} \right) \cdot Z_j \cdot (1 + i_{[0,j]})^{-j} \\ &\quad \left( \underbrace{- (k-1) \cdot \frac{(1 + i_{[0,k]})^k}{(1 + i_{[0,k-1]})^k} \Delta i_{[0,k-1]} + k \cdot \frac{(1 + i_{[0,k]})^{k-1}}{(1 + i_{[0,k-1]})^{k-1}} \Delta i_{[0,k]}}_{=\Delta\tilde{i}_k} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j k \cdot (1 + i_{[0,k]})^{-1} \Delta i_{[0,k]} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^j (k-1) \cdot (1 + i_{[0,k-1]})^{-1} \Delta i_{[0,k-1]} \right) \cdot Z_j \cdot (1 + i_{[0,j]})^{-j} \\
&= - \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j k \cdot (1 + i_{[0,k]})^{-1} \Delta i_{[0,k]} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=0}^{j-1} k \cdot (1 + i_{[0,k]})^{-1} \Delta i_{[0,k]} \right) \cdot Z_j \cdot (1 + i_{[0,j]})^{-j} \\
&= - \sum_{j=1}^n j \cdot (1 + i_{[0,j]})^{-1} \Delta i_{[0,j]} \cdot Z_j \cdot (1 + i_{[0,j]})^{-j} \\
&= - \sum_{j=1}^n j \cdot Z_j \cdot (1 + i_{[0,j]})^{-(j+1)} \Delta i_{[0,j]}.
\end{aligned}$$

Und somit gilt insgesamt die Identität:

$$D_F(\tilde{I}^F, \Delta \tilde{I}^F) = - \frac{1}{BW_F(\tilde{I}^F)} \cdot dBW_F(\tilde{I}^F) = D_{KR}(I^S, \Delta I^S). \quad \square$$

Mittels der in (2.6) und (4.14) beschriebenen Transformationen ist es also möglich, auch bei gegebenen Spot Rates  $I^S$  und zugehörigen Änderungsgrößen  $\Delta I^S$ , die Forward Rate Duration  $D_F$  für die Bestimmung des Zinsänderungsrisikos zu verwenden. Die Anwendung des Forward Rate Konzepts auf eine Spot Rate Zinsstrukturkurve lässt sich auch für das entsprechende Konvexitätsmaß formulieren.

**Satz 4.12 (Verallgemeinerung Key Rate Konvexität)**

Gegeben sei eine Spot Rate Kurve  $I^S = (i_{[0,1]}, i_{[0,2]}, \dots, i_{[0,n]})$  und zugehörige Änderungsgrößen  $\Delta I^S = (\Delta i_{[0,1]}, \Delta i_{[0,2]}, \dots, \Delta i_{[0,n]})$ , sowie eine Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ .

Dann existieren Größen  $\hat{I}^F = (\hat{i}_1, \hat{i}_2, \dots, \hat{i}_n)$  und  $\Delta \hat{I}^F = (\Delta \hat{i}_1, \Delta \hat{i}_2, \dots, \Delta \hat{i}_n)$ , sodass gilt:

$$C_F(\hat{I}^F, \Delta \hat{I}^F) = KRC_{Eff}(I^S, \Delta I^S).$$

**Beweis** Definiere die Größen  $\hat{i}_t$  der Kurve  $\hat{I}^F = (\hat{i}_1, \hat{i}_2, \dots, \hat{i}_n)$  gemäß Transformation (2.6):

$$\hat{i}_t = \begin{cases} i_{[0,1]}, & \text{für } t = 1, \\ (1 + i_{[0,t-1]})^{-(t-1)} \cdot (1 + i_{[0,t]})^t - 1, & \text{für } t = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2.6)$$

Wie im Beweis zu Satz 4.11 ist also  $BW_F(\hat{I}^F) = BW_S(I^S)$ .

Wähle die Größen  $\Delta \hat{i}_t$  der Kurve  $\Delta \hat{I}^F = (\Delta \hat{i}_1, \Delta \hat{i}_2, \dots, \Delta \hat{i}_n)$  gemäß

$$\Delta \hat{i}_1 = \Delta i_{[0,1]},$$

sowie iterativ für  $t = 2, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} \Delta \hat{i}_t = & -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\hat{v}_t} \cdot \left( \sum_{j=1}^{t-1} \hat{v}_j \cdot \Delta \hat{i}_j \right) \pm \left[ \frac{1}{\hat{v}_t^2} \cdot \left( \frac{1}{4} \left( \sum_{j=1}^{t-1} \hat{v}_j \cdot \Delta \hat{i}_j \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \cdot t \cdot \left( (t-1) \cdot (1+i_{[0,t-1]})^{-2} \cdot \Delta i_{[0,t-1]}^2 - (t+1) \cdot (1+i_{[0,t]})^{-2} \cdot \Delta i_{[0,t]}^2 \right) \right] \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nun zeigt man induktiv:

$$\sum_{l=1}^t \sum_{k=l}^t \hat{v}_l \Delta \hat{i}_l \cdot \hat{v}_k \Delta \hat{i}_k = \frac{t \cdot (t+1)}{2} \cdot (1+i_{[0,t]})^{-2} \cdot (\Delta i_{[0,t]})^2. \quad (4.16)$$

Induktionsanfang für  $t = 1$ :

$$\sum_{l=1}^1 \sum_{k=l}^1 \hat{v}_l \Delta \hat{i}_l \cdot \hat{v}_k \Delta \hat{i}_k = \hat{v}_1^2 \cdot \Delta \hat{i}_1^2 = (1+i_{[0,1]})^{-2} \cdot (\Delta i_{[0,1]})^2. \quad \checkmark$$

Induktionsschritt  $t-1 \mapsto t$ :

$\Delta \hat{i}_t$  ist Lösung der quadratischen Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta \hat{i}_t^2 + \Delta \hat{i}_t \cdot \frac{1}{\hat{v}_t} \cdot \sum_{l=1}^{t-1} \hat{v}_l \cdot \Delta \hat{i}_l + \frac{1}{\hat{v}_t^2} \cdot \left( \frac{(t-1) \cdot t}{2} \cdot (1+i_{[0,t-1]})^{-2} \cdot \Delta i_{[0,t-1]}^2 \right. \\ \left. - t \cdot (t+1) \cdot (1+i_{[0,t]})^{-2} \cdot \Delta i_{[0,t]}^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} & \hat{v}_t^2 \cdot \Delta \hat{i}_t^2 + \hat{v}_t \cdot \Delta \hat{i}_t \cdot \sum_{l=1}^{t-1} \hat{v}_l \cdot \Delta \hat{i}_l + \frac{(t-1) \cdot t}{2} \cdot (1+i_{[0,t-1]})^{-2} \cdot \Delta i_{[0,t-1]}^2 \\ & \quad - t \cdot (t+1) \cdot (1+i_{[0,t]})^{-2} \cdot \Delta i_{[0,t]}^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(t-1) \cdot t}{2} \cdot (1+i_{[0,t-1]})^{-2} \cdot \Delta i_{[0,t-1]}^2 + \hat{v}_t \cdot \Delta \hat{i}_t \cdot \sum_{l=1}^{t-1} \hat{v}_l \cdot \Delta \hat{i}_l + (\hat{v}_t \cdot \Delta \hat{i}_t)^2 \\ & \quad = t \cdot (t+1) \cdot (1+i_{[0,t]})^{-2} \cdot \Delta i_{[0,t]}^2 \\ (4.16) \Leftrightarrow & \sum_{l=1}^{t-1} \sum_{k=l}^{t-1} \hat{v}_l \Delta \hat{i}_l \cdot \hat{v}_k \Delta \hat{i}_k + \hat{v}_t \cdot \Delta \hat{i}_t \sum_{l=1}^t \hat{v}_l \cdot \Delta \hat{i}_l = t \cdot (t+1) \cdot (1+i_{[0,t]})^{-2} \cdot \Delta i_{[0,t]}^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{l=1}^t \sum_{k=l}^t \hat{v}_l \Delta \hat{i}_l \cdot \hat{v}_k \Delta \hat{i}_k = t \cdot (t+1) \cdot (1+i_{[0,t]})^{-2} \cdot \Delta i_{[0,t]}^2.$$

Damit gilt (4.16) und man erhält:

$$Z_t \cdot \hat{v}^{(t)} \cdot 2 \cdot \sum_{l=1}^t \sum_{k=l}^t \hat{v}_l \Delta \hat{i}_l \cdot \hat{v}_k \Delta \hat{i}_k = t \cdot (t+1) \cdot Z_t \cdot (1+i_{[0,t]})^{-(t+2)} \cdot (\Delta i_{[0,t]})^2.$$

Somit folgt insgesamt:  $C_F(\hat{I}^F, \Delta I^F) = KRC_{Eff}(I^S, \Delta I^S)$ .  $\square$

#### Bemerkung 4.13

Sollte der Ausdruck unter der Wurzel in (4.15) für spezielle Zinsstrukturkurven  $I^S$  und  $\Delta I^S$  negativ werden, so ist eine reelle Darstellung für  $\Delta \hat{i}_t$  nicht möglich. Die Transformation kann daher in diesen Fällen nicht angewendet werden, um die Key Rate Konvexität  $KRC_{Eff}(I^S, \Delta I^S)$  mittels der Forward Rate Konvexität  $C_F(\hat{I}^F, \Delta \hat{I}^F)$  zu berechnen.

Um quantitativ herauszufinden, in welchen Fällen die Transformation durchführbar ist, wurden mehrere Szenarien im Rahmen numerischer Berechnungen betrachtet. Unter Berücksichtigung von Wertebereich und Monotonieverhalten wurden Spot Rate Zinsstrukturkurven  $I^S$ , sowie die Änderungsgrößen  $\Delta I^S$  erzeugt und die entsprechenden Forward Rate Kurven, sofern möglich, berechnet<sup>2</sup>.

Folgende Beobachtungen zur Existenz von reellen Lösungen der Transformation können festgehalten werden:

- Die Werte der Zinsstrukturkurve  $I^S$  haben keinen erkennbaren Einfluss auf die Anwendbarkeit der Transformation (4.15). Auch für flache Zinsstrukturkurven ist die Anwendbarkeit der Transformation nicht für beliebige Änderungsgrößen  $\Delta I^S$  sichergestellt.
- Transformation (4.15) kann in jedem Fall angewendet werden, wenn Parallelverschiebungen der Spot Rate Zinsstrukturkurve verwendet werden. Außerdem kann die Transformation durchgeführt werden, wenn monotone steigende Änderungsgrößen  $\Delta i_{[0,t]} \geq \Delta i_{[0,t-1]} > 0$  bzw. monoton fallende Änderungsgrößen  $\Delta i_{[0,t]} \leq \Delta i_{[0,t-1]} < 0$  für alle  $t = 2, \dots, n$  vorliegen.
- Werden monotone Änderungsgrößen  $|\Delta i_{[0,t]}| \geq |\Delta i_{[0,t-1]}|$  mit sowohl positiven, als auch negativen Werten gewählt, so sind reelle Lösungen der Transformation nicht garantiert. Tritt hier der Fall auf, dass der Ausdruck unter der Wurzel in (4.15) negativ ist, so können die Änderungsgrößen  $\Delta \hat{i}_t$  durch

$$\Delta \hat{i}_t \approx -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\hat{v}_t} \cdot \left( \sum_{j=1}^{t-1} \hat{v}_j \cdot \Delta \hat{i}_j \right) \quad (4.17)$$

<sup>2</sup>Für jedes Szenario wurden jeweils 500 Kurven erzeugt.

approximiert werden. In diesen Fällen beträgt die Abweichung der resultierenden Konvexitätsgröße  $C_F(\hat{I}^F, \Delta\hat{I}^F)$  von der Key Rate Konvexität  $KRC_{Eff}(I^S, \Delta I^S)$  oft deutlich weniger als 0,1%.

- Für nicht monotone Änderungen schwankt die Erfolgsquote bei den untersuchten Zinsstrukturkurven-Szenarien zu sehr, um allgemeingültige Aussagen treffen zu können.

Mithilfe von Approximation (4.17) kann daher in einigen Fällen, in denen die Transformation nicht durchgeführt werden kann, dennoch die Forward Rate-Konvexität genutzt werden, um die Key Rate Konvexität zu berechnen.

Die Resultate der Sätze dieses Kapitels verdeutlichen die Bedeutung der Forward Rate Duration  $D_F(I^F, \Delta I^F)$  als Verallgemeinerung der Durationskonzepte. Unabhängig davon, welches Zinsmodell vorliegt, kann die Forward Rate Duration für die Risikoanalyse angewendet werden, um das Zinsänderungsrisiko zu bestimmen. Auch die Forward Rate Konvexität kann in vielen Fälle angewendet werden, um die bestehenden Größen zu berechnen.

Für die Analyse des Zinsänderungsrisikos der in Abschnitt 2.1 vorgestellten Barwerte (2.7), (2.8), (2.9) ist somit nur das Forward Rate Durationsmaß  $D_F(I^F, \Delta I^F)$  und die Forward Rate Konvexitätsgröße  $C_F(I^F, \Delta I^F)$  notwendig. Aus diesem Grund kann das Forward Rate Durationskonzept als Verallgemeinerung der bereits in der Literatur bestehenden und hier beschriebenen Größen angesehen werden.

#### 4.4. Eigenschaften der Forward Rate Duration

Da die (modifizierte) Forward Rate Duration  $D_F(I^F, \Delta I^F)$  als Verallgemeinerung der modifizierten Macaulay-Duration  $D_{Mac}(\bar{I})$  angesehen werden kann, stellt sich die Frage, welche der Eigenschaften aus Abschnitt 3.1.3 auch für die Forward Rate Duration Gültigkeit haben.

Aufgrund der Verwendung periodenadäquater Forward Rates, die nicht notwendigerweise identisch sein müssen, lässt sich kein direkter Zusammenhang zur verallgemeinerten Macaulay-Duration  $\bar{D}_F(I^F)$  herstellen, ähnlich, wie es mit (3.19) bei Anwendung einer flachen Zinsstrukturkurve der Fall war.

Für nicht-negative Forward Rates  $i_t \geq 0$ , für alle  $t = 1, \dots, n$  lässt sich allerdings der Wertebereich des Durationsmaß  $D_F(I^F, \Delta I^F)$  einschränken. Analog zu Abschnitt 3.1.3 gilt folgendes Resultat:

**Satz 4.14**

Ist eine Zinsstrukturkurve  $I^F$  mit nicht-negativen Forward Rates  $i_t \geq 0$ , für alle  $t = 1, \dots, n$  und  $0 \leq \Delta i_t \leq 1$ , für alle  $t = 1, \dots, n$  gegeben, so gilt für eine nicht-negative Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, \dots, Z_n)$ :

$$D_F(I^F, \Delta I^F) \in [0, n).$$

**Beweis** Es gilt für alle  $j = 0, \dots, n$ :

$$\sum_{k=1}^j v_k \cdot \Delta i_k \cdot Z_j \leq j \cdot \max_{k=1, \dots, j} \{v_k \cdot \Delta i_k\} \cdot Z_j \leq n \cdot Z_j$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j v_k \cdot \Delta i_k \right) \cdot Z_j \leq \sum_{j=0}^n n \cdot Z_j \\ \Leftrightarrow & \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j v_k \cdot \Delta i_k \right) \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \leq \sum_{j=0}^n n \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \\ \Leftrightarrow & D_F(I^F, \Delta I^F) \leq n. \end{aligned}$$

Für nicht-negative Zahlungsreihen  $Z$  mit  $Z_t \geq 0$  für alle  $t$  gilt außerdem  $D_F(I^F, \Delta I^F) \geq 0$ . Damit folgt die Behauptung.  $\square$

Durch dieses Resultat zeigt, dass für nicht-negative Zahlungsreihen  $Z$  eine Zinssteigerung stets zu einer Verringerung des Barwerts führt. Außerdem wird durch  $D_F(I^F, \Delta I^F) \leq n$  eine obere Schranke für das Ausmaß des Zinsänderungsrisikos deutlich.

**Satz 4.15**

Für eine nicht-negative Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  und  $\Delta i_j \geq 0$ , für  $j = 1, \dots, n$ , ist die Forward Rate Duration  $D_F(I^F, \Delta I^F)$  monoton fallend in Werten von  $i_t$ .

**Beweis** Die Forward Rate Duration wird hier als Funktion  $D_F : ] - 1, \infty[^n \rightarrow \mathbb{R}$  in  $i_t$  für  $t \in \{1, 2, \dots, n\}$  aufgefasst. Sei  $D_0 \in \mathbb{R}$  beliebig, aber fest.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial i_t} \left( \frac{\sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j v_k \cdot \Delta i_k \right) Z_j \cdot v^{(j)}}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)}} \right) &= \frac{\partial}{\partial i_t} \left( \frac{\sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j v_k \cdot \Delta i_k \right) Z_j \cdot v^{(j)}}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)}} \cdot \frac{v_t^{-D_0}}{v_t^{-D_0}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial i_t} \left( \frac{\sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j v_k \cdot \Delta i_k \right) Z_j \cdot v^{(j)} \cdot v_t^{-D_0}}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)} \cdot v_t^{-D_0}} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Um diese Ableitung mit der Quotientenregel bestimmen zu können, werden die Ableitungen des Zählers und des Nenners in (4.18) benötigt. Für die Ableitung des Nenners in (4.18) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial i_t} \left( \sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)} \cdot v_t^{-D_0} \right) &= \frac{\partial}{\partial i_t} \left( \sum_{j=0}^{t-1} Z_j \cdot v^{(j)} \cdot v_t^{-D_0} + \sum_{j=t}^n Z_j \cdot v^{(j)} \cdot v_t^{-D_0} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{t-1} (D_0 \cdot v_t^{-D_0+1}) \cdot Z_j \cdot v^{(j)} + \sum_{j=t}^n ((D_0 - 1) \cdot v_t^{-D_0+1}) \cdot Z_j v^{(j)} \\ &= v_t^{-D_0+1} \cdot \left( D_0 \cdot \sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)} - \sum_{j=t}^n Z_j \cdot v^{(j)} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Und für die Ableitung des Zählers in (4.18) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial i_t} \left( \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k \leq j} v_k \cdot \Delta i_k \right) Z_j \cdot v^{(j)} \cdot v_t^{-D_0} \right) &= \frac{\partial}{\partial i_t} \left( \sum_{j < t} \left( \sum_{k \leq j} v_k \cdot \Delta i_k \right) Z_j \cdot v^{(j)} \cdot v_t^{-D_0} + \sum_{j \geq t} \left( \sum_{k \leq j} v_k \cdot \Delta i_k \right) Z_j \cdot v^{(j)} \cdot v_t^{-D_0} \right) \\ &= \sum_{j < t} D_0 \cdot \left( \sum_{k \leq j} v_k \cdot \Delta i_k \right) \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot v_t^{-D_0+1} \\ &\quad + \left[ \sum_{j \geq t} \left[ (-v_t^2 \cdot \Delta i_t) \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot v_t^{-D_0} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \sum_{k \leq j} v_k \cdot \Delta i_k \right) \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot (D_0 - 1) \cdot v_t^{-D_0+1} \right] \right] \\ &= D_0 \cdot v_t^{-D_0+1} \cdot \sum_{j < t} \left( \sum_{k \leq j} v_k \cdot \Delta i_k \right) \cdot Z_j \cdot v^{(j)} + v_t^{-D_0+1} \cdot \sum_{j \geq t} (-v_t \cdot \Delta i_t) \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \\ &\quad + D_0 \cdot v_t^{-D_0+1} \cdot \sum_{j \geq t} \left( \sum_{k \leq j} v_k \cdot \Delta i_k \right) \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + v_t^{-D_0+1} \cdot \sum_{j \geq t} (-1) \cdot \left( \sum_{k \leq j} v_k \cdot \Delta i_k \right) \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \\
= & D_0 \cdot v_t^{-D_0+1} \cdot \sum_{j \geq 1} \left( \sum_{k \leq j} v_k \cdot \Delta i_k \right) \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \\
& - v_t^{-D_0+1} \cdot \sum_{j \geq t} \left( \sum_{k \leq j} v_k \cdot \Delta i_k + v_t \cdot \Delta i_t \right) \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \\
= & v_t^{-D_0+1} \cdot \left[ D_0 \cdot \sum_{j \geq 1} \left( \sum_{k \leq j} v_k \cdot \Delta i_k \right) \cdot Z_j v^{(j)} - \sum_{j \geq t} \left( \sum_{k \leq j} v_k \cdot \Delta i_k \right) \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \right. \\
& \left. - \sum_{j \geq t} (v_t \cdot \Delta i_t) \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \right]. \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Wähle nun

$$D_0 := D_0(t) = \frac{\sum_{j=t}^n Z_j \cdot v^{(j)}}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)}}.$$

Damit erhält man für die Ableitung des Nenners aus (4.19):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial i_t} \left( \sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)} \cdot v_t^{-D_0} \right) &= v_t^{-D_0+1} \cdot \left( D_0 \cdot \sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)} - \sum_{j=t}^n Z_j \cdot v^{(j)} \right) \\
&= v_t^{-D_0+1} \cdot \left( \frac{\sum_{j=t}^n Z_j \cdot v^{(j)}}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)}} \cdot \sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)} - \sum_{j=t}^n Z_j \cdot v^{(j)} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Für die Ableitung des Zählers folgt, unter Umbenennung der Indizes, weiter aus (4.20):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial i_t} \left( \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k \leq j} v_k \cdot \Delta i_k \right) Z_j \cdot v^{(j)} \cdot v_t^{-D_0} \right) \\
= & v_t^{-D_0+1} \cdot \left[ \frac{\sum_{j=t}^n Z_j v^{(j)}}{\sum_{j=0}^n Z_j v^{(j)}} \cdot \sum_{l \geq 1} \left( \sum_{k \leq l} v_k \cdot \Delta i_k \right) \cdot Z_l v^{(l)} - \sum_{j \geq t} \left( \sum_{k \leq j} v_k \cdot \Delta i_k \right) \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \right. \\
& \left. - \sum_{j \geq t} (v_t \cdot \Delta i_t) \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \right] \\
= & v_t^{-D_0+1} \cdot \sum_{j=t}^n Z_j \cdot v^{(j)} \left[ \frac{\sum_{l \geq 1} \left( \sum_{k \leq l} v_k \cdot \Delta i_k \right) \cdot Z_l v^{(l)}}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)}} - \left( \sum_{k \leq j} v_k \cdot \Delta i_k \right) - (v_t \cdot \Delta i_t) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= v_t^{-D_0+1} \cdot \sum_{j=t}^n Z_j \cdot v^{(j)} \underbrace{\left[ \frac{\sum_{l \geq 1} \left( \sum_{k \leq l} v_k \cdot \Delta i_k \right) Z_l v^{(l)}}{\sum_{j \geq 0} Z_j \cdot v^{(j)}} - \frac{\sum_{l \geq 0} \left( \sum_{k \leq j} v_k \cdot \Delta i_k \right) Z_l v^{(l)}}{\sum_{l \geq 0} Z_l v^{(l)}} \right]}_{\substack{=D_F(I^F, \Delta I^F), \text{ d.h. konstant} \\ \text{mon. wachsend in } j \text{ bzw. } t}} \\
&\quad \underbrace{=0, \text{ f\"ur } t=0 \text{ und monoton fallend in } t, \text{ d.h. } \leq 0 \text{ f\"ur alle } t}_{\substack{=0, \text{ f\"ur } t=0 \text{ und monoton fallend in } t, \text{ d.h. } \leq 0 \text{ f\"ur alle } t}} \\
&\quad - \underbrace{v_t^{-D_0+1} \cdot \sum_{j=t}^n Z_j \cdot v^{(j)} \left[ (v_t \cdot \Delta i_t) \right]}_{>0, \text{ f\"ur } \Delta i_t > 0} \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Mit  $BW_F(I^F) = \sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)} \cdot v_t^{-D_0} \geq 0$  für nicht-negative Zahlungsreihen folgt aus (4.18) und Anwendung der Quotientenregel schließlich:

$$\frac{\partial}{\partial i_t} \left( \frac{\sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j v_k \cdot \Delta i_k \right) Z_j \cdot v^{(j)}}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)}} \right) = \frac{\frac{\partial}{\partial i_t} \left( \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j v_k \cdot \Delta i_k \right) Z_j \cdot v^{(j)} \cdot v_t^{-D_0} \right)}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)} \cdot v_t^{-D_0}} < 0$$

und damit die Monotonie-Aussage.  $\square$

#### Korollar 4.16

Die Monotonie-Aussage aus Satz 4.15 gilt auch für negative Zahlungsreihen  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  mit  $Z_j \leq 0$ , für alle  $j = 0, \dots, n$ .

#### Korollar 4.17

Gilt  $I^{F1} \leq I^{F2}$  komponentenweise, dann gilt für nicht-negative Zahlungsreihen  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$ , sowie positive Änderungsgrößen  $\Delta i_t \geq 0$ , für  $t = 1, \dots, n$ :

$$D_F(I^{F1}, \Delta I^F) \geq D_F(I^{F2}, \Delta I^F).$$

Diese Monotonie-Aussagen verdeutlichen auf eine formale Art und Weise, dass eine Änderung der Zinsstrukturkurve weniger Auswirkungen auf den Barwert und damit auf das Zinsänderungsrisiko hat, je größer die Werte der zugrundeliegenden Zinsstrukturkurve sind. Es ist intuitiv schnell klar, dass relativ kleine Änderungen der Zinsstrukturkurve damit auch kleiner Auswirkungen auf den Barwert einer Zahlungsreihe haben.

**Satz 4.18**

Die Forward Rate Duration  $D_F(I^F, \Delta I^F)$  ist invariant gegenüber einer Skalierung der Zahlungsreihe.

**Beweis** Für die Zahlungsreihe  $Z^\alpha$  mit  $Z^\alpha = (\alpha \cdot Z_0, \alpha \cdot Z_1, \dots, \alpha \cdot Z_n)$ ,  $\alpha \neq 0$ , gilt

$$\begin{aligned} D_F(Z^\alpha, I^F, \Delta I^F) &= \frac{1}{\sum_{j=0}^n \alpha \cdot Z_j \cdot v^{(j)}} \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j v_k \cdot \Delta i_k \cdot \alpha \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \\ &= \frac{1}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)}} \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j v_k \cdot \Delta i_k \cdot Z_j \cdot v^{(j)} = D_F(Z, I^F, \Delta I^F). \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 4.19**

Die Forward Rate Konvexität  $C_F(I^F, \Delta I^F)$  ist invariant gegenüber einer Skalierung der Zahlungsreihe.

**Beweis** Für die Zahlungsreihe  $Z^\alpha$  mit  $Z^\alpha = (\alpha \cdot Z_0, \alpha \cdot Z_1, \dots, \alpha \cdot Z_n)$ ,  $\alpha \neq 0$ , gilt

$$\begin{aligned} C_F(Z^\alpha, I^F, \Delta I^F) &= \frac{1}{\sum_{j=0}^n \alpha \cdot Z_j \cdot v^{(j)}} \cdot \sum_{j=1}^n \alpha \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot 2 \cdot \sum_{l=1}^j \sum_{k=l}^j v_l \Delta i_l \cdot v_k \Delta i_k \\ &= \frac{1}{\sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)}} \cdot \sum_{j=1}^n Z_j \cdot v^{(j)} \cdot 2 \cdot \sum_{l=1}^j \sum_{k=l}^j v_l \Delta i_l \cdot v_k \Delta i_k \\ &= C_F(Z, I^F, \Delta I^F). \quad \square \end{aligned}$$

Hier zeigt sich, dass das relative Ausmaß des Zinsänderungsrisikos nicht unmittelbar von der Höhe der Zahlungen abhängt. Für zwei Zahlungsreihen, deren jeweilige Zahlungen sich lediglich um den gleichen Faktor unterscheiden, ist der Wert der Zinssensitivität gleich. Liegt also bspw. eine Zahlungsreihe mit konstanten Zahlungen vor, so ist das Zinsänderungsrisiko unabhängig von der Höhe der konstanten Zahlung. Für Versicherungsverträge werden typischerweise Beiträge und Leistungen mit konstanter Höhe vereinbart. In diesem Fall ist das Zinsänderungsrisiko der Barwerte der Beiträge bzw. Leistungen unabhängig von der Höhe des konstanten Beitrags, bzw. der konstanten Leistung.

Wird eine Zahlungsreihe der Form

$$Z^{(t)} = (0, \dots, 0, Z_t, 0, \dots, 0)$$

betrachtet, so ergibt sich die Forward Rate Duration  $D_F(Z^{(t)}, I^F, \Delta I^F)$  aus:

$$\begin{aligned} D_F(Z^{(t)}, I^F, \Delta I^F) &= \frac{-1}{BW_F(Z^{(t)}, I^F)} \cdot dBW_F(Z^{(t)}, I^F) \\ &= \frac{1}{Z_t \cdot v^{(t)}} \cdot \sum_{k=1}^t v_k \cdot \Delta i_k \cdot Z_t \cdot v^{(t)} \\ &= \sum_{k=1}^t v_k \cdot \Delta i_k. \end{aligned}$$

Die Zinssensitivität einer Zahlungsreihe der Form  $Z^{(t)} = (0, \dots, 0, Z_t, 0, \dots, 0)$  hängt somit nur von den Diskontierungsfaktoren und Änderungsraten der Perioden  $j \leq t$  ab.

Weiterhin wird die Summe  $Z$  von  $m$  Zahlungsreihen  $Z^1, Z^2, \dots, Z^m$  mit  $Z^k = (Z_0^k, Z_1^k, \dots, Z_n^k)$ , für  $k = 1, \dots, m$  betrachtet. Der Barwert  $BW_F(Z, I^F)$  dieser Zahlungsreihe  $Z = \sum_{k=1}^m Z^k$  ist  $BW_F(Z, I^F) = \sum_{k=1}^m BW_F(Z^k, I^F)$ . Für die Forward Rate Duration der Zahlungsreihe  $Z$  gilt dann der folgende Satz:

**Satz 4.20**

Es seien  $m$  Zahlungsreihen  $Z^1, Z^2, \dots, Z^m$  mit  $Z^k = (Z_0^k, Z_1^k, \dots, Z_n^k)$ , für  $k = 1, \dots, m$  gegeben, sowie eine Zinsstrukturkurve  $I^F$  und zugehörige Änderungsgrößen  $\Delta I^F$ . Für  $Z = \sum_{k=1}^m Z^k$  gilt:

$$D_F(Z, I^F, \Delta I^F) = \sum_{k=1}^m \frac{BW_F(Z^k, I^F)}{BW_F(Z, I^F)} \cdot D_F(Z^k, I^F, \Delta I^F). \quad (4.21)$$

**Beweis** Es gilt:

$$\begin{aligned} D_F(Z, I^F, \Delta I^F) &= \frac{-1}{BW_F(Z, I^F)} \cdot dBW_F(Z, I^F) \\ &= \frac{-1}{BW_F(Z, I^F)} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial i_j} \left( \sum_{k=1}^m BW_F(Z^k, I^F) \right) \Delta i_j \\ &= \frac{-1}{BW_F(Z, I^F)} \cdot \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial i_j} \left( BW_F(Z^k, I^F) \right) \Delta i_j \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{BW_F(Z^k, I^F)}{BW_F(Z, I^F)} \cdot \left( \frac{-1}{BW_F(Z^k, I^F)} \cdot dBW_F(Z^k, I^F) \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{BW_F(Z^k, I^F)}{BW_F(Z, I^F)} \cdot D_F(Z^k, I^F, \Delta I^F). \quad \square \end{aligned}$$

Eine entsprechende Summenregel kann auch für die Berechnung der Forward Rate Konvexität  $C_F(Z, I^F, \Delta I^F)$  der Zahlungsreihe  $Z = \sum_{k=1}^m Z^k$  formuliert werden.

**Satz 4.21**

Es seien  $m$  Zahlungsreihen  $Z^1, Z^2, \dots, Z^m$  mit  $Z^k = (Z_0^k, Z_1^k, \dots, Z_n^k)$ , für  $k = 1, \dots, m$  gegeben, sowie eine Zinsstrukturkurve  $I^F$  und zugehörige Änderungsgrößen  $\Delta I^F$ . Für  $Z = \sum_{k=1}^m Z^k$  gilt:

$$C_F(Z, I^F, \Delta I^F) = \sum_{k=1}^m \frac{BW_F(Z^k, I^F)}{BW_F(Z, I^F)} \cdot C_F(Z^k, I^F, \Delta I^F).$$

**Beweis** Es gilt:

$$\begin{aligned} C_F(Z, I^F, \Delta I^F) &= \frac{1}{BW_F(Z, I^F)} \cdot \sum_{j,l=1}^n \frac{\partial}{\partial i_j} \frac{\partial}{\partial i_l} BW_F(Z, I^F) \Delta i_j \Delta i_l \\ &= \frac{1}{BW_F(Z, I^F)} \cdot \sum_{j,l=1}^n \frac{\partial}{\partial i_j} \frac{\partial}{\partial i_l} \left( \sum_{k=1}^m BW_F(Z^k, I^F) \right) \Delta i_j \Delta i_l \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{BW_F(Z^k, I^F)}{BW_F(Z, I^F)} \left( \frac{1}{BW_F(Z^k, I^F)} \sum_{j,l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial i_j \partial i_l} (BW_F(Z^k, I^F)) \Delta i_j \Delta i_l \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{BW_F(Z^k, I^F)}{BW_F(Z, I^F)} \cdot C_F(Z^k, I^F, \Delta I^F). \quad \square \end{aligned}$$

Sind die Größen  $D_F(Z^k, I^F, \Delta I^F)$  bzw.  $C_F(Z^k, I^F, \Delta I^F)$  für einzelne Zahlungsreihen bekannt, so kann mit den Summenregeln aus Satz 4.20 und Satz 4.21 auch die Forward Rate Duration  $D_F(Z, I^F, \Delta I^F)$  bzw. die Forward Rate Konvexität  $C_F(Z, I^F, \Delta I^F)$  berechnet werden, wenn mehrere Zahlungsreihen vorliegen. In praktischen Situationen werden meist nicht nur wenige, einzelne Zahlungsreihen betrachtet, sondern mehrere unterschiedliche Zahlungsreihen. Für Lebensversicherungen ist dies beispielsweise der Fall, wenn Teilbestände von Versicherungsverträgen oder auch der gesamte Bestand betrachtet wird.

In solchen Fällen kann durch die gezeigten Resultate das Zinsänderungsrisiko der kumulierten Zahlungsreihen quantifiziert werden.



## Kapitel 5

# Durationsmaße für die Lebensversicherung

In der Personen- bzw. Lebensversicherungsmathematik bestehen Zahlungsreihen aus erwarteten Beitrags- bzw. erwarteten Leistungszahlungen. Die vertraglich vereinbarten Zahlungen sind typischerweise abhängig vom Erleben bzw. Sterben einer versicherten Person und auch die Beitragszahlungen sind an das Überleben des Versicherungsnehmers geknüpft. Dadurch ist das Eintreten der Zahlungen unsicher oder der Zeitpunkt noch nicht bekannt [Wag17]. Aus diesem Grund sind für die Kalkulation von Lebensversicherungen neben den vertragsrelevanten Details, wie bspw. Informationen über die versicherte Person oder die Zahlungsweise der Beiträge und Leistungen, auch eine Zinsstrukturkurve, sowie biometrische Daten von großer Bedeutung. Zu den biometrischen Daten zählen die Wahrscheinlichkeiten, die diese Unsicherheiten abbilden, d.h. z.B. Sterbe- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten oder Invalidisierungswahrscheinlichkeiten [Wag17].

Sämtliche dieser Parameter, die im Rahmen der Kalkulation zur Berechnung versicherungsmathematischer Größen verwendet werden, werden als Rechnungsgrundlagen bezeichnet [Kah18; Ort16; Wag17]. Dazu zählen neben einer Zinsstrukturkurve und den biometrischen Daten auch Kostensätze, die für die jeweiligen Versicherungsprodukte festgelegt werden. Für diese Rechnungsgrundlagen sind innerhalb der Vertragslaufzeit keine Anpassungsmöglichkeiten erlaubt. Da Versicherungsverträge häufig mit langen Vertragslaufzeiten abgeschlossen werden, müssen schon zum Kalkulationszeitpunkt Annahmen über den Zinsverlauf und die biometrischen Daten getroffen werden.

Wie auch die Zinssätze, verändern sich die biometrischen Daten im Laufe der Zeit. Gerade für die Kalkulation von Versicherungsverträgen mit langen Laufzeiten ist es nicht möglich, den Verlauf dieser Größen präzise zu schätzen. Die Bewertung von versicherungsmathematischen Zahlungsreihen unterliegt daher den Risiken, die sich aus Änderungen dieser Größen ergeben. Neben dem Zinsänderungsrisiko ist das bei Lebensversicherungsprodukten auch das Risiko, das sich aus Abweichungen von den angenommenen biometrischen Rechnungsgrundlagen ergibt. Dieses Risiko wird hier auch als biometrisches Risiko bezeichnet [Bec+16; Eur09; Kah18; Ort16].

Um im Rahmen einer Risikoanalyse die Auswirkungen von Änderungen in der Zinsstrukturkurve bzw. der Sterbetafel auf die Bewertung von versicherungsmathematischen Zahlungsreihen untersuchen zu können, werden in diesem Kapitel zunächst einige ver-

sicherungsmathematische Grundlagen beschrieben. Anschließend soll das Forward Rate Durationskonzept für solche Zahlungsreihen angewendet und erweitert werden, um sowohl das Zinsänderungsrisiko als auch das biometrische Änderungsrisiko bemessen zu können.

## 5.1. Versicherungsmathematische Grundlagen

Die Zinsstrukturkurve dient der finanzmathematischen Bewertung der vereinbarten Leistungen bzw. Prämien. Hierfür existieren aufsichtsrechtliche Vorgaben, die die Verwendung von Zinssätzen einschränken.

In §2 der Deckungsrückstellungsverordnung (DeckRV) wird die Verwendung eines Höchstrechnungszinssatzes geregelt. Für die Berechnung der Deckungsrückstellung ist dieser aktuell auf 0,9% festgesetzt. Der zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses verwendete Rechnungszins ist für die gesamte Vertragslaufzeit gültig (s. §2 Absatz 1 DeckRV).

Die hierdurch festgelegte Verwendung einer flachen Zinsstrukturkurve bezieht sich lediglich auf die Kalkulation der Deckungsrückstellung und nicht auf die Berechnung konkreter Beiträge, Leistungen oder anderer Größen. Auch wenn für die praktische Berechnung dieser Größen typischerweise ein konstanter Zinssatz, d.h. eine flache Zinsstrukturkurve verwendet wird, besteht rechtlich die Möglichkeit dies mit einer nicht-flachen Zinsstrukturkurve durchzuführen.

Für die Erstellung unterschiedlicher Szenarien für die sogenannte Überschussberechnung oder für Solvency II, ist die Verwendung nicht-flacher Zinsstrukturkurven sogar notwendig, um hier verschiedene Entwicklungen der Zinsverläufe annehmen zu können. Auch im Rahmen der Nachkalkulation von Versicherungsverträgen ist es sinnvoll, nicht-flache Zinsstrukturkurven zu verwenden, um die tatsächlich beobachteten Zinsverläufe abbilden zu können.

Da für die Lebensversicherung häufig die Betrachtung einzelner Versicherungsjahre relevant ist, bietet es sich an, im Folgenden periodenabhängige Forward Rates zu verwenden.

Als weitere Rechnungsgrundlagen werden Kosten angesehen, die sich üblicherweise in der Praxis in Abschluss-, Verwaltungs- und Stückkosten unterteilen [Kah18; Ort16]. Im Wesentlichen können Kosten als zusätzliche Leistungen interpretiert werden, weswegen es für die weitere Arbeit ausreicht, Kosten zu vernachlässigen und nicht zu betrachten.

Für die biometrischen Rechnungsgrundlagen werden Sterbe- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten verwendet. Durch diese Größen lässt sich die Unsicherheit des Eintretens der Ereignisse „Überleben“ und „Tod“ berücksichtigen [Ort16; Wag17]. Diese Größen werden im nächsten Abschnitt vorgestellt.

### 5.1.1. Biometrische Rechnungsgrundlagen

Für die Bewertung der (unsicheren) Zahlungen eines Versicherungsvertrags werden die Eintrittswahrscheinlichkeiten der jeweiligen Zahlungen berücksichtigt. In der Praxis sind

derartige biometrische Rechnungsgrundlagen durch sogenannte Ausscheideordnungen gegeben, die den Abbau einer Personengesamtheit im zeitlichen Verlauf aufgrund von festgelegten Ausscheideursachen beschreiben. In der klassischen Lebensversicherung wird als Ausscheideursache in erster Linie der Tod betrachtet. In diesem Fall nennt man die Ausscheideordnung auch Sterbetafel.

Als weitere Ausscheideursache tritt in der Pensionsversicherungsmathematik für die Kalkulation von Produkten der betrieblichen Altersvorsorge, Berufsunfähigkeits- bzw. Erwerbsunfähigkeitsversicherungen auch die Invalidität auf. Daher werden neben den Sterbewahrscheinlichkeiten weitere biometrische Daten verwendet [FG10]. Dazu gehören z.B. Invalidisierungs-, Storno- und Reaktivierungswahrscheinlichkeiten, die auch zu den biometrischen Rechnungsgrundlagen gezählt werden [Bec+16]. Diese sind durch sogenannte Invaliditäts- oder Pflegefalltafeln gegeben (z.B. Heubeck'sche Richttafeln 2005G, DAV-Sterbetafel 2006HUR) [Wag17].

In diesem Kapitel wird nur die Ausscheideursache „Tod“ untersucht. Die Berücksichtigung der Ausscheideursache „Invalidität“ wird in Abschnitt 6.1 aufgegriffen<sup>1</sup>.

Eine *Sterbetafel*  $Q = (q_0, q_1, \dots, q_{\omega-1}, q_\omega)$  enthält die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x$  für alle ganzzahligen Altersjahre  $x = 0, 1, \dots, \omega$  [Ort16; Sch05]. Die *Sterbewahrscheinlichkeit*  $q_x$  drückt die Wahrscheinlichkeit aus, im Alter von  $x$  Jahren zu sterben. Es gilt  $0 \leq q_x \leq 1$  für alle  $x = 0, 1, \dots, \omega$ . Hierbei wird mit  $\omega$  das sogenannte *Schlussalter* bezeichnet, welches das in einer Sterbetafel letzte Lebensalter angibt, d.h. es gilt  $q_\omega = 1$ .

Wird eine  $x$ -jährige Person betrachtet, reicht es aus, nur zukünftige Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x, q_{x+1}, \dots$  usw. zu verwenden. In der abgekürzten Sterbetafel  $Q_x$  sollen daher die Sterbewahrscheinlichkeiten

$$Q_x = (q_x, q_{x+1}, q_{x+2}, \dots)$$

zusammengefasst werden.

Für die Praxis werden Sterbetafeln üblicherweise vom statistischen Bundesamt zur Verfügung gestellt und von der deutschen Aktuarvereinigung (DAV) für versicherungsmathematische Zwecke angepasst. Aktuell werden die Tafeln DAV2004R für Rentenversicherungen und DAV2008T für Todesfallversicherungen verwendet [DAV05; DAV09a].

Zur Festlegung der Wahrscheinlichkeiten  $q_x$  für  $x = 0, 1, 2, \dots$  ist die Anzahl  $\ell_x$  der lebenden Personen des Alters  $x$  in einem ausgewählten Kollektiv für  $x = 0, 1, 2, \dots$  gegeben. Ausgehend von der Anfangsgröße  $\ell_0$  wird über die Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x$  der Abbau dieses Kollektivs beschrieben, bis  $\ell_{\omega+1} = 0$  gilt. Für die Anfangsgröße  $\ell_0$  wird

<sup>1</sup>In dieser Arbeit werden nur die Ausscheideursachen „Tod“ und „Invalidität“ exemplarisch untersucht. Weitere mögliche Ausscheideursachen, wie z.B. der Eintritt in die Pflegebedürftigkeit, werden nicht betrachtet.

üblicherweise  $\ell_0 = 100.000$  gewählt [Kah18; Ort16].

Die Sterbewahrscheinlichkeit  $q_x$  einer  $x$ -jährigen Person lässt sich über die Anzahl der im Alter  $x$  gestorbenen Personen  $d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$  ableiten. Es ist

$$q_x = \frac{d_x}{\ell_x} = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x}, \text{ für } x = 0, \dots, \omega, \text{ mit } \ell_{\omega+1} = 0. \quad (5.1)$$

Über die Größen  $\ell_x$  lässt sich weiterhin auch die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines  $x$ -Jährigen, d.h. die Wahrscheinlichkeit als  $x$ -Jähriger  $x + 1$  Jahre alt zu werden, bestimmen. Diese einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit wird mit  $p_x$  bezeichnet und beschreibt die Gegenwahrscheinlichkeit der einjährigen Sterbewahrscheinlichkeit  $q_x$  eines  $x$ -Jährigen [Kah18; Ort16]:

$$p_x = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} = \frac{\ell_x - (\ell_x - \ell_{x+1})}{\ell_x} = 1 - q_x.$$

Die  $t$ -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines  $x$ -Jährigen, d.h. die Wahrscheinlichkeit als  $x$ -Jähriger noch mindestens  $t$  Jahre zu erleben, wird mit  ${}_t p_x$  bezeichnet [Kah18; Ort16]. Es gilt:

$${}_t p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot \dots \cdot p_{x+t-1} = \prod_{j=0}^{t-1} p_{x+j}. \quad (5.2)$$

### 5.1.2. Erwarteter Barwert

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden Zahlungsreihen betrachtet, die Lebensversicherungsverträge charakterisieren. Dafür sei stets angenommen, dass die versicherte Person einer Versicherung bei Vertragsbeginn  $x$  Jahre alt sei und die Laufzeit  $n$  Perioden betrage. Typischerweise wird für die Dauer einer Periode ein Jahr angenommen. Dementsprechend wird die Dauer einer Versicherung durch  $n \leq \omega - x + 1$  begrenzt, da spätestens dann das Schlussalter der versicherten Person erreicht wird. Für  $n = \omega - x + 1$  spricht man von einer *lebenslangen* Versicherungsdauer.

Aufgrund der periodischen Betrachtung wird für die Bewertung von derartigen Zahlungsreihen eine Forward Rate Zinsstrukturkurve  $I^F = (i_1, \dots, i_n)$  verwendet. Außerdem sei für die Bewertung einer Lebensversicherung eine Sterbetafel  $Q_x = (q_x, q_{x+1}, \dots, q_{x+n-1})$  gegeben.

Mithilfe der dargestellten Überlebens- bzw. Sterbewahrscheinlichkeiten lassen sich nun die Barwerte der (ungewissen) Beitrags- und Leistungszahlungen einer Lebensversicherung als „erwartete Barwerte“ angeben [Kah18; MH08; Sch05].

Dies führt zur folgenden Definition des erwarteten Barwerts (oder auch versicherungsmathematischen Barwerts).

**Definition 5.1 (Erwarteter Barwert)**

Für die Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  des Versicherungsvertrags einer  $x$ -jährigen Person ist der *erwarteter Barwert* (oder auch aktuarieller Barwert) der Zahlungsreihe  $Z$  definiert durch:

$${}_aBW(Z, I^F, Q_x) := \sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)}. \quad (5.3)$$

Die Zahlungsreihe  $Z$  besteht in der Regel aus Beitrags- oder Leistungszahlungen. Im Allgemeinen können (Lebens-) Versicherungsleistungen abhängig vom Erlebens- bzw. Todesfall vereinbart werden.

Die *Erlebensfalleistung* der  $(t+1)$ -ten Periode  $[t, t+1[$ , für  $t \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , ist zum Zeitpunkt  $t$  fällig, falls die versicherte  $x$ -jährige Person den Zeitpunkt  $t$  erlebt, d.h. das Alter  $x+t$  erreicht. Eine solche Erlebensfalleistung zum Zeitpunkt  $t$  sei hier mit  $L_t^{(0)}$  bezeichnet. Der Vektor  $L^{(0)} = (L_0^{(0)}, L_1^{(0)}, \dots, L_n^{(0)})$  beschreibt sämtliche Erlebensfalleistungen eines Versicherungsvertrags.

Die vereinbarte *Todesfalleistung* der  $t+1$ -ten Periode  $[t, t+1[$ , für  $t \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , ist zum Zeitpunkt  $t+1$  fällig, falls die versicherte  $x$ -jährige Person innerhalb dieser Periode, d.h. im Alter  $x+t$ , stirbt. Die Auszahlung dieser Leistung findet am Ende der Periode statt. Diese Todesfalleistung sei hier mit  $L_t^{(1)}$  bezeichnet. Der Vektor  $L^{(1)} = (L_0^{(1)}, L_1^{(1)}, \dots, L_n^{(1)})$  beschreibt die Todesfalleistungen eines Versicherungsvertrags.

Die Zahlungen einer Periode werden stets zu Beginn der Periode bewertet. Daher werden die erwarteten *Versicherungsleistungen*  $L_t$  der Periode  $[t, t+1[$  durch

$$L_t = L_t^{(0)} + q_{x+t} \cdot L_t^{(1)} \cdot v_{t+1}, \quad \text{für } t = 0, \dots, n \quad (5.4)$$

beschrieben. Hierbei wird berücksichtigt, dass Todesfalleistungen am Ende der Periode geleistet werden, in der der Tod eingetreten ist. Die (erwarteten) Versicherungsleistungen werden im Vektor  $L = (L_0, L_1, \dots, L_n)$  zusammengefasst.

**Bemerkung 5.2**

Der letzte Zeitpunkt zu dem eine Versicherungsleistung gezahlt werden kann, ist zum Zeitpunkt  $n$ , d.h. zum Ende der Vertragslaufzeit. Eine Erlebensfalleistung  $L_n^{(0)}$ , die für diesen Zeitpunkt vereinbart ist, wird Ablaufleistung genannt. Da die Versicherung spätestens zu diesem Zeitpunkt beendet wird, ist für die dann folgende Periode keine Todesfalleistung vereinbart, d.h. in (5.4) gilt  $L_n = L_n^{(0)}$ . Daher setzt man  $L_n^{(1)} := 0$ . Für den (technischen) Zinssatz der Periode  $[n, n+1[$  kann daher bspw.  $i_{n+1} := -1$  gewählt werden.

Klar ist, dass man sowohl den Vektor der (erwarteten) Erlebensfalleistungen  $L^{(0)}$  als

auch den Vektor der (erwarteten) Todesfalleistungen  $L^{(1)}$ , sowie den Vektor der Versicherungsleistungen  $L$  als Zahlungsreihe auffassen kann. Der Barwert der Versicherungsleistungen wird auch Leistungsbarwert genannt und ist gegeben durch

$${}_aBW(L, I^F, Q_x) = \sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot \left( L_j^{(0)} + q_{x+j} \cdot L_j^{(1)} \cdot v_{j+1} \right) \cdot v^{(j)}.$$

### Beispiel 5.3

1. Sei  $\pi_t$  der zum Zeitpunkt  $t$  zu zahlende Beitrag für einen Versicherungsvertrag einer  $x$ -jährigen Person. Dann wird mit  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}, 0)$  der Beitragsvektor (oder Prämienvektor) dieses Vertrags bezeichnet.

Durch

$${}_aBW(\pi, I^F, Q_x) = \sum_{j=0}^{n-1} {}_j p_x \cdot \pi_j \cdot v^{(j)}$$

ist der sogenannte *Beitragsbarwert* gegeben.

2. Für eine um  $m$  Jahre aufgeschobene, temporäre *Leibrente* beginnen die Rentenzahlungen im Zeitpunkt  $m$ . Hier sei  $R_t$  die vereinbarte Rentenzahlung zum Zeitpunkt  $t$ . Wählt man die Leistungen gemäß

$$L_t^{(0)} = \begin{cases} 0, & \text{für } t = 0, 1, \dots, m-1, \\ R_t, & \text{für } t = m, m+1, \dots, n-1, \end{cases}$$

so ergibt sich  $L = L^{(0)}$  und der Leistungsbarwert der aufgeschobenen Rentenversicherung wird durch

$${}_aBW(L, I^F, Q_x) = \sum_{j=m}^{n-1} {}_j p_x \cdot R_j \cdot v^{(j)}$$

gegeben. Für  $n = \omega - x$  entspricht dies dem *Rentenbarwert* einer um  $m$  Jahre aufgeschobenen, lebenslangen Leibrente.

Für  $m = 0$  wird eine sogenannte *sofortbeginnende* Rentenversicherung beschrieben.

3. Sind die Leistungen durch  $L_t^{(0)} = 0$  und  $L_t^{(1)} = S$ , für  $t = 0, 1, \dots, n-1$  gegeben, dann beschreibt  ${}_aBW(L, I^F, Q_x)$  den Leistungsbarwert einer  $n$  jährigen Risikolebensversicherung mit Versicherungssumme  $S$ :

$${}_aBW(L, I^F, Q_x) = \sum_{j=0}^{\omega-x} {}_j p_x \cdot q_{x+j} \cdot S \cdot v^{(j+1)}. \quad (5.5)$$

Für  $n = \omega - x$  erhält man den Barwert einer lebenslangen Todesfallversicherung.

4. Bei einer Kapitallebensversicherung wird eine als konstant angenommene Versicherungssumme  $S$  entweder bei Tod der versicherten Person innerhalb der Vertragslaufzeit oder im Erlebensfall bei Ablauf der Versicherung ausbezahlt. Damit ist diese Versicherung eine Kombination aus einer Risikolebensversicherung und einer Erlebensfallversicherung.

Für den Leistungsvektor  $L = (L_0, L_1, \dots, L_n)$  mit  $L_t = L_t^{(0)} + q_{x+t} \cdot L_t^{(1)} \cdot v_{t+1}$  und

$$L_t^{(0)} = \begin{cases} 0, & \text{für } t = 0, 1, \dots, n-1, \\ S, & \text{für } t = n, \end{cases}$$

sowie

$$L_t^{(1)} = \begin{cases} S, & \text{für } t = 0, 1, \dots, n-1, \\ 0, & \text{für } t = n, \end{cases}$$

erhält man den Barwert einer Kapitallebensversicherung mit Laufzeit  $n$ :

$$aBW(L, I^F, Q_x) = \sum_{j=0}^{n-1} {}_j p_x \cdot q_{x+j} \cdot S \cdot v^{(j+1)} + {}_n p_x \cdot S \cdot v^{(n)}.$$

◇

Versicherungsunternehmen sind gesetzlich dazu verpflichtet ausreichend hohe Reserven anzulegen, um die dauernde Erfüllbarkeit der Verträge sicherzustellen [Kah18; Ort16]. Mit dem Vorhandensein einer Reserve soll zu jedem Zeitpunkt  $t$  garantiert werden, dass alle zukünftig zu erwartenden Leistungen finanziert werden können. Diese Reserve wird als *Deckungskapital* oder Deckungsrückstellung bezeichnet.

Das Deckungskapital  ${}_t V_x$  ist für jeden Zeitpunkt  $t$  definiert als die Differenz der zukünftig zu erwartenden Versicherungsleistungen und der zukünftig zu erwartenden Beiträge [Ort16]. Es kann als „Guthaben des Versicherungsnehmers“ zum Zeitpunkt  $t$  interpretiert werden, das sich aus den Beiträgen ergibt, die in der Vergangenheit gezahlt wurden und für noch nicht erbrachte Leistungen „reserviert“ sind.

Mit den Diskontierungsfaktoren  $v_t^{(l)} := \prod_{k=t+1}^l v_k$  mit  $1 \leq t+1 \leq l \leq n$ , sowie den Zusammenhängen  $v^{(j)} = v^{(t)} \cdot v_t^{(j)}$  und  ${}_j p_x = {}_t p_x \cdot {}_{j-t} p_{x+t}$  für  $j \geq t$  kann das Deckungskapital

${}_tV_x$  für  $t = 0, \dots, n - 1$  ausgedrückt werden durch

$$\begin{aligned} {}_tV_x &= \sum_{j=0}^{n-t} {}_j p_{x+t} \cdot L_{t+j} \cdot v_t^{(t+j)} - \sum_{j=0}^{n-t} {}_j p_{x+t} \cdot \pi_{t+j} \cdot v_t^{(t+j)} \\ &= \sum_{j=t}^n {}_{j-t} p_{x+t} \cdot (L_j - \pi_j) \cdot v_t^{(j)} \\ &= \sum_{j=t}^n \frac{{}_j p_x}{{}_t p_x} \cdot (L_j - \pi_j) \cdot \frac{v^{(j)}}{v^{(t)}} \\ &= \sum_{j=t}^n {}_j p_x \cdot \underbrace{\left( \frac{L_j - \pi_j}{{}_t p_x \cdot v^{(t)}} \right)}_{=: {}_t \tilde{L}_j} \cdot v^{(j)}. \end{aligned}$$

Mithilfe der Zahlungen  ${}_t \tilde{L}_j := \frac{L_j - \pi_j}{{}_t p_x \cdot v^{(t)}}$  für  $j = t, \dots, n$  kann somit das Deckungskapital zum Zeitpunkt  $t$  auch als erwarteter Barwert der Zahlungsreihe

$${}_t \tilde{L} = (0, \dots, 0, {}_t \tilde{L}_t, {}_t \tilde{L}_{t+1}, \dots, {}_t \tilde{L}_n)$$

dargestellt werden, d.h. es ist

$${}_tV_x = aBW({}_t \tilde{L}, I^F, Q_x). \quad (5.6)$$

## 5.2. Forward Rate Duration für Lebensversicherungen

Da auch der erwartete Barwert  $aBW(L, I^F, Q_x)$  von der Zinsstrukturkurve  $I^F$  abhängt, ist klar, dass auch der erwartete Barwert von Änderungen in der Forward Rate Zinsstrukturkurve beeinflusst wird. Damit tritt auch bei der Bewertung von Zahlungsreihen, die Lebensversicherungen charakterisieren, das Zinsänderungsrisiko auf, d.h. das Risiko, dass sich der erwartete Barwert einer Zahlungsreihe aufgrund einer Änderung  $\Delta I^F$  der Zinsstrukturkurve ändert.

In diesem Abschnitt soll beschrieben werden, wie das Zinsänderungsrisiko mittels des Forward Rate Durationskonzepts bemessen werden kann, wenn Zahlungsreihen der Lebensversicherungsmathematik vorliegen. Dazu seien erneut die Änderungen

$$\Delta I^F = (\Delta i_1, \Delta i_2, \dots, \Delta i_n)$$

der Forward Rate Zinsstrukturkurve mit  $i_t + \Delta i_t > -1$  gegeben.

Durch die Zahlungsreihe  $L = (L_0, L_1, \dots, L_n)$  der Versicherungsleistungen wird die dis-

krete Zahlungsreihe

$$Z^L = ({}_0p_x \cdot L_0, {}_1p_x \cdot L_1, {}_2p_x \cdot L_2, \dots, {}_np_x \cdot L_n)$$

der erwarteten Versicherungsleistungen induziert. Der erwartete Barwert der Zahlungsreihe  $L$  ergibt sich offenbar als Spezialfall des finanzmathematischen Barwerts der Zahlungsreihe  $Z^L$  (vgl. Definition 2.4). Es besteht also der formale Zusammenhang:

$${}_aBW(L, I^F, Q_x) = BW_F(Z^L, I^F). \quad (5.7)$$

Durch diesen formalen Zusammenhang kann das Forward Rate Durationskonzept auch für die Quantifizierung des Zinsänderungsrisikos für Lebensversicherungen verwendet werden. Hierbei ist hierbei allerdings zu beachten, dass die Versicherungsleistungen

$$L_t = L_t^{(0)} + q_{x+t} \cdot L_t^{(1)} \cdot v_{t+1}$$

selbst vom Zinssatz  $i_{t+1}$  abhängen.

Daher kann formal zunächst nur für den Fall, dass  $L_t^{(1)} = 0$  ist, für alle  $t = 0, \dots, n$  der Zusammenhang (5.7) genutzt werden, um die eingeführten Durationsmaße als Maß für das Zinsänderungsrisiko direkt anzugeben.

#### Beispiel 5.4

Für eine Forward Rate Zinsstrukturkurve  $I^F = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ , lässt sich die Forward Rate Duration  $D_F(Z^{L^{(0)}}, I^F, \Delta I^F)$  der Zahlungsreihe  $Z^{L^{(0)}}$  gemäß (4.6) als relatives Maß für das Zinsänderungsrisiko des erwarteten Barwerts der Zahlungsreihe  $L^{(0)}$  bei gegebener Änderungen  $\Delta I^F$  verwenden:

$$D_F(Z^{L^{(0)}}, I^F, \Delta I^F) = \frac{1}{BW_F(Z^{L^{(0)}}, I^F)} \cdot \sum_{j=0}^{\omega-x} \left( \sum_{k=1}^j v_k \cdot \Delta i_k \right) \cdot {}_j p_x \cdot L_j^{(0)} \cdot v^{(j)}.$$

◇

Mit Definition 4.3 ist die Forward Rate Duration  $D_F(Z^L, I^F, \Delta I^F)$  für die Zahlungsreihe  $Z^L$  der erwarteten Versicherungsleistungen definiert. Aufgrund der Abhängigkeit der Leistungen  $L_t$  vom Zinssatz  $i_{t+1}$  kann die Darstellung aus Satz 4.5 nicht für  $D_F(Z^L, I^F, \Delta I^F)$  verwendet werden.

Für die Zahlungsreihe  $Z^L$  mit  $L_t^{(1)} \neq 0$  für mindestens ein  $t \in \{0, \dots, n-1\}$ , erhält man hingegen das folgende Resultat.

**Satz 5.5 (Forward Rate Duration für Versicherungsleistungen)**

Es seien die Änderungsgrößen  $\Delta I^F = (\Delta i_1, \Delta i_2, \dots, \Delta i_n)$  der Forward Rate Zinsstrukturkurve  $I^F$  angenommen. Für den Leistungsvektor  $L$  eines Versicherungsvertrags der Laufzeit  $n$ , der für eine  $x$ -jährige Person abgeschlossen wird, gilt:

$$\begin{aligned} D_F(Z^L, I^F, \Delta I^F) &= \frac{-1}{BW_F(Z^L, I^F)} \cdot dBW_F(Z^L, I^F) \\ &= \frac{1}{BW_F(Z^L, I^F)} \cdot \left( \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j v_k \Delta i_k \right) \cdot {}_j p_x \cdot L_j \cdot v^{(j)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{n-1} v_{j+1} \Delta i_{j+1} \cdot {}_j p_x \cdot L_j^{(1)} \cdot q_{x+j} \cdot v^{(j+1)} \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

**Beweis** Für  $L_t^{(1)} \neq 0$  für mindestens ein  $t \in \{0, \dots, n-1\}$ , gilt für den Leistungsbarwert  $BW_F(Z^L, I^F)$  unter Berücksichtigung von  $L_t = L_t^{(0)} + q_{x+t} \cdot L_t^{(1)} \cdot v_{t+1}$ :

$$\begin{aligned} BW_F(Z^L, I^F) &= \sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot L_j \cdot v^{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot \left( L_j^{(0)} + q_{x+j} \cdot L_j^{(1)} \cdot v_{j+1} \right) \cdot v^{(j)} \\ &= \underbrace{\sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot L_j^{(0)} \cdot v^{(j)}}_{BW_F(Z^{L^{(0)}} , I^F)} + \underbrace{\sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot (q_{x+j} \cdot L_j^{(1)} \cdot v_{j+1}) \cdot v^{(j)}}_{BW_F(Z^{\widehat{L}^{(1)}} , I^F)}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Hierbei bezeichnet  $\widehat{L}^{(1)} = (q_x \cdot L_0^{(1)} \cdot v_1, q_{x+1} \cdot L_1^{(1)} \cdot v_2, \dots, q_{x+n} \cdot L_n^{(1)} \cdot v_{n+1})$  die Zahlungsreihe der erwarteten Todesfalleistungen, die die Zahlungsreihe

$$Z^{\widehat{L}^{(1)}} = ({}_0 p_x \cdot q_x \cdot L_0^{(1)} \cdot v_1, {}_1 p_x \cdot q_{x+1} \cdot L_1^{(1)} \cdot v_2, \dots, {}_{n-1} p_x \cdot q_{x+n-1} \cdot L_{n-1}^{(1)} \cdot v_n, 0)$$

induziert.

Für die Forward Rate Duration  $D_F(Z^L, I^F, \Delta I^F)$  der Zahlungsreihe  $Z^L$  gilt mit (5.9) nach Definition 4.3:

$$\begin{aligned} D_F(Z^L, I^F, \Delta I^F) &= \frac{-1}{BW_F(Z^L, I^F)} \cdot dBW_F(Z^L, I^F) \\ &= \frac{-1}{BW_F(Z^L, I^F)} \cdot \left( dBW_F(Z^{L^{(0)}} , I^F) + dBW_F(Z^{\widehat{L}^{(1)}} , I^F) \right) \\ &= \frac{-1}{BW_F(Z^L, I^F)} \cdot \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial i_k} \left( BW_F(Z^{L^{(0)}} , I^F) \right) \Delta i_k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial i_k} \left( BW_F(Z^{\widehat{L}^{(1)}} , I^F) \right) \Delta i_k \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Die Forward Rate Duration der Zahlungsreihe  $Z^{L^{(0)}}$  wurde bereits in Beispiel 5.4 betrachtet, sodass es aufgrund der Linearität der Ableitung im Folgenden ausreicht, das Differential  $d BW_F(Z^{L^{(1)}}, I^F)$  zu untersuchen.

Für  $k = 1, \dots, n$  und  $j = 1, \dots, n$  gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial i_k} \left( \prod_{l=1}^{j+1} (1+i_l)^{-1} \right) &= \begin{cases} -(1+i_k)^{-1} \cdot \prod_{l=1}^{j+1} (1+i_l)^{-1} & , k \leq j+1, \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -(1+i_k)^{-1} \cdot v^{(j+1)} & , k \leq j+1 \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial i_k} \left( BW_F(Z^{L^{(1)}}, I^F) \right) \Delta i_k &= \sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot q_{x+j} \cdot L_j^{(1)} \cdot \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial i_k} v^{(j+1)} \right) \Delta i_k \\ &= \sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot q_{x+j} \cdot L_j^{(1)} \cdot \left( \sum_{k=1}^{j+1} -v_k \cdot v^{(j+1)} \cdot \Delta i_k \right) \\ &= \sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot q_{x+j} \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \cdot \left( \sum_{k=1}^j -v_k \Delta i_k - v_{j+1} \Delta i_{j+1} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j -v_k \Delta i_k \right) \cdot {}_j p_x \cdot q_{x+j} \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n-1} v_{j+1} \cdot \Delta i_{j+1} \cdot {}_j p_x \cdot q_{x+j} \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)}. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich  $d BW_F(Z^L, I^F)$ :

$$\begin{aligned} d BW_F(Z^L, I^F) &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j -v_k \Delta i_k \right) \cdot {}_j p_x \cdot L_j^{(0)} \cdot v^{(j)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j -v_k \Delta i_k \right) \cdot {}_j p_x \cdot L_j^{(1)} \cdot q_{x+j} \cdot v^{(j+1)} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n-1} v_{j+1} \cdot \Delta i_{j+1} \cdot {}_j p_x \cdot q_{x+j} \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j -v_k \Delta i_k \right) \cdot {}_j p_x \cdot L_j \cdot v^{(j)} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n-1} v_{j+1} \cdot \Delta i_{j+1} \cdot {}_j p_x \cdot q_{x+j} \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)}. \end{aligned}$$

Mit (5.10) folgt die Darstellung für  $D_F(Z^L, I^F, \Delta I^F)$ . □

Wegen  $aBW(L, I^F, Q_x) = BW_F(Z^L, I^F)$  erhält man aus der Taylorreihenentwicklung (4.5) für  $BW_F(I^F + \Delta I^F)$  auch die Approximation für  $aBW(L, I^F + \Delta I^F, Q_x)$ :

$$aBW(L, I^F + \Delta I^F, Q_x) \approx aBW(L, I^F, Q_x) - aBW(L, I^F, Q_x) \cdot D_F(Z^L, I^F, \Delta I^F).$$

Damit kann die Forward Rate Duration  $D_F(Z^L, I^F, \Delta I^F)$  der Zahlungsreihe der Versicherungsleistungen als relatives Maß für das Zinsänderungsrisiko der Zahlungsreihe  $L$  verwendet werden. Für die absolute Barwertänderung gilt

$$aBW(L, I^F + \Delta I^F, Q_x) - aBW(L, I^F, Q_x) \approx -aBW(L, I^F, Q_x) \cdot D_F(Z^L, I^F, \Delta I^F),$$

und für die Zinssensitivität:

$$\frac{\Delta aBW(L, I^F, Q_x)}{aBW(L, I^F, Q_x)} \approx -D_F(Z^L, I^F, \Delta I^F).$$

Diese Approximationen können durch die Verwendung der Forward Rate Konvexität verbessert werden. Die Forward Rate Konvexität  $C_F(Z^L, I^F, \Delta I^F)$  für die Zahlungsreihe  $Z^L$  ist durch Definition 4.6 definiert. Sind Todesfalleleistungen vereinbart, wirkt sich die Abhängigkeit der Zahlungen  $L_t$  von  $i_{t+1}$  auch auf die Darstellung der Forward Rate Konvexität  $C_F(Z^L, I^F, \Delta I^F)$  aus und Satz 4.7 kann nicht verwendet werden.

Für die Darstellung der Forward Rate Konvexität  $C_F(Z^L, I^F, \Delta I^F)$  der Zahlungsreihe der erwarteten Versicherungsleistungen resultiert der folgende Satz.

**Satz 5.6 (Forward Rate Konvexität für Versicherungsleistungen)**

Es seien die Änderungsgrößen  $\Delta I^F = (\Delta i_1, \Delta i_2, \dots, \Delta i_n)$  der Forward Rate Zinsstrukturkurve  $I^F$  angenommen. Für den Leistungsvektor  $L$  eines Versicherungsvertrags der Laufzeit  $n$ , der für eine  $x$ -jährige Person abgeschlossen wird, gilt:

$$C_F(Z^L, I^F, \Delta I^F) = \frac{1}{BW_F(Z^L, I^F)} \cdot \left( \sum_{j=1}^n {}_j p_x \cdot L_j \cdot v^{(j)} \cdot 2 \cdot \sum_{l=1}^j \sum_{k=l}^j v_l \Delta i_l \cdot v_k \Delta i_k + \sum_{j=0}^{n-1} {}_j q_x \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \cdot 2 \cdot \sum_{k=1}^{j+1} v_k \Delta i_k \cdot v_{j+1} \Delta i_{j+1} \right). \quad (5.11)$$

**Beweis** Mit  ${}_j q_x = {}_j p_x \cdot q_{x+j}$  gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial i_k \partial i_l} \left( BW_F(\widehat{Z^L}^{(1)}, I^F) \right) \Delta i_k \cdot \Delta i_l \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial i_k \partial i_l} \left( \sum_{j=0}^n {}_j q_x \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \right) \Delta i_k \cdot \Delta i_l \\ &= \sum_{j=0}^n {}_j q_x \cdot L_j^{(1)} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial i_k \partial i_l} \left( v^{(j+1)} \right) \Delta i_k \cdot \Delta i_l, \end{aligned}$$

da  $\frac{\partial^2}{\partial i_k \partial i_l} (v^{(j+1)}) = 0$  für  $k, l > j + 1$  gilt weiter:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^n j q_x \cdot L_j^{(1)} \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{l=1}^{j+1} \left( \frac{\partial^2}{\partial i_k \partial i_l} (v^{(j+1)}) \cdot \Delta i_k \cdot \Delta i_l \right) \\
&= \sum_{j=0}^n j q_x \cdot L_j^{(1)} \left( \underbrace{\sum_{k=1}^j \sum_{l=k+1}^{j+1} \frac{\partial^2}{\partial i_k \partial i_l} (v^{(j+1)}) \cdot \Delta i_k \cdot \Delta i_l}_{k < l} + \underbrace{\sum_{k=1}^{j+1} \frac{\partial^2}{\partial i_k^2} (v^{(j+1)}) \cdot (\Delta i_k)^2}_{k=l} \right. \\
&\quad \left. \underbrace{\sum_{l=1}^j \sum_{k=l+1}^{j+1} \frac{\partial^2}{\partial i_k \partial i_l} (v^{(j+1)}) \cdot \Delta i_k \cdot \Delta i_l}_{k > l} \right) \\
&= \sum_{j=0}^n j q_x \cdot L_j^{(1)} \cdot \left( \sum_{k=1}^{j+1} \frac{\partial^2}{\partial i_k^2} (v^{(j+1)}) \cdot (\Delta i_k)^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^j \sum_{l=k+1}^{j+1} \frac{\partial^2}{\partial i_k \partial i_l} (v^{(j+1)}) \cdot \Delta i_k \cdot \Delta i_l \right) \\
&= \sum_{j=0}^n j q_x \cdot L_j^{(1)} \cdot \left( \sum_{k=1}^j 2 \cdot v_k^2 \cdot v^{(j+1)} \cdot (\Delta i_k)^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^j \sum_{l=k+1}^{j+1} v_k \cdot v_l \cdot v^{(j+1)} \cdot \Delta i_k \cdot \Delta i_l \right) \\
&= 2 \cdot \sum_{j=0}^n j q_x \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \cdot \left( \sum_{k=1}^{j+1} v_k^2 \cdot (\Delta i_k)^2 + \sum_{k=1}^j \sum_{l=k+1}^{j+1} v_k \cdot v_l \cdot \Delta i_k \cdot \Delta i_l \right) \\
&= 2 \cdot \sum_{j=0}^n j q_x \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \cdot \left( \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{l=k}^{j+1} v_k \cdot v_l \cdot \Delta i_k \cdot \Delta i_l \right) \\
&= 2 \cdot \sum_{j=0}^n j q_x \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \cdot \left( \sum_{k=1}^j \sum_{l=k}^j v_k \cdot v_l \cdot \Delta i_k \cdot \Delta i_l + \sum_{k=1}^{j+1} v_k \cdot \Delta i_k \cdot v_{j+1} \cdot \Delta i_{j+1} \right).
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Darstellung für  $C_F(Z, I^F, \Delta I^F)$  für  $Z = Z^{L(0)}$  in (4.13), sowie (5.9) erhält man die Darstellung für die Forward Rate Konvexität  $C_F(Z^L, I^F, \Delta I^F)$ .  $\square$

Schließlich erhält man als Maß für das Zinsänderungsrisiko die folgende Approximation:

$$\begin{aligned}
\Delta aBW(L, I^F, Q_x) &\approx -aBW(L, I^F, Q_x) \cdot D_F(Z^L, I^F, \Delta I^F) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot aBW(L, I^F, Q_x) \cdot C_F(Z^L, I^F, \Delta I^F),
\end{aligned}$$

sowie die Darstellung der Zinssensitivität

$$\frac{\Delta aBW(L, I^F, Q_x)}{aBW(L, I^F, Q_x)} \approx -D_F(Z^L, I^F, \Delta I^F) + \frac{1}{2} \cdot C_F(Z^L, I^F, \Delta I^F).$$

**Beispiel 5.7**

In diesem Beispiel sollen die Zinssensitivitäten von Versicherungen mit verschiedenen Leistungen berechnet werden. Die versicherte Person dieser Versicherungen sei eine 29-jährige Frau, die Laufzeit betrage jeweils  $n = 40$  Jahre. Für die Bewertung der jeweiligen Zahlungsreihen wird eine flache Zinsstrukturkurve  $\bar{I} = (i, \dots, i)$  mit  $i = 0,02$ , sowie die Sterbetafel DAV2004RF verwendet.

Es sei eine Änderung der zugrundeliegenden Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  zu einer nicht-flachen Forward Rate Zinsstrukturkurve  $I^F$  angenommen. Für die nicht-flache Zinsstrukturkurve  $I^F$  seien die Werte der aus Beispiel 4.8 bekannten, stark fallenden Zinsstrukturkurve des dritten Szenarios ( $I^F + \Delta I^{F(3)}$  in Abb. 4.2) angenommen<sup>2</sup>. Die Änderungen  $\Delta I^F$  sind entsprechend durch  $\Delta I^F = I^F - \bar{I}$  gegeben. Durch die hier unterstellte Zinsänderung ist für die ersten 15 Jahre eine Zinssteigerung ( $\Delta i_t > 0$  für  $t \leq 15$ ) und für die weiteren Jahre eine Zinssenkung ( $\Delta i_t < 0$  für  $t \geq 16$ ) gegeben.

1. Für eine um  $m = 15$  Jahre aufgeschobene temporäre Leibrente der Höhe  $R = 12.000 \text{ €}$  mit Laufzeit  $n = 40$  sei ein konstanter Jahresbeitrag  $\pi_0$  innerhalb der Aufschubzeit zu zahlen. Für die Zahlungen des Beitragsvektors  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}, 0)$  bzw. die Zahlungen des Leistungsvektors  $L = (L_0, L_1, \dots, L_n)$  gilt daher

$$\pi_t = \begin{cases} \pi_0, & \text{für } t = 0, 1, \dots, 14, \\ 0, & \text{für } t = 15, \dots, 40 \end{cases} \quad \text{und} \quad L_t = \begin{cases} 0, & \text{für } t = 0, 1, \dots, 14, \\ R, & \text{für } t = 15, \dots, 40. \end{cases}$$

Der Beitrag dieser Versicherung berechnet sich über das sogenannte *versicherungsmathematische Äquivalenzprinzip*. Dieses verlangt, dass der erwartete Barwert der Versicherungsleistungen dem erwarteten Beitragsbarwert entspricht [Kah18; Ort16]. D.h. es soll gelten

$$aBW(\pi, \bar{I}, Q_x) = aBW(L, \bar{I}, Q_x).$$

Für diese Versicherung folgt hieraus für den konstanten Jahresbeitrag  $\pi$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{14} {}_j p_x \cdot \pi_0 \cdot v^j &= \sum_{j=15}^{40} {}_j p_x \cdot R \cdot v^j \\ \Leftrightarrow \pi_0 &= 13.198,93 \text{ €}. \end{aligned}$$

Mit  $\Delta I^F = \bar{I} - I^F$  erhält man für die Zinssensitivität des Beitrags- bzw. Leistungsbarwerts:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta aBW(\pi, I^F)}{aBW(\pi, I^F)} &\approx -D_F(\pi, I^F, \Delta I^F) + \frac{1}{2} \cdot C_F(\pi, I^F, \Delta I^F) \\ &= -0,0957 + \frac{1}{2} \cdot 0,0133 = -0,0891 \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Die genauen Werte der Zinsstrukturkurve  $I^F$  sind in Tabelle A.2 in Anhang A.1.2 zu finden.

bzw.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta aBW(L, I^F)}{aBW(L, I^F)} &\approx -D_F(L, I^F, \Delta I^F) + \frac{1}{2} \cdot C_F(L, I^F, \Delta I^F) \\ &= -0,0492 + \frac{1}{2} \cdot 0,0180 = -0,0402.\end{aligned}$$

Die Zinssensitivitäten beider Barwerte sind negativ. Aufgrund der Änderungen der Zinsstrukturkurve sinkt der Beitragsbarwert um ca. 9% und der Leistungsbarwert um 4%.

2. Eine temporäre Risikolebensversicherung über  $n = 40$  Jahre mit Versicherungssumme  $S = 100.000 \text{ €}$  werde mit jährlichen konstanten Beiträgen über die gesamte Laufzeit versichert. D.h. es ist

$$\pi_t = \begin{cases} \pi_0, & \text{für } t = 0, 1, \dots, 40, \\ 0, & \text{für } t = 40 \end{cases} \quad \text{und} \quad L_t = \begin{cases} q_{29+t} \cdot S \cdot v_{t+1}, & \text{für } t = 0, 1, \dots, 39, \\ 0, & \text{für } t = 40. \end{cases}$$

Über das versicherungsmathematische Äquivalenzprinzip erhält man die zu zahlende Prämie in Höhe von  $\pi_0 = 157,52 \text{ €}$ . Wieder sei die Änderung der flachen Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  mit  $i = 0,02$  zu einer Zinsstrukturkurve  $I^F$  angenommen. Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{\Delta aBW(\pi, I^F)}{aBW(\pi, I^F)} &\approx -D_F(\pi, I^F, \Delta I^F) + \frac{1}{2} \cdot C_F(\pi, I^F, \Delta I^F) \\ &= -0,0713 + \frac{1}{2} \cdot 0,0158 = -0,0635\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta aBW(L, I^F)}{aBW(L, I^F)} &\approx -D_F(L, I^F, \Delta I^F) + \frac{1}{2} \cdot C_F(L, I^F, \Delta I^F) \\ &= -0,0158 + \frac{1}{2} \cdot 0,0232 = 0,019.\end{aligned}$$

3. Für eine Kapitallebensversicherung über  $n = 40$  Jahre mit Versicherungssumme  $S = 100.000 \text{ €}$  seien die Beiträge ebenfalls über die gesamte Laufzeit zu zahlen,

$$\pi_t = \begin{cases} \pi_0, & \text{für } t = 0, 1, \dots, 40, \\ 0, & \text{für } t = 40 \end{cases} \quad \text{und} \quad L_t = \begin{cases} q_{29+t} \cdot S \cdot v_{t+1}, & \text{für } t = 0, 1, \dots, 39, \\ S, & \text{für } t = 40. \end{cases}$$

Der Beitrag dieser Versicherung beträgt  $\pi_0 = 2.271,07 \text{ €}$ . Bei Änderung der flachen Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  zu der nicht-flachen Zinsstrukturkurve  $I^F$  erhält man mit

$\Delta I^F = I^F - \bar{I}$  die Approximationen für die Zinssensitivität

$$\begin{aligned} \frac{\Delta aBW(\pi, I^F)}{aBW(\pi, I^F)} &\approx -D_F(\pi, I^F, \Delta I^F) + \frac{1}{2} \cdot C_F(\pi, I^F, \Delta I^F) \\ &= -0,0713 + \frac{1}{2} \cdot 0,0158 = -0,0635 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta aBW(L, I^F)}{aBW(L, I^F)} &\approx -D_F(L, I^F, \Delta I^F) + \frac{1}{2} \cdot C_F(L, I^F, \Delta I^F) \\ &= 0,2204 + \frac{1}{2} \cdot 0,0652 = 0,2530. \end{aligned}$$

Die Zinssensitivität des Beitragsbarwerts der Risikolebensversicherung ist identisch zur Zinssensitivität des Beitragsbarwerts der Kapitallebensversicherung. Beide Barwerte sinken aufgrund der unterstellten Zinsänderung um 6,35%, obwohl sich der konstanten Jahresbeitrag der beiden Versicherungen unterscheidet. Allerdings ist die Beitragszahlweise bei beiden Versicherungen identisch. Hieran wird die Invarianzeigenschaft der Forward Rate Duration bzw. Forward Rate Konvexität (Satz 4.18 bzw. 4.19) deutlich.

Die Bewertung zeigt, dass die unterstellte Zinsänderung ein unterschiedlich hohes Zinsänderungsrisiko birgt. So steigt der Leistungsbarwert der Kapitallebensversicherung durch die Zinsänderung um 25%. Für die Risikolebensversicherung ist hingegen eine Steigerung von (lediglich) 1,9% erkennbar.

Hieran erkennt man auch den Einfluss der Erlebensfalleistung  $L_{40}^{(0)}$ , in der sich die Kapitallebensversicherung von der Risikolebensversicherung unterscheidet. Durch diese Leistung steigt die Zinssensitivität um ca. 23 Prozentpunkte. Dieser große Einfluss ist in der periodenadäquaten Diskontierung begründet. Durch die jährliche Verzinsung ist die Bewertung der letzten Zahlung von allen Zinsänderungen abhängig und in besonderem Ausmaß den unterstellten Zinsschwankungen ausgesetzt.

Während der Beitragsbarwert aufgrund der unterstellten Zinsänderung sinkt, steigt der Leistungsbarwert durch die unterstellte Zinssenkung in den späteren Jahren. Insbesondere durch diese Zinssenkungen steigt damit der finanzielle Aufwand für die Erbringung der erwarteten Leistungen. Für Versicherungsunternehmen äußert sich das Zinsänderungsrisiko daher in diesem finanziellem Aufwand.

◇

Da in der Lebensversicherung die Beiträge und Leistungen eines Versicherungsvertrags vertraglich fest vereinbart werden, betreffen Änderungen in der Zinsstrukturkurve vor allem das angesparte Guthaben des Versicherungsnehmers, d.h. das Deckungskapital.

Neben der Bedeutung des Deckungskapitals als „Guthaben“, dient es oft als Grundlage für die Berechnungen weiterer versicherungstechnischer Größen wie etwa Überschüssen oder Rückkaufswerten. Daher ist es von besonderem Interesse, die Entwicklung des

Deckungskapitals auch bei Änderungen in der Zinsstrukturkurve abzuschätzen, um zukünftige Zahlungsverpflichtungen zu kennen. Für diese Abschätzung des Deckungskapitals für einen festen Zeitpunkt  $t$  und damit einhergehend für die Quantifizierung des Zinsänderungsrisikos des Deckungskapitals lässt sich das Konzept der Forward Rate Duration anwenden.

Um das Zinsänderungsrisiko dieser Größen ( ${}_0V_x, \dots, {}_{n-1}V_x$ ) zu quantifizieren, kann das Deckungskapital  ${}_tV_x$  zum Zeitpunkt  $t$  als erwarteter Barwert der Zahlungsreihe  ${}_t\tilde{L} = (0, \dots, 0, {}_t\tilde{L}_t, {}_t\tilde{L}_{t+1}, \dots, {}_t\tilde{L}_n)$  beschrieben werden (s. (5.6)). Hierbei sind die Zahlungen  ${}_t\tilde{L}_{t+j}$  für  $j = 0, \dots, n - t$  gegeben durch

$${}_t\tilde{L}_{t+j} = \frac{L_{t+j} - \pi_{t+j}}{{}_t p_x \cdot v^{(t)}} = \frac{1}{{}_t p_x \cdot v^{(t)}} \cdot \left( (L_{t+j}^{(0)} - \pi_{t+j}) + q_{x+t+j} \cdot L_{t+j}^{(1)} \cdot v_{t+j+1} \right). \quad (5.12)$$

Somit liegt eine Darstellung von  ${}_tV_x$  als erwarteter Barwert vor:

$$\begin{aligned} {}_tV_x &= aBW({}_t\tilde{L}, I^F, Q_x) \\ &= \sum_{j=0}^{n-t} j p_{x+t} \cdot \left( (L_{t+j}^{(0)} - \pi_{t+j}) + q_{x+t+j} \cdot L_{t+j}^{(1)} \cdot v_{t+j+1} \right) \cdot v_t^{(t+j)} \\ &= \sum_{j=t}^n j-t p_{x+t} \cdot \left( (L_j^{(0)} - \pi_j) + q_{x+j} \cdot L_j^{(1)} \cdot v_{j+1} \right) \cdot v_t^{(j)} \\ &= BW_F(Z({}_t\tilde{L}), I^F). \end{aligned}$$

Für die Betrachtung des Zinsänderungsrisikos seien ausgehend von einer Forward Rate Zinsstrukturkurve  $I^F$  die Zinsänderungssätze durch  $\Delta I^F = (\Delta i_1, \dots, \Delta i_t, \Delta i_{t+1}, \dots, \Delta i_n)$  gegeben. Die Forward Rate Duration  $D_F(Z({}_t\tilde{L}), I^F, \Delta I^F)$  ergibt sich dann gemäß (5.8) aus

$$\begin{aligned} D_F(Z({}_t\tilde{L}), I^F, \Delta I^F) &= \frac{1}{{}_tV_x} \cdot \left( \sum_{j=t+1}^n \left( \sum_{k=1}^{j-t} v_{t+k} \Delta i_{t+k} \right) \cdot j-t p_{x+t} \cdot (L_j^{(0)} - \pi_j) \cdot v_t^{(j)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=t}^{n-1} v_{j+1} \cdot \Delta i_{j+1} \cdot j-t p_{x+t} \cdot L_j^{(1)} \cdot q_{x+j} \cdot v_t^{(j+1)} \right) \quad (5.13) \end{aligned}$$

und die Forward Rate Konvexität  $C_F(Z({}_t\tilde{L}), I^F, \Delta I^F)$  gemäß (5.11) aus

$$\begin{aligned} C_F(Z({}_t\tilde{L}), I^F, \Delta I^F) &= \frac{1}{{}_tV_x} \cdot \left( \sum_{j=t+1}^n j-t p_{x+t} \cdot (L_j^{(0)} - \pi_j) \cdot v_t^{(j)} \cdot 2 \cdot \sum_{l=1}^{j-t} \sum_{k=l}^{j-t} v_{t+l} \Delta i_{t+l} \cdot v_{t+k} \Delta i_{t+k} \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot \sum_{j=t}^{n-1} j-t q_{x+t} \cdot L_j^{(1)} \cdot v_t^{(j+1)} \cdot \sum_{k=1}^{j+1} v_{t+k} \cdot \Delta i_{t+k} \cdot v_{j+1} \cdot \Delta i_{j+1} \right). \quad (5.14) \end{aligned}$$

**Beispiel 5.8 (Approximation des Deckungskapitals  ${}_{10}V_x$ )**

Gegeben sei eine Erlebensfallversicherung mit Versicherungssumme 100.000 € für eine  $x = 29$ -jährige Frau mit 25-jähriger Laufzeit. Bei Anwendung der Forward Rate Kurve  $I^F$  aus Beispiel 4.8 und der Sterbetafel DAV2004RF ist für diese Versicherung der Netto-Jahresbeitrag

$$\pi_j = 2.532,60 \text{ €}, \text{ für } j = 0, \dots, 24.$$

Mit

$$L_j - \pi_j = \begin{cases} -2.532,60 \text{ €}, & j = 0, 1, \dots, 24 \\ 100.000 \text{ €}, & j = 25 \end{cases}$$

lässt sich das Deckungskapital  ${}_tV_x$  für alle  $t = 0, \dots, 25$  berechnen. Beispielsweise ergibt sich für  $t = 10$  das Deckungskapital in Höhe von  ${}_{10}V_x = 31.317,88 \text{ €}$ . Soll nun für die restliche Vertragslaufzeit anstelle der angenommenen Zinsstrukturkurve ein konstanter Zinssatz von  $i = 0,02$  verwendet werden, so kann die Auswirkung dieser Zinsänderung mittels der Forward Rate Duration bzw. der Forward Rate Konvexität quantifiziert werden. Für  $\Delta I^F = (\Delta i_1, \dots, \Delta i_{25})$  mit  $\Delta i_j = 0$  für  $j \leq 10$  und  $\Delta i_j = 0,02 - i_j$  für  $j \geq 11$  gilt:

$$\begin{aligned} D_F(Z^{(10\tilde{L})}, I^F, \Delta I^F) &= \frac{1}{{}_{10}V_x} \cdot \left( \sum_{j=1}^{15} \left( \sum_{k=1}^j v_{10+k} \Delta i_{10+k} \right) \cdot {}_j p_{x+10} \cdot (L_{10+j} - \pi_{10+j}) \cdot v_{10}^{(10+j)} \right) \\ &= -0,2496 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} C_F(Z^{(10\tilde{L})}, I^F, \Delta I^F) &= \frac{1}{{}_{10}V_x} \cdot \sum_{j=1}^{15} {}_j p_{x+10} \cdot (L_{10+j} - \pi_{10+j}) \cdot v_{10}^{(10+j)} \cdot 2 \cdot \sum_{l=1}^j \sum_{k=l}^j v_{10+l} \Delta i_{10+l} \cdot v_{10+k} \Delta i_{10+k} \\ &= 0,0486. \end{aligned}$$

Für das Deckungskapital bei Bewertung mit der flachen Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  erhält man damit die Approximationen  ${}_{10}V_x^D(\bar{I})$  aus (4.5) bzw.  ${}_{10}V_x^C(\bar{I})$  aus (4.10). Es gilt:

$$\begin{aligned} {}_{10}V_x^D(\bar{I}) &\approx {}_{10}V_x \cdot \left( 1 - D_F(Z^{(10\tilde{L})}, I^F, \Delta I^F) \right) \\ &= 39.134,49 \text{ €}, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} {}_{10}V_x^C(\bar{I}) &\approx {}_{10}V_x \cdot \left( 1 - D_F(Z^{(10\tilde{L})}, I^F, \Delta I^F) + \frac{1}{2} C_F(Z^{(10\tilde{L})}, I^F, \Delta I^F) \right) \\ &= 39.895,50 \text{ €}. \end{aligned}$$

Der exakte Wert für das Deckungskapital beträgt  ${}_{10}V_x(\bar{I}) = 39.948,35 \text{ €}$ . Die relative

Abweichung der Approximationen  ${}_{10}V_x^D(\bar{I})$  bzw.  ${}_{10}V_x^C(\bar{I})$  zum exakten Wert  ${}_{10}V_x(\bar{I})$  liegt somit bei 2,04% bzw. 0,13%.

◇

Auch in der Literatur finden sich Ansätze für die Approximation der Auswirkungen von Zinsänderungen auf versicherungstechnische Größen, wie dem Deckungskapital, mittels Durationsmaßen. Die dort vorgestellten Konzepte unterstellen jedoch flache Zinsstrukturkurven bzw. Parallelverschiebungen flacher Zinsstrukturkurven [Mül12; Ort16]. In der Praxis tauchen allerdings durchaus Veränderungen nicht-flacher Zinsstrukturkurven auf. Im Rahmen von Solvency II werden beispielsweise Simulationen nicht-flacher Zinsstrukturkurven durchgeführt, um notwendige Kapitalanforderungen zu berechnen [Eur02; Eur09]. Ebenso wird eine nicht-flache Zinsstrukturkurve bei der Berechnung der sogenannten *Zinszusatzreserve* benötigt [Kah18; Ort16].

Von Versicherungsunternehmen wird verlangt, die dauernde Erfüllbarkeit der im Rahmen der Versicherungsverträge eingegangenen Verpflichtungen sicherzustellen. Da sich bei ändernden Zinserträgen auch das Deckungskapital ändert, ist regelmäßig zu überprüfen, ob das Deckungskapital noch ausreicht, um allen Verpflichtungen nachkommen zu können [Kah18]. Für den Fall, dass aufgrund einer ungünstigen Entwicklung der für die Rechnungsgrundlagen verwendeten Daten, das gebildete Deckungskapital nicht ausreichend ist, wird eine sogenannte *Nachreservierung* durchgeführt. Da die vereinbarte Prämie nachträglich nicht angepasst werden darf, muss das Versicherungsunternehmen im Rahmen der Nachreservierung zusätzlich Kapital bereitstellen, um das Deckungskapital aufzufüllen [Ort16].

Der Nachreservierungsbedarf, der sich aus einer ungünstigen Entwicklung in den Zinssätzen ergibt, wird *Zinszusatzreserve* (kurz: ZZR) genannt [Kah18; Ort16]. Die Zinszusatzreserve muss jährlich für jeden Versicherungsvertrag gemäß der Deckungsrückstellungsverordnung (DeckRV) gebildet werden. Die Methodik zur Bildung der ZZR ist durch §5, Absatz 4 DeckRV festgelegt. In der aktuellen Form ist diese zusätzliche Reserve seit 2011 gesetzlich verankert.

Zu jedem Bilanzstichtag wird zunächst ein Referenz-Deckungskapital bestimmt, das sich aus der gegebenen Versicherung, aber unter Verwendung einer bestimmten Zinsstrukturkurve ergibt. Dabei wird für den Zeitraum der nächsten 15 Jahre jeweils das Minimum aus dem bei der Kalkulation verwendeten Rechnungszinssatz  $i$  und einem Referenzzinssatz  $i_{ref}$  und für den Zeitraum nach Ablauf von 15 Jahren der jeweilige Rechnungszinssatz verwendet<sup>3</sup>. Der Referenzzinssatz  $i_{ref}$  errechnet sich dabei jährlich als arithmetisches Mittel von Euro-Zinsswapsätzen, die über einen Referenzzeitraum von zehn Kalenderjahren herangezogen werden.

Die Zinszusatzreserve für einen Zeitpunkt  $t$  ergibt sich nun aus der Differenz zwischen

---

<sup>3</sup>Bei einer Restlaufzeit von weniger als 15 Jahren, wird für jedes Jahr das Minimum aus dem Rechnungszinssatz  $i$  und Referenzzinssatz  $i_{ref}$  verwendet.

dem zu Vertragsbeginn kalkulierten Deckungskapital zum Zeitpunkt  $t$ , sowie dem beschriebenen Referenz-Deckungskapital [Kah18; Ort16].

Wird also für die Kalkulation des Deckungskapitals  ${}_tV_x$  die flache Zinsstrukturkurve  $\bar{I} = (i, \dots, i)$  mit Rechnungszins  $i$  verwendet, so ergibt sich entsprechend für die Berechnung des Referenzdeckungskapitals die Forward Rate Zinsstrukturkurve

$$\bar{I} + \Delta I^F = (\underbrace{i, \dots, i}_{t\text{-mal}}, \underbrace{\min\{i_{ref}, i\}, \dots, \min\{i_{ref}, i\}}_{15\text{-mal}}, i, \dots, i),$$

bzw. die Zinsänderungssätze

$$\Delta I^F = (0, \dots, 0, \min\{i_{ref}, i\} - i, \dots, \min\{i_{ref}, i\} - i, 0, \dots, 0).$$

### Beispiel 5.9 (Zinszusatzreserve)

Betrachtet wird nun eine sofortbeginnende, lebenslange Rentenversicherung, die vor 20 Jahren mit konstantem Höchstrechnungszins  $i = 0,0325$  für eine  $x = 65$ -jährige Frau abgeschlossen wurde. Die Rente betrage  $R = 12.000 \text{ €}$  jährlich über die gesamte Laufzeit von  $n = \omega - x = 56$  Jahren. Das kalkulierte Deckungskapital  ${}_{20}V_x$  als erwarteter Barwert der Zahlungsreihe  ${}_{20}\tilde{L} = (0, \dots, 0, {}_t\tilde{L}_t, {}_t\tilde{L}_{t+1}, \dots, {}_t\tilde{L}_n)$  mit  ${}_t\tilde{L}_j$  gemäß (5.12) für  $j \geq t$  und

$$\pi_j = \begin{cases} \pi_0 = 196.152,05 \text{ €}, & \text{für } j = 0, \\ 0, & \text{für } j = 1, \dots, n \end{cases} \quad \text{und} \quad L_j = \begin{cases} R, & \text{für } j = 0, 1, \dots, n-1, \\ 0, & \text{für } j = n, \end{cases}$$

beträgt

$${}_{20}V_x = aBW({}_{20}\tilde{L}, I^F, Q_x) = 87.405,31 \text{ €}.$$

Wird nun anstelle der flachen Zinsstrukturkurve  $\bar{I} = (i, i, \dots, i) \in \mathbb{R}_+^n$  mit  $i = 0,0325$ , die (technische) Referenz-Zinsstrukturkurve

$${}_{20}I^F = (\underbrace{i, \dots, i}_{20\text{-mal}}, \underbrace{i_{ref}, i_{ref}, \dots, i_{ref}}_{15\text{-mal}}, i, \dots, i) \in \mathbb{R}^n$$

mit  $i_{ref} = 0,0254$  verwendet, so ergeben sich die Zinsänderungssätze

$$\begin{aligned} {}_{20}I^F - I^F &= \Delta I^F = (\underbrace{0, \dots, 0}_{20\text{-mal}}, i_{ref} - i, i_{ref} - i, \dots, i_{ref} - i, 0, \dots, 0) \\ &= (0, \dots, 0, -0,0071, \dots, -0,0071, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Für das Referenz-Deckungskapital erhält man die Approximationen

$${}_{20}V_x^D(I^F) \approx 90.233,42 \text{ €}, \quad \text{bzw.} \quad {}_{20}V_x^C(I^F) \approx 90.321,93 \text{ €}.$$

Für das Versicherungsunternehmen besteht in diesem Fall ein approximierter Nachre-

servierungsbedarf in Höhe der Zinszusatzreserve von

$$ZZR_{20}^D = {}_{20}V_x^D(I^F) - {}_{20}V_x = 2.828,11 \text{ €},$$

bzw.

$$ZZR_{20}^C = {}_{20}V_x^C(I^F) - {}_{20}V_x = 2.916,62 \text{ €}.$$

Der Wert der Zinszusatzreserve liegt für dieses Beispiel bei

$$ZZR_{20} = {}_{20}V_x(I^F) - {}_{20}V_x = 2.919,06 \text{ €}.$$

Der Betrag, der aufgrund der zu hoch kalkulierten Zinssätze für diesen Vertrag nachserviert werden muss, wird durch die Approximation mittels der Forward Rate Duration bzw. der Forward Rate Konvexität somit (leicht) unterschätzt.  $\diamond$

### 5.3. Biometrisches Änderungsrisiko

Neben den finanzmathematischen Parametern werden bei der Kalkulation von Lebensversicherungen auch biometrische Daten berücksichtigt. Wie bereits beschrieben, wird in der praktischen Lebensversicherungsmathematik für die Sterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeiten ein deterministisches Modell verwendet. Die Werte dieser Größen gehen aus statistischen Schätzungen hervor, die gemäß des Vorsichtsprinzips mit ausreichenden Sicherheitszuschlägen modifiziert werden [Ort16].

Auch die Werte für die angenommenen Sterbewahrscheinlichkeiten  $Q_x$  verändern sich im Laufe der Zeit. Insbesondere für Verträge mit langen Laufzeiten ist es nicht möglich alle Größen zum Zeitpunkt der Kalkulation vorherzubestimmen. Demographischer Wandel, Epidemien oder Pandemien (z.B. COVID-19-Pandemie), Naturkatastrophen, Klimawandel, Kriege, Migration usw. sind nur einige beispielhafte Faktoren, die relevante Daten, wie bspw. Todesfallzahlen, beeinflussen und ständigen Veränderungen unterziehen [Hul14; Kah18; Ort16]. Im Allgemeinen verstärken - umgekehrt - medizinischer Fortschritt, neue Behandlungsmethoden, Aufklärung und steigendes Gesundheitsbewusstsein den Trend zu Sterblichkeitsverbesserungen, der insbesondere die Lebenserwartung von Neugeborenen, sowie die Restlebenszeit bei älteren Menschen positiv beeinflusst [Hul14; Ort16].

Es ist also davon auszugehen, dass die tatsächlichen Sterbewahrscheinlichkeiten nicht mit den bei der Erstkalkulation angenommenen Daten übereinstimmen [Lee56]. Versicherungsunternehmen müssen daher immer wieder die ursprünglichen Rechnungsgrundlagen überprüfen und die zu verwendenden Sterbetafeln anpassen.

Sich ändernde Sterbewahrscheinlichkeiten beeinflussen die Berechnung der erwarteten Leistungen und Rückstellungen. Erhöht sich die Lebenserwartung der versicherten Personen, d.h. die Sterbewahrscheinlichkeiten sinken, muss für Rentenversicherungen mehr

Kapital bereitgestellt werden, da für einen längeren Zeitraum Rentenleistungen erwartet werden können. Dadurch, dass die Rente (statistisch gesehen) länger gezahlt werden muss, liegen aus Sicht des Versicherungsunternehmens „höhere Ausgaben“ vor. Gleichzeitig werden während der Rentenbezugszeit typischerweise keine Betragszahlungen, d.h. keine „Einnahmen“ erwartet, sodass die Profitabilität von Rentenversicherungen negativ beeinflusst wird [Hul14].

Für Todesfallversicherungen wird hingegen der Leistungszeitpunkt aufgeschoben bzw. weniger wahrscheinlich. Wird die Leistung erst später oder sogar gar nicht fällig, können über einen längeren Zeitraum Einnahmen durch Beiträge oder Zinserträge generiert werden und die Profitabilität wird entsprechend positiv beeinflusst [Hul14].

Steigen im umgekehrten Fall die Sterbewahrscheinlichkeiten, muss für Todesfalleistungen mehr Kapital reserviert werden, da die Leistungen erwartungsgemäß eher gezahlt werden müssen bzw. wahrscheinlicher werden. Die Profitabilität von Rentenversicherungen steigt hingegen, da Rentenzahlungen (statistisch gesehen) nicht so lange gezahlt werden müssen, wie kalkuliert wurde [Hul14].

Das Risiko, dass durch die Abweichung  $\Delta Q_x$  von den ursprünglich verwendeten Sterbewahrscheinlichkeiten  $Q_x$  entsteht, ist also gegensätzlich für Versicherungen mit Todesfalleistungen im Vergleich zu Versicherungen mit Erlebensfalleistungen.

Unterscheiden sich die tatsächlichen Sterbewahrscheinlichkeiten von den bei der Kalkulation angenommenen, hat dies daher zwangsläufig Auswirkungen auf die Beurteilung zukünftiger Verpflichtungen. Versicherungsunternehmen sind in diesem Fall gezwungen zukünftige Leistungsversprechen zu überprüfen und neu zu bewerten. Das betrifft vor allem auch die Höhe des Deckungskapitals. Werden bei der Erstkalkulation die Sterbewahrscheinlichkeiten zu vorsichtig gewählt, entstehen versicherungstechnische Überschüsse, da mehr Geld als notwendig für zukünftige Leistungen reserviert wurde. Diese Überschüsse müssen im Rahmen der Überschussrechnung den Versicherungsnehmer gutgeschrieben werden [Ort16; Kah18]. Auf der anderen Seite, wenn also die Rechnungsgrundlagen nicht vorsichtig genug gewählt wurden, kann es notwendig werden, zusätzliche Rückstellungen zu bilden, d.h. eine Nachreservierung durchzuführen (vgl. Beispiel 5.9), um alle zukünftigen Leistungen abzudecken [Ort16].

Solche Auswirkungen, die sich aus Änderungen der biometrischen Daten ergeben, werden hier als biometrisches Änderungsrisiko definiert [Bec+16; Kah18; Wag17].

**Definition 5.10 (Biometrisches Änderungsrisiko)**

Das *biometrische Änderungsrisiko* (oder auch kurz biometrisches Risiko) liegt in der finanziellen Unsicherheit, die sich aus Änderungen der biometrischen Daten ergibt.

Das *barwertige biometrische Risiko* versteht man als das Risiko, welches sich aus den Auswirkungen einer Änderung in den biometrischen Daten auf den erwarteten Barwert einer Zahlungsreihe ergibt.

Durch die Konkretisierung des biometrischen Risikos auf die Auswirkungen auf den Barwert einer Zahlungsreihe, lässt sich direkt ein Maß für das biometrische Risiko angeben.

Dazu sei die hier beschriebene Änderung der biometrischen Daten für eine Sterbetafel durch eine (nicht-parallele) additive Änderung gegeben. Die zugrundeliegende Sterbetafel  $Q_x$  ändere sich zu  $Q_x + \Delta Q_x$ , mit

$$\Delta Q_x = (\Delta q_x, \Delta q_{x+1}, \dots, \Delta q_{x+n-1}).$$

Damit lässt sich das (barwertige) biometrische Änderungsrisiko durch die Änderung  $\Delta aBW(Q_x)$  des erwarteten Barwerts aufgrund einer Änderung der Sterbetafel quantifizieren. Es ist

$$\Delta aBW(Q_x) := aBW(Z, I^F, Q_x + \Delta Q_x) - aBW(Z, I^F, Q_x).$$

Ebenso kann die sogenannte *Sterblichkeitssensitivität* als relatives Maß für das biometrische Änderungsrisiko verwendet werden. Die Sterblichkeitssensitivität ist definiert als relative Änderung des erwarteten Barwerts  $aBW(Z, I^F, Q_x)$  einer Zahlungsreihe aufgrund einer Änderung  $\Delta Q_x$  der Sterbetafel  $Q_x$ , d.h.

$$\frac{\Delta aBW(Q_x)}{aBW(Z, I^F, Q_x)} = \frac{aBW(Z, I^F, Q_x + \Delta Q_x) - aBW(Z, I^F, Q_x)}{aBW(Z, I^F, Q_x)}.$$

In der Literatur wird häufig zwischen dem Langlebigkeitsrisiko und dem Sterblichkeitsrisiko unterschieden [Hul14; Kah18; Wag17; Eur09]. Das Langlebigkeitsrisiko beschreibt dabei das Risiko resultierend aus einer Erhöhung der Lebenserwartung, während der Begriff des Sterblichkeitsrisikos den Fall beschreibt, dass Menschen kürzer leben als erwartet [Hul14; Eur09]. Der in Definition 5.10 festgelegte Begriff des biometrischen Risikos schließt beide Fälle ein.

Unter dem Begriff des biometrischen Risikos sind neben den Auswirkungen durch Änderungen in der Sterbetafel auch die Auswirkungen durch Änderungen weiterer biometrischer Daten zu verstehen (vgl. S. 81). Wird anstelle der Ausscheideursache „Tod“ bspw. auch die Ausscheideursache „Invalidität“ zugrunde gelegt, so ist auch das Risiko aus Änderungen in einer Invalidentafel inbegriffen.

Das folgende Beispiel beschäftigt sich mit dem biometrischen Risiko für diverse Versicherungsprodukte aus Sicht von Versicherungsunternehmen.

### Beispiel 5.11

Aus Sicht von Versicherungsunternehmen liegt ein finanzielles Risiko darin, dass aufgrund von Änderungen in den biometrischen Daten mehr (finanzielle) Leistungen erbracht werden müssen, als bei der Erstkalkulation angenommen.

- *Erlebensfallversicherung*

Bei der Erlebensfallversicherung wird die vereinbarte Versicherungssumme am Ende des Vertrags (Zeitpunkt  $n$ ) ausgezahlt, sofern die versicherte Person diesen Zeitpunkt erlebt.

Das biometrische Risiko tritt hier dann auf, wenn sich die Sterbewahrscheinlichkeiten der versicherten Person verringern.

- *Todesfallversicherung*

Bei einer Todesfallversicherung ist die vereinbarte Versicherungssumme zum Zeitpunkt  $t+1$  fällig, falls die versicherte Person innerhalb der  $t+1$ -ten Periode gestorben ist.

Steigen die Sterbewahrscheinlichkeiten der versicherten Person, so entsteht bei dieser Versicherung ein biometrisches Risiko durch die höhere Eintrittswahrscheinlichkeit des Todesfalls.

- *Leibrentenversicherung*

Die Leistungen einer Leibrentenversicherung bestehen aus mehreren wiederkehrenden Zahlungen, die davon abhängig sind, ob die versicherte Person die vorab festgelegten Zeitpunkte erlebt.

Da die Leibrentenversicherung aus mehreren Erlebensfalleistungen bestehen, tritt das biometrische Risiko hier auch dann auf, wenn die Sterbewahrscheinlichkeiten geringer ausfallen, als bei der Erstkalkulation angenommen.

- *Leibrentenversicherung mit Hinterbliebenenversorgung (Hinterbliebenenversicherung)*

Zusätzlich zu den Erlebensfalleistungen einer Leibrentenversicherung wird bei der Hinterbliebenenversicherung auch der Todesfall der versicherten Person abgesichert. Stirbt die versicherte Person während der  $(t+1)$ -ten Periode, so erhält eine zweite Person ab dem Zeitpunkt  $t+1$  zu jedem Zeitpunkt  $j \geq t+1$  eine Erlebensfalleistung. Für die Kalkulation dieser Versicherung ist also eine zweite Sterbetafel notwendig, die die Sterbewahrscheinlichkeiten der zweiten Person enthält.

Zusätzlich zu dem bereits erwähnten Risiko geringerer Sterbewahrscheinlichkeiten einer Leibrentenversicherung, treten hier zwei weitere Risiken auf. Zum einen bergen auch steigende Sterbewahrscheinlichkeiten (der versicherten Person) ein Risiko, da hierdurch der Leistungsfall der Hinterbliebenenversorgung wahrscheinlicher wird. Die Leistungen dieser Hinterbliebenenversorgung sind von den Sterbewahrscheinlichkeiten der zweiten Person abhängig, die die Zahlungen empfängt. Daher entsteht auch hier ein Risiko durch sinkende Sterbewahrscheinlichkeiten (der zweiten Person).

- *Leibrentenversicherung mit Berufsunfähigkeitsabsicherung*

Die versicherte Person erhält die vereinbarten Leibrentenzahlungen solange sie die Zahlungszeitpunkte erlebt und gleichzeitig nicht berufsunfähig, d.h. invalide geworden ist. Im Falle des Eintritts der Invalidität innerhalb der  $(t+1)$ -ten Periode, wird zu

jedem Zeitpunkt  $j \geq t + 1$  die vereinbarte Berufsunfähigkeitsrente geleistet, solange die versicherte Person als Invaliden überlebt.

Hier werden die Ausscheideursachen „Tod“ und „Invalidität“ unterschieden. Auch hier ist zunächst das biometrische Risiko aufgrund sinkender Sterbewahrscheinlichkeiten relevant. Zusätzlich entsteht ein Risiko, falls durch höhere Invalidisierungswahrscheinlichkeiten eine höhere Eintrittswahrscheinlichkeit des Falls der Berufsunfähigkeit vorliegt, als bei der Erstkalkulation angenommen wurde.  $\diamond$

### 5.3.1. Arten von Sterblichkeitsänderungen

Bei der Prämien- bzw. Leistungskalkulation von Lebensversicherungsverträgen werden die Rechnungsgrundlagen gemäß des Vorsichtsprinzips gewählt. Dabei wird in der Praxis oft nur nach den Risikomerkmale Alter und Geschlecht unterschieden. Das versicherte Risiko ist in der Realität allerdings von vielen weiteren Einflussfaktoren abhängig, wie bspw. Rauchverhalten, Vorerkrankungen, dem Gesundheitszustand bei Vertragsabschluss, Gewicht, ausgeübten Sportarten oder dem ausgewählten Beruf. So existieren beispielsweise auch Sterbetafeln, die nach „Rauchern“ (DAV2008T R) und „Nichtrauchern“ (DAV2008T NR) differenzieren [DAV09b]. Außerdem werden bei Todesfallversicherungen Gesundheitsprüfungen gefordert, die die Erkennung und Quantifizierung erhöhter Risiken ermöglichen sollen. Eine systematische Berücksichtigung sämtlicher Einflussfaktoren findet bei der Erstkalkulation aber dennoch nicht statt, da häufig nicht genug Daten vorliegen. Um dennoch medizinisch erhöhte Risiken einzubeziehen, werden in der Praxis oft einfache, einparametrische Transformationen angenommen [MH08].

Derartige Modifikationen können als Beispiele für die veränderten, „realitätsnäheren“ Sterbewahrscheinlichkeiten in konkreten praktischen Situationen aufgefasst werden, aus denen das biometrische Risiko resultiert. Sie können somit hier für die Sterbewahrscheinlichkeiten der Sterbetafel  $Q_x + \Delta Q_x$  angenommen werden. Die gegenüber der bei der Erstkalkulation verwendete Sterbetafel  $Q_x$  veränderte, „realitätsnähere“ Sterbewahrscheinlichkeit für eine  $x + t$ -jährige Person wird im Folgenden mit  $q_{x+t}^*$  bezeichnet. Auch für die Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_{x+t}^*$  soll  $0 \leq q_{x+t}^* \leq 1$  für  $t = 0, \dots, \omega - x$  gelten.

Für die Betrachtung von Sterblichkeitserhöhungen lassen sich im Wesentlichen die multiplikative und die additive Sterblichkeitserhöhung, sowie die Altersverschiebung aufführen. Die multiplikative Sterblichkeitserhöhung wird in der Praxis am häufigsten angewendet [Ort16]. Diese Transformation bietet sich für die Betrachtung altersunabhängiger Krankheitsbilder an [MH08]. Hier wird das Verhältnis zwischen der veränderten Sterblichkeiten und der Normalsterblichkeit als konstant angenommen. Für einen zu schätzenden Faktor

$\sigma > 0$  ergibt sich die veränderte Sterbewahrscheinlichkeit  $q_{x+t}^*$  durch

$$q_{x+t}^* = (1 + \sigma) \cdot q_{x+t}, \quad \sigma > 0.$$

Für die Messung des biometrischen Risikos und die damit betrachtete Änderung der Sterbetafel  $Q_x$  zu  $Q_x + \Delta Q_x$  kann  $\Delta q_{x+t}$  dann gewählt werden als

$$\Delta q_{x+t} = \sigma \cdot q_{x+t}.$$

Bei einer additiven Sterblichkeitserhöhung verändert sich die Sterbewahrscheinlichkeit um eine konstante Zahl  $\beta > 0$ . Die relative Änderung sinkt hierbei mit zunehmendem Alter aufgrund der steigenden Sterbewahrscheinlichkeiten. Daher wird diese Form der Sterblichkeitserhöhung typischerweise bei der Berücksichtigung von Krankheiten mit abnehmender Gefährlichkeit und nur für einen begrenzten Zeitraum verwendet [MH08].

$$q_{x+t}^* = q_{x+t} + \beta, \quad \beta > 0$$

Es ergeben sich konstante Änderungsgrößen  $\Delta q_{x+t}$ , mit

$$\Delta q_{x+t} = \beta.$$

Schließlich wird bei der „Methode der Alterserhöhung“ für die veränderte Sterbewahrscheinlichkeit  $q_{x+t}^*$  das Alter  $x + t$  um eine natürliche Zahl  $\gamma \in \mathbb{N}$  erhöht. Durch die Betrachtung eines erhöhten Alters ist hier die Veränderung der Sterbewahrscheinlichkeit für ältere Personen ausgeprägter als für jüngere [MH08; Ort16]. Es ist

$$q_{x+t}^* = q_{x+t+\gamma}, \quad \gamma \in \mathbb{N}$$

In diesem Fall können die Änderungsgrößen durch

$$\Delta q_{x+t} = q_{x+t+\gamma} - q_{x+t}$$

gewählt werden.

In [MH08] und [Ort16] werden ausschließlich Erhöhungen der Sterbewahrscheinlichkeiten betrachtet. Hier führen die  $\alpha, \beta > 0$  und  $\gamma \in \mathbb{N}$  zu positiven Sterblichkeitsänderungen  $\Delta q_{x+t} > 0$ . Analog zu einer derartigen Erhöhung der Sterbewahrscheinlichkeiten, ist es mit  $\alpha, \beta < 0$  bzw.  $\gamma \in \mathbb{Z}_{<0}$  aber auch möglich, durch die beschriebenen Transformationen verringerte Sterbewahrscheinlichkeiten, d.h.  $q_{x+t}^* < q_{x+t}$  und damit  $\Delta q_{x+t} < 0$ , zu modellieren.

Um bei der Prämien- bzw. Leistungskalkulation von Erlebensfallversicherungen den generell beobachtbaren Trend zu Sterblichkeitsverbesserungen zu berücksichtigen, werden zudem sogenannte *Generationensterbetafeln* verwendet. Die dort beinhalteten Sterbewahr-

scheinlichkeiten berücksichtigen zusätzlich das Geburtsjahr der versicherten Person, wodurch die verringerten Sterbewahrscheinlichkeiten für Personen aus jüngeren Generationen abgebildet werden können.

Die Sterbewahrscheinlichkeit eines  $x + t$ -Jährigen mit Geburtsjahr  $\tau$  werde mit  $q_{x+t}^{(\tau)}$  bezeichnet. Diese Größen werden typischerweise modelliert als

$$q_{x+t}^* = q_{x+t}^{(\tau)} = q_{x+t}^{(\tau_0)} \cdot \exp\left(F(x) \cdot (\tau_0 - (\tau + x + t))\right).$$

Hierbei wird mit  $\tau_0$  ein „Basisjahr“, sowie mit  $F(x)$  eine altersabhängige Trendfunktion verwendet [DAV05].

Auch diese Transformation dient als Beispiel, um im Rahmen einer Nachkalkulation realistischere Wahrscheinlichkeiten  $q_{x+t}^*$  zu erhalten. Die Änderungsgröße  $\Delta q_{x+t}$  kann dann durch die Differenz der veränderten Sterblichkeiten  $q_{x+t}^*$  zu den gegebenen Sterblichkeiten  $q_{x+t}$  ausgedrückt werden:

$$\Delta q_{x+t} = q_{x+t}^* - q_{x+t}.$$

### Beispiel 5.12

Im Jahr 2005 wurde von der DAV die Sterbetafel DAV2004R für Rentenversicherungen veröffentlicht, die die bis dahin verwendete Sterbetafel DAV1994R ablöste [DAV05]. Beobachtungen und Erkenntnisse aus Versichertenbeständen, sowie aktuelle Sterblichkeitstrends gaben den Anlass zur Festlegung einer neuen Sterbetafel, da insbesondere Sterblichkeitsverbesserungen festgestellt werden konnten [DAV05]. Ebenso verhielt es sich mit der Tafel DAV1994T für Todesfallversicherungen, die im Jahr 2008 durch die Tafel DAV2008T ersetzt wurde [DAV09a].

Der Vergleich dieser Tafeln liefert ein Beispiel für die Änderung von Sterbewahrscheinlichkeiten. Die Werte der beiden Sterbetafeln für Todesfallversicherungen, DAV1994T und DAV2008T, sind für die Jahre 40 bis 80 in Abbildung 5.1 dargestellt<sup>4</sup>. Die schwarzen Kurven zeigen die Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x$  für Männer, die grünen Kurven die Werte  $q_y$  für Frauen. Durch die gestrichelten Linien sind die niedrigeren Sterbewahrscheinlichkeiten in der neueren Tafel erkennbar.

◇

Zur Quantifizierung des Sterblichkeits- bzw. Langlebigkeitsrisikos nutzen einige Autoren Ähnlichkeiten zur Modellierung von Zinsstrukturkurvenverläufen aus (s. z.B. [Bif05; CBD06; Dah04; MP01]). Insbesondere werden dabei die Beobachtungen genutzt, dass sowohl Zinssätze als auch Sterbewahrscheinlichkeiten „als positive Prozesse modelliert werden können, Laufzeitstruktur haben und grundsätzlich stochastischer Natur sind“ [CBD06].

<sup>4</sup>Die Werte der Sterbetafeln sind in Tabelle A.5, Anhang A.2 zu finden.

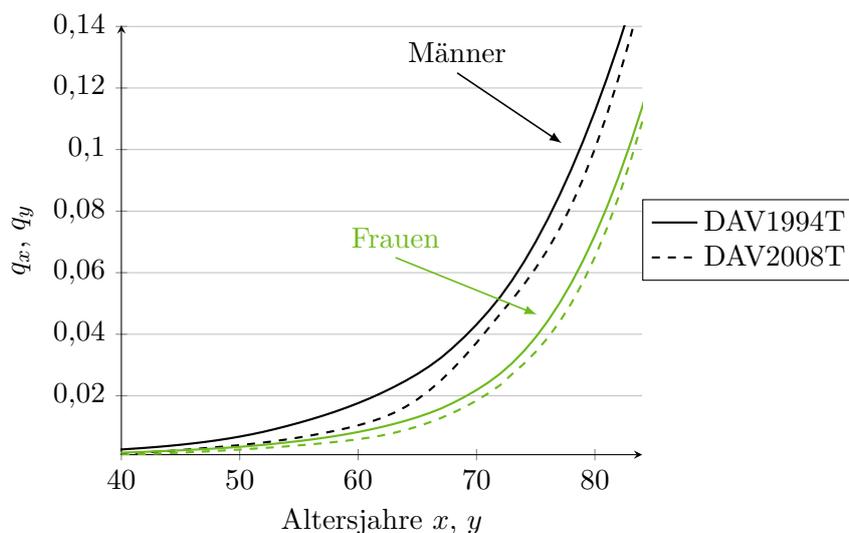


Abbildung 5.1.: Vergleich der Sterbetafeln DAV1994T und DAV2008T [Loe94; DAV09a].

Aufgrund dieser Ähnlichkeiten werden stochastische Prozesse für die Prognose zukünftiger Sterbewahrscheinlichkeiten und die Modellierung des Sterblichkeitsrisikos verwendet, die auf Arbeiten zur Modellierung positiver Zinssätze basieren (siehe z.B. auch [Bau+08; CBD06; LRV12; Sch06]).

Diese Beobachtungen zwischen Zinssätzen und Sterbewahrscheinlichkeiten sind für das praktische Risikomanagement allerdings nicht nützlich. So werden in der Lebensversicherungsmathematik diskrete Modelle verwendet. Vor allem bei der Kalkulation von Lebensversicherungen werden die Eintrittswahrscheinlichkeiten der ungewissen Beitrags- und Leistungszahlungen durch die diskreten Sterbewahrscheinlichkeiten berechnet und sind daher nicht stochastischer Natur [Kah18; LRV12; Ort16]. Auch sind Zinssätze nicht dauerhaft positiv. Ebenso wird sich im folgenden Abschnitt zeigen, dass Sterbewahrscheinlichkeiten sogar als negative Zinssätze interpretiert werden können und es somit nicht sinnvoll ist, beide Größen durch positive Prozesse darzustellen.

Die Anwendung stochastischer Methoden lässt sich daher nicht mit den Kalkulationsmethoden der Lebensversicherungsmathematik vereinen. Die Modellierung zukünftiger Sterbewahrscheinlichkeiten mittels stochastischer Prozesse ist für die Praxis somit nicht geeignet. In der Praxis haben sich bereits Durationsmaße zur Quantifizierung des Zinsänderungsrisikos aufgrund der Möglichkeit der einfachen und schnellen Berechnung, sowie der leichten Interpretierbarkeit durchgesetzt [Bie02; Ort17; SLK08; Tra07; TS11]. Mit dem Ziel, ebenso einfache und leicht interpretierbare Instrumente für die Quantifizierung des biometrischen Änderungsrisikos zu erhalten, ist es sinnvoll das Durationskonzept aus der Finanzmathematik für die Versicherungsmathematik zu übertragen. Ein solches Durationskonzept ist, im Gegensatz zur Anwendung stochastischer Prozesse, auch für Risikoanalysen in der Praxis geeignet.

Um hier Methoden aus der Finanzmathematik auf die Versicherungsmathematik zu

übertragen, ist eine Modellierung der Sterbewahrscheinlichkeiten mittels stochastischer Methoden allerdings auch nicht notwendig. Im folgenden Abschnitt wird eine Analogie zwischen Zinssätzen und Sterbewahrscheinlichkeit vorgestellt, die sich durch eine sehr einfache und verständliche Struktur auszeichnet. Diese Ähnlichkeit erlaubt es direkt und nachvollziehbar das Durationskonzept auf die Anwendung biometrischer Daten zu übertragen und ermöglicht damit die Quantifizierung des biometrischen Risikos mit in der Praxis anwendbaren Instrumenten. Da die Anforderungen von Solvency II eine angemessene Berücksichtigung biometrischer Risiken verlangen, ist die Bestimmung des biometrischen Risikos mit diesen einfach zu handhabenden Instrumenten besonders bedeutsam für das praktische Risikomanagement.

### 5.3.2. Sterblichkeit als „negativer Zins“

Aus (5.1) ist bekannt, wie sich die Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x$  über die Anzahl der Lebenden  $\ell_x$  berechnen lassen. Es ist

$$q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x}, \text{ für } x = 0, \dots, \omega. \quad (5.1)$$

Hieraus lässt sich auch der Abbau des Kollektivs der Lebenden mittels der Sterblichkeiten  $q_x$  beschreiben:

$$\ell_{x+1} = \ell_x \cdot (1 - q_x).$$

Für die zugehörige Folge  $(\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_\omega)$  der Anzahl  $\ell_x$  der lebenden Personen des Alters  $x$  lässt sich wegen  $q_x > 0$  erkennen, dass es sich um eine monoton fallende Folge handelt. Die Werte für die Anzahl der Lebenden  $\ell_x$  gemäß der Sterbefafel ADSt2014/16 [Sta18] sind in Abbildung 5.2 dargestellt<sup>5</sup>.

Weiterhin ist der Verlauf der einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten der allgemeinen Sterbetafel des statistischen Bundesamtes im Beobachtungszeitraum 2014 bis 2016 (ADSt 2014/16) in Abbildung 5.3 für die Altersjahre  $x = 1, \dots, 40$  dargestellt [Sta18].

Am Verlauf der einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten  $Q_x$  erkennt man hier, dass diese Wahrscheinlichkeiten zufälligen Schwankungen unterliegen und mit dem Alter  $x$  variieren. So weist der Polygonzug der Werte der Sterbewahrscheinlichkeiten für aufeinander folgende Lebensalter im Allgemeinen sowohl Anstiege als auch Abstiege sowie sprunghafte Veränderungen auf [Ort16]. Beispielsweise ist die Sterbewahrscheinlichkeit für Säuglinge ( $x \leq 1$ ) relativ hoch im Vergleich zu den niedrigen Wahrscheinlichkeiten für Kinder ( $2 \leq x \leq 14$ ). Für  $15 \leq x \leq 20$  lässt sich weiterhin ein starker Anstieg der Sterbewahrscheinlichkeiten

<sup>5</sup>Die Werte der Sterbetafel ADSt2014/16 für die Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x$  für Männer und  $q_y$  für Frauen, sowie die Anzahlen lebender Männer  $\ell_x$  und lebender Frauen  $\ell_y$  sind in Tabelle A.4, Anhang A.2.1 aufgeführt.

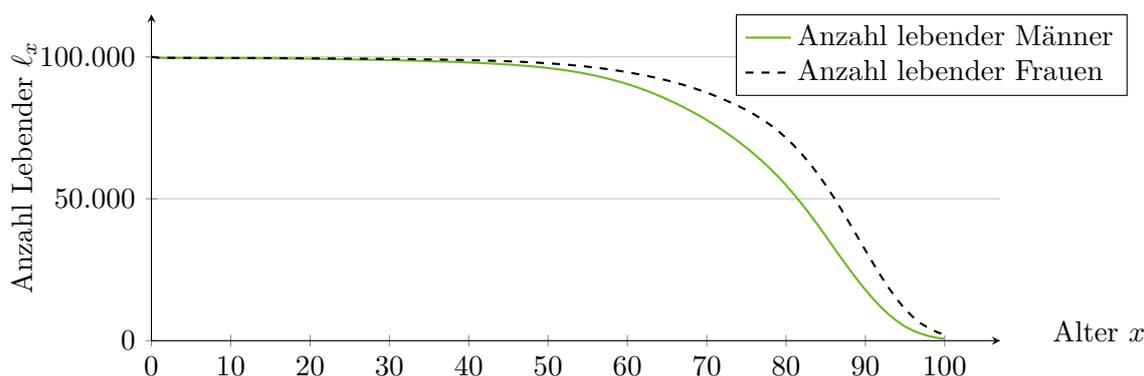


Abbildung 5.2.: Anzahl lebender Personen eines Kollektivs im Zeitverlauf nach Männern und Frauen getrennt (entnommen aus [Sta18]).

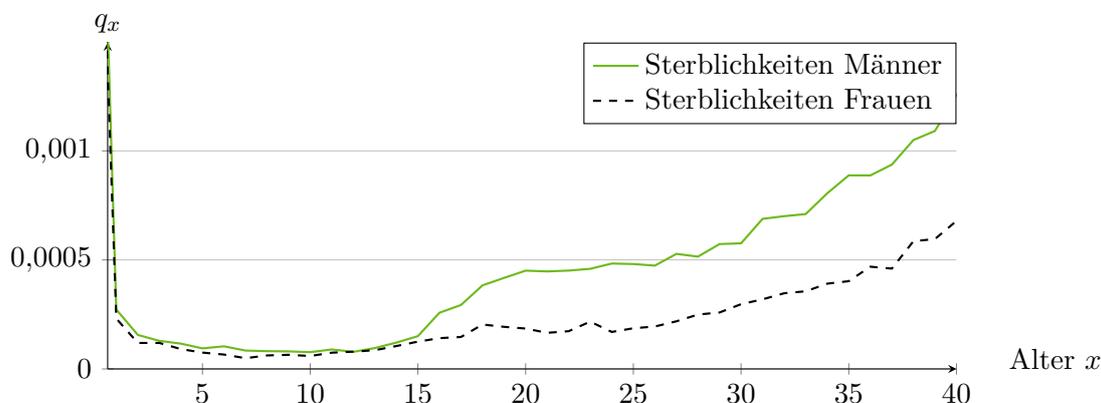


Abbildung 5.3.: Auszug der Sterblichkeiten für Männer und Frauen anhand der Allgemeinen deutschen Sterbetafel des statistischen Bundesamtes ADSt 2014/16 (entnommen aus [Sta18])

beobachten, der für  $21 \leq x \leq 25$  abflacht. Für  $x \geq 30$  steigen die Sterbewahrscheinlichkeiten monoton an. Dieses Wachstum hält auch für die Jahre  $x \geq 40$  an.

Für ein festes Alter  $x$  lässt sich die Sterbewahrscheinlichkeit  $q_{x+t}$ ,  $t = 0, \dots, \omega - x$  gemäß (5.1) in folgender Darstellung schreiben:

$$q_{x+t} = 1 - \frac{\ell_{x+t+1}}{\ell_{x+t}} = - \left( \frac{\ell_{x+t+1}}{\ell_{x+t}} - 1 \right).$$

Es wird deutlich, dass die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten als negative Änderungs-raten des Kollektivs der Lebenden aufgefasst werden können. Diese Änderungs-raten  $\left( \frac{\ell_{x+t+1}}{\ell_{x+t}} - 1 \right)$  sind, entsprechend des monoton fallenden Verlaufs der Folge  $\ell_x$  für  $x = 0, 1, \dots, \omega$ , negativ für alle  $x + t$ .

Interpretiert man das Kollektiv als fiktives Kapital, so lassen sich diese jährlichen Änderungs-raten  $q_{x+t}$  als jährliche negative „Zinssätze“ auffassen (vgl. dazu die Darstellung von  $i_t$  in (2.4) in Abschnitt 2.1). Durch die jährliche „Verzinsung des Kapitals“ mit den nega-

tiven Zinssätzen, wird der Abbau des Kapitals beschrieben, das zum Zeitpunkt  $t = \omega + 1$  den Wert 0 erreicht („Kapitalverzehr“).

Die Größen  $-q_{x+t}$  können daher als Zinssätze interpretiert werden, für die  $-1 < -q_{x+t} < 0$  für  $t = 0, \dots, \omega - x - 1$  und  $-q_\omega = -1$  für  $t = \omega - x$  gilt. Da es sich hierbei um eine jährliche, bzw. periodische Betrachtungsweise handelt, lässt sich der Zinssatz  $-q_{x+t}$  als Forward Rate der Periode  $[t, t + 1[$  interpretieren.

Dementsprechend kann aus der Anzahl der Lebenden  $\ell_x$  im Alter  $x$  mittels eines „Aufzinsungsvorgangs“ über  $t$  Perioden die Anzahl der Lebenden  $\ell_{x+t}$  im Alter  $x+t$  beschrieben werden:

$$\ell_{x+t} = \ell_x \cdot \prod_{j=0}^{t-1} 1 + (-q_{x+j}). \quad (5.15)$$

Der „Aufzinsungsfaktor“ in (5.15) entspricht dabei gerade der  $t$ -jährigen Überlebenswahrscheinlichkeit  ${}_t p_x$  eines  $x$ -Jährigen (vgl. (5.2)):

$${}_t p_x = \prod_{j=0}^{t-1} p_{x+j} = \prod_{j=0}^{t-1} 1 + (-q_{x+j-1}).$$

Versteht man also die Sterbewahrscheinlichkeiten  $-q_{x+t}$  für  $t = 0, \dots, n - 1$  als Forward Rates, so ist durch  $-Q_x = -(q_x, q_{x+1}, \dots, q_{x+n-1})$  eine Zinsstrukturkurve definiert. Der Bewertung der Zahlungsreihe  $Z$  mittels  $aBW(Z, I^F, Q_x)$  liegt somit nicht mehr nur eine Zinsstrukturkurve  $I^F$  zugrunde. Stattdessen wird die Zahlungsreihe mit einer weiteren, d.h. mit zwei Zinsstrukturkurven  $I^F$  und  $-Q_x$  bewertet.

Während durch die Zinsstrukturkurve  $I^F$  ein Abzinsungsvorgang beschrieben wird, dient die Zinsstrukturkurve  $-Q_x$  einem Aufzinsungsvorgang. Damit besteht also der erwartete Barwert  $aBW(Z, I^F, Q_x)$  in (5.3) sowohl aus einem finanztechnischen Abzinsungsvorgang mittels der Zinssätze  $i_{t+1}$ , als auch aus einem „Aufzinsungsvorgang“ mittels der biometrischen „Forward Rates  $-q_{x+t}$ “.

Neben der gemeinsamen Interpretation, die Vektoren  $I^F$  und  $-Q_x$  als Zinsstrukturkurven aufzufassen, lassen sich auch Unterschiede zwischen der Zinsstrukturkurve  $I^F$  und der Sterbetafel  $Q_x$  festhalten. Für Zinsstrukturkurven kann es im Allgemeinen durchaus sinnvoll, sowie praktisch relevant sein, flache Kurven zu betrachten, bspw. bei der Bewertung von festverzinslichen Wertpapieren. Als „normale“ Zinsstrukturkurven werden monoton steigende Kurven angesehen [Ort17]. Solche Annahmen sind für eine Sterbetafel offensichtlich nicht geeignet. Wie bereits beschrieben, variieren Sterbewahrscheinlichkeiten mit dem Alter  $x$ . Sie steigen für höhere Altersjahre, sind aber nicht monoton für jüngere Altersjahre (siehe Abbildung 5.3).

Weiterhin sind für Zinssätze  $i_{t+1}$  sowohl positive als auch negative Werte realistisch, während für Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_{x+t}$  nur positive Werte in Frage kommen. Auch ist die Annahme einer Parallelverschiebung für Sterbetafeln nicht geeignet, da in der Regel Sterblichkeitsänderungen verschiedene Altersgruppen unterschiedlich betreffen.

Diese Unterschiede sind jedoch ausschließlich inhaltlicher Natur und betreffen die Ausprägungen der Kurven, nicht aber die strukturellen Gemeinsamkeiten. Somit widersprechen sie nicht der Interpretation von Sterbewahrscheinlichkeiten als negative Zinssätze.

Diesem strukturellen Zusammenhang zwischen Zinsstrukturkurven  $I^F$  und Sterbewahrscheinlichkeiten  $Q_x$  folgend, d.h. der Interpretation von  $-Q_x$  als Zinsstrukturkurve, hat eine Änderung  $\Delta Q_x$  der Sterbetafel  $Q_x$  die gleiche Auswirkung auf den Barwert  $aBW(Q_x)$ , wie eine Änderung  $\Delta I^F$  der Zinsstrukturkurve  $I^F$  auf den Barwert  $BW_F(I^F)$ .

Für die Untersuchung der Auswirkungen solcher Änderungen in der Sterbetafel ist es daher strukturell sinnvoll, den Ansatz aus Kapitel 4 für die Betrachtung des Zinsänderungsrisiko mittels Durationsmaßen auf die Betrachtung des biometrischen Risikos zu übertragen.

## 5.4. Biometrische Duration

Der strukturelle Zusammenhang zwischen Sterbewahrscheinlichkeiten und Zinssätzen aus Abschnitt 5.3.2 erlaubt es das Konzept der Forward Rate Duration zur Quantifizierung des biometrischen Risikos zu adaptieren. In diesem Abschnitt soll nun ein Durationskonzept zur Quantifizierung des biometrischen Risikos, d.h. zur Bemessung der Änderung des erwarteten Barwerts aufgrund einer Änderung der Sterbetafel hergeleitet werden. Dieses Konzept soll ebenso leicht interpretierbar und handhabbar sein, wie das Konzept der Forward Rate Duration. Durch die Verwendung der gleichen diskreten Mathematik, die auch bei der Produktkalkulation von Lebensversicherungen verwendet wird, kann so ein Risikomaß definiert werden, das für praktische Risikoanalysen geeignet und unmittelbar anwendbar ist.

Der erwartete Barwert  $aBW(Z, I^F, Q_x)$  einer Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  ist bei Bewertung mittels einer Forward Rate Zinsstrukturkurve  $I^F$  und einer Sterbetafel  $Q_x$  gegeben durch (5.3), d.h.

$$\begin{aligned} aBW(Z, I^F, Q_x) &= \sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^n \prod_{k=0}^{j-1} (1 - q_{x+k}) \cdot Z_j \cdot v^{(j)}. \end{aligned}$$

### Notation 5.13

Der erwartete Barwert  $aBW(Z, I^F, Q_x)$  ist von den Inputgrößen  $Z$ ,  $I^F$  und  $Q_x$ , sowie der Laufzeit  $n$  abhängig. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird für den erwarteten Barwert die verkürzte Notation  $aBW(Q_x)$  verwendet, um die in diesem Abschnitt betrachtete Untersuchung der risikobehafteten Sterbetafel  $Q_x$  zu verdeutlichen. Für die Untersuchung

des daraus resultierenden biometrischen Risikos seien die Zahlungen  $Z_t$ , sowie die Zinssätze  $i_t$  der Zinsstrukturkurve  $I^F$  als fest angenommen.

Wird eine spezielle Zahlungsreihe betrachtet, so wird dies - wie bereits im bisherigen Verlauf der Arbeit - durch explizite Angabe in der Notation deutlich gemacht.

Aufgrund der bereits beschriebenen strukturellen Interpretation der Sterbetafel als Zinsstrukturkurve, ist es grundsätzlich naheliegend und sinnvoll das Konzept der Forward Rate Duration für die Messung des biometrischen Risikos zu adaptieren und für Änderung in der Sterbetafel anzuwenden.

In Analogie zur Macaulay-Duration wurde bereits in [Cou+07] zur Messung der Sterblichkeitssensitivität die  $q$ -Duration, als „Wertänderung eines Portfolios aufgrund einer einheitlichen, relativen Änderung der Sterblichkeitsraten“ definiert [Cou+07; Cou09].

Hierbei soll zur Berechnung der  $q$ -Duration die Änderung des Werts aller Verbindlichkeiten aufgrund einer Sterblichkeitsverbesserung von zunächst 0,1% pro Jahr bestmöglich abgeschätzt werden [Cou09]. Diese Änderung wird dann ins Verhältnis zu einer angenommenen, einheitlichen Änderung  $\Delta q_x$  der Sterblichkeitsraten gesetzt.

Hierbei ist es allerdings oftmals schwierig den Gesamtwert der Verpflichtungen analytisch zu bestimmen und damit die  $q$ -Duration zu berechnen [LH11; LL12]. Auch ist es durch die Betrachtung des Gesamtwerts aller Verpflichtungen nicht möglich, die unterschiedlichen Auswirkungen der Sterblichkeitsänderungen differenziert zu erfassen. Sterblichkeitsänderungen wirken sich unterschiedlich für jedes Alter und Geschlecht aus und sind oft vom versicherten Risiko abhängig [Wag17; Hul14; Pla11]. So ist es in der Praxis sinnvoll für Versicherungen mit Todesfallleistungen und Versicherungen mit Erlebensfallleistungen unterschiedliche Sterbewahrscheinlichkeiten zu verwenden und damit auch sinnvoll das Änderungsrisiko getrennt voneinander zu betrachten [DAV05; Ort16; RB05]. Durch die Betrachtung des Gesamtwerts aller Verpflichtungen, sowie der Annahme einer einheitlichen Änderung der Sterblichkeiten, ist eine differenzierte Betrachtung des biometrischen Änderungsrisikos nicht möglich.

Daher soll in dieser Arbeit die Betrachtung des biometrischen Änderungsrisikos einzelner Zahlungsreihen verschiedener Versicherungsleistungen ermöglicht werden, um unterschiedliche Sterblichkeitsänderungen angemessen berücksichtigen zu können. Dazu wird die Sterblichkeitssensitivität, als relative Änderung des erwarteten Barwerts einzelner Zahlungsreihen aufgrund einer beliebigen Änderung der Sterbetafel bemessen (s. Abschnitt 5.3). Durch diese Herangehensweise soll ein Instrument entwickelt werden, das in der Praxis der Lebensversicherungen unmittelbar anwendbar ist und mit dem das biometrische Änderungsrisiko angemessen erfasst werden kann.

Es wird nun eine Änderung der gegebenen Sterbetafel  $Q_x$  angenommen. Die Sterbetafel

ändere sich um  $\Delta Q_x = (\Delta q_x, \Delta q_{x+1}, \dots, \Delta q_{x+n-1})$  zu

$$Q_x + \Delta Q_x = (q_x + \Delta q_x, q_{x+1} + \Delta q_{x+1}, \dots, q_{x+n-1} + \Delta q_{x+n-1}).$$

Um ein Maß für das biometrische Risiko zu definieren, wird der Ansatz der Forward Rate Duration zur Bemessung des Zinsänderungsrisikos genutzt. Die Änderung des erwarteten Barwerts

$$\Delta aBW(Q_x) := aBW(Q_x + \Delta Q_x) - aBW(Q_x)$$

aufgrund einer Veränderung  $\Delta Q_x$  der Sterbetafel  $Q_x$  wird hier – analog zur Bemessung des Zinsänderungsrisikos – als absolutes Maß für die Bemessung des biometrischen Änderungsrisikos verwendet.

Wegen (5.3) ist der erwartete Barwert  $aBW(Q_x)$  als Funktion  $aBW : ]0, 1[^n \rightarrow \mathbb{R}$  in den Größen  $q_x, q_{x+1}, \dots, q_{x+n-1}$  beliebig oft stetig differenzierbar. D.h. für  $j = 0, \dots, n-1$  existieren insbesondere die partiellen Ableitungen erster Ordnung  $\frac{\partial}{\partial q_{x+j}}(aBW(Q_x))$ , sowie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung  $\frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}}(aBW(Q_x))$  für  $k, l = 0, \dots, n-1$ .

Es ist daher möglich Satz 4.2 (Satz von Taylor) auch auf die Barwertfunktion  $aBW(Q_x + \Delta Q_x)$  anzuwenden. Analog zu Abschnitt 4.2 erhält man aus (4.1):

$$\begin{aligned} aBW(Q_x + \Delta Q_x) &= aBW(Q_x) + daBW(Q_x) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}}(aBW(Q_x)) \Delta q_{x+k} \Delta q_{x+l} + \dots + R_m. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Für das Restglied  $R_m$  der Taylorreihenentwicklung gilt für ein  $\theta \in ]0, 1[$  (vgl. [For16]):

$$\begin{aligned} R_m &= \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} aBW(Q_x + \theta \Delta Q_x)}{\partial q_x^{\alpha_1} \partial q_{x+1}^{\alpha_2} \dots \partial q_{x+n-1}^{\alpha_n}} (\Delta Q_x)^\alpha \\ &= o(\|\Delta Q_x\|^m). \end{aligned}$$

Zunächst sei in (5.16)  $m = 1$  angenommen, sodass man die folgende Approximation für  $aBW(Q_x + \Delta Q_x)$  erhält:

$$aBW(Q_x + \Delta Q_x) \approx aBW(Q_x) + daBW(Q_x). \quad (5.17)$$

Die Änderung  $\Delta aBW(Q_x)$  des Barwerts, die sich durch eine Änderung der Sterbetafel ergibt, kann dann durch die Verwendung des Differentials  $daBW(Q_x)$  mittels

$$\Delta aBW(Q_x) \approx daBW(Q_x).$$

approximiert werden.

Als relatives Maß für das biometrische Risiko wird die Sterblichkeitssensitivität betrachtet, d.h. die relative Änderung des erwarteten Barwerts bei einer Änderung der Sterbewahrscheinlichkeiten:

$$\frac{\Delta aBW(Q_x)}{aBW(Q_x)} \approx \frac{d aBW(Q_x)}{aBW(Q_x)}.$$

Diese Approximation führt zur Definition der biometrischen Duration  $aD(Q_x, \Delta Q_x)$ :

**Definition 5.14 (Biometrische Duration)**

Es seien eine Zinsstrukturkurve  $I^F = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ , eine Sterbetafel  $Q_x = (q_x, q_{x+1}, \dots, q_{x+n-1})$  und zugehörige Änderungsgrößen  $\Delta Q_x = (\Delta q_x, \Delta q_{x+1}, \dots, \Delta q_{x+n-1})$  mit  $x + n < \omega$  gegeben. Für eine Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  ist die *biometrische Duration* der Zahlungsreihe  $Z$  definiert durch:

$$\begin{aligned} aD(Q_x, \Delta Q_x) &:= \frac{-1}{aBW(Q_x)} \cdot d aBW(Q_x) \\ &= \frac{-1}{aBW(Q_x)} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial aBW(Q_x)}{\partial q_{x+k}} \Delta q_{x+k}. \end{aligned}$$

Analog zu Notation 5.13 wird in der Bezeichnung  $aD(Q_x, \Delta Q_x)$  auf die Nennung der Zahlungsreihe  $Z$  und der Zinsstrukturkurve  $I^F$  verzichtet. Wird eine spezielle Zahlungsreihe betrachtet, wird dies durch die Bezeichnung deutlich gemacht.

Für die relative Änderung des erwarteten Barwerts aufgrund einer Änderung  $\Delta Q_x$  des erwarteten Barwerts gilt mit Definition 5.14:

$$\frac{\Delta aBW(Q_x)}{aBW(Q_x)} \approx -aD(Q_x, \Delta Q_x).$$

Die biometrische Duration  $aD(Q_x, \Delta Q_x)$  kann somit unmittelbar als Sterblichkeitssensitivität interpretiert werden. Ändert sich die Sterbetafel um  $\Delta Q_x$ , so ändert sich der erwartete Barwert  $aBW(Q_x)$  um den Wert der biometrischen Duration  $-aD(Q_x, \Delta Q_x)$ .

Für das in Definition 5.14 verwendete totale Differential  $daBW(Q_x)$  können die benötigten partiellen Ableitungen explizit berechnet werden, was zu folgender Darstellung führt.

**Satz 5.15 (Biometrische Duration)**

Es seien die Änderungsgrößen  $\Delta Q_x = (\Delta q_x, \Delta q_{x+1}, \dots, \Delta q_{x+n-1})$  der Sterbetafel  $Q_x$  gegeben. Für die Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, \dots, Z_n)$  eines Versicherungsvertrags der Laufzeit  $n$ , der für eine  $x$ -jährige Person abgeschlossen wird, gilt:

$${}_aD(Q_x, \Delta Q_x) = \frac{1}{{}_aBW(Q_x)} \cdot \sum_{j=1}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{1 + (-q_{x+k})} \cdot \Delta q_{x+k} \right). \quad (5.18)$$

**Beweis** Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{{\partial q_{x+k}}}({}_j p_x) &= \frac{\partial}{\partial q_{x+k}} \left( \prod_{l=0}^{j-1} (1 - q_{x+l}) \right) \\ &= \begin{cases} - \prod_{l=0, l \neq k}^{j-1} (1 - q_{x+l}), & \text{für } 0 \leq k < j \\ 0, & \text{für } j \leq k \leq n-1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -(1 - q_{x+k})^{-1} \cdot {}_j p_x, & \text{für } 0 \leq k < j \\ 0, & \text{für } j \leq k \leq n-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Für das totale Differential  $d {}_aBW(Q_x)$  gilt damit:

$$\begin{aligned} d {}_aBW(Q_x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial q_{x+k}} ({}_aBW(Q_x) \Delta q_{x+k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial q_{x+k}} \left( \sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \right) \Delta q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n \frac{\partial}{\partial q_{x+k}} ({}_j p_x) \Delta q_{x+k} \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=0}^{j-1} \frac{-1}{1 - q_{x+k}} \Delta q_{x+k} \right) \cdot {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)}. \quad (5.19) \end{aligned}$$

Mit (5.19) folgt die Darstellung der biometrischen Duration  ${}_aD(Q_x, \Delta Q_x)$ .  $\square$

Liegt als Zahlungsreihe  $Z$  speziell die Zahlungsreihe  $L = (L_0, L_1, \dots, L_n)$  der Versicherungsleistungen vor, so muss berücksichtigt werden, dass die einzelnen Zahlungen  $L_t$  auch von  $q_{x+t}$  abhängig sind (s. (5.4)):

$$L_t = L_t^{(0)} + q_{x+t} \cdot L_t^{(1)} \cdot v_{t+1}.$$

Für eine Darstellung der biometrischen Duration der Zahlungsreihe der Versicherungsleistungen für die praktische Verwendbarkeit, lässt sich das folgende Resultat zeigen.

**Satz 5.16 (Biometrische Duration für Versicherungsleistungen)**

Es seien die Änderungsgrößen  $\Delta Q_x = (\Delta q_x, \Delta q_{x+1}, \dots, \Delta q_{x+n-1})$  der Sterbetafel  $Q_x$  gegeben. Für den Leistungsvektor  $L$  eines Versicherungsvertrags der Laufzeit  $n$ , der für eine  $x$ -jährige Person abgeschlossen wird, gilt:

$${}_aD(L, Q_x, \Delta Q_x) = \frac{1}{{}_aBW(L, Q_x)} \cdot \left( \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=0}^{j-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \Delta q_{x+k} \right) \cdot {}_j p_x \cdot L_j \cdot v^{(j)} - \sum_{j=1}^n {}_{j-1} p_x \cdot L_{j-1}^{(1)} \cdot v^{(j)} \cdot \Delta q_{x+j-1} \right). \quad (5.20)$$

**Beweis** Es sei  $\widehat{L}^{(1)} = (q_x \cdot L_0^{(1)} \cdot v_1, q_{x+1} \cdot L_1^{(1)} \cdot v_2, \dots, q_{x+n} \cdot L_n^{(1)} \cdot v_{n+1})$  die Zahlungsreihe der erwarteten Todesfalleistungen. Analog zur Forward Rate Duration  $D_F(Z^L, I^F, \Delta I^F)$  gilt mit (s. (5.10)):

$$\begin{aligned} {}_aD(L, Q_x, \Delta Q_x) &= \frac{-1}{{}_aBW(L, Q_x)} \cdot d {}_aBW(L, Q_x) \\ &= \frac{-1}{{}_aBW(L, Q_x)} \cdot (d {}_aBW(L^{(0)}, Q_x) + d {}_aBW(\widehat{L}^{(1)}, Q_x)) \\ &= \frac{-1}{{}_aBW(L, Q_x)} \cdot \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial {}_aBW(L^{(0)}, Q_x)}{\partial q_{x+k}} \Delta q_{x+k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial {}_aBW(\widehat{L}^{(1)}, Q_x)}{\partial q_{x+k}} \Delta q_{x+k} \right). \end{aligned}$$

Die Darstellung für den ersten Summanden ist bereits durch (5.18) für  $Z_j = L_j^{(0)}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$  bekannt.

Mit

$$\frac{\partial}{{}_aBW(L, Q_x)} ({}_j p_x \cdot q_{x+j}) = \begin{cases} -(1 - q_{x+k})^{-1} \cdot {}_j p_x \cdot q_{x+j}, & \text{für } k < j \\ {}_j p_x, & \text{für } k = j \\ 0, & \text{für } k > j, \end{cases}$$

für  $k = 0, 1, \dots, n-1$  und  $j = 1, \dots, n-1$  erhält man für das Differential  $d {}_aBW(\widehat{L}^{(1)}, Q_x)$ :

$$\begin{aligned} d {}_aBW(\widehat{L}^{(1)}, Q_x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial {}_aBW(\widehat{L}^{(1)}, Q_x)}{\partial q_{x+k}} \Delta q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial}{{}_aBW(L, Q_x)} \left( \sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot q_{x+j} \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \right) \Delta q_{x+k} \\ &= \sum_{j=0}^n \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial}{{}_aBW(L, Q_x)} ({}_j p_x \cdot q_{x+j}) \Delta q_{x+k} \right) \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\partial}{\partial q_{x+k}} \left( {}_j p_x \cdot q_{x+j} \right) \Delta q_{x+k} \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial q_{x+j}} \left( {}_j p_x \cdot q_{x+j} \right) \Delta q_{x+j} \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \\
&= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=0}^{j-1} \frac{-1}{1 - q_{x+k}} \Delta q_{x+k} \right) \cdot {}_j p_x \cdot q_{x+j} \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1} {}_j p_x \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \cdot \Delta q_{x+j}.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Mit (5.18) und (5.21) folgt die Darstellung für  $aD(L, Q_x, \Delta Q_x)$  aus Definition (5.14).  $\square$

Der Fehler  $R_1$ , der durch die Approximation in (5.17) entsteht, lässt sich analog zu (4.8) angeben. Für ein  $\theta \in ]0, 1[$  gilt (vgl. [For16]):

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{j,k=0}^{n-1} \frac{\partial^2 aBW(Q_x + \theta \Delta Q_x)}{\partial q_{x+j} \partial q_{x+k}} \Delta q_{x+k} \Delta q_{x+j} \\
&= o(\|\Delta Q_x\|^2).
\end{aligned}$$

Mit  $m = 2$  erhält man aus (5.16) die Darstellung für  $\Delta aBW(Q_x) = aBW(Q_x + \Delta Q_x) - aBW(Q_x)$ :

$$\Delta aBW(Q_x) = daBW(Q_x) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} \left( aBW(Q_x) \right) \Delta q_{x+k} \Delta q_{x+l} + R_2.$$

Der Approximationsfehler  $R_2$  lässt sich hier, wie in (4.12), für ein  $\theta \in ]0, 1[$  beschreiben durch:

$$\begin{aligned}
R_2 &= \sum_{|\alpha|=3} \frac{1}{6} \frac{\partial^{|\alpha|} aBW(Q_x + \theta \Delta Q_x)}{\partial q_x^{\alpha_1} \partial q_{x+1}^{\alpha_2} \cdots \partial q_{x+n-1}^{\alpha_n}} (\Delta Q_x)^\alpha \\
&= o(\|\Delta Q_x\|^3).
\end{aligned}$$

Am Vergleich der Approximationsfehler  $R_1$  und  $R_2$  erkennt man, dass für  $\|\Delta Q_x\| < 1$  durch die Hinzunahme der quadratischen Terme die Approximation von  $aBW(Q_x + \Delta Q_x)$  und damit die Approximation von  $\Delta aBW(Q_x)$  verbessert werden kann. Dabei stellt  $\|\Delta Q_x\| < 1$  ein praktisches Kriterium dar, um zu überprüfen, ob für die gegebenen Änderungen  $\Delta Q_x$  durch die Verwendung der Konvexität eine Verbesserung erzielt werden kann.

Die resultierenden Approximationen

$$\Delta aBW(Q_x) \approx daBW(Q_x) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} (aBW(Q_x)) \Delta q_{x+k} \Delta q_{x+l}$$

bzw.

$$\frac{\Delta aBW(Q_x)}{aBW(Q_x)} \approx \frac{daBW(Q_x)}{aBW(Q_x)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{aBW(Q_x)} \cdot \sum_{k,l=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} (aBW(Q_x)) \Delta q_{x+k} \Delta q_{x+l}$$

können als Maß für das biometrische Risiko verwendet werden.

Analog zur Forward Rate Konvexität  $C_F(I^F, \Delta I^F)$  aus Abschnitt 4.2 (Definition 4.6), ergibt sich aus den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung die Definition der biometrischen Konvexität  $aC(Q_x, \Delta Q_x)$ .

**Definition 5.17 (Biometrische Konvexität)**

Es seien eine Sterbetafel  $Q_x = (q_x, q_{x+1}, \dots, q_{x+n-1})$  und zugehörige Änderungsgrößen  $\Delta Q_x = (\Delta q_x, \Delta q_{x+1}, \dots, \Delta q_{x+n-1})$  mit  $x+n < \omega$ , sowie eine Forward Rate Zinsstrukturkurve  $I^F = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  gegeben. Für eine Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  ist die *biometrische Konvexität* definiert durch:

$$aC(Q_x, \Delta Q_x) = \frac{1}{aBW(Q_x)} \cdot \sum_{k,l=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} (aBW(Q_x)) \Delta q_{x+k} \Delta q_{x+l}.$$

Der erwartete Barwert nach Änderung der Sterbetafel lässt sich dann darstellen durch:

$$\begin{aligned} aBW(Q_x + \Delta Q_x) &\approx aBW(Q_x) + daBW(Q_x) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} (aBW(Q_x)) \Delta q_{x+k} \Delta q_{x+l} \\ &\approx aBW(Q_x) - aBW(Q_x) \cdot aD(Q_x, \Delta Q_x) + \frac{1}{2} \cdot aBW(Q_x) \cdot aC(Q_x, \Delta Q_x) \\ &\approx aBW(Q_x) \cdot \left( 1 - aD(Q_x, \Delta Q_x) + \frac{1}{2} \cdot aC(Q_x, \Delta Q_x) \right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Für die Sterblichkeitssensitivität erhält man:

$$\frac{\Delta aBW(Q_x)}{aBW(Q_x)} \approx -aD(Q_x, \Delta Q_x) + \frac{1}{2} \cdot aC(Q_x, \Delta Q_x).$$

Für konkrete Berechnungen lässt sich für die Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  eine explizite Darstellung der biometrischen Konvexität angeben.

**Satz 5.18 (Biometrische Konvexität)**

Es seien die Änderungsgrößen  $\Delta Q_x = (\Delta q_x, \Delta q_{x+1}, \dots, \Delta q_{x+n-1})$  der Sterbetafel  $Q_x$  gegeben. Für die Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, \dots, Z_n)$  eines Versicherungsvertrags der Laufzeit  $n$ , der für eine  $x$ -jährige Person abgeschlossen wird, gilt:

$$aC(Q_x, \Delta Q_x) = \frac{1}{aBW(Q_x)} \cdot \sum_{j=2}^n j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot 2 \cdot \sum_{k=0}^{j-2} \frac{1}{1 - q_{x+k}} \Delta q_{x+k} \cdot \sum_{l=k+1}^{j-1} \frac{1}{1 - q_{x+l}} \Delta q_{x+l}. \quad (5.23)$$

**Beweis** Wieder werden zunächst die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung  $\frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}}(j p_x)$ , für  $k, l = 0, \dots, n-1$  und  $j = 1, \dots, n$  betrachtet, um eine Darstellung für die biometrische Konvexität zu erhalten.

Für  $0 \leq k < j \leq n$  gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 q_{x+k}}(j p_x) = \frac{\partial}{\partial q_{x+k}} \left( - \prod_{\nu=0, \nu \neq k}^{j-1} (1 - q_{x+\nu}) \right) = 0$$

und für  $k \geq j$  folgt ebenso:

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 q_{x+k}}(j p_x) = 0.$$

Da der Barwert  $aBW(Q_x)$  als Funktion in den Sterbewahrscheinlichkeiten zweimal stetig differenzierbar ist, gilt  $\frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}}(j p_x) = \frac{\partial^2}{\partial q_{x+l} \partial q_{x+k}}(j p_x)$ , für  $k, l = 0, \dots, n-1$  mit  $k < l$ .

Für diese Ableitungen folgt mit  $k < l < j$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}}(j p_x) &= \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} \left( \prod_{\nu=0}^{j-1} (1 - q_{x+\nu}) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial q_{x+k}} \left( - \prod_{\nu=0, \nu \neq l}^{j-1} (1 - q_{x+\nu}) \right) \\ &= \prod_{\nu=0, \nu \neq k, l}^{j-1} (1 - q_{x+\nu}) \\ &= \frac{1}{1 - q_{x+k}} \cdot \frac{1}{1 - q_{x+l}} \cdot j p_x. \end{aligned}$$

Für  $k \geq j$  oder  $l \geq j$  gilt  $\frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}}(j p_x) = 0$ .

Zusammengefasst erhält man also für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung für  $k, l = 0, \dots, n-1$  und  $j = 1, \dots, n$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}}(j p_x) = \begin{cases} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot (1 - q_{x+l})^{-1} \cdot j p_x, & 0 \leq k < l < j \\ (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot (1 - q_{x+l})^{-1} \cdot j p_x, & 0 \leq l < k < j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Und somit:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} ({}_aBW(Z, Q_x)) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} \left( \sum_{j=0}^n j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \right) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l} \\
&= \sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)} \cdot \left( \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} (j p_x) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l} \right) \\
&= \sum_{j=0}^n Z_j \cdot v^{(j)} \cdot \left( \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=k+1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} (j p_x) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l}}_{k < l} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial^2 q_{x+k}} (j p_x) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l}}_{k=l} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\sum_{l=0}^{n-2} \sum_{k=l+1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} (j p_x) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l}}_{k > l} \right) \\
&= \sum_{j=2}^n Z_j \cdot v^{(j)} \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{l=k+1}^{j-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} (j p_x) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\sum_{k=0}^{j-1} \frac{\partial^2}{\partial^2 q_{x+k}} (j p_x) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l}}_{=0} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=0}^{j-2} \sum_{k=l+1}^{j-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} (j p_x) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l} \right) \\
&= \sum_{j=2}^n Z_j \cdot v^{(j)} \cdot 2 \cdot \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{l=k+1}^{j-1} \left( \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} (j p_x) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l} \right) \\
&= \sum_{j=2}^n Z_j \cdot v^{(j)} \cdot 2 \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{l=k+1}^{j-1} \left( (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot (1 - q_{x+l})^{-1} \cdot j p_x \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l} \right) \right) \\
&= \sum_{j=2}^n j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot 2 \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{l=k+1}^{j-1} \left( (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot (1 - q_{x+l})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l} \right) \right)
\end{aligned}$$

Mit Definition 5.17 folgt die Behauptung.  $\square$

Für die Zahlungsreihe  $L = (L_0, L_1, \dots, L_n)$  der Versicherungsleistungen mit  $L_t = L_t^{(0)} + q_{x+t} \cdot L_t^{(1)} \cdot v_{t+1}$  resultiert aus Definition 5.17 der folgende Satz.

**Satz 5.19 (Biometrische Konvexität für Versicherungsleistungen)**

Es seien die Änderungsgrößen  $\Delta Q_x = (\Delta q_x, \Delta q_{x+1}, \dots, \Delta q_{x+n-1})$  der Sterbetafel  $Q_x$  gegeben. Für den Leistungsvektor  $L$  eines Versicherungsvertrags der Laufzeit  $n$ , der für eine  $x$ -jährige Person abgeschlossen wird, gilt:

$$aC(L, Q_x, \Delta Q_x) = \frac{1}{aBW(L, Q_x)} \cdot \left( \sum_{j=2}^n j p_x \cdot L_j \cdot v^{(j)} \cdot 2 \cdot \sum_{k=0}^{j-2} \frac{\Delta q_{x+k}}{1 - q_{x+k}} \cdot \sum_{l=k+1}^{j-1} \frac{\Delta q_{x+l}}{1 - q_{x+l}} \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^{n-1} j p_x \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \cdot 2 \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\Delta q_{x+k}}{(1 - q_{x+k})} \Delta q_{x+j} \right) \right). \quad (5.24)$$

**Beweis** Es gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} \left( aBW(L^{(1)}, Q_x \right) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} \left( \sum_{j=0}^n j p_x \cdot q_{x+j} \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \right) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l} \\ &= \sum_{j=0}^n L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \cdot \left( \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} \left( j p_x \cdot q_{x+j} \right) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l} \right) \\ &= \sum_{j=0}^n L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \cdot \left( \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=k+1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} \left( j p_x \cdot q_{x+j} \right) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l}}_{k < l} \right. \\ & \quad \left. + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial^2 q_{x+k}} \left( j p_x \cdot q_{x+j} \right) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l}}_{k=l} \right. \\ & \quad \left. + \underbrace{\sum_{l=0}^{n-2} \sum_{k=l+1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} \left( j p_x \cdot q_{x+j} \right) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l}}_{k > l} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{l=k+1}^j \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} \left( j p_x \cdot q_{x+j} \right) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l} \right. \\ & \quad \left. + \underbrace{\sum_{k=0}^j \frac{\partial^2}{\partial^2 q_{x+k}} \left( j p_x \cdot q_{x+j} \right) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l}}_{=0, \text{ weil } j p_x \text{ linear in } p_{x+k} \text{ ist}} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{k=l+1}^j \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} \left( j p_x \cdot q_{x+j} \right) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \cdot 2 \cdot \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{l=k+1}^j \left( \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} (j p_x \cdot q_{x+j}) \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+l} \right) \\
&= \sum_{j=1}^n j p_x \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \cdot 2 \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{l=k+1}^{j-1} \left( (1 - q_{x+k})^{-1} (1 - q_{x+l})^{-1} q_{x+j} \Delta q_{x+k} \Delta q_{x+l} \right) \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\left( \sum_{k=0}^{j-1} -(1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+j} \right)}_{l=j} \right) \\
&= \sum_{j=2}^n j p_x \cdot L_j^{(1)} \cdot q_{x+j} \cdot v^{(j+1)} \cdot 2 \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-2} \sum_{l=k+1}^{j-1} \left( (1 - q_{x+k})^{-1} (1 - q_{x+l})^{-1} \Delta q_{x+k} \Delta q_{x+l} \right) \right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^n j p_x \cdot L_j^{(1)} \cdot v^{(j+1)} \cdot 2 \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \cdot \Delta q_{x+j} \right)
\end{aligned}$$

Zusammen mit (5.23) erhält man die Darstellung für  $aC(L, Q_x, \Delta Q_x)$ .  $\square$

Das folgende Beispiel verdeutlicht die Verwendung der biometrischen Duration und der biometrischen Konvexität für Zahlungsreihen verschiedener typischer Lebensversicherungen.

### Beispiel 5.20

In diesem Beispiel soll das biometrische Risiko der bereits in Beispiel 5.7 betrachteten Versicherungen berechnet und miteinander verglichen werden. Für die Bewertung der jeweiligen Barwerte wird erneut eine  $x = 29$ -jährige Frau betrachtet, die Laufzeit der Versicherungen ist jeweils  $n = 40$ . Die verwendete Zinsstrukturkurve  $I^F$  entspricht der Zinsstrukturkurve  $I^F$  aus Beispiel 4.8<sup>6</sup>. Für die Sterbetafel  $Q_{29}$  wurden die Werte der Sterbetafel DAV2004RF entnommen.

Für die Änderungen  $\Delta Q_{29} = (\Delta q_{29}, \Delta q_{30}, \dots, \Delta q_{68})$  der Sterbetafel  $Q_{29}$  sei nun angenommen, dass gilt:

$$\Delta q_{29+t} = 0,5 \cdot q_{29+t}, \quad \text{für } t = 0, 1, \dots, n-1.$$

1. Der konstante Jahresbeitrag  $\pi_0$  einer um  $m = 15$  Jahre aufgeschobenen temporären Leibrente der Höhe  $R = 12.000 \text{ €}$  mit Laufzeit  $n = 40$  beträgt  $\pi_0 = 10.537,55 \text{ €}$ . Es ist

$$\pi_t = \begin{cases} \pi_0, & \text{für } t = 0, 1, \dots, 14, \\ 0, & \text{für } t = 15, \dots, 40 \end{cases} \quad \text{und} \quad L_t = \begin{cases} 0, & \text{für } t = 0, 1, \dots, 14, \\ R, & \text{für } t = 15, \dots, 40. \end{cases}$$

Durch die angenommene Änderung der Sterbetafel  $\Delta Q_{29}$  erhält man für die biome-

<sup>6</sup>Die Werte sind in Tabelle A.2 in Anhang A.1.2 zu finden.

trische Duration der Zahlungsreihe  $\pi$  der Beiträge den Wert

$$aD(\pi, Q_{29}, \Delta Q_{29}) = 0,00124$$

und für die biometrische Konvexität den Wert

$$aC(\pi, Q_{29}, \Delta Q_{29}) = 0,00000236.$$

Für die Zahlungsreihe  $L$  der Leistungen folgen die berechneten Werte

$$aD(L, Q_{29}, \Delta Q_{29}) = 0,0139 \quad \text{und} \quad aC(L, Q_{29}, \Delta Q_{29}) = 0,00026.$$

Damit lässt sich die Sterblichkeitssensitivität des Beitrags- bzw. Leistungsbarwerts approximieren durch:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta aBW(\pi, Q_{29})}{aBW(\pi, Q_{29})} &\approx -aD(\pi, Q_{29}, \Delta Q_{29}) + \frac{1}{2} \cdot aC(\pi, Q_{29}, \Delta Q_{29}) \\ &= -0,00124 + \frac{1}{2} \cdot 0,0000 = -0,0012 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta aBW(L, Q_{29})}{aBW(L, Q_{29})} &\approx -aD(L, Q_{29}, \Delta Q_{29}) + \frac{1}{2} \cdot aC(L, Q_{29}, \Delta Q_{29}) \\ &= -0,0139 + \frac{1}{2} \cdot 0,00026 = -0,0137. \end{aligned}$$

Durch erhöhte Sterbewahrscheinlichkeiten wird der Leistungseintritt der Rentenzahlungen weniger wahrscheinlich, was somit zu einem geringeren erwarteten Leistungsbarwert führt. Dementsprechend ist die Approximation der relativen Änderung des Barwerts negativ.

Ebenso ist auch die biometrische Duration  $aD(\pi, Q_{29}, \Delta Q_{29})$  der Zahlungsreihe der Beiträge negativ. Da auch die Beiträge nur im Erlebensfall gezahlt werden, sinkt der Beitragsbarwert durch steigende Sterbewahrscheinlichkeiten.

2. Für die temporäre Risikolebensversicherung über  $n = 40$  Jahre mit Versicherungssumme  $S = 100.000 \text{ €}$  und konstanten Jahresbeitrag  $\pi_0 = 141,05 \text{ €}$  ist

$$\pi_t = \begin{cases} \pi_0, & \text{für } t = 0, 1, \dots, 39, \\ 0, & \text{für } t = 40 \end{cases} \quad \text{und} \quad L_t = \begin{cases} q_{29+t} \cdot S \cdot v_{t+1}, & \text{für } t = 0, 1, \dots, 39, \\ 0, & \text{für } t = 40. \end{cases}$$

Mit diesen Werten lässt sich für die Zahlungsreihe der Beiträge  $\pi$  die biometrische Duration  $aD(\pi, Q_{29}, \Delta Q_{29})$  und die biometrische Konvexität  $aC(\pi, Q_{29}, \Delta Q_{29})$  be-

rechnen. Man erhält

$$aD(\pi, Q_{29}, \Delta Q_{29}) = 0,0071 \quad \text{und} \quad aC(\pi, Q_{29}, \Delta Q_{29}) = 0,0001.$$

Für die Zahlungsreihe der Leistungen  $L$  berechnen sich die Werte

$$aD(L, Q_{29}, \Delta Q_{29}) = -0,4842 \quad \text{und} \quad aC(L, Q_{29}, \Delta Q_{29}) = 0,0168.$$

Für die Sterblichkeitssensitivitäten ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \frac{\Delta aBW(\pi, Q_{29})}{aBW(\pi, Q_{29})} &\approx -aD(\pi, Q_{29}, \Delta Q_{29}) + \frac{1}{2} \cdot aC(\pi, Q_{29}, \Delta Q_{29}) \\ &= -0,0071 + \frac{1}{2} \cdot 0,0001 = -0,0071 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta aBW(L, Q_{29})}{aBW(L, Q_{29})} &\approx -aD(L, Q_{29}, \Delta Q_{29}) + \frac{1}{2} \cdot aC(L, Q_{29}, \Delta Q_{29}) \\ &= 0,4842 - \frac{1}{2} \cdot 0,0168 = 0,4758. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur Rentenversicherung ist die Sterblichkeitssensitivität des Leistungsbarwerts der Risikolebensversicherung positiv. In diesem Fall führt einer Erhöhung der Sterbewahrscheinlichkeiten zu einem erhöhten Leistungsbarwert, da die Eintrittswahrscheinlichkeit des Leistungsfalls steigt.

Erneut wird hieran die Gegensätzlichkeit des biometrischen Risikos für Versicherungen mit Todesfalleistungen (d.h.  $L_t^{(0)} = 0 \forall t$ ) im Vergleich zu Versicherungen mit Erlebensfalleistungen (d.h.  $L_t^{(1)} = 0 \forall t$ ) deutlich.

3. Für die Kapitallebensversicherung über  $n = 40$  Jahre mit Versicherungssumme  $S = 100.000 \text{ €}$  und Jahresbeitrag  $\pi_0 = 1.398,46 \text{ €}$  ist

$$\pi_t = \begin{cases} \pi_0, & \text{für } t = 0, 1, \dots, 39, \\ 0, & \text{für } t = 40 \end{cases} \quad \text{und} \quad L_t = \begin{cases} q_{29+t} \cdot S \cdot v_{t+1}, & \text{für } t = 0, 1, \dots, 39, \\ S, & \text{für } t = 40. \end{cases}$$

Für diese Kapitallebensversicherung lassen sich die folgenden Werte berechnen:

$$aD(\pi, Q_{29}, \Delta Q_{29}) = 0,0071 \quad \text{und} \quad aC(\pi, Q_{29}, \Delta Q_{29}) = 0,0001,$$

sowie

$$aD(L, Q_{29}, \Delta Q_{29}) = -0,0133 \quad \text{und} \quad aC(L, Q_{29}, \Delta Q_{29}) = 0,0004.$$

Bei Änderung der Sterbetafel erhält man damit die Approximationen

$$\begin{aligned}\frac{\Delta aBW(\pi, Q_{29})}{aBW(\pi, Q_{29})} &\approx -aD(\pi, Q_{29}, \Delta Q_{29}) + \frac{1}{2} \cdot aC(\pi, Q_{29}, \Delta Q_{29}) \\ &= -0,0071 + \frac{1}{2} \cdot 0,0001 = -0,0071\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta aBW(L, Q_{29})}{aBW(L, Q_{29})} &\approx -aD(L, Q_{29}, \Delta Q_{29}) + \frac{1}{2} \cdot aC(L, Q_{29}, \Delta Q_{29}) \\ &= 0,0133 - \frac{1}{2} \cdot 0,0004 = 0,0131.\end{aligned}$$

Es fällt auf, dass die Sterblichkeitssensitivität und damit das biometrische Risiko für die Kapitallebensversicherung deutlich geringer ausfällt, als dies bei der Risikolebensversicherung der Fall ist. Da bei Kapitallebensversicherungen sowohl der Todesfall als auch der Erlebensfall versichert ist, führt eine Erhöhung der Sterbewahrscheinlichkeiten ( $\Delta Q_x > 0$ ), zu einer Erhöhung des Barwerts der Todesfalleistungen und zu einer Verringerung des Barwerts der Erlebensfalleistungen. Diese Effekte gleichen sich somit in gewissem Maße aus. Hier führt selbst eine relativ große Änderung der Sterbewahrscheinlichkeiten nur zu einem geringen biometrischen Risiko.

Es ist daher auch möglich eine Kapitallebensversicherung zu konstruieren, die immun gegenüber der angenommenen Änderung der Sterbetafel ist. Es sei

$$\pi_t = \begin{cases} \pi_0, & \text{für } t = 0, 1, \dots, 39, \\ 0, & \text{für } t = 40 \end{cases} \quad \text{und} \quad L_t = \begin{cases} q_{29+t} \cdot S^{(1)} \cdot v_{t+1}, & \text{für } t = 0, 1, \dots, 39, \\ S^{(0)}, & \text{für } t = 40. \end{cases}$$

Für  $S^{(0)} = 137.500\text{€}$  und  $S^{(1)} = 100.000\text{€}$  ergibt sich ein Beitrag in Höhe von  $\pi_0 = 1.869,98$ . Für die oben angenommene Änderung der Sterbetafel ergibt sich für diese Versicherung die biometrische Duration  $aD(L, Q_{29}, \Delta Q_{29})$ , sowie die biometrische Konvexität mit  $aD(L, Q_{29}, \Delta Q_{29})$  mit

$$aD(L, Q_{29}, \Delta Q_{29}) = 0,0000023 \quad \text{und} \quad aC(L, Q_{29}, \Delta Q_{29}) = 0,0001.$$

Die Änderung der Sterbetafel hat in diesem Fall (nahezu) keine Auswirkungen auf den Barwert der Versicherungsleistungen, da sich das Langlebigkeits- und das Sterblichkeitsrisiko ausgleichen.  $\diamond$

## 5.5. Eigenschaften der biometrischen Duration

Passend zur strukturellen Analogie zwischen der Forward Rate Duration  $D_F(I^F, \Delta I^F)$  und der biometrischen Duration  $aD(Q_x, \Delta Q_x)$  können einige der Eigenschaften aus Abschnitt 4.4 auch für die biometrische Duration  $aD(Q_x, \Delta Q_x)$  bzw. die biometrische Konvexität  $aC(Q_x, \Delta Q_x)$  formuliert werden.

### Satz 5.21

Für nicht-negative Zahlungsreihen  $Z = (Z_0, \dots, Z_n)$  mit  $Z_j \geq 0$  für  $j = 0, \dots, n$  und  $\Delta q_{x+j} \geq 0$ , für  $j = 0, \dots, n-1$ , ist die biometrische Duration  $aD(Q_x, \Delta Q_x)$  monoton fallend in Werten von  $q_{x+t}$ , für  $t \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ .

**Beweis** Die biometrische Duration wird hierfür als Funktion  $aD : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  in  $q_{x+t}$  für  $t \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  aufgefasst. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 4.15. Der vollständige Beweis kann in Anhang A.4 nachgelesen werden.  $\square$

### Korollar 5.22

Die Monotonie-Aussage aus Satz 5.21 gilt auch für negative Zahlungsreihen  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  mit  $Z_j \leq 0$ , für alle  $j = 0, \dots, n$ .

### Korollar 5.23

Ist  $Q_x^1 \leq Q_x^2$  komponentenweise, dann gilt für nicht-negative Zahlungsreihen  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$ , sowie positive Änderungsgrößen  $\Delta q_{x+t}$ , für  $t = 0, \dots, n-1$ :

$$aD(Q_x^1, \Delta Q_x) \geq aD(Q_x^2, \Delta Q_x).$$

Das biometrische Änderungsrisiko, ähnlich wie das Zinsänderungsrisiko, fällt umso geringer aus, je größer die Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x$  sind. Dadurch, dass Sterbewahrscheinlichkeiten grundsätzlich für höhere Altersjahre steigen, sinkt damit das biometrische Risiko auch mit dem Alter der versicherten Person.

### Satz 5.24

Die biometrische Duration  $aD(Q_x, \Delta Q_x)$  ist invariant gegenüber einer Skalierung der Zahlungsreihe.

**Beweis** Für die Zahlungsreihe  $Z^\alpha$  mit  $Z^\alpha = (\alpha \cdot Z_0, \alpha \cdot Z_1, \dots, \alpha \cdot Z_n)$  und  $\alpha \neq 0$  gilt:

$$\begin{aligned} aD(Z^\alpha, Q_x, \Delta Q_x) &= \frac{1}{\sum_{j=0}^n j p_x \cdot \alpha \cdot Z_j \cdot v^{(j)}} \cdot \sum_{j=1}^n j p_x \cdot \alpha \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{1 + (-q_{x+k})} \cdot \Delta q_{x+k} \right) \\ &= \frac{1}{\sum_{j=0}^n j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)}} \cdot \sum_{j=1}^n j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{1 + (-q_{x+k})} \cdot \Delta q_{x+k} \right) \\ &= aD(Z, Q_x, \Delta Q_x). \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 5.25**

Die biometrische Konvexität  $aC(Q_x, \Delta Q_x)$  ist invariant gegenüber einer Skalierung der Zahlungsreihe.

**Beweis** Analog zu Beweis von Satz 5.24. □

Satz 5.24 und Satz 5.25 verdeutlichen, dass das Maß für das biometrische Risiko identisch ist, wenn unterschiedliche Zahlungsreihen betrachtet werden, deren Zahlungen sich jeweils nur um den gleichen Faktor unterscheiden. Die relative Änderung des erwarteten Barwerts ist somit auch unabhängig von der Höhe von Beitrags- oder Rentenzahlungen. Dies ist beispielsweise bei Versicherungen der Fall, für die konstante Zahlungen vereinbart sind, oder auch Versicherungen, deren Beitrags- bzw. Leistungszahlweisen identisch sind. Damit ist das biometrische Risiko unabhängig von der tatsächlichen Höhe der Beiträge oder auch der Leistungen.

Dies wird auch am Vergleich der Kapitallebensversicherung mit der Risikolebensversicherung in Beispiel 5.20 deutlich. Hier erkennt man, dass sich für die Approximationen der Sterblichkeitssensitivitäten des Beitragsbarwerts die gleichen Werte ergeben, obwohl die Höhe der Beiträge unterschiedlich sind. Allerdings ist die Beitragszahlweise bei beiden Versicherungen identisch, sodass die biometrische Duration  $aD(Q_x, \Delta Q_x)$  und die biometrische Konvexität  $aC(Q_x, \Delta Q_x)$  in beiden Fällen die gleichen Werte annehmen.

Die Summenregel (4.21) für die Berechnung der Forward Rate Duration der Summe mehrerer Zahlungsreihen, lässt sich analog auch für die biometrische Duration und die biometrische Konvexität formulieren. Im Kontext der Lebensversicherung lässt sich mit den beiden folgenden Resultaten das biometrische Risiko mehrerer (unterschiedlicher) Lebensversicherungen untersuchen.

**Satz 5.26**

Es seien  $m$  Zahlungsreihen  $Z^1, Z^2, \dots, Z^m$  mit  $Z^k = (Z_0^k, Z_1^k, \dots, Z_n^k)$ , für  $k = 1, \dots, m$  gegeben, sowie eine Forward Rate Zinsstrukturkurve  $I^F$ , eine Sterbetafel  $Q_x$  und zugehörige Änderungsgrößen  $\Delta Q_x$ . Für  $Z = \sum_{k=1}^m Z^k$  gilt:

$${}_aD(Z, Q_x, \Delta Q_x) = \sum_{k=1}^m \frac{{}_aBW(Z^k, Q_x)}{{}_aBW(Z, Q_x)} \cdot {}_aD(Z^k, Q_x, \Delta Q_x).$$

**Beweis** Für  $Z = \sum_{k=1}^m Z^k$  lässt sich der Barwert durch  ${}_aBW(Z, Q_x) = \sum_{k=1}^m {}_aBW(Z^k, Q_x)$  beschreiben. Damit gilt für die biometrische Duration  ${}_aD(Z, Q_x, \Delta Q_x)$ :

$$\begin{aligned} {}_aD(Z, Q_x, \Delta Q_x) &= \frac{-1}{{}_aBW(Z, Q_x)} \cdot d{}_aBW(Z, Q_x) \\ &= \frac{-1}{{}_aBW(Z, Q_x)} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial q_{x+j}} \left( \sum_{k=1}^m {}_aBW(Z^k, Q_x) \right) \Delta q_{x+k} \\ &= \frac{-1}{{}_aBW(Z, Q_x)} \cdot \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial q_{x+k}} {}_aBW(Z^k, Q_x) \Delta q_{x+k} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{{}_aBW(Z^k, Q_x)}{{}_aBW(Z, Q_x)} \cdot \left( \frac{-1}{{}_aBW(Z^k, Q_x)} \cdot d{}_aBW(Z^k, Q_x) \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{{}_aBW(Z^k, Q_x)}{{}_aBW(Z, Q_x)} \cdot {}_aD(Z^k, Q_x, \Delta Q_x). \quad \square \end{aligned}$$

Auch für die biometrische Konvexität  ${}_aC(Z, Q_x, \Delta Q_x)$  der speziellen Zahlungsreihe  $Z = \sum_{k=1}^m Z^k$  lässt sich analog eine Summenregel formulieren.

**Satz 5.27**

Es seien  $m$  Zahlungsreihen  $Z^1, Z^2, \dots, Z^m$  mit  $Z^k = (Z_0^k, Z_1^k, \dots, Z_n^k)$ , für  $k = 1, \dots, m$  gegeben, sowie eine Zinsstrukturkurve  $I^F$ , eine Sterbetafel  $Q_x$  und zugehörige Änderungsgrößen  $\Delta Q_x$ . Für  $Z = \sum_{k=1}^m Z^k$  gilt:

$${}_aC(Z, Q_x, \Delta Q_x) = \sum_{k=1}^m \frac{{}_aBW(Z^k, Q_x)}{{}_aBW(Z, Q_x)} \cdot {}_aC(Z^k, Q_x, \Delta Q_x).$$

**Beweis** Es gilt:

$$\begin{aligned}
aC(Z, Q_x, \Delta Q_x) &= \frac{1}{BW(Z, Q_x)} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+j} \partial q_{x+l}} BW(Z, Q_x) \Delta q_{x+j} \Delta q_{x+l} \\
&= \frac{1}{BW(Z, Q_x)} \cdot \sum_{j,l=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+j} \partial q_{x+l}} \left( \sum_{k=1}^m BW(Z^k, Q_x) \right) \Delta q_{x+j} \Delta q_{x+l} \\
&= \sum_{k=1}^m \frac{BW(Z^k, Q_x)}{BW(Z, Q_x)} \left( \frac{1}{BW(Z^k, Q_x)} \sum_{j,l=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+j} \partial q_{x+l}} BW(Z^k, Q_x) \Delta q_{x+j} \Delta q_{x+l} \right) \\
&= \sum_{k=1}^m \frac{BW(Z^k, Q_x)}{BW(Z, Q_x)} \cdot aC(Z^k, Q_x, \Delta Q_x). \quad \square
\end{aligned}$$

Auf diese Weise lässt sich das biometrische Risiko quantifizieren, falls mehrere, unterschiedliche Zahlungsreihen der gleichen versicherten Person (oder gleichartiger versicherter Personen) untersuchen, wenn identische Rechnungsgrundlagen verwendet werden, d.h. falls  $x$ ,  $I^F$  und  $Q_x$  übereinstimmen.

Auch bei der Quantifizierung des biometrischen Risikos ist es, wie auch beim Zinsänderungsrisiko, in der Praxis häufig interessanter, nicht nur das Risiko einzelner Position abzuschätzen, sondern mehrere Zahlungsreihen zu betrachten. Für Versicherungsunternehmen ist es relevant das gesamte Ausmaß der Änderungen der Sterbetafel zu bemessen und damit den veränderten Kapitalbedarf aufgrund der Änderung der Sterblichkeiten zu kennen. Dafür sind natürlich nicht nur die Bewertungen der erwarteten Leistungen eines Versicherungsvertrags ausschlaggebend, sondern die Bewertung aller vertraglich eingegangenen Leistungsversprechen.

Für die Bestimmung des tatsächlichen Kapitalbedarfs, der für die Erfüllung aller Leistungen ausreicht, ist es für Versicherungsunternehmen in der Regel aber nicht entscheidend, wodurch ein erhöhter Kapitalbedarf entsteht. D.h. neben den Auswirkungen, die sich aus einer Änderung der Sterbewahrscheinlichkeiten ergeben, sind gleichzeitig auch die Auswirkungen einer Änderung der Zinsstrukturkurve zu quantifizieren. Im folgenden Abschnitt wird daher ein Instrument vorgestellt, mit dem sowohl die Auswirkungen von Änderungen in der Sterbetafel, als auch aus Änderungen der Zinsstrukturkurve bemessen werden können.

## 5.6. Kombinierte Duration

Bisher wurden Auswirkungen von Änderungen in der Zinsstrukturkurve bzw. der Sterbetafel separat und unabhängig voneinander betrachtet. So wird auch im Rahmen von Solvency II gefordert, nach Art des Risikos unterschiedliche Rückstellungen zu bilden, um auch bei ungünstiger Entwicklung der Kalkulationsgrundlagen allen vertraglichen Verpflichtungen

nachkommen zu können [Eur02; RB05].

Allerdings ändern sich Zinsstrukturkurven und Sterbetafeln simultan, sodass Änderungen in diesen Größen den erwarteten Barwert gleichzeitig beeinflussen. Für Versicherungsunternehmen kann es daher besonders relevant sein, das Risiko zu kennen, das durch Änderungen in sämtlichen Kalkulationsgrundlagen entsteht. Dazu ist es notwendig, die Auswirkungen der Änderungen sowohl in der Zinsstrukturkurve, als auch in der Sterbetafel zu bemessen und damit die Kombination mehrerer Risikofaktoren simultan zu betrachten.

Es ist hierbei durchaus möglich, dass Änderungen in der Zinsstrukturkurve, Änderungen in der Sterbetafel entgegenwirken oder sogar verstärken. Für Versicherungsunternehmen ist es daher also auch interessant, die Kombination der Änderungsrisiken in Zins und Biometrie zu betrachten und den gesamten Kapitalbedarf realistisch abzuschätzen.

Dafür werden in diesem Abschnitt nun sowohl Änderungen in der Zinsstrukturkurve  $\Delta I^F$ , als auch Änderungen in der Sterbetafel  $\Delta Q_x$  betrachtet. Um den Barwert  $aBW(L, I^F + \Delta I^F, Q_x + \Delta Q_x)$  der Zahlungsreihe  $L$  nach Änderungen der Kalkulationsgrundlagen zu approximieren, werden nun sowohl die Zinssätze der Zinsstrukturkurve  $I^F$  als auch die Sterbewahrscheinlichkeiten der Sterbetafel  $Q_x$  als variable Inputgrößen angesehen werden.

Es wird nun also eine Änderung  $\Delta I^F = (\Delta i_1, \Delta i_2, \dots, \Delta i_n)$  der gegebenen Zinsstrukturkurve  $I^F$ , sowie eine Änderung  $\Delta Q_x = (\Delta q_x, \Delta q_{x+1}, \dots, \Delta q_{x+n-1})$  der Sterbetafel  $Q_x$  angenommen. Als Maß für das Risiko, das aus diesen Änderungen resultiert, wird die Änderung des erwarteten Barwerts

$$\Delta aBW(L, I^F, Q_x) = aBW(L, I^F + \Delta I^F, Q_x + \Delta Q_x) - aBW(L, I^F, Q_x)$$

angesehen.

In den Definitionen 4.3 und 5.14 wurden die Durationsmaße  $D_F(I^F, \Delta I^F)$  und  $aD(Q_x, \Delta Q_x)$  über das totale Differential definiert. Wird nun sowohl nach den Forward Rates  $i_1, \dots, i_n$  und den Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x, \dots, q_{x+n-1}$  differenziert, so gilt:

$$daBW(L, I^F, Q_x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial aBW(L, I^F, Q_x)}{\partial i_k} \Delta i_k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial aBW(L, I^F, Q_x)}{\partial q_{x+k}} \Delta q_{x+k}. \quad (5.25)$$

Das Durationsmaß, das sich über das totale Differential aus (5.25) definiert, werde als kombinierte Duration bezeichnet.

**Definition 5.28 (Kombinierte Duration)**

Es seien eine Zinsstrukturkurve  $I^F = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ , eine Sterbetafel  $Q_x = (q_x, q_{x+1}, \dots, q_{x+n-1})$  mit  $x + n < \omega$  und zugehörige Änderungsgrößen  $\Delta I^F = (\Delta i_1, \Delta i_2, \dots, \Delta i_n)$ , sowie  $\Delta Q_x = (\Delta q_x, \Delta q_{x+1}, \dots, \Delta q_{x+n-1})$  gegeben. Für eine Zahlungsreihe  $L = (L_0, L_1, \dots, L_n)$  ist die *kombinierte Duration* definiert durch:

$$\begin{aligned} D_K &:= \frac{-1}{aBW(L, I^F, Q_x)} \cdot daBW(L, I^F, Q_x) \\ &= \frac{-1}{aBW(L, I^F, Q_x)} \cdot \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial aBW(L, I^F, Q_x)}{\partial i_k} \Delta i_k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial aBW(L, I^F, Q_x)}{\partial q_{x+k}} \Delta q_{x+k} \right). \end{aligned}$$

Für den Leistungsvektor  $L$  eines Versicherungsvertrags kann auch für die kombinierte Duration eine explizite Darstellung angegeben werden. Dabei kann die Linearität der Ableitungen ausgenutzt werden, um die kombinierte Duration durch die bereits bekannten Durationsmaße  $D_F(Z^L, I^F, \Delta I^F)$  und  $aD(L, Q_x, \Delta Q_x)$  auszudrücken. Dabei bezeichnet  $D_F(Z^L, I^F, \Delta I^F)$  die Forward Rate Duration der Zahlungsreihe  $Z^L = (L_0, {}_1p_x \cdot L_1, \dots, {}_n p_x \cdot L_n)$  (s. (5.8) in Satz 5.5) und  $aD(L, Q_x, \Delta Q_x)$  bezeichnet die biometrische Duration der Zahlungsreihe  $L = (L_0, L_1, \dots, L_n)$  (s. (5.20) in Satz 5.16).

**Korollar 5.29 (Kombinierte Duration)**

Für die kombinierte Duration  $D_K$  gilt:

$$D_K = D_F(Z^L, I^F, \Delta I^F) + aD(L, Q_x, \Delta Q_x). \quad (5.26)$$

Analog erhält man die kombinierte Konvexität aus der Kombination der partiellen Ableitungen zweiten Ordnung nach den Zinssätzen, sowie den Sterbewahrscheinlichkeiten.

**Definition 5.30 (Kombinierte Konvexität)**

Es seien eine Zinsstrukturkurve  $I^F = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ , eine Sterbetafel  $Q_x = (q_x, q_{x+1}, \dots, q_{x+n-1})$  mit  $x + n < \omega$  und zugehörige Änderungsgrößen  $\Delta I^F = (\Delta i_1, \Delta i_2, \dots, \Delta i_n)$ , sowie  $\Delta Q_x = (\Delta q_x, \Delta q_{x+1}, \dots, \Delta q_{x+n-1})$  gegeben. Für eine Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  bezeichnet

$$\begin{aligned} C_K &= \frac{1}{aBW(L, I^F, Q_x)} \cdot \left( \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial i_k \partial i_l} aBW(L, I^F, Q_x) \Delta i_k \Delta i_l \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k,l=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial q_{x+k} \partial q_{x+l}} aBW(L, I^F, Q_x) \Delta q_{x+k} \Delta q_{x+l} \right) \end{aligned}$$

die *kombinierte Konvexität*.

Auch hier setzt sich die kombinierte Konvexität  $C_K$  aus den bereits bekannten Größen  $C(Z^L, I^F, \Delta I^F)$  (s. (5.11) in Satz 5.6) und  $aC(L, Q_x, \Delta Q_x)$  (s. (5.24) in Satz 5.19) zusammen.

**Korollar 5.31**

Für die kombinierte Konvexität  $C_K$  gilt:

$$C_K = C(Z^L, I^F, \Delta I^F) + aC(L, Q_x, \Delta Q_x). \quad (5.27)$$

Analog zur Approximation des Barwerts  $BW_F(I^F + \Delta I^F)$  nach Änderung  $\Delta I^F$  der Zinsstrukturkurve (s. (4.10)) und der Approximation der Änderung des erwarteten Barwerts  $aBW(Q_x + \Delta Q_x)$  nach Änderung  $\Delta Q_x$  der Sterbetafel (s. (5.22)) kann mithilfe der kombinierten Größen der erwartete Barwert  $aBW(L, I^F + \Delta I^F, Q_x + \Delta Q_x)$  approximiert werden:

$$aBW(L, I^F + \Delta I^F, Q_x + \Delta Q_x) \approx aBW(L, I^F, Q_x) \cdot \left(1 - D_K + \frac{1}{2} \cdot C_K\right).$$

Über die Änderung des erwarteten Barwerts

$$\Delta aBW(L, I^F, Q_x) = aBW(L, I^F + \Delta I^F, Q_x + \Delta Q_x) - aBW(L, I^F, Q_x)$$

lässt sich entsprechend auch die Sensitivität, d.h. die relative Änderung des erwarteten Barwerts aufgrund der Änderungen  $\Delta I^F$  und  $\Delta Q_x$  darstellen:

$$\frac{\Delta aBW(L, I^F, Q_x)}{aBW(L, I^F, Q_x)} \approx -D_K + \frac{1}{2} \cdot C_K.$$

Die Interpretation der Sterbewahrscheinlichkeiten als negative Forward Rates hat die Übertragung des Forward Rate Durationskonzepts für die Quantifizierung des biometrischen Risikos ermöglicht. Dadurch, dass beide Konzepte strukturell identisch sind, ist es auch direkt und auf leichte Art und Weise möglich, die Konzepte zu vereinen und Änderungen in der Zinsstrukturkurve und der Sterbetafel gleichzeitig zu unterstellen. Auf diese Weise können die beiden Konzepte zur Quantifizierung des Zinsänderungsrisikos und des biometrischen Risikos vereint werden, um in der Risikoanalyse das Ausmaß des Risikos, resultierend aus Änderungen in Zins und Biometrie zu bestimmen.

## 5.7. Approximation des Deckungskapitals

In Abschnitt 5.2 wurde gezeigt, wie das Konzept der Forward Rate Duration für die Bestimmung des Zinsänderungsrisikos des Deckungskapitals  ${}_tV_x$  bestimmt werden kann. Ergänzend zu diesem Abschnitt wird hier nun auch das biometrische Risiko des Deckungs-

kapitals betrachtet. Damit wird die Anwendung zur Risikoanalyse der Deckungskapitalverläufe ermöglicht.

Ist eine Forward Rate Zinsstrukturkurve  $I^F$ , sowie eine Sterbetafel  $Q_x$  gegeben, so kann gemäß (5.6) das Deckungskapital  ${}_tV_x$  einer  $n$ -jährigen Versicherung mit Leistungsvektor  $L$  und Prämienvektor  $\pi$  als erwarteter Barwert der Zahlungsreihe  ${}_t\tilde{L} = (0, \dots, 0, {}_t\tilde{L}_t, {}_t\tilde{L}_{t+1}, \dots, {}_t\tilde{L}_n)$  geschrieben werden. Es ist

$$\begin{aligned} {}_tV_x &= aBW({}_t\tilde{L}, I^F, Q_x) \\ &= \sum_{j=0}^{n-t} j p_{x+t} \cdot \left( (L_{t+j}^{(0)} - \pi_{t+j}) + q_{x+t+j} \cdot L_{t+j}^{(1)} \cdot v_{t+j+1} \right) \cdot v_t^{(t+j)} \\ &= \sum_{j=t}^n j-t p_{x+t} \cdot \left( (L_j^{(0)} - \pi_j) + q_{x+j} \cdot L_j^{(1)} \cdot v_{j+1} \right) \cdot v_t^{(j)}, \end{aligned}$$

mit

$${}_t\tilde{L}_j = \frac{L_j - \pi_j}{{}_t p_x \cdot v^{(t)}}, \quad \text{für } j = t, \dots, n.$$

Der Leistungsvektor setzt sich dabei aus Erlebensfall-, sowie Todesfalleistungen zusammen (s. (5.4)):

$$L_j = L_j^{(0)} + q_{x+j} \cdot L_j^{(1)} \cdot v_{j+1}, \quad \text{für } j = 0, \dots, n.$$

Bei einer gegebenen Änderung

$$\Delta Q_x = (\Delta q_x, \Delta q_{x+1}, \dots, \Delta q_{x+n-1})$$

der Sterbetafel  $Q_x$  soll nun die daraus resultierende Änderung des Deckungskapitals bestimmt werden. Fasst man dafür, wie eben beschrieben, das Deckungskapital  ${}_tV_x$  zum Zeitpunkt  $t$  nach Änderung der Sterbetafel als erwarteter Barwert

$${}_tV_x(Q_x + \Delta Q_x) = aBW({}_t\tilde{L}, I^F, Q_x + \Delta Q_x)$$

der Zahlungsreihe  ${}_t\tilde{L}$  auf, kann das Konzept der biometrischen Duration verwendet werden, um das veränderte Deckungskapital zum Zeitpunkt  $t$  zu bestimmen und das biometrische Risiko zu quantifizieren.

Für die biometrische Duration  $aD({}_t\tilde{L}, Q_x)$  ergibt sich aus Satz 5.20 die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} aD({}_t\tilde{L}, Q_x, \Delta Q_x) &= \frac{1}{{}_tV_x} \cdot \left( \sum_{j=t+1}^n \frac{j p_x}{{}_t p_x} \cdot (L_j - \pi_j) \cdot \frac{v^{(j)}}{v^{(t)}} \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-t-1} (1 - q_{x+t+k})^{-1} \Delta q_{x+t+k} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=t+1}^n \frac{j-1 p_x}{{}_t p_x} \cdot L_{j-1}^{(1)} \cdot \frac{v^{(j)}}{v^{(t)}} \cdot \Delta q_{x+t+j-1} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{{}_tV_x} \cdot \left( \sum_{j=t+1}^n j-t p_{x+t} \cdot (L_j - \pi_j) \cdot v_t^{(j)} \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-t-1} (1 - q_{x+t+k})^{-1} \Delta q_{x+t+k} \right) \right. \\ \left. - \sum_{j=t+1}^n j-t-1 p_{x+t} \cdot L_{j-1}^{(1)} \cdot v_t^{(j)} \cdot \Delta q_{x+j-1} \right).$$

Für die biometrische Konvexität  $aC({}_t\tilde{L}, Q_x, \Delta Q_x)$  der Zahlungsreihe  ${}_t\tilde{L}$  erhält man hier nach Satz 5.19 die Darstellung:

$$aC({}_t\tilde{L}, Q_x, \Delta Q_x) = \frac{1}{{}_tV_x} \cdot \left( \sum_{j=t+2}^n \frac{j p_x}{t p_x} \cdot (L_j - \pi_j) \cdot \frac{v^{(j)}}{v^{(t)}} \right. \\ \cdot 2 \cdot \sum_{k=0}^{j-t-2} \frac{1}{1 - q_{x+t+k}} \Delta q_{x+t+k} \cdot \sum_{l=k+1}^{j-t-1} \frac{1}{1 - q_{x+t+l}} \Delta q_{x+t+l} \\ \left. - \sum_{j=t+1}^{n-1} \frac{j p_x}{t p_x} \cdot L_j^{(1)} \cdot \frac{v^{(j+1)}}{v^{(t)}} \cdot 2 \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-t-1} \frac{1}{(1 - q_{x+t+k})} \Delta q_{x+t+k} \Delta q_{x+j} \right) \right) \\ = \frac{1}{{}_tV_x} \cdot \left( \sum_{j=t+2}^n j-t p_{x+t} \cdot (L_j - \pi_j) \cdot v_t^{(j)} \right. \\ \cdot 2 \cdot \sum_{k=0}^{j-t-2} \frac{1}{1 - q_{x+t+k}} \Delta q_{x+t+k} \cdot \sum_{l=k+1}^{j-t-1} \frac{1}{1 - q_{x+t+l}} \Delta q_{x+t+l} \\ \left. - \sum_{j=t+1}^{n-1} j-t p_{x+t} \cdot L_j^{(1)} \cdot v_t^{(j+1)} \cdot 2 \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-t-1} \frac{1}{(1 - q_{x+t+k})} \Delta q_{x+t+k} \Delta q_{x+j} \right) \right).$$

Für ein festes  $t$  kann mit diesen Größen das Deckungskapital  ${}_tV_x$  zum Zeitpunkt  $t$  nach Änderung der Sterbetafel als erwarteter Barwert

$${}_tV_x(Q_x + \Delta Q_x) = aBW({}_t\tilde{L}, I^F, Q_x + \Delta Q_x)$$

approximiert werden. Für die Approximationen mittels der biometrischen Duration bzw. der biometrischen Konvexität erhält man

$${}_tV_x^D(Q_x + \Delta Q_x) = {}_tV_x \cdot \left( 1 - aD({}_t\tilde{L}, Q_x, \Delta Q_x) \right)$$

und

$${}_tV_x^C(Q_x + \Delta Q_x) = {}_tV_x \cdot \left( 1 - aD({}_t\tilde{L}, Q_x, \Delta Q_x) + \frac{1}{2} \cdot aC({}_t\tilde{L}, Q_x, \Delta Q_x) \right).$$

In Abschnitt 5.2 wurde bereits beschrieben, wie das Deckungskapital nach einer Änderung  $\Delta I^F$  der Zinsstrukturkurve  $I^F$  bestimmt werden kann. Dafür wurde das Deckungskapital  ${}_tV_x$  als Barwert  $BW_F(Z({}_t\tilde{L}), I^F)$  der Zahlungsreihe  $Z({}_t\tilde{L})$  aufgefasst. Daraus resultierten die Größen  $D_F(Z({}_t\tilde{L}), I^F, \Delta I^F)$  und  $C_F(Z({}_t\tilde{L}), I^F, \Delta I^F)$ , für die in (5.13) bzw.

(5.14) in Abschnitt 5.2) eine Darstellung angegeben wurde.

Mit diesen Größen erhält man die Approximationen für die Werte des Deckungskapitals zum Zeitpunkt  $t$ , für  $t = 0, \dots, \omega - x$  unter Verwendung der Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$ :

$${}_tV_x^D(I^F + \Delta I^F) = {}_tV_x \cdot \left(1 - D_F(Z^{(t\tilde{L})}, I^F, \Delta I^F)\right)$$

bzw.

$${}_tV_x^C(I^F + \Delta I^F) = {}_tV_x \cdot \left(1 - D_F(Z^{(t\tilde{L})}, I^F, \Delta I^F) + \frac{1}{2} \cdot C_F(Z^{(t\tilde{L})}, I^F, \Delta I^F)\right).$$

Die Größen  $D_F(Z^{(t\tilde{L})}, I^F, \Delta I^F)$  und  $C_F(Z^{(t\tilde{L})}, I^F, \Delta I^F)$  können auch genutzt werden, um gemeinsam mit den Größen  $aD(\tilde{L}, Q_x, \Delta Q_x)$  und  $aC(\tilde{L}, Q_x, \Delta Q_x)$ , das Risiko zu quantifizieren, falls sowohl eine Änderung der Sterbetafel  $Q_x$ , als auch eine Änderung der Zinsstrukturkurve  $I^F$  vorliegt. Dazu kann mithilfe der kombinierten Duration bzw. kombinierten Konvexität dann die Situation betrachtet werden, dass zusätzlich zu einer Änderung der Sterbetafel auch eine Änderung der bei der Kalkulation verwendeten Zinsstrukturkurve vorliegt.

Wendet man die Ergebnisse aus Korollar 5.29 und Korollar 5.31 an, erhält man dafür die kombinierte Duration

$$D_K = D_F(Z^{(t\tilde{L})}, I^F, \Delta I^F) + aD(\tilde{L}, Q_x, \Delta Q_x),$$

bzw. die kombinierte Konvexität

$$C_K = C_F(Z^{(t\tilde{L})}, I^F, \Delta I^F) + aC(\tilde{L}, Q_x, \Delta Q_x).$$

Damit lässt sich die Approximation des Deckungskapitals zum Zeitpunkt  $t$  nach Änderung der Zinsstrukturkurve um  $\Delta I^F$  und Änderung der Sterbetafel um  $\Delta Q_x$  bestimmen. Man erhält die Approximationen

$${}_tV_x^D(I^F + \Delta I^F, Q_x + \Delta Q_x) = {}_tV_x \cdot (1 - D_K)$$

und

$${}_tV_x^C(I^F + \Delta I^F, Q_x + \Delta Q_x) = {}_tV_x \cdot \left(1 - D_K + \frac{1}{2} \cdot C_K\right).$$

### Beispiel 5.32

Seit 2012 darf in europäischen Ländern für Neuabschlüsse von Versicherungsverträgen das Geschlecht der versicherten Person nicht mehr als Risikomerkmale bei der Berechnung von Prämien und Versicherungsleistungen berücksichtigt werden [Wag17]. Daher

müssen für die Kalkulation von Lebensversicherungen sogenannte Unisex-Sterbetafeln verwendet werden. Die unterschiedliche Lebenserwartung, sowie die unterschiedlichen Sterbewahrscheinlichkeiten von Männern und Frauen können mit diesen Tafeln allerdings nicht mehr adäquat berücksichtigt werden. Daher ist bereits bei der Kalkulation der Beiträge bzw. Leistungen von Abweichungen der angenommenen Kalkulationsgrundlagen, d.h. der Unisex-Sterbetafel, zu den realistischen Sterbewahrscheinlichkeiten, d.h. den geschlechtsspezifischen Sterbetafeln, auszugehen. Damit ist auch direkt die Notwendigkeit gegeben, das biometrische Änderungsrisiko zu quantifizieren, dass durch die (unrealistische) Kalkulation mit einer Unisex-Sterbetafel entsteht.

Da solche Sterbetafeln bislang noch nicht veröffentlicht wurden, ist jedes Versicherungsunternehmen in der Verantwortung, aus den Sterbetafeln für Männer und für Frauen eigene geeignete Unisex-Tafeln abzuleiten [Ort16].

Um aus der Sterbetafel  $Q_0^M = (q_0^M, q_1^M, \dots, q_\omega^M)$  für Männer und der Sterbetafel  $Q_0^F = (q_0^F, q_1^F, \dots, q_\omega^F)$  für Frauen eine Unisex-Sterbetafel  $Q_0^U = (q_0^U, q_1^U, \dots, q_\omega^U)$  zu erstellen, wird hierfür häufig ein gewichteter Mittelwert der geschlechtsspezifischen Wahrscheinlichkeiten betrachtet. An dieser Stelle wird dafür das Verhältnis zwischen Männern und Frauen im Bestand berücksichtigt und die Anteile der jeweiligen Geschlechter am Bestand für die verschiedenen Altersjahre werden als Gewichte verwendet (vgl. [Ort16]). Die Unisex-Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x^U$  für  $x = 0, \dots, \omega$  berechnen sich dann über:

$$q_x^U = \frac{\ell_x^M}{\ell_x^M + \ell_x^F} \cdot q_x^M + \frac{\ell_x^F}{\ell_x^M + \ell_x^F} \cdot q_x^F. \quad (5.28)$$

Abbildung 5.4 zeigt die Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x^M$  und  $q_x^F$  der Sterbetafel DAV2004R [DAV05], sowie die daraus gemäß (5.28) erstellten Unisex-Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x^U$  für  $x = 0, \dots, 40$ .

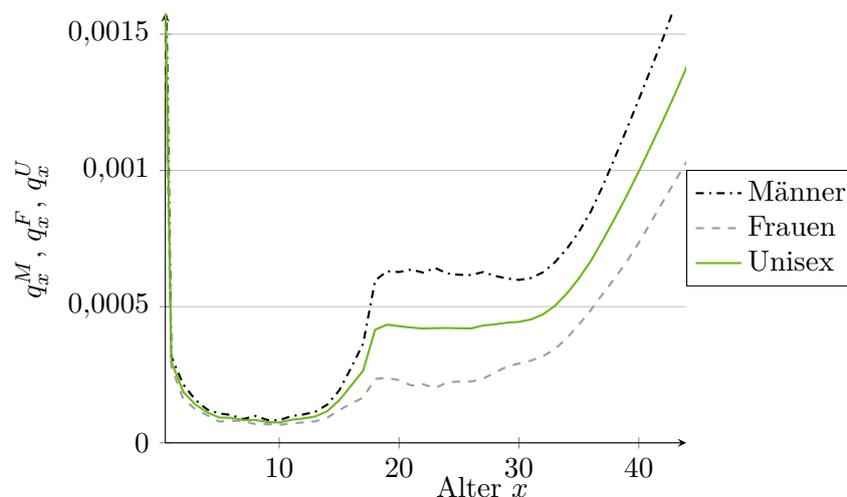


Abbildung 5.4.: Vergleich der geschlechtsspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten gemäß der Sterbetafel DAV2004R [DAV05].

Durch die Verwendung einer solchen (künstlichen) Unisex-Tafel ergeben sich Abwei-

chungen  $\Delta q_{x+t}$  zu den geschlechtsspezifischen, realistischeren Wahrscheinlichkeiten. Für einen männlichen Versicherten lassen sich die Abweichungen  $\Delta Q_x^M = (\Delta q_x^M, \dots, \Delta q_\omega^M)$  über

$$q_{x+t}^U + \Delta q_{x+t}^M = q_{x+t}^M, \quad \text{für alle } t = 0, \dots, \omega - x$$

ausdrücken. Es gilt:

$$\begin{aligned} \Delta q_{x+t}^M &= q_x^M - q_x^U \\ &= q_x^M - \left( \frac{\ell_x^M}{\ell_x^M + \ell_x^F} \cdot q_x^M + \frac{\ell_x^F}{\ell_x^M + \ell_x^F} \cdot q_x^F \right) \\ &= \left( q_x^M - q_x^F \right) \cdot \frac{\ell_x^F}{\ell_x^M + \ell_x^F}. \end{aligned}$$

Analog gilt die Abweichung  $\Delta Q_x^F = (\Delta q_x^F, \dots, \Delta q_\omega^F)$  zur Sterbetafel einer weiblichen versicherten Person:

$$q_{x+t}^U + \Delta q_{x+t}^F = q_{x+t}^F, \quad \text{für alle } t = 0, \dots, \omega - x.$$

Für diesen Fall folgt:

$$\begin{aligned} \Delta q_{x+t}^F &= q_x^F - q_x^U \\ &= q_x^F - \left( \frac{\ell_x^M}{\ell_x^M + \ell_x^F} \cdot q_x^M + \frac{\ell_x^F}{\ell_x^M + \ell_x^F} \cdot q_x^F \right) \\ &= \left( q_x^F - q_x^M \right) \cdot \frac{\ell_x^M}{\ell_x^M + \ell_x^F}. \end{aligned}$$

Nun soll exemplarisch eine um 35 Jahre aufgeschobene, 30-jährige Rentenversicherung für eine  $x = 32$ -jährige versicherte Person betrachtet werden. Dabei sei die Beitragszahlungsdauer auf 35 Jahre bis zum Renteneintritt festgelegt. Die Rentenhöhe beträgt 1.000 € pro Jahr und die Gesamtlaufzeit  $n = 65$  Jahre.

Im Folgenden wird exemplarisch die Auswirkung der Verwendung der Unisex-Sterbetafel untersucht. Dazu wird der Verlauf des Deckungskapitals bei Verwendung der geschlechtsspezifischen Sterbetafeln für Männer bzw. Frauen mit Hilfe der biometrischen Duration, sowie der biometrischen Konvexität approximiert und mit dem Deckungskapital bei Verwendung der Unisex-Sterbetafel verglichen.

Darüber hinaus wird auch eine Änderung der Zinsstrukturkurve unterstellt und mithilfe der kombinierten Duration bzw. der kombinierten Konvexität der Fall betrachtet, bei dem sowohl die geschlechtsspezifischen Sterbetafeln, als auch die veränderte Zinsstrukturkurve vorliegt.

Für die Beitragskalkulation werde die Unisex-Sterbetafel  $Q_x = Q_x^U$  verwendet, sowie der Höchstrechnungszinssatz gemäß §2 DeckRV in Höhe von  $i = 0,9\%$ . D.h. es werde die flache Zinsstrukturkurve  $\bar{I} = (0,009, 0,009, \dots, 0,009)$  angenommen.

Der Jahresbeitrag beträgt dann, unabhängig vom Geschlecht der versicherten Person,  $\pi_t = 412,26\text{€}$  für  $t = 0, \dots, 34$ . Mit der Zahlungsreihe

$${}_{35}\tilde{L} = (0, \dots, 0, {}_{35}\tilde{L}_t, {}_{35}\tilde{L}_{t+1}, \dots, {}_{35}\tilde{L}_n),$$

mit  ${}_{35}\tilde{L}_j = \frac{1}{{}_{35}p_{32} \cdot v^{(35)}} \cdot 1000$  für  $j = 35, \dots, 64$  kann das Deckungskapital zum Zeitpunkt  $t$  als erwarteter Barwert  ${}_{35}V_{32} = aBW({}_t\tilde{L}, I^F, Q_x)$  dargestellt werden (s. (5.6)). Für  $t = 35$  ergibt sich so ein Deckungskapital in Höhe von  ${}_{35}V_{32} = 18.193\text{€}$ .

Um das biometrische Risiko zu quantifizieren, welches sich aus der Verwendung der Unisex-Sterbetafel  $Q_x^U$  ergibt, wird zunächst die oben beschriebene Änderung  $\Delta Q_x^M$  zu einer Sterbetafel für Männer  $Q_x^M$  betrachtet. Für die entsprechende Änderung

$$\Delta Q_x^M = Q_x^M - Q_x^U$$

beträgt die biometrische Duration  $aD({}_{35}\tilde{L}, Q_x^U, \Delta Q_x^M) = 0,0712$ . D.h., aufgrund der Änderung der Sterbetafel  $\Delta Q_x^M$  sinkt das Deckungskapital zum Zeitpunkt  $t = 35$  um ca. 7%.

Für die Änderung  $\Delta Q_x^F$  der Unisex-Sterbetafel  $Q_x^U$  zu der geschlechtsspezifischen Sterbetafel für Frauen  $Q_x^F$  mit

$$\Delta Q_x^F = Q_x^F - Q_x^U$$

beträgt die biometrische Duration  $aD({}_{35}\tilde{L}, Q_x^U, \Delta Q_x^F) = -0,0591$ . Im Gegensatz zur Verwendung der Sterbetafel für Männer, steigt das Deckungskapital um ca. 6% an, falls die versicherte Person weiblich ist. Damit ist erkennbar, dass das biometrische Risiko gegensätzlich ist für Männer und Frauen.

Weiterhin beträgt für die jeweiligen Fälle die biometrische Konvexität  $aC({}_{35}\tilde{L}, Q_x^U, \Delta Q_x^M) = 0,00001746$ , bzw.  $aC({}_{35}\tilde{L}, Q_x^U, \Delta Q_x^F) = 0,00001695$ . Man erkennt hierbei, dass der Einfluss der Konvexität auf die Approximation gering ist und für die Approximation des Deckungskapital keine signifikante Verbesserung darstellt.

Diese Werte können nun genutzt werden, um die folgenden Approximationen für das Deckungskapital zum Zeitpunkt  $t = 35$  unter Verwendung der geschlechtsspezifischen Sterbetafeln zu erhalten. Für Männer erhält man für das Deckungskapital  ${}_{35}V_x$  zum Zeitpunkt

$t = 35$  die Approximation

$$\begin{aligned} {}_{35}V_x^D(Q_x^U + \Delta Q_x^M) &= {}_{35}V_x \cdot \left(1 - aD({}_{35}\tilde{L}, Q_x^U, \Delta Q_x^M)\right) \\ &= 16.897,49 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} {}_{35}V_x^C(Q_x^U + \Delta Q_x^M) &= {}_{35}V_x \cdot \left(1 - aD({}_{35}\tilde{L}, Q_x^U, \Delta Q_x^M) + \frac{1}{2} \cdot aC({}_{35}\tilde{L}, Q_x^U, \Delta Q_x^M)\right) \\ &= 16.897,65. \end{aligned}$$

Auch am Vergleich der beiden Approximationen erkennt man, dass die biometrische Konvexität  $aC({}_{35}\tilde{L}, Q_x^U, \Delta Q_x^M)$  die Approximation des Deckungskapitals kaum verändert.

Dies ist ebenso erkennbar, wenn die Approximationen des Deckungskapitals betrachtet werden, falls die Sterbetafel für Frauen verwendet wird:

$$\begin{aligned} {}_{35}V_x^D(Q_x^U + \Delta Q_x^F) &= {}_{35}V_x \cdot \left(1 - aD({}_{35}\tilde{L}, Q_x^U, \Delta Q_x^F)\right) \\ &= 19.267,70 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} {}_{35}V_x^C(Q_x^U + \Delta Q_x^F) &= {}_{35}V_x \cdot \left(1 - aD({}_{35}\tilde{L}, Q_x^U, \Delta Q_x^F) + \frac{1}{2} \cdot aC({}_{35}\tilde{L}, Q_x^U, \Delta Q_x^F)\right) \\ &= 19267,85. \end{aligned}$$

Der gesamte Verlauf der Approximationen des Deckungskapitals  ${}_tV_x^D$  für  $t = 0, \dots, 65$  bei Verwendung der geschlechtsspezifischen Sterbetafeln ist in Abbildung 5.5 dargestellt (Die rot gepunktete Kurve zeigt jeweils die Approximation  ${}_tV_x^D(Q_x^U + \Delta Q_x)$  für Männer bzw. für Frauen. Die grün gestrichelte Kurve zeigt jeweils die Approximation  ${}_tV_x^C(Q_x^U + \Delta Q_x)$  für Männer bzw. für Frauen.). Ebenso ist der Verlauf des Deckungskapitals  ${}_tV_x$  für  $t = 0, \dots, 65$  bei Verwendung der Unisex-Sterbetafel dargestellt (schwarze Kurve).

Zunächst fällt auf, dass der Verlauf der Approximationen  ${}_tV_x^D$  und  ${}_tV_x^C$  in beiden Fällen (Männer bzw. Frauen) nahezu identisch ist. Die zusätzliche Berücksichtigung der Konvexitätsgröße führt hier zu keiner sichtbaren Verbesserung der Approximationen.

Außerdem zeigt sich, dass das Deckungskapital, das sich aus der Approximation  ${}_tV_x^D(Q_x^U + \Delta Q_x^M)$  mit den geschlechtsspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten für Männer ergibt, für alle Zeitpunkte kleiner ist, als das kalkulierte Deckungskapital  ${}_tV_x$ . Ebenso ist die Approximation  ${}_tV_x^D(Q_x^U + \Delta Q_x^F)$  mit den geschlechtsspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten für Frauen größer als das mit der Unisex-Sterbetafel kalkulierte Deckungskapital. Der Grund dafür liegt darin, dass die Sterbewahrscheinlichkeiten für Männer grundsätzlich größer als

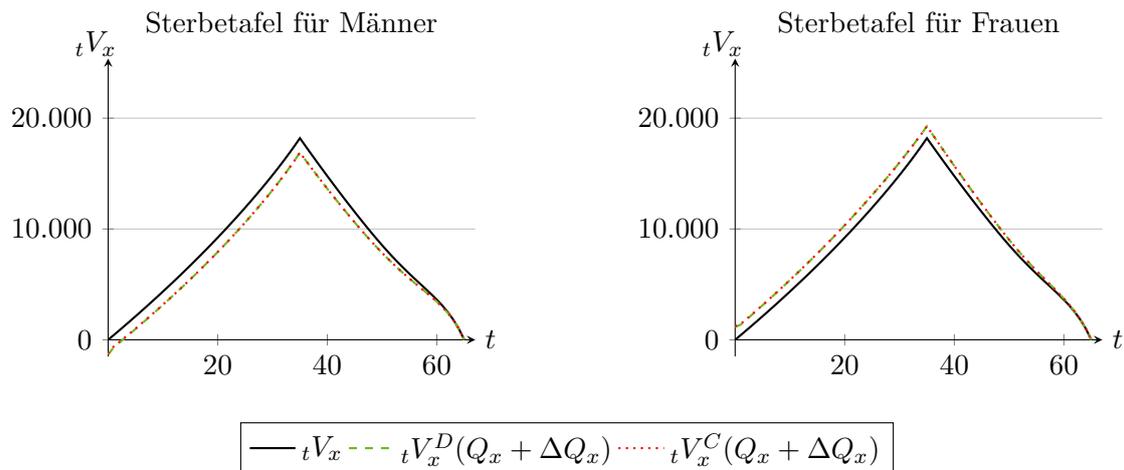


Abbildung 5.5.: Verlauf des Deckungskapitals im Vergleich bei Verwendung einer Unisex-Sterbetafel und den geschlechtsspezifischen Sterbetafeln.

die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für Frauen sind (s. Abbildung 5.4). Damit geht auch eine höhere Lebenserwartung für Frauen im Vergleich zu Männern einher. Dadurch muss für Rentenversicherungen von Frauen grundsätzlich mehr Kapital reserviert werden, um alle zukünftigen Rentenzahlungen finanzieren zu können [Ort16]. Dies zeigt sich auch im höheren Verlauf des Deckungskapitals, wenn die Sterbetafel für Frauen verwendet wird.

Im Gegensatz dazu wird durch die bei der Kalkulation verwendete Unisex-Sterbetafel die Sterbewahrscheinlichkeit für Männer unterschätzt, da die Daten durch die niedrigeren Sterbewahrscheinlichkeiten für Frauen beeinflusst sind. Für eine männliche versicherte Person wird daher eine höhere Reserve aufgebaut, da erwartet wird, dass mehr Rentenzahlungen finanziert werden müssen, als dies bei Kalkulation mit der Sterbetafel für Männer der Fall wäre.

Für diese Versicherung ist also das biometrische Risiko gegensätzlich für Männer und Frauen. Während für Männer durch die Unisex-Kalkulation „zu viel“ Geld reserviert wird, wird der Kapitalbedarf für Frauen unterschätzt.

Weiterhin wird nun anstelle der verwendeten flachen Zinsstrukturkurve  $\bar{I} = (0,009, 0,009, \dots, 0,009)$  eine nicht-flache Forward Rate Zinsstrukturkurve  $I^F$  angenommen. Das heißt die flache Zinsstrukturkurve ändere sich um

$$\Delta I^F = I^F - \bar{I}.$$

Hierfür sei die Zinsstrukturkurve  $I^F$  angenommen, die in Abbildung 5.6 dargestellt ist<sup>7</sup>.

Mit dem Konzept der Forward Rate Duration lässt sich nun der Verlauf des Deckungskapitals  ${}_tV_x$  nach Änderung  $\Delta I^F = I^F - \bar{I}$  der Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  annähern. Beispielsweise ist für den Zeitpunkt  $t = 35$  das Deckungskapital  ${}_{35}V_x = BW_F(Z^{(35\tilde{L})}, \bar{I}) = 18.193\text{€}$ . Für

<sup>7</sup>Die verwendeten Werte sind in Anhang A.1.2, Tabelle A.3 zu finden.

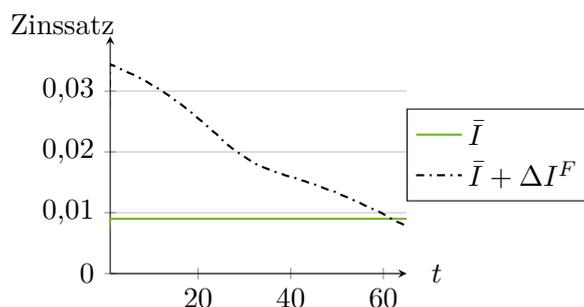


Abbildung 5.6.: Darstellung der Zinsstrukturkurven  $I^F$  und  $I^F + \Delta I^F$

$t = 35$  beträgt die Forward Rate Duration  $D_F(Z^{(35\tilde{L})}, \bar{I}, \Delta I^F) = 0,0621$  und die Forward Rate Konvexität  $C_F(Z^{(35\tilde{L})}, \bar{I}, \Delta I^F) = 0,0824$ . Der Wert der Forward Rate Duration zeigt, dass das Deckungskapital aufgrund der unterstellten Zinsänderung um ca. 6% sinkt.

Mit diesen Werten erhält man für die Approximationen des Deckungskapitals zum Zeitpunkt  $t = 35$  :

$$\begin{aligned} {}_{35}V_x^D(\bar{I} + \Delta I^F) &= {}_{35}V_x \cdot \left(1 - D_F(Z^{(35\tilde{L})}, \bar{I}, \Delta I^F)\right) \\ &= 17.062,38 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} {}_{35}V_x^C(\bar{I} + \Delta I^F) &= {}_{35}V_x \cdot \left(1 - D_F(Z^{(35\tilde{L})}, \bar{I}, \Delta I^F) + \frac{1}{2} \cdot C_F(Z^{(35\tilde{L})}, \bar{I}, \Delta I^F)\right) \\ &= 17.812,26. \end{aligned}$$

Die Werte für das mit der flachen Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  kalkulierte Deckungskapital  ${}_tV_x$  für alle Zeitpunkte  $t = 0, \dots, 65$ , im Vergleich mit den Approximationen  ${}_tV_x^D(\bar{I} + \Delta I^F)$  und  ${}_tV_x^C(\bar{I} + \Delta I^F)$  des Deckungskapitals nach Änderung der Zinsstrukturkurve sind in Abbildung 5.7 dargestellt.

An der Abbildung 5.7 wird deutlich, dass in der ersten Hälfte ( $t \leq 35$ ) der Vertragslaufzeit die Änderung der Zinsstrukturkurve zu einer sichtbaren Veränderung des Deckungskapitals führt. Auch ist erkennbar, dass die Approximationen  ${}_tV_x^D(\bar{I} + \Delta I^F)$  (grüne Kurve) und  ${}_tV_x^C(\bar{I} + \Delta I^F)$  (rote Kurve) unterschieden werden können. Allerdings werden die Unterschiede in der zweiten Hälfte ( $t > 35$ ) geringer und die Kurven lassen sich kaum noch unterscheiden. Hier führt die angenommene Änderung der Zinsstrukturkurve nur zu einer geringen Änderung des Deckungskapitals. Das Zinsänderungsrisiko nimmt damit im Zeitverlauf ab, da die Abweichungen zum kalkulierten Deckungskapital geringer werden.

Schließlich lassen sich auch mittels der kombinierten Duration bzw. der kombinierten Konvexität beide Szenarien simultan untersuchen. D.h., es wird sowohl die Änderung

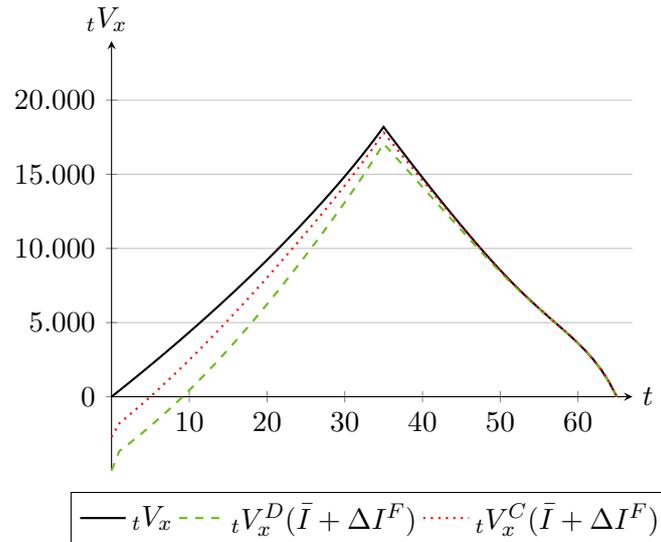


Abbildung 5.7.: Vergleich des Verlaufs des Deckungskapitals bei Änderung  $\Delta I^F$  der flachen flachen Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$ .

$\Delta I^F = I^F - \bar{I}$  der flachen Zinsstrukturkurve  $\bar{I}$  unterstellt, als auch die Änderungen der Unisex-Sterbetafel  $Q_x^U$  zu geschlechtsspezifischen Sterbetafeln für Männer  $Q_x^M$  bzw. Frauen  $Q_x^F$ .

Für die Änderung zur Sterbetafel für Männer  $\Delta Q_x^M = Q_x^M - Q_x^U$ , sowie die Änderung der Zinsstrukturkurve  $\Delta I^F$  erhält man für die kombinierte Duration

$$\begin{aligned} D_K &= D_F(Z^{(35\tilde{L})}, \bar{I}, \Delta I^F) + aD(35\tilde{L}, Q_x^U, \Delta Q_x^M) \\ &= 0,0621 + 0,0712 = 0,1333. \end{aligned}$$

Die unterstellten Änderungen bewirken, dass das Deckungskapital zum Zeitpunkt  $t = 35$  um ca. 13% sinkt. Für die Änderung zur Sterbetafel für Frauen  $\Delta Q_x^F = Q_x^F - Q_x^U$  bei gleichzeitiger Änderung der Zinsstrukturkurve  $\Delta I^F$  gilt hingegen für die kombinierte Duration:

$$\begin{aligned} D_K &= D_F(Z^{(35\tilde{L})}, \bar{I}, \Delta I^F) + aD(35\tilde{L}, Q_x^U, \Delta Q_x^F) \\ &= 0,0621 - 0,0591 = 0,003. \end{aligned}$$

In diesem Fall wirkt das Zinsänderungsrisiko dem biometrischen Risiko entgegen, sodass sich das Deckungskapital  ${}_{35}V_x$  um lediglich 0,3% ändert.

Für die kombinierte Konvexität  $C_K$  der jeweiligen Fälle betragen die Werte

$$\begin{aligned} C_K &= C_F(Z^{(35\tilde{L})}, \bar{I}, \Delta I^F) + aC(35\tilde{L}, Q_x^U, \Delta Q_x^M) \\ &= 0,0824 + 0,00001746 = 0,08242 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} C_K &= C_F(Z^{(35\tilde{L})}, \bar{I}, \Delta I^F) + aC(35\tilde{L}, Q_x^U, \Delta Q_x^F) \\ &= 0,0824 + 0,00001695 = 0,08241. \end{aligned}$$

Schließlich können mit diesen Werten die Approximationen des Deckungskapitals  ${}_{35}V_x$  nach Änderung der Zinsstrukturkurve und der Sterbetafel berechnet werden. Für den Fall einer männlichen versicherten Person gilt

$$\begin{aligned} {}_tV_x^D(\bar{I} + \Delta I^F, Q_x^U + \Delta Q_x^M) &= {}_tV_x \cdot (1 - D_K) \\ &= 15.766,80 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} {}_tV_x^C(\bar{I} + \Delta I^F, Q_x^U + \Delta Q_x^M) &= {}_tV_x \cdot \left(1 - D_K + \frac{1}{2} \cdot C_K\right) \\ &= 16.516,84. \end{aligned}$$

Analog errechnet man für eine weibliche versicherte Person:

$$\begin{aligned} {}_tV_x^D(\bar{I} + \Delta I^F, Q_x^U + \Delta Q_x^F) &= {}_tV_x \cdot (1 - D_K) \\ &= 18.137,01 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} {}_tV_x^C(\bar{I} + \Delta I^F, Q_x^U + \Delta Q_x^F) &= {}_tV_x \cdot \left(1 - D_K + \frac{1}{2} \cdot C_K\right) \\ &= 18.887,04. \end{aligned}$$

Abbildung 5.8 stellt den Verlauf des mit einer flachen Zinsstrukturkurve und der Unisex-Sterbetafel kalkulierten Deckungskapitals (schwarze Kurve) im Vergleich zum Verlauf des Deckungskapital nach Änderung der Zinsstrukturkurve und der Sterbetafel dar. Dabei zeigt die Abbildung auf der linken Seite die Approximationen  ${}_tV_x^D(\bar{I} + \Delta I^F, Q_x^U + \Delta Q_x^M)$  (grün, gestrichelte Kurve) und  ${}_tV_x^D(\bar{I} + \Delta I^F, Q_x^U + \Delta Q_x^M)$  (rot, gepunktete Kurve) nach Änderung der Zinsstrukturkurve und Verwendung der Sterbetafel für Männer dar. Entsprechend sind auf der rechten Seite die Approximationen  ${}_tV_x^D(\bar{I} + \Delta I^F, Q_x^U + \Delta Q_x^F)$  (grün, gestrichelte Kurve) und  ${}_tV_x^D(\bar{I} + \Delta I^F, Q_x^U + \Delta Q_x^F)$  (rot, gepunktete Kurve) bei Verwendung der geschlechtsspezifischen Sterbetafel für Frauen zu sehen.

Am Vergleich der beiden Darstellungen erkennt man den unterschiedlichen Verlauf des Deckungskapitals bei der Verwendung der geschlechtsspezifischen Sterbetafeln. Für Männer ergeben sich deutlichere Abweichungen von dem ursprünglich kalkulierten Verlauf des Deckungskapitals. Hier ist zu erkennen, dass das Deckungskapital aufgrund der Änderungen geringer ausfällt, als kalkuliert wurde. In diesem Fall führt das Zinsänderungsrisiko

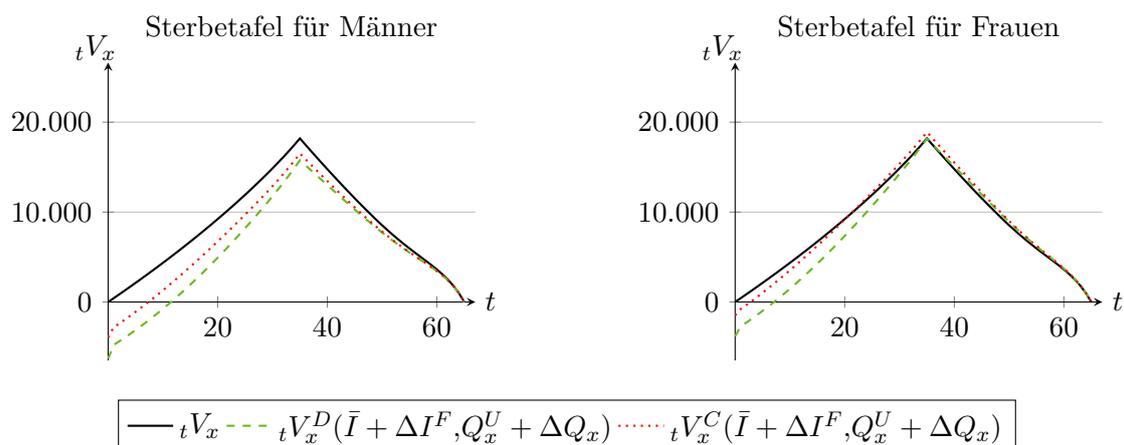


Abbildung 5.8.: Verlauf des Deckungskapitals im Vergleich bei Änderung der Zinsstrukturkurve, sowie der Verwendung der geschlechtsspezifischen Sterbetafeln.

in Kombination mit dem biometrischen Risiko dazu, dass das Versicherungsunternehmen weniger Kapital reservieren muss, um alle erwarteten Rentenleistungen finanzieren zu können.

Bei Verwendung der Sterbetafel für Frauen und gleichzeitiger Änderung der flachen Zinsstrukturkurve ergibt sich nur in den ersten Jahren ein geringeres Deckungskapital. Für  $t \geq 35$  liegt der Verlauf des veränderten Deckungskapitals oberhalb des Verlauf des kalkulierten, sodass aufgrund der Änderungen mehr Kapital reserviert werden muss. Das kombinierte Änderungsrisiko fällt hier allerdings deutlich geringer aus, da das approximierte Deckungskapital weniger stark vom kalkulierten Deckungskapital abweicht.

◇



## Kapitel 6

# Weitere Anwendungen des Durationskonzepts

Das Konzept der biometrischen Duration wurde bisher nur verwendet, um das Änderungsrisiko resultierend aus einer Änderung der Sterbetafel  $Q_x$  zu quantifizieren. Der Begriff des biometrischen Risikos umfasst allerdings auch das Risiko resultierend aus Änderungen weiterer biometrischer Daten, wie z.B. Invalidisierungswahrscheinlichkeiten (s. Abschnitt 5.3). In diesem Kapitel wird aufgezeigt, wie derartige Änderungsrisiken auch mit dem Konzept der biometrischen Duration bemessen werden können. Dazu wird gezeigt, wie sich typische Barwerte, die zur Kalkulation von Berufsunfähigkeitsversicherungen benötigt werden, als erwartete Barwerte der Form  $aBW(Z, I^F, Q_x)$  darstellen lassen. Mithilfe dieser Darstellungen können die Größen der biometrischen Duration und der biometrischen Konvexität direkt formuliert und zur Quantifizierung der Änderungsrisiken genutzt werden.

Weiterhin wird auch am Beispiel des inflationsbereinigten Barwerts gezeigt, dass die Konzepte zur Quantifizierung von Änderungsrisiken auch angewendet werden können, wenn Änderungen nicht-biometrischer Daten vorliegen. Dabei wird das Änderungsrisiko bemessen, das durch die Änderung von Inflationsraten entsteht. Diese Untersuchung verdeutlicht die Möglichkeit der Anwendung der biometrischen Duration für die Risikoanalyse, wenn Änderungsrisiken außerhalb der Lebensversicherungsmathematik quantifiziert werden sollen.

Dieses Kapitel zeigt somit erweiterte Anwendungsmöglichkeiten des Konzepts der biometrischen Duration auf.

### 6.1. Durationsmaße für Berufsunfähigkeitsversicherungen

Für die Kalkulation von Versicherungsprodukten der betrieblichen Altersvorsorge werden, neben einer Zinsstrukturkurve und Sterbewahrscheinlichkeiten, weitere Rechnungsgrundlagen benötigt, mit denen die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Berufsunfähigkeit bestimmt werden können. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie mithilfe des Konzepts der biometrischen Duration, die Auswirkungen von Änderungen der für die Kalkulation

von Berufsunfähigkeitsversicherungen benötigten Daten bestimmt werden können. Dazu werden Beitrags- und Leistungsbarwerte betrachtet, die bei der Kalkulation von Versicherungsprodukten der betrieblichen Altersvorsorge verwendet werden.

Die Leistungen eines Versicherungsvertrags orientieren sich am Verbleiben oder Ausscheiden aus einem Kollektiv. Bisher wurde als Ausscheideursache ausschließlich der Tod betrachtet und damit nur das Kollektiv der „Lebenden“. In der betrieblichen Altersvorsorge tritt als Ausscheideursache zusätzlich die *Invalidität* auf. Damit wird die versicherte Person mehreren Risiko gleichzeitig ausgesetzt. Das Kollektiv wird dafür in die Gruppen der sogenannten „Aktiven“, „Invaliden“ und „Toten“ unterteilt. Ein *Aktiver* ist dabei eine nicht-invalide lebende Person.

Scheidet eine Person aus dem Kollektiv der „Aktiven“ aufgrund der Ausscheideursache „Invalidität“ aus, so wechselt die Person in das Kollektiv der „Invaliden“. Scheidet hingegen ein Aktiver oder ein Invaliden aufgrund von Tod aus dem jeweiligen Kollektiv aus, so wechselt die Person in das Kollektiv der „Toten“. Dabei ist es auch möglich, dass die Ursache der Berufsunfähigkeit nicht mehr vorliegt, d.h. dass die invalide Person gesundet und wieder einer Arbeitstätigkeit nachgehen kann. In diesem Fall spricht man von der *Reaktivierung* der versicherten Person, die dann in das Kollektiv der „Aktiven“ zurückkehrt [Kah18].

Für die Kalkulation von Berufsunfähigkeitsversicherungen werden zur Bestimmung der Eintrittswahrscheinlichkeiten der Leistungsfälle sogenannte *Invalidisierungswahrscheinlichkeiten* berücksichtigt. Sie geben die Wahrscheinlichkeit an, mit der eine versicherte Person z.B. aufgrund von Berufsunfähigkeit, Erwerbsunfähigkeit oder Arbeitsunfähigkeit aus einem dem Kollektiv der „Aktiven“ ausscheidet [Wag17].

Wie auch Sterbewahrscheinlichkeiten werden Invalidisierungswahrscheinlichkeiten nach verschiedenen Risikomerkmale differenziert. Dabei wird hier neben den Merkmalen Alter und Geschlecht auch nach dem Beruf (bzw. der Berufsgruppe) der versicherten Person unterschieden. Damit sind die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten, ebenso wie die Sterbewahrscheinlichkeiten „von äußeren Rahmenbedingungen beeinflussbar und ändern sich im Zeitablauf, z.B. in Abhängigkeit von Konjunkturzyklen oder der jeweiligen Praxis von Frühverrentungen in der Sozialversicherung“ [Wag17].

Das Invaliditätsrisiko ist besonders durch den Beruf und das Maß der Eignung für die ausgeübte Berufstätigkeit beeinflusst [Rue64]. Es ist klar, dass nicht jeder Beruf die gleichen Invalidisierungswahrscheinlichkeiten mit sich bringt und auch nicht jede Krankheit bzw. nicht jeder Gesundheitsschaden die gleichen Auswirkungen auf die Ausübung des Berufs hat [Neu64]. Ein Berufswechsel oder auch bereits eine Änderung der Tätigkeit kann daher Änderungen der Invalidisierungswahrscheinlichkeiten nach sich ziehen.

Auch technische Fortschritte im Bereich der Arbeitssicherheit, neuere gesetzliche Anforderungen, sowie ein allgemein gestiegenes Bewusstsein für Gefahrenquellen führen zu sich

ändernden Invalidisierungswahrscheinlichkeiten. Auch ist in den letzten Jahren die Sensibilisierung für psychische Krankheiten, sowie deren Anerkennung angestiegen. So stellten im Jahr 2017 psychische und Nervenkrankheiten die häufigste Ursache für Berufs- und Erwerbsunfähigkeit dar (laut dem Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft e.V. und der Deutschen Rentenversicherung Bund, s. [Wic19a; Wic19b]).

Trends und Veränderungen in den Ursachen für Berufsunfähigkeit und damit auch in den Eintrittswahrscheinlichkeiten lassen sich bei der Kalkulation von Berufsunfähigkeitsversicherungen nur schwer berücksichtigen. Damit führen Invalidisierungswahrscheinlichkeiten auch zu einem biometrischen Risiko, da sich ändernde Wahrscheinlichkeiten auf die Bewertung von Zahlungsreihen der betrieblichen Altersversorgung auswirken. Um das biometrische Risiko gleichermaßen mit dem Konzept der biometrischen Duration messen zu können, werden im folgenden klassische Barwerte der Pensionsversicherungsmathematik vorgestellt und die Anwendung der biometrischen Duration für die betriebliche Altersvorsorge diskutiert. Zunächst werden dazu die Wahrscheinlichkeiten eingeführt und beschrieben, die für die Berechnung der Eintrittswahrscheinlichkeiten der Beitrags- und Leistungszahlungen von Produkten der betrieblichen Altersversorgung notwendig sind.

Durch die Ausscheideursache „Tod“ scheidet eine  $x$ -jährige aktive Person aus dem Kollektiv der Aktiven mit Wahrscheinlichkeit  $q_x^{aa}$  in das Kollektiv der Toten aus. Dabei bezeichnet  $q_x^{aa}$  die sogenannte *Aktivensterbewahrscheinlichkeit*, d.h. die einjährige Wahrscheinlichkeit als  $x$ -jährige aktive Person zu sterben. Die Aktivensterbewahrscheinlichkeiten  $q_{x+t}^{aa}$  für  $t = 0, 1, \dots, \omega - x$  werden in der *Aktivensterbetafel*  $Q_x^{aa}$  zusammengefasst,

$$Q_x^{aa} = (q_x^{aa}, q_{x+1}^{aa}, \dots, q_{\omega}^{aa}).$$

Der Übergang in das Kollektiv der Invaliden erfolgt für eine  $x$ -jährige aktive Person mit der *Invalidisierungswahrscheinlichkeit*  $i_x$ , d.h. der einjährigen Wahrscheinlichkeit als  $x$ -jährige aktive Person invalide zu werden [Kah18]. Für die *Invalidentafel*, die die einjährigen Invalidisierungswahrscheinlichkeiten einer  $x$ -jährigen Person enthält, wird hier die Bezeichnung

$$I_x = (i_x, i_{x+1}, \dots, i_{\omega})$$

verwendet.

Umgekehrt beschreibt die Größe  $r_{z,x}$  die Wahrscheinlichkeit, dass eine  $x$ -jährige Person, die mit Alter  $z \leq x$  invalide geworden ist, in das Kollektiv der Aktiven zurückkehrt. Die Größe  $r_{z,x}$  wird als *Reaktivierungswahrscheinlichkeit* bezeichnet [Kah18]. Für die Tafel der entsprechenden Reaktivierungswahrscheinlichkeiten einer  $x$ -jährigen Person wird die Bezeichnung  $R_{z,x}$  verwendet, mit

$$R_{z,x} = (r_{z,x}, r_{z,x+1}, \dots, r_{z,\omega}).$$

Eine invalide Person scheidet aufgrund der Ausscheideursache „Tod“ aus dem Kollektiv der Invaliden mit der Wahrscheinlichkeit  $q_{z,x}^i$  in das Kollektiv der „Toten“ aus [Kah18]. D.h.  $q_{z,x}^i$  bezeichnet die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit einer  $x$ -Jährigen Person, die im Alter  $z \leq x$  Jahren invalide geworden ist. Für eine  $x$ -jährige Person, die im Alter von  $z \leq x$  Jahren invalide geworden ist, sind die Sterbewahrscheinlichkeiten in der *Invaliden-Sterbetafel*

$$Q_{z,x}^i = (q_{z,x}^i, q_{z,x+1}^i, \dots, q_{z,\omega}^i)$$

zusammengefasst.

Die möglichen Übergänge zwischen den Kollektiven sind in Abbildung 6.1 visualisiert.

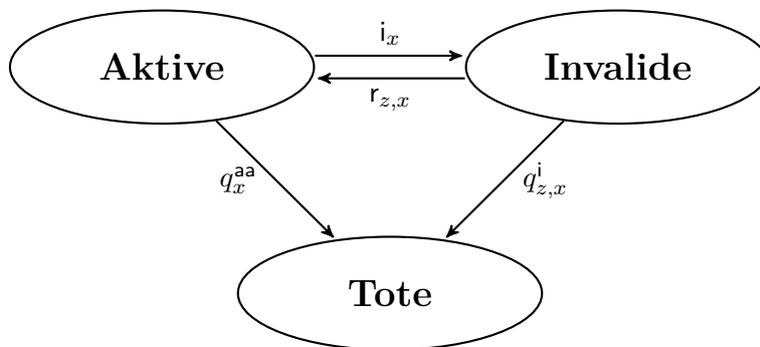


Abbildung 6.1.: Übergänge bei Berufsunfähigkeitsversicherungen mit den Ausscheideursachen „Invalidität“ und „Tod“ [Kah18].

Weiterhin bezeichnet  ${}_t p_x^{aa}$  die  $t$ -jährige Wahrscheinlichkeit, dass eine  $x$ -jährige aktive Person nach  $t$  Jahren noch zum Aktiven-Kollektiv gehört [Kah18]. Es gilt<sup>1</sup>

$${}_t p_x^{aa} = \prod_{k=0}^{t-1} (1 - q_{x+k}^{aa}) \cdot (1 - i_{x+k}).$$

Außerdem bezeichnet  ${}_t p_{z,x}^i$  die  $t$ -jährige Wahrscheinlichkeit, dass eine  $x$ -jährige invalide Person nach  $t$  Jahren noch zum Invaliden-Kollektiv gehört [Kah18]. Es gilt<sup>2</sup>

$${}_t p_{z,x}^i = \prod_{k=0}^{t-1} (1 - q_{z,x+k}^i) \cdot (1 - r_{z,x+k}).$$

Für eine Versicherung mit Berufsunfähigkeitsschutz endet die Beitragszahlung typischerweise, sobald der Fall der Berufsunfähigkeit eintritt. Die Beiträge werden daher nur gezahlt, solange die versicherte Person zum Kollektiv der Aktiven zählt.

<sup>1</sup>Hierbei wurde der multiplikative Ansatz zur Beschreibung der Entwicklung der Anzahl  $\ell_x^{aa}$  der aktiven Lebenden im Kollektiv berücksichtigt (s. [Kah18]), d.h.  $\ell_{x+1}^{aa} = \ell_x^{aa} \cdot (1 - q_x^{aa}) \cdot (1 - i_x)$ .

<sup>2</sup>Hierbei wurde der multiplikative Ansatz zur Beschreibung der Entwicklung der Anzahl  $\ell_{z,x}^i$  der Lebenden im Invalidenkollektiv berücksichtigt (s. [Kah18]), d.h.  $\ell_{z,x+1}^i = \ell_{z,x}^i \cdot (1 - q_{z,x}^i) \cdot (1 - r_{z,x})$ .

Der Beitragsbarwert einer Versicherung mit  $n$ -jähriger Beitragszahlungsdauer hängt daher von den Größen  $Q_x^{\text{aa}}$ ,  $l_x$  und einer Zinsstrukturkurve, hier  $I^F$ , ab. Die zu zahlenden Beiträge seien durch den Beitragsvektor  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}, 0)$  gegeben. Der Beitragsbarwert kann damit als erwarteter Barwert  $aBW(Z, I^F, Q_x^{\text{aa}})$  der Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}, 0)$  mit

$$Z_j = \prod_{k=0}^{j-1} (1 - i_{x+k}) \cdot \pi_j, \quad j = 0, \dots, n-1$$

aufgefasst werden. Es gilt (vgl. bspw. [Kah18])

$$\begin{aligned} aBW(Z, I^F, Q_x^{\text{aa}}) &= \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{j-1} (1 - q_{x+k}^{\text{aa}}) \cdot Z_j \cdot \prod_{k=1}^j (1 + i_k)^{-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{j-1} (1 - q_{x+k}^{\text{aa}}) \cdot \prod_{k=0}^{j-1} (1 - i_{x+k}) \cdot \pi_j \cdot v^{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} {}_j p_x^{\text{aa}} \cdot \pi_j \cdot v^{(j)}. \end{aligned}$$

Dieser Beitragsbarwert ist nun von drei (möglicherweise) risikobehafteten Größen abhängig. Die entsprechenden Terme im Barwert, d.h. die mehrjährige Wahrscheinlichkeit als Aktiver zu überleben, sowie die mehrjährige Wahrscheinlichkeit nicht invalide zu werden, lassen sich analog zur mehrjährigen Überlebenswahrscheinlichkeit als Produkt der korrespondierenden einjährigen Wahrscheinlichkeiten darstellen (Vgl.(5.2)). Damit kann auch die Größe  $\prod_{k=0}^{j-1} (1 - i_{x+k})$  gemäß Abschnitt 5.3.2 als Aufzinsungsfaktor interpretiert werden.

Es ist offensichtlich, dass die Faktoren  $\prod_{k=0}^{j-1} (1 - q_{x+k}^{\text{aa}})$  und  $\prod_{k=0}^{j-1} (1 - i_{x+k})$  in ihrer multiplikativen Struktur mit der Struktur der  $j$ -jährigen Überlebenswahrscheinlichkeit  ${}_j p_x$  identisch sind, und sich lediglich in den konkreten Werten der verwendeten Größen von  ${}_j p_x$  unterscheiden. Das bedeutet auch, dass die Ausscheideursachen „Invalidität“ und „Tod“ formal nicht unterschieden werden können und somit der Beitragsbarwert als erwarteter Barwert  $aBW(Z', l_x, I^F)$  der Zahlungsreihe  $Z'$  mit

$$Z'_j = \prod_{k=0}^{j-1} (1 - q_{x+k}^{\text{aa}}) \cdot \pi_j, \quad \text{für } j = 0, \dots, n-1$$

dargestellt werden kann:

$$aBW(Z', I^F, l_x) = \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{j-1} (1 - i_{x+k}) \cdot \underbrace{\prod_{k=0}^{j-1} (1 - q_{x+k}^{\text{aa}}) \cdot \pi_j}_{=Z'_j} \cdot \prod_{k=1}^j (1 + i_k)^{-1}.$$

Sowohl für die Bemessung des biometrischen Risikos, resultierend aus Änderungen in

der Aktivensterbetafel als auch aus Änderungen in der Invalidentafel, kann somit das Konzept der biometrischen Duration angewendet werden.

Die biometrische Duration für die Betrachtung des biometrischen Risiko bei einer gegebenen Änderung

$$\Delta Q_x^{\text{aa}} = (\Delta q_x^{\text{aa}}, \Delta q_{x+1}^{\text{aa}}, \dots, \Delta q_{\omega}^{\text{aa}})$$

der Aktivensterbetafel  $Q_x^{\text{aa}}$  ergibt sich direkt aus Anwendung von Definition 5.14 bzw. Satz 5.15 für die Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}, 0)$ , mit

$$Z_j = \pi_j \cdot \prod_{k=0}^{j-1} (1 - i_{x+k})$$

für  $j = 0, \dots, n-1$  und  $Q_x := Q_x^{\text{aa}}$ . Für die Approximation des erwarteten Barwerts  $aBW(Z, I^F, Q_x^{\text{aa}} + \Delta Q_x^{\text{aa}})$  nach Änderung der Aktivensterbetafel erhält man für die biometrische Duration  $aD(Z, Q_x^{\text{aa}}, \Delta Q_x^{\text{aa}})$  der Zahlungsreihe  $Z$ :

$$\begin{aligned} aD(Z, Q_x^{\text{aa}}, \Delta Q_x^{\text{aa}}) &= \frac{-1}{aBW(Z, I^F, Q_x^{\text{aa}})} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial aBW(Z, I^F, Q_x^{\text{aa}})}{\partial q_{x+k}^{\text{aa}}} \Delta q_{x+k}^{\text{aa}} \\ &= \frac{1}{aBW(Z, I^F, Q_x^{\text{aa}})} \cdot \sum_{j=1}^n j p_x^{\text{aa}} \cdot \pi_j \cdot v^{(j)} \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{1 + (-q_{x+k}^{\text{aa}})} \cdot \Delta q_{x+k}^{\text{aa}} \right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Ebenso erhält man aus (5.23) in Satz 5.18 die Konvexitätsgröße  $aC(Z, Q_x^{\text{aa}}, \Delta Q_x^{\text{aa}})$  der Zahlungsreihe  $Z$

$$\begin{aligned} aC(Z, Q_x^{\text{aa}}, \Delta Q_x^{\text{aa}}) &= \frac{1}{aBW(Z, I^F, Q_x^{\text{aa}})} \cdot \sum_{j=2}^n j p_x^{\text{aa}} \cdot \pi_j \cdot v^{(j)} \cdot 2 \cdot \sum_{k=0}^{j-2} \frac{1}{1 - q_{x+k}^{\text{aa}}} \Delta q_{x+k}^{\text{aa}} \cdot \sum_{l=k+1}^{j-1} \frac{1}{1 - q_{x+l}^{\text{aa}}} \Delta q_{x+l}^{\text{aa}}. \end{aligned}$$

Der erwartete Barwert  $aBW(Z, I^F, Q_x^{\text{aa}} + \Delta Q_x^{\text{aa}})$  nach Änderung der Aktivensterbetafel kann damit gemäß (5.22) approximiert werden durch

$$\begin{aligned} aBW(Z, I^F, Q_x^{\text{aa}} + \Delta Q_x^{\text{aa}}) &= aBW(Z, I^F, Q_x^{\text{aa}}) \cdot \left( 1 - aD(Z, Q_x^{\text{aa}}, \Delta Q_x^{\text{aa}}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot aC(Z, Q_x^{\text{aa}}, \Delta Q_x^{\text{aa}}) \right). \end{aligned}$$

Zur Approximation des erwarteten Barwerts  $aBW(Z', I^F, l_x + \Delta l_x)$  nach einer Änderung in der Invalidentafel kann mit  $Q_x := l_x$  die biometrische Duration der Zahlungsreihe  $Z'$  mit  $Z'_j = \pi_j \cdot \prod_{k=0}^{j-1} (1 - q_{x+k}^{\text{aa}})$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ , bzw. die biometrische Konvexität der

Zahlungsreihe  $Z'$  verwendet werden. Mit den Änderungsgrößen

$$\Delta l_x = (\Delta i_x, \Delta i_{x+1}, \dots, \Delta i_\omega)$$

erhält man für die biometrische Duration  $aD(Z', l_x, \Delta l_x)$  der Zahlungsreihe  $Z'$  aus Definition 5.14 bzw. Satz 5.15:

$$\begin{aligned} aD(Z', l_x, \Delta l_x) &= \frac{-1}{aBW(Z', I^F, l_x)} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial aBW(Z, I^F, l_x)}{\partial i_{x+k}} \Delta i_{x+k} \\ &= \frac{1}{aBW(Z, I^F, l_x)} \cdot \sum_{j=1}^n j p_x^{aa} \cdot \pi_j \cdot v^{(j)} \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{1 + (-i_{x+k})} \cdot \Delta i_{x+k} \right), \end{aligned}$$

Entsprechend folgt für die biometrische Konvexität  $aC(Z', l_x, \Delta l_x)$  der Zahlungsreihe  $Z'$  aus Satz 5.18:

$$\begin{aligned} aC(Z', l_x, \Delta l_x) &= \frac{1}{aBW(Z', I^F, l_x)} \cdot \sum_{j=2}^n j p_x^{aa} \cdot \pi_j \cdot v^{(j)} \cdot 2 \cdot \sum_{k=0}^{j-2} \frac{1}{1 - i_{x+k}} \Delta i_{x+k} \cdot \sum_{l=k+1}^{j-1} \frac{1}{1 - i_{x+l}} \Delta i_{x+l}. \end{aligned}$$

Für den erwarteten Barwert  $aBW(Z', I^F, l_x + \Delta l_x)$  nach Änderung der Invalidentafel gilt dann gemäß (5.22) die Approximation

$$aBW(Z', I^F, l_x + \Delta l_x) = aBW(Z', I^F, l_x) \cdot \left( 1 - aD(Z', l_x, \Delta l_x) + \frac{1}{2} \cdot aC(Z', l_x, \Delta l_x) \right).$$

Hieraus wird deutlich, dass der Beitragsbarwert einer Versicherung mit Berufsunfähigkeitsschutz auch als erwarteter Barwert gemäß Definition 5.1 dargestellt werden kann, um dadurch das Konzept der biometrischen Duration zu verwenden und biometrische Änderungsrisiken zu quantifizieren. Hierbei kann das biometrische Änderungsrisiko aufgrund einer Änderung der Aktivensterbetafel  $Q_x^{aa}$  bzw. einer Änderung der Invalidentafel  $l_x$  quantifiziert werden, indem mit den dargestellten Größen die Änderung des erwarteten Barwerts approximiert wird.

Weiterhin kann der betrachtete Beitragsbarwert auch als Barwert  $BW_F(Z, I^F)$  der Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}, 0)$  mit  $Z_j = j p_x^{aa} \cdot \pi_j$ ,  $j = 0, \dots, n-1$  interpretiert werden,

d.h.

$$\begin{aligned} aBW(Z, I^F, Q_x^{aa}) &= \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{j-1} (1 - q_{x+k}^{aa}) \cdot \prod_{k=0}^{j-1} (1 - i_{x+k}) \cdot \pi_j \cdot v^{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} Z_j \cdot v^{(j)} = BW_F(Z, I^F). \end{aligned}$$

Diese Interpretation erlaubt es, das Konzept der Forward Rate Duration direkt anzuwenden, um das Zinsänderungsrisiko zu quantifizieren, falls eine Änderung  $\Delta I^F$  der Forward Rate Zinsstrukturkurve untersucht werden soll. Daher kann mithilfe der Forward Rate Duration  $D_F(Z, I^F, \Delta I^F)$  bzw. der Forward Rate Konvexität  $C_F(Z, I^F, \Delta I^F)$  der Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}, 0)$  mit  $Z_j = {}_j p_x^{aa} \cdot \pi_j$ ,  $j = 0, \dots, n-1$  die Änderung des Beitragsbarwerts aufgrund einer Änderung  $\Delta I^F$  der Zinsstrukturkurve  $I^F$  berechnet werden (analog zu Abschnitt 5.2).

Auch Leistungsbarwerte von Produkten der betrieblichen Altersversorgung, können als erwartete Barwerte der Form  $aBW(Z, I^F, Q_x)$  dargestellt werden, sodass das Konzept der biometrischen Duration verwendet werden kann, um hier das biometrische Risiko zu quantifizieren.

Dazu sei zunächst der Barwert einer noch maximal  $n$  Jahre zu zahlenden Invalidenrente für eine  $x$ -jährige Person betrachtet, bei der bereits im Alter von  $z \leq x$  die Invalidität eingetreten ist. Die Leistung dieser Versicherung endet vor Ablauf von  $n$  Jahren, falls die versicherte, invalide Person stirbt oder wieder in die Berufsfähigkeit eintritt, also reaktiviert wird. Die Rentenzahlung zum Zeitpunkt  $j$  sei mit  $R_j$  für  $j = 0, \dots, n$  bezeichnet.

Der zugehörige Leistungsbarwert kann als erwarteter Barwert  $aBW(Z, I^F, Q_{z,x}^i)$  der Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  mit

$$Z_j = \prod_{k=0}^{j-1} (1 - r_{z,x+k}) \cdot R_j, \quad \text{für } j = 0, \dots, n$$

aufgefasst werden. Es gilt (vgl. bspw. [Kah18])

$$\begin{aligned} aBW(Z, I^F, Q_{z,x}^i) &= \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{j-1} (1 - q_{z,x+k}^i) \cdot \prod_{k=0}^{j-1} (1 - r_{z,x+k}) \cdot R_j \cdot v^{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} {}_j p_{z,x}^i \cdot R_j \cdot v^{(j)}. \end{aligned}$$

Im späteren Verlauf dieses Abschnitts wird, aus Gründen der Übersichtlichkeit, für den Barwert  $aBW(Z, I^F, Q_{z,x}^i)$  die in der Literatur gängige Kurzschreibweise  $\ddot{a}_{z,x:\overline{n}}^i$  verwendet

[HHD06; Kah18], d.h.

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{z,x:\overline{n}}^i &:= \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{j-1} (1 - q_{z,x+k}^i) \cdot \prod_{k=0}^{j-1} (1 - r_{z,x+k}) \cdot R_j \cdot v^{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} {}_j p_{z,x}^i \cdot R_j \cdot v^{(j)}.\end{aligned}\quad (6.2)$$

Wird eine lebenslang zahlbare Invalidenrente betrachtet, d.h.  $n = \omega - x$ , so wird für den Barwert der Invalidenrente die Bezeichnung  $\ddot{a}_{z,x}^i$  verwendet<sup>3</sup>. Diese Bezeichnung wird benötigt, um später den Anwartschaftsbarwert auf eine lebenslange Berufsunfähigkeitsrente übersichtlicher darstellen zu können.

Bei dem Leistungsbarwert einer Invalidenrente lässt sich für eine Risikobetrachtung während der Zeit der Berufsunfähigkeit die biometrische Duration direkt anwenden. Für eine gegebene Änderung

$$\Delta Q_{z,x}^i = (q_{z,x}^i, q_{z,x+1}^i, \dots, q_{z,\omega}^i)$$

der Invaliden-Sterbetafel  $Q_{z,x}^i$  eines  $x$ -jährigen Invaliden erhält man die biometrische Duration  $aD(Z, Q_{z,x}^i, \Delta Q_{z,x}^i)$  aus Anwendung von Definition 5.14 bzw. Satz 5.15 für die Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}, 0)$ , mit  $Z_j = \prod_{k=0}^{j-1} (1 - r_{z,x+k}) \cdot R_j$ ,  $j = 0, \dots, n$  und  $Q_x := Q_{z,x}^i$ :

$$\begin{aligned}aD(Z, Q_{z,x}^i, \Delta Q_{z,x}^i) &= \frac{-1}{aBW(Z, I^F, Q_{z,x}^i)} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial aBW(Z, I^F, Q_{z,x}^i)}{\partial q_{z,x+k}^i} \Delta q_{z,x+k}^i \\ &= \frac{1}{aBW(Z, I^F, Q_{z,x}^i)} \sum_{j=1}^n {}_j p_{z,x}^i \cdot R_j \cdot v^{(j)} \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{1 + (-q_{z,x+k}^i)} \Delta q_{z,x+k}^i \right).\end{aligned}$$

Aus Satz 5.18 folgt für die Zahlungsreihe  $Z$  die Konvexitätsgröße  $aC(Z, Q_{z,x}^i)$ :

$$\begin{aligned}aC(Z, Q_{z,x}^i, \Delta Q_{z,x}^i) &= \frac{1}{aBW(Z, I^F, Q_{z,x}^i)} \cdot \sum_{j=2}^n {}_j p_{z,x}^i \cdot R_j \cdot v^{(j)} \cdot 2 \cdot \sum_{k=0}^{j-2} \frac{1}{1 - q_{z,x+k}^i} \Delta q_{z,x+k}^i \cdot \sum_{l=k+1}^{j-1} \frac{1}{1 - q_{z,x+l}^i} \Delta q_{z,x+l}^i.\end{aligned}$$

Analog kann der Leistungsbarwert auch als erwarteter Barwert  $aBW(Z', R_{z,x}, I^F)$  der Zahlungsreihe  $Z' = (Z'_0, Z'_1, \dots, Z'_n)$  mit

$$Z'_j = \prod_{k=0}^{j-1} (1 - q_{z,x+k}^i) \cdot R_j, \quad j = 0, \dots, n$$

<sup>3</sup>In der Literatur werden die Bezeichnungen  $\ddot{a}_{z,x:\overline{n}}^i$ , bzw.  $\ddot{a}_{z,x}^i$  stets unter Anwendung einer flachen Zinsstrukturkurve verwendet (s. z.B. [HHD06; Kah18]).

dargestellt werden:

$$aBW(Z', I^F, R_{z,x}) = \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{j-1} (1 - r_{z,x+k}) \cdot \prod_{k=0}^{j-1} (1 - q_{z,x+k}^i) \cdot R_j \cdot v^{(j)}.$$

Für  $Q_x := R_{z,x}$  erhält man daher die biometrische Duration, bzw. die biometrische Konvexität der Zahlungsreihe  $Z'$  mit  $Z'_j = \prod_{k=0}^{j-1} (1 - q_{z,x+k}^i) \cdot R_j$ , wenn eine Änderung

$$\Delta R_{z,x} = (\Delta r_x, \Delta r_{x+1}, \dots, \Delta r_\omega)$$

der Reaktivierungswahrscheinlichkeiten angenommen wird. Für die Approximation des erwarteten Barwerts nach Änderung

$$\begin{aligned} aD(Z', R_{z,x}, \Delta R_{z,x}) &= \frac{-1}{aBW(Z', I^F, R_{z,x})} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial aBW(Z', I^F, R_{z,x})}{\partial r_{z,x+k}} \Delta r_{z,x+k} \\ &= \frac{1}{aBW(Z', I^F, R_{z,x})} \cdot \sum_{j=1}^n j p_{z,x}^j \cdot R_j \cdot v^{(j)} \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{1 + (-r_{z,x+k})} \cdot \Delta r_{z,x+k} \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} aC(Z', R_{z,x}, \Delta R_{z,x}) &= \frac{1}{aBW(Z', I^F, R_{z,x})} \cdot \sum_{j=2}^n j p_{z,x}^j \cdot R_j \cdot v^{(j)} \cdot 2 \cdot \sum_{k=0}^{j-2} \frac{1}{1 - r_{z,x+k}} \Delta r_{z,x+k} \cdot \sum_{l=k+1}^{j-1} \frac{1}{1 - r_{z,x+l}} \Delta r_{z,x+l}. \end{aligned}$$

Für die Quantifizierung des Zinsänderungsrisikos, d.h. für die Bemessung der Auswirkung einer Änderung der Forward Rate Zinsstrukturkurve auf den erwarteten Barwert der Invalidenrente, kann auch hier das Konzept der Forward Rate Duration angewendet werden. Dazu wird der Barwert der Invalidenrente als Barwert  $BW_F(Z, I^F)$  der Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  mit  $Z_j = j p_{z,x}^j \cdot R_j$ ,  $j = 0, \dots, n$  interpretiert, d.h.

$$\begin{aligned} aBW(Z, I^F, Q_{z,x}^i) &= \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{j-1} (1 - q_{z,x+k}^i) \cdot \prod_{k=0}^{j-1} (1 - r_{z,x+k}) \cdot R_j \cdot v^{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} Z_j \cdot v^{(j)} = BW_F(Z, I^F). \end{aligned}$$

Dadurch können zur Messung des Zinsänderungsrisikos die Forward Rate Duration  $D_F(Z, I^F, \Delta I^F)$ , sowie die Forward Rate Konvexität  $C_F(Z, I^F, \Delta I^F)$  der Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  mit  $Z_j = j p_{z,x}^j \cdot R_j$ ,  $j = 0, \dots, n$  verwendet werden.

Ein weiterer typischer Leistungsbarwert der betrieblichen Altersversorgung ist der Anwartschaftsbarwert einer aktiven  $x$ -jährigen Person auf eine lebenslange Berufsunfähigkeitsrente. Hierbei beginnt eine lebenslang zahlbare Rente, sobald der Fall der Berufsunfähigkeit, d.h. der Invalidität einsetzt. Die Zahlungen beginnen am Ende des Jahres, in dem die Invalidität eingesetzt hat [HHD06; Kah18].

Die Ausscheideleistung aufgrund der Ausscheideursache „Invalidität“ entspricht also einer lebenslangen Invalidenrente. D.h. für eine bei Vertragsabschluss  $x$ -jährige versicherte Person, beträgt der Wert der Ausscheideleistung der Periode  $[j, j + 1[$  dem Barwert  $\ddot{a}_{x+j, x+j+1}^i$  einer vorschüssig, lebenslänglich zahlbaren Invalidenrente einer  $x+j+1$ -jährigen Person, die seit dem Alter  $x + j$  invalide ist (vgl. (6.2)).

Es wird hierbei die Gleichverteilungsannahme der Leistungsfälle getroffen, d.h. die Annahme, dass der Leistungsfall in der Mitte des Jahres eintritt [Kah18]. Die erste Auszahlung der Invalidenrente beginnt am Ende der Periode, in der der Leistungsfall eingetreten ist. Daher muss bei der Barwertberechnung die Wahrscheinlichkeit berücksichtigt werden, dass der Invalide nach dem Leistungsfall im Alter  $z$  als  $z + 1/2$ -Jähriger noch das restliche Halbjahr bis zum Beginn der Rentenbezugszeit überlebt. Für die Darstellung dieser Wahrscheinlichkeit  ${}_{\frac{1}{2}}p_{z+\frac{1}{2}}^i$  wird die Beziehung  $(1 - \frac{1}{2}q_z^i) \cdot (1 - \frac{1}{2}q_{z+\frac{1}{2}}^i) = 1 - q_z^i$  und die Annahme der Linearität der unterjährigen Sterblichkeit (vgl. [Ger86]) verwendet. Es gilt:

$${}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^i = \frac{1 - q_x^i}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_x^i}.$$

Für die erwartete Leistung  $L_j^i$  der  $j + 1$ -ten Periode dieser Versicherung folgt dann:

$$\begin{aligned} L_j^i &= i_{x+j} \cdot {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^i \cdot \ddot{a}_{x+j, x+j+1}^i \cdot v_{j+1} \\ &= i_{x+j} \cdot \frac{1 - q_{x+j}^i}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_{x+j}^i} \cdot \ddot{a}_{x+j, x+j+1}^i \cdot v_{j+1}, \quad \text{für } j = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Damit kann der Anwartschaftsbarwert auf eine lebenslange Invalidenrente als erwarteter Barwert  $aBW(Z, Q_x^{aa}, I^F)$  der Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}, 0)$  mit

$$Z_j = \prod_{k=0}^{j-1} (1 - i_{x+k}) \cdot L_j^i, \quad \text{für } j = 0, \dots, n-1$$

formuliert werden (s.[HHD06]):

$$\begin{aligned} aBW(Z, I^F, Q_x^{aa}) &= \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{j-1} (1 - q_{x+k}^{aa}) \cdot \left( \prod_{k=0}^{j-1} (1 - i_{x+k}) \cdot i_{x+j} \cdot \frac{1 - q_{x+j}^i}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_{x+j}^i} \cdot \ddot{a}_{x+j, x+j+1}^i \cdot v_{j+1} \right) \cdot v^{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} j p_x^{aa} \cdot \left( i_{x+j} \cdot \frac{1 - q_{x+j}^i}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_{x+j}^i} \cdot \ddot{a}_{x+j, x+j+1}^i \cdot v_{j+1} \right) \cdot v^{(j)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} j p_x^{\text{aa}} \cdot L_j^i \cdot v^{(j)}.$$

Für die Betrachtung einer Änderung der Aktivensterbetafel  $Q_x^{\text{aa}}$  um

$$\Delta Q_x^{\text{aa}} = (\Delta q_x^{\text{aa}}, \Delta q_{x+1}^{\text{aa}}, \dots, \Delta q_{\omega}^{\text{aa}})$$

erhält man, analog zu (6.1), das Durationsmaß  $aD(Z, Q_x^{\text{aa}}, \Delta Q_x^{\text{aa}})$  der Zahlungsreihe  $Z$

$$aD(Z, Q_x^{\text{aa}}, \Delta Q_x^{\text{aa}}) = \frac{1}{aBW(L, I^F, Q_x^{\text{aa}})} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} j p_x^{\text{aa}} \cdot L_j^i \cdot v^{(j)} \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{1 + (-q_{x+k}^{\text{aa}})} \cdot \Delta q_{x+k}^{\text{aa}} \right),$$

sowie die Konvexität  $aC(Z, Q_x^{\text{aa}})$  der Zahlungsreihe  $Z$

$$\begin{aligned} aC(Z, Q_x^{\text{aa}}, \Delta Q_x^{\text{aa}}) \\ = \frac{1}{aBW(Z, I^F, Q_x^{\text{aa}})} \cdot \sum_{j=2}^{n-1} j p_x^{\text{aa}} \cdot L_j^i \cdot v^{(j)} \cdot 2 \cdot \sum_{k=0}^{j-2} \frac{1}{1 - q_{x+k}^{\text{aa}}} \Delta q_{x+k}^{\text{aa}} \cdot \sum_{l=k+1}^{j-1} \frac{1}{1 - q_{x+l}^{\text{aa}}} \Delta q_{x+l}^{\text{aa}}. \end{aligned}$$

Der Anwartschaftsbarwert auf eine lebenslange Invalidenrente kann auch als erwarteter Barwert  $aBW(Z', l_x, I^F)$  der Zahlungsreihe  $Z' = (Z'_0, Z'_1, \dots, Z'_n)$  mit

$$Z'_j = \prod_{k=0}^{j-1} (1 - q_{x+k}^{\text{aa}}) \cdot L_j^i, \quad j = 0, \dots, n-1$$

verstanden werden:

$$\begin{aligned} aBW(Z', I^F, l_x) \\ = \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{t-1} (1 - i_{x+k}) \cdot i_{x+j} \cdot \underbrace{\left( \prod_{k=0}^{t-1} (1 - q_{x+k}^{\text{aa}}) \cdot \frac{1 - q_{x+j}^i}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_{x+j}^i} \cdot \ddot{a}_{x+j, x+j+1}^i \right)}_{= \prod_{k=0}^{t-1} (1 - q_{x+k}^{\text{aa}}) \cdot L_j^i} \cdot v_{j+1} \cdot v^{(j)}. \end{aligned}$$

Im Vergleich dieser Darstellung des Anwartschaftsbarwerts  $aBW(Z', I^F, l_x)$  mit dem erwarteten Barwert  $aBW(L, I^F, Q_x)$  (s. (5.5)) einer lebenslangen Todesfallleistung fällt auf, dass die Größe

$$Z_j^{(1)} := \prod_{k=0}^{t-1} (1 - q_{x+k}^{\text{aa}}) \cdot \frac{1 - q_{x+j}^i}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_{x+j}^i} \cdot \ddot{a}_{x+j, x+j+1}^i$$

als Ausscheideleistung der  $j + 1$ -ten Periode bzgl. der Ausscheideursache „Invalidität“ verstanden werden kann, d.h es ist (vgl. (5.4))

$$Z'_j = i_{x+j} \cdot Z_j^{(1)} \cdot v_{j+1},$$

und damit

$${}_aBW(L, I^F, \mathbf{l}_x) = \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{t-1} (1 - i_{x+k}) \cdot i_{x+j} \cdot Z_j^{(1)} \cdot v_{j+1} \cdot v^{(j)}.$$

Um ein Durationsmaß zur Approximation der Auswirkungen von Änderungen  $\Delta \mathbf{l}_x$  in der Invalidentafel zu erhalten, bietet es sich daher an, die Darstellung der biometrischen Duration für Versicherungsleistungen (s. Satz 5.16) für die Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}, 0)$  mit  $Z_j = \prod_{k=0}^{j-1} (1 - q_{x+k}^{aa}) \cdot L_j^i$  zu adaptieren.

Für eine Änderung der Invalidentafel  $\mathbf{l}_x$  um

$$\Delta \mathbf{l}_x = (\Delta i_x, \Delta i_{x+1}, \dots, \Delta i_w)$$

ergibt sich für  $Q_x := \mathbf{l}_x$

$$\begin{aligned} {}_aD(Z', \mathbf{l}_x, \Delta \mathbf{l}_x) &= \frac{1}{{}_aBW(Z', \mathbf{l}_x, I^F)} \cdot \left( \sum_{j=1}^{n-1} \left( \sum_{k=0}^{j-1} (1 - i_{x+k})^{-1} \Delta i_{x+k} \right) \cdot {}_j p_x^{aa} \cdot L_j^i \cdot v^{(j)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^n {}_{j-1} p_x^{aa} \cdot \frac{1 - q_{x+j-1}^i}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_{x+j-1}^i} \cdot \ddot{a}_{x+j-1, x+j}^i \cdot v^{(j)} \cdot \Delta i_{x+j-1} \right). \end{aligned}$$

Aus Satz 5.19 folgt die biometrische Konvexität  ${}_aC(Z', \mathbf{l}_x)$  der Zahlungsreihe  $Z'$  mit

$$\begin{aligned} {}_aC(Z', \mathbf{l}_x, \Delta \mathbf{l}_x) &= \frac{1}{{}_aBW(Z', I^F, \mathbf{l}_x)} \cdot \left( \sum_{j=2}^{n-1} {}_j p_x^{aa} \cdot L_j^i \cdot v^{(j)} \cdot 2 \cdot \sum_{k=0}^{j-2} \frac{1}{1 - i_{x+k}} \Delta i_{x+k} \cdot \sum_{l=k+1}^{j-1} \frac{1}{1 - i_{x+l}} \Delta i_{x+l} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{n-1} {}_j p_x^{aa} \cdot \frac{1 - q_{x+j}^i}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_{x+j}^i} \cdot \ddot{a}_{x+j, x+j+1}^i \cdot v^{(j+1)} \cdot 2 \cdot \left( \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{(1 - i_{x+k})} \Delta i_{x+k} \Delta i_{x+j} \right) \right). \end{aligned}$$

### Bemerkung 6.1

Aufgrund der Abhängigkeit des Barwerts  $\ddot{a}_{x+j, x+j+1}^i$  von den Größen  $Q_{z,x}^i$  und  $R_{z,x}$  (vgl. (6.2)) ist auch der Barwert  ${}_aBW(Z, I^F, Q_x^{aa})$  von diesen Größen abhängig. Die Betrachtung der Risiken durch Änderungen von  $Q_{z,x}^i$  und  $R_{z,x}$  wurde bereits für diesen Barwert der Invalidenrente  ${}_aBW(Z, I^F, Q_{z,x}^i) = \sum_{j=0}^{n-1} {}_j p_{z,x}^i \cdot R_j \cdot v^{(j)}$  dargestellt.

Abschließend kann auch die Änderung des Anwartschaftsbarwert auf eine lebenslange Invalidenrente aufgrund einer Änderung der Zinsstrukturkurve  $I^F$  bemessen werden. Dazu wird der Anwartschaftsbarwert als Barwert  $BW_F(Z, I^F)$  der Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}, 0)$  mit

$$\begin{aligned} Z_j &= {}_j p_x^{aa} \cdot i_{x+j} \cdot L_j^{(1)i} \cdot v_{j+1} \\ &= {}_j p_x^{aa} \cdot i_{x+j} \cdot \left( \frac{1 - q_{x+j}^i}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_{x+j}^i} \cdot \ddot{a}_{x+j, x+j+1}^i \right) \cdot v_{j+1}, \end{aligned}$$

für alle  $j = 0, \dots, n - 1$ , interpretiert, d.h.:

$$\begin{aligned} aBW(Z, I^F, Q_x^{aa}) &= \sum_{j=0}^{n-1} j p_x^{aa} \cdot \left( i_{x+j} \cdot \frac{1 - q_{x+j}^i}{1 - \frac{1}{2} \cdot q_{x+j}^i} \cdot \ddot{a}_{x+j, x+j+1}^i \cdot v_{j+1} \right) \cdot v^{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} Z_j \cdot v^{(j)} = BW_F(Z, I^F). \end{aligned}$$

Durch diese Darstellung als Barwert  $BW_F(Z, I^F)$  ergeben sich die Forward Rate Duration  $D_F(Z, I^F, \Delta I^F)$  bzw. die Forward Rate Konvexität  $C_F(Z, I^F, \Delta I^F)$  der Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}, 0)$  mit  $Z_j = j p_x^{aa} \cdot i_{x+j} \cdot L_j^{(1)i} \cdot v_{j+1}$  für alle  $j = 0, \dots, n - 1$  zur Quantifizierung des Zinsänderungsrisikos.

Dieser Abschnitt zeigt, dass die Barwerte, die in der betrieblichen Altersvorsorge zur Bewertung von Beitrags- und Leistungszahlungen auch als Barwerte der Form  $BW_F(Z, I^F)$  bzw. erwartete Barwerte der Form  $aBW(Z, I^F, Q_x)$  dargestellt werden können. Es ist damit direkt möglich, das Konzept der Forward Rate Duration bzw. das Konzept der biometrischen Duration für Risikoanalysen im Bereich der betrieblichen Altersvorsorge anzuwenden, um die hier auftretenden, unterschiedlichen Änderungsrisiken zu quantifizieren.

## 6.2. Durationsmaße für Änderungen von Inflationsraten

In diesem Abschnitt werden die Auswirkungen von Änderungen einer Zinsstrukturkurve  $I^F$ , sowie von Inflationsraten  $I^{\text{infl}}$  auf den inflationsbereinigten Barwert einer Zahlungsreihe  $Z$  betrachtet. Diese Untersuchung soll aufzeigen, dass das Konzept der Forward Rate Duration bzw. das Konzept der biometrischen Duration auch für Zahlungsreihen außerhalb der Lebensversicherungsmathematik für Risikoanalysen angewendet werden kann.

Der Begriff der Inflation bezeichnet allgemein die Änderung des Preisniveaus im Zeitverlauf. Die Inflationsrate  $i_{\text{infl}}$  ist dabei definiert als der Prozentsatz, der die Veränderung des Preisniveaus gegenüber dem jeweiligen Vorjahr angibt [Tie15]. Häufig spricht man bei der Inflationsrate auch von der sogenannten Teuerungsrate, wenn die Preise im Wert steigen, d.h.  $i_{\text{infl}} > 0$ . Im Gegensatz dazu bezeichnet der Begriff der Deflation im Wert fallende Preise, d.h.  $i_{\text{infl}} < 0$ .

Legt man jährliche Inflationsraten  $i_{\text{infl},1}, i_{\text{infl},2}, \dots$ , zugrunde, so verändert sich der Wert

einer zukünftigen Zahlung  $Z_t$  durch den Faktor (s. [Tie15])

$$i_{\text{infl}}^{(t)} = (1 + i_{\text{infl},1}) \cdot (1 + i_{\text{infl},2}) \cdot \cdots \cdot (1 + i_{\text{infl},t}) = \prod_{k=1}^t (1 + i_{\text{infl},k}). \quad (6.3)$$

Der Wert  $i_{\text{infl}}^{(t)} \cdot Z_t$  wird auch inflationsbereinigter Wert einer Zahlung  $Z_t$  im Zeitpunkt  $t$  genannt. Er beschreibt den Betrag, der zum Zeitpunkt  $t$ , die gleiche Kaufkraft besitzt wie der Wert  $Z_t$  heute [Tie15].

Der inflationsbereinigte Barwert einer Zahlungsreihe  $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$  ist dann der Barwert der inflationsbereinigten Zahlungsreihe  $\hat{Z} = (\hat{Z}_0, \hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_n)$  mit

$$\hat{Z}_j = i_{\text{infl}}^{(j)} \cdot Z_j, \quad \text{für } j = 0, \dots, n.$$

Es gilt (vgl. [Tie15]):

$$BW_F(\hat{Z}, I^F) = \sum_{j=0}^n i_{\text{infl}}^{(j)} \cdot Z_j \cdot v^{(j)} = \sum_{j=0}^n Z_j \cdot \prod_{k=1}^j \frac{1 + i_{\text{infl},k}}{1 + i_k}. \quad (6.4)$$

Sei nun eine Änderung der Zinsstrukturkurve um

$$\Delta I^F = (\Delta i_1, \Delta i_2, \dots, \Delta i_n)$$

angenommen. Aufgrund der Darstellung des inflationsbereinigten Barwerts als Barwert  $BW_F(\hat{Z}, I^F)$  können die Größen  $D_F(\hat{Z}, I^F, \Delta I^F)$  aus Satz 4.5 und  $C_F(\hat{Z}, I^F, \Delta I^F)$  aus Satz 4.7 für die Bemessung des resultierenden Zinsänderungsrisikos angewendet werden (vgl. Kapitel 4). Eine Approximation des inflationsbereinigten Barwerts nach Änderung der Zinsstrukturkurve ist dann durch

$$BW_F(\hat{Z}, I^F + \Delta I^F) \approx BW_F(\hat{Z}, I^F) \cdot \left( 1 - D_F(\hat{Z}, I^F, \Delta I^F) + \frac{1}{2} \cdot C_F(\hat{Z}, I^F) \right)$$

möglich.

Neben einer Änderung der Zinsstrukturkurve  $\Delta I^F$  kann ebenso eine Änderung der Inflationsraten  $i_{\text{infl},t}$  zu  $i_{\text{infl},t} + \Delta i_{\text{infl},t}$  für  $t = 1, \dots, n$  angenommen werden. Um die Auswirkungen einer solchen Änderungen untersuchen zu können, wird zunächst der Faktor der mehrjährigen Inflationsraten aus (6.3) näher betrachtet:

$$i_{\text{infl}}^{(t)} = \prod_{k=1}^t (1 + i_{\text{infl},k})$$

Es fällt auf, dass der Faktor  $i_{\text{infl}}^{(t)}$  und die mehrjährige Überlebenswahrscheinlichkeit  ${}_t p_x$

(5.2) mit

$${}_t p_x = \prod_{j=0}^{t-1} (1 + (-q_{x+j}))$$

strukturell identisch sind.

Im Fall einer Deflation, d.h. für negative Inflationsraten  $i_{\text{infl},t} < 0$ , verliert eine zukünftige Zahlung an Wert, d.h.  $i_{\text{infl}}^{(t)} \cdot Z_t < Z_t$ . Dieselbe Auswirkung tritt auch für den Wert einer zukünftig erwarteten Zahlungen  ${}_t p_x \cdot Z_t$  auf. Für  $q_{x+t} > 0$  ist der Wert der erwarteten Zahlung geringer als der Auszahlungsbetrag, d.h. es gilt  ${}_t p_x \cdot Z_t < Z_t$ .

Aufgrund dieses formalen Zusammenhangs zwischen Inflationsraten und Sterbewahrscheinlichkeiten lässt sich der inflationsbereinigte Barwert auch als erwarteter Barwert darstellen. Dafür sei

$$\mathbf{I}^{\text{infl}} = (i_{\text{infl},1}, i_{\text{infl},2}, \dots, i_{\text{infl},n})$$

der Vektor, der die einjährigen Inflationsraten  $i_{\text{infl},t}$  enthält.

Für  $Q_x = -\mathbf{I}^{\text{infl}}$  entspricht der inflationsbereinigte Barwert  $BW_F(\hat{Z}, I^F)$  der Zahlungsreihe  $\hat{Z}$  dem erwarteten Barwert  $aBW(Z, -\mathbf{I}^{\text{infl}}, I^F)$  der Zahlungsreihe  $Z$ :

$$\begin{aligned} aBW(Z, -\mathbf{I}^{\text{infl}}, I^F) &= \sum_{j=0}^n \prod_{k=0}^{j-1} (1 - (-i_{\text{infl},k+1})) \cdot Z_j \cdot \prod_{l=1}^j (1 + i_l)^{-1} \\ &= \sum_{j=0}^n i_{\text{infl}}^{(j)} \cdot Z_j \cdot v^{(j)} = BW_F(\hat{Z}, I^F). \end{aligned}$$

Das Konzept der biometrischen Duration, welches die Auswirkungen von Sterblichkeitsänderungen auf den Barwert untersucht, kann somit auch für den inflationsbereinigten Barwert in (6.4) angewendet werden, um die Auswirkungen von Änderungen der Inflationsraten zu bestimmen.

Für gegebene Änderungen der Inflationsraten

$$\Delta \mathbf{I}^{\text{infl}} = (\Delta i_{\text{infl},1}, \Delta i_{\text{infl},2}, \dots, \Delta i_{\text{infl},n})$$

erhält man mit  $Q_x = -\mathbf{I}^{\text{infl}}$  aus Satz 5.15 das Durationsmaß  $aD(Z, -\mathbf{I}^{\text{infl}})$  mit

$$aD(Z, -\mathbf{I}^{\text{infl}}, \Delta \mathbf{I}^{\text{infl}}) = \frac{1}{aBW(Z, -\mathbf{I}^{\text{infl}}, I^F)} \cdot \sum_{j=0}^n i_{\text{infl}}^{(j)} \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot \left( \sum_{k=1}^j \frac{1}{1 + i_{\text{infl},k}} \cdot \Delta i_{\text{infl},k} \right),$$

bzw. aus Satz 5.18 die Konvexität  $aC(Z, -I^{\text{infl}})$  mit

$$aC(Z, -I^{\text{infl}}, \Delta I^{\text{infl}}) = \frac{1}{aBW(Z, -I^{\text{infl}}, I^F)} \cdot \sum_{j=2}^n Z_j \cdot v^{(j)} \cdot i_{\text{infl}}^{(j)} \cdot 2 \cdot \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{1 + i_{\text{infl},k}} \Delta i_{\text{infl},k} \cdot \sum_{l=k+1}^j \frac{1}{1 + i_{\text{infl},l}} \Delta i_{\text{infl},l}.$$

Mit diesen Größen kann dann der inflationsbereinigte Barwert approximiert werden, wenn die veränderten Inflationsraten

$$I^{\text{infl}} + \Delta I^{\text{infl}} = (i_{\text{infl},1} + \Delta i_{\text{infl},1}, i_{\text{infl},2} + \Delta i_{\text{infl},2}, \dots, i_{\text{infl},n} + \Delta i_{\text{infl},n})$$

vorliegen:

$$aBW(Z, -(I^{\text{infl}} + \Delta I^{\text{infl}}), I^F) \approx aBW(Z, -I^{\text{infl}}, I^F) \cdot \left( 1 - aD(Z, -I^{\text{infl}}, \Delta I^{\text{infl}}) + \frac{1}{2} aC(Z, -I^{\text{infl}}, \Delta I^{\text{infl}}) \right).$$

Ebenso lässt sich für  $Q_x = -I^{\text{infl}}$  die kombinierte Duration der Zahlungsreihe  $Z$  (s. (5.26)) mit

$$D_K = D_F(\widehat{Z}, I^F, \Delta I^F) + aD(Z, -I^{\text{infl}}, I^F, \Delta I^{\text{infl}}),$$

sowie die kombinierte Konvexität der Zahlungsreihe  $Z$  (s. (5.27)) mit

$$C_K = C_F(\widehat{Z}, I^F, \Delta I^F) + aC(Z, -I^{\text{infl}}, I^F, \Delta I^{\text{infl}})$$

verwenden, um simultan Änderungen in der Zinsstrukturkurve und in den Inflationsraten betrachten zu können.

### Beispiel 6.2

Es seien die Kapitalmarktzinsen und die Inflationsraten der Jahre 1992 bis 2019, sowie die prognostizierte Entwicklung der Inflationsraten von 2020 bis 2021 (entnommen aus [CES20; Ös20; Sta20]) gegeben. Die Kapitalmarktzinsen für die Jahre 2020 bis 2021 seien  $i_{29} = -0,0072$ , und  $i_{30} = -0,0104$  (eigene Werte). Die verwendeten Werte sind in Abbildung 6.2 dargestellt und in Tabelle A.6, Anhang A.3 zu finden.

Der Barwert der konstanten Zahlungsreihe der Höhe  $Z_t = 1.000$  für  $t = 0, \dots, 30$ , beträgt ohne Berücksichtigung der Inflation

$$BW_F(Z, I^F) = \sum_{j=0}^{30} 1000 \cdot \prod_{l=1}^j (1 + i_l)^{-1} = 16.534,29.$$

Berücksichtigt man hingegen die gegebenen Inflationsraten, so erhält man den inflations-

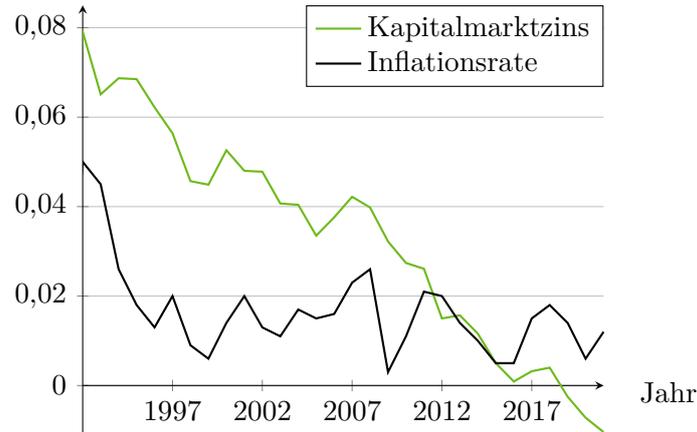


Abbildung 6.2.: Darstellung der Kapitalmarktzinsen und Inflationsraten von 1992 bis 2019, sowie prognostizierte Werte von 2020 bis 2021, Quelle: [CES20; Ös20; Sta20].

bereinigten Barwert  $BW(\widehat{Z}, I^F)$  durch

$$BW_F(\widehat{Z}, I^F) = \sum_{j=0}^{30} 1000 \cdot \prod_{l=1}^j \frac{1 + i_{\text{infl},l}}{1 + i_l} = 21.303,76.$$

Durch die Berücksichtigung der Inflationsraten steigt der Barwert um 4.769,46 €.

Im Folgenden werden zwei unterschiedliche Szenarien für die Entwicklung der Kapitalmarktzinsen bzw. der Inflationsrate betrachtet. Der Einfluss aller Änderungen zu den Ausgangswerten soll dabei untersucht werden. Im ersten Szenario werden die (tatsächlich) vergangenen Werte für die Jahre 1992 bis 2019 als unveränderbar angenommen. Die Änderungsraten für die Jahre 1992 bis 2019 seien demnach  $\Delta^{(S1)}i_t = \Delta^{(S1)}i_{\text{infl},t} = 0$ , für  $t \in \{1, \dots, 28\}$ . Lediglich für den Zeitraum 2020 bis 2021 wird durch  $\Delta^{(S1)}i_{29} = 0,01$  und  $\Delta^{(S1)}i_{30} = 0,012$ , sowie  $\Delta^{(S1)}i_{\text{infl},29} = 0,015$  und  $\Delta^{(S1)}i_{\text{infl},30} = 0,02$  eine Änderung angenommen.

Für das zweite Szenario wird ein geglätteter Verlauf der beiden Kurven angenommen. Die Änderungsgrößen seien durch  $\Delta^{(S2)}i_t = (0,04 - i_t)/2$ , für  $t = 1, \dots, 30$  bzw.  $\Delta^{(S2)}i_{\text{infl},t} = (0,02 - i_{\text{infl},t})/2$ , für  $t = 1, \dots, 30$  bestimmt. Die Werte dieser Szenarien sind in Abbildung 6.3 dargestellt.

Für das erste Szenario ergeben sich die Werte

$$\begin{aligned} D_K &= D_F(\widehat{Z}, I^F, \Delta^{(S1)}I^F) + aD(Z, -\Gamma^{\text{infl}}, \Delta^{(S1)}\Gamma^{\text{infl}}) \\ &= 0,00093 + 0,00143 = 0,00236 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} C_K &= C_F(Z, I^F, \Delta^{(S1)}I^F) + aC(Z, \Gamma^{\text{infl}}, \Delta^{(S1)}\Gamma^{\text{infl}}) \\ &= 0,000027 + 0,000017 = 0,000044. \end{aligned}$$

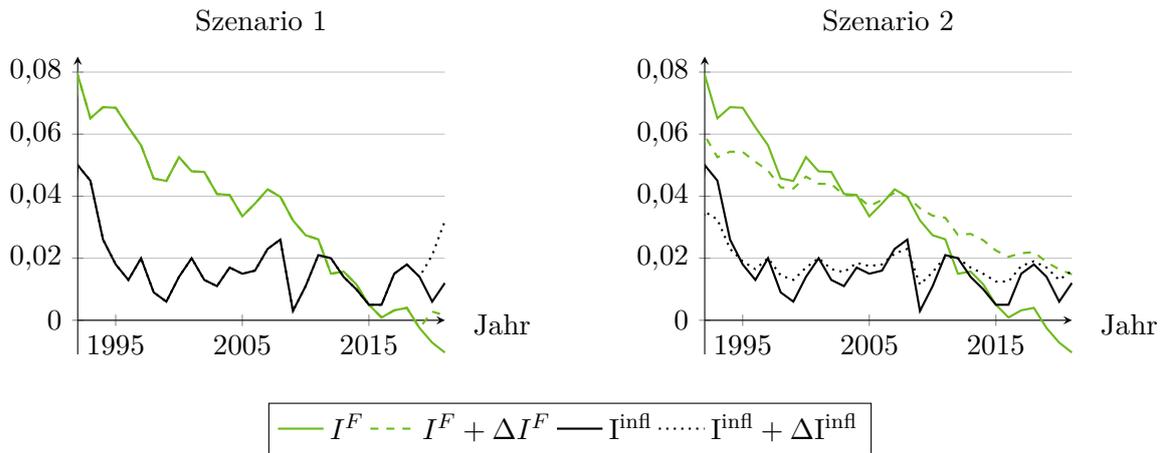


Abbildung 6.3.: Darstellung der Szenarien für die Entwicklung des Kapitalmarktzinses und der Inflation seit 1992. Quelle: [CES20; Ös20; Sta20] und eigene Werte.

Bei einer Steigerung der Inflationsrate und des Kapitalmarktzinses der Jahre 2020 und 2021 ändert der Barwert somit zu:

$$\begin{aligned} aBW(Z, I^F + \Delta^{(S1)} I^F, -(\Gamma^{\text{infl}} + \Delta^{(S1)} \Gamma^{\text{infl}})) \\ \approx aBW(Z, I^F, -\Gamma^{\text{infl}}) \cdot \left(1 - D_K + \frac{1}{2} \cdot C_K\right) = 21.253,88. \end{aligned}$$

Zum Vergleich beträgt der Barwert unter den veränderten Rechnungsgrundlagen  $aBW(Z, I^F + \Delta^{(S1)} I^F, -(\Gamma^{\text{infl}} + \Delta^{(S1)} \Gamma^{\text{infl}})) = 21.314,32$ . Für dieses Szenario ist die Differenz zur Approximation sehr gering, was auch an der geringen Anzahl veränderter Werte liegt.

Für das zweite Szenario liegen die Änderungskurven  $\Delta^{(S2)} I^F$  und  $\Delta^{(S2)} \Gamma^{\text{infl}}$  vor, wodurch sich die Werte

$$\begin{aligned} D_K &= D_F(\hat{Z}, I^F, \Delta^{(S2)} I^F) + aD(Z, -\Gamma^{\text{infl}}, \Delta^{(S2)} \Gamma^{\text{infl}}) \\ &= -0,0446 + 0,0023 = -0,0424 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D_K &= C_F(\hat{Z}, I^F, \Delta^{(S2)} I^F) + aC(Z, -\Gamma^{\text{infl}}, \Delta^{(S2)} \Gamma^{\text{infl}}) \\ &= 0,0062 + 0,0001 = 0,0062 \end{aligned}$$

ergeben. Approximativ ändert sich der inflationsbereinigte Barwert  $aBW(Z, I^F, -\Gamma^{\text{infl}})$  im zweiten Szenario zu

$$\begin{aligned} aBW(Z, I^F + \Delta^{(S2)} I^F, -(\Gamma^{\text{infl}} + \Delta^{(S2)} \Gamma^{\text{infl}})) \\ \approx aBW(Z, I^F, -\Gamma^{\text{infl}}) \cdot \left(1 - D_K + \frac{1}{2} \cdot C_K\right) = 22.272,81. \end{aligned}$$

Der vergleichbare Wert des Barwerts  $aBW(Z, I^F + \Delta^{(S2)} I^F, -(\Gamma^{\text{infl}} + \Delta^{(S2)} \Gamma^{\text{infl}}))$  beträgt

22.355,12. Dies entspricht einer prozentualen Abweichung des approximierten Wertes um ca. 0,37%.  $\diamond$

Dieses Beispiel verdeutlicht die Möglichkeit der Übertragung des Zusammenhangs zwischen Zinssätzen und Sterblichkeiten auch auf Anwendungen für die Risikoanalyse außerhalb der Lebensversicherungsmathematik. Findet die Kombination aus einem „Aufzinsungs-“, sowie einem „Abzinsungsvorgang“ statt, lassen sich die beschriebenen Durationsmaße für spezielle Zahlungsreihen anwenden. Entscheidend ist dabei die Möglichkeit der Darstellung als Barwert  $BW_F(Z, I^F)$  bzw. erwarteter Barwert  $aBW(Z, I^F, Q_x)$ , um die entwickelten Durationskonzepte anwenden zu können. Neben der Anwendung für Berufsunfähigkeitsversicherungen, stellt das Durationskonzept zur Quantifizierung der Auswirkungen von Änderungen in den Inflationsraten somit auch ein Beispiel für die Verwendung der biometrischen Duration dar, wenn nicht-biometrische Daten vorliegen.

# Kapitel 7

## Fazit

Die vorliegende Arbeit hat sich mit Durationsmaßen für die Quantifizierung von Änderungsrisiken in der Lebensversicherung beschäftigt. Bei der Kalkulation von Lebensversicherungen werden Rechnungsgrundlagen verwendet, die der Bewertung der erwarteten Beitrags- bzw. Leistungszahlungen dienen. Sie bestehen dabei aus einer Zinsstrukturkurve, sowie biometrischen Daten, typischerweise eine Sterbetafel. Die Zinsstrukturkurve dient der finanzmathematischen Bewertung der erwarteten Zahlungen, während die biometrischen Daten der Berechnung der Eintrittswahrscheinlichkeiten der unsicheren Zahlungen dienen.

Diese Rechnungsgrundlagen werden zu Beginn der Vertragslaufzeit für die gesamte Versicherungsdauer verbindlich festgelegt. Aufgrund der typischerweise langen Laufzeiten von Lebensversicherungen, ist es notwendig die Auswirkungen von Änderungen in den Zinssätzen, sowie den biometrischen Daten zu analysieren und das daraus resultierende Zinsänderungsrisiko bzw. das biometrische Änderungsrisiko zu quantifizieren. Für das Risikomanagement von Lebensversicherungen ist es eine zentrale Aufgabe, die Auswirkungen der Veränderungen sämtlicher bei der Kalkulation verwendeter Größen zu kennen und das Zinsänderungsrisiko, sowie das biometrische Risiko angemessen zu berücksichtigen.

Als zentrales Instrument zur Quantifizierung des Zinsänderungsrisikos werden in der Finanzmathematik oftmals Durationsmaße verwendet. Sie können als Zinssensitivität interpretiert und damit einfach und direkt anwendbar dargestellt werden. Durch diese Möglichkeit der Interpretation, sowie der Möglichkeit einer anwendbaren Darstellung, sind Durationsmaße für praktische Risikoanalysen von großer Bedeutung.

In dieser Arbeit ist es gelungen, das weit verbreitete Durationskonzept zu erweitern und ein Durationsmaß für die Anwendung einer Forward Rate Zinsstrukturkurve zu entwickeln. Die Verwendung einer solchen Zinsstrukturkurve ist für versicherungsmathematische Berechnungen üblich und auch für die Bewertung künftiger Zahlungen in der Solvenzbilanz gemäß Solvency II vorgesehen. Daher ist es besonders nützlich ein Durationskonzept zu, dass die Anwendung einer Forward Rate Zinsstrukturkurve ermöglicht. Hierfür wurden die Forward Rate Duration und die Forward Rate Konvexität hergeleitet und definiert. Für Zahlungsreihen, die Lebensversicherungen charakterisieren, konnten konkrete Darstellungen dieser Größen angegeben werden, die sich der gleichen „einfachen“ Mathematik

bedienen, die bereits für die Kalkulation von Lebensversicherungen Anwendung findet. Damit können diese Größen in konkreten praktischen Situationen direkt verwendet werden, um das Zinsänderungsrisiko zu bestimmen. Die entwickelten Instrumente sind daher für die versicherungsmathematische Praxis von wertvoller Bedeutung.

Es konnte außerdem gezeigt werden, dass sich die in der Literatur bereits bekannten Durationsmaße, wie die (modifizierte) Macaulay-Duration, die (modifizierte) effektive Duration und die Key-Rate Duration als Spezialfälle der Forward Rate Duration ergeben. Damit ist das Forward Rate Durationskonzept eine Verallgemeinerung der bekannten Durationskonzepte und stellt somit ein einheitliches, methodisches Konzept zur Quantifizierung aller Zinsänderungsrisiken dar.

Aufgrund der hohen praktischen Bedeutung von Durationsmaßen für das Zinsänderungsrisiko, war ein weiteres Ziel dieser Arbeit, das Durationskonzept aus der Finanzmathematik für die Quantifizierung des biometrischen Änderungsrisikos zu übertragen. Dabei sollen die Instrumente ebenso leicht zu interpretieren und für die Anwendung in der Praxis geeignet sein.

Um dieses Ziel zu erreichen, wurden zunächst strukturelle Gemeinsamkeiten zwischen einer Zinsstrukturkurve und einer Sterbetafel untersucht. Dabei konnte festgestellt werden, dass die Sterbewahrscheinlichkeit  $q_{x+t}$  grundsätzlich als negative Forward Rate  $-i_{t+1}$  interpretiert werden kann. Damit wird für die Bewertung einer Zahlungsreihe in der Lebensversicherung eine weitere „Zinsstrukturkurve“, nämlich  $Q_x$ , verwendet. Durch diese Auffassung wird deutlich, dass sich das Zinsänderungsrisiko und das biometrische Risiko strukturell nicht unterscheiden und das Konzept der Forward Rate Duration auch für die Behandlung des biometrischen Risikos geeignet ist. Es ist also möglich, beide Änderungsrisiken mit dem gleichen methodischen Konzept zu quantifizieren. Die Verwendung dieses Zusammenhangs zwischen Zinssätzen und Sterbewahrscheinlichkeiten hat die Übertragung des entwickelten Forward Rate Durationskonzepts zur Quantifizierung der Auswirkungen von Änderungen in den biometrischen Daten ermöglicht.

Dementsprechend wurden, analog zur Herleitung der Forward Rate Duration bzw. Forward Rate Konvexität, die Größen der biometrischen Duration und der biometrischen Konvexität hergeleitet und definiert. Die biometrische Duration kann dabei direkt als Sterblichkeitssensitivität interpretiert und als Maß für das biometrische Änderungsrisiko verwendet werden. Außerdem kann mit den definierten Größen die absolute Änderung eines erwarteten Barwerts aufgrund einer Änderung der Sterbetafel bestimmt werden. Daher eignen sich diese Größen, um den tatsächlichen Kapitalbedarf zu bestimmen, der für die Erbringung der vertraglich vereinbarten Leistungen benötigt wird. Damit kann das Konzept der biometrischen Duration auch für Berechnungen risikoadäquater und angemessener Eigenkapitalanforderungen im Rahmen von Solvency II verwendet werden.

Auch für die biometrische Duration bzw. die biometrische Konvexität von Zahlungs-

reihen, die in der Lebensversicherung verwendet werden, um bspw. Beiträge, Leistungen oder das Deckungskapital zu beschreiben, konnten konkrete Darstellungen angegeben werden. Auch hier sind diese Darstellungen durch die Verwendung der gleichen „einfachen“ Mathematik, die bei der Kalkulation von Lebensversicherungen üblich ist, in der Praxis unmittelbar für die adäquate Quantifizierung des biometrischen Risikos anwendbar.

Durch die Verwendung des strukturellen Zusammenhangs zwischen Sterblichkeiten und negativen Zinssätzen, beschreiben diese beiden Konzepte einheitliche Instrumente, die sich auf die gleiche Art und Weise anwenden lassen. So ist es auch unmittelbar möglich, die Durationsmaße zu kombinieren, um gleichzeitig die Auswirkungen von Änderungen in Zins und Biometrie zu bestimmen. Diese Arbeit liefert damit nicht nur unabhängig einsetzbare Instrumente, sondern vor allem ein einheitliches Konzept für das praktische Risikomanagement.

Die Konzepte der Forward Rate Duration, sowie der biometrischen Duration stellen einfach handhabbare Instrumente bereit, die sich aufgrund der leichten Interpretierbarkeit und der Möglichkeit der angemessenen Risikoquantifizierung für die Anwendung in der Praxis anbieten. Durch die Vereinheitlichung der beiden Konzepte, eröffnet diese Arbeit neue Möglichkeiten zur adäquaten Risikobestimmung und liefert damit einen wesentlichen Beitrag für das praktische Risikomanagement.



# Kapitel A

## Anhang

### A.1. Zinsstrukturkurven

#### A.1.1. Spot Rate Zinsstrukturkurven

In der folgenden Tabelle sind die Daten der Spot Rate Zinsstrukturkurven angegeben, die in Abbildung 3.8, Beispiel 3.22 ( $I^{S(1)}, \dots, I^{S(6)}$ ) und Abbildung 3.11 ( $I^{S(1)}, I^{S(7)}$  und  $I^{S(8)}$ ) verwendet wurden.

Tabelle A.1.: Daten Spot Rate Zinsstrukturkurven, Zinssätze in % angegeben

| $t$ | $I^{S(1)}$ | $I^{S(2)}$ | $I^{S(3)}$ | $I^{S(4)}$ | $I^{S(5)}$ | $I^{S(6)}$ | $I^{S(7)}$ | $I^{S(8)}$ |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1   | 1,5        | 0          | 1          | 2,5        | 3          | 4,5        | 0,5        | 1,5        |
| 2   | 1,9        | 0,4        | 1,4        | 2,9        | 3,4        | 4,9        | 0,9        | 1,9        |
| 3   | 2,15       | 0,65       | 1,65       | 3,15       | 3,65       | 5,15       | 1,55       | 2,15       |
| 4   | 2,4        | 0,9        | 1,9        | 3,4        | 3,9        | 5,4        | 2          | 2,4        |
| 5   | 2,6        | 1,1        | 2,1        | 3,6        | 4,1        | 5,6        | 2,3        | 2,6        |
| 6   | 2,75       | 1,25       | 2,25       | 3,75       | 4,25       | 5,75       | 2,55       | 2,75       |
| 7   | 2,9        | 1,4        | 2,4        | 3,9        | 4,4        | 5,9        | 2,8        | 2,9        |
| 8   | 3,05       | 1,55       | 2,55       | 4,05       | 4,55       | 6,05       | 2,95       | 3,45       |
| 9   | 3,15       | 1,65       | 2,65       | 4,15       | 4,65       | 6,15       | 3,15       | 3,15       |
| 10  | 3,2        | 1,7        | 2,7        | 4,2        | 4,7        | 6,2        | 3,3        | 3,2        |
| 11  | 3,25       | 1,75       | 2,75       | 4,25       | 4,75       | 6,25       | 3,45       | 3,25       |
| 12  | 3,3        | 1,8        | 2,8        | 4,3        | 4,8        | 6,3        | 3,6        | 3,3        |
| 13  | 3,35       | 1,85       | 2,85       | 4,35       | 4,85       | 6,35       | 3,75       | 3,35       |
| 14  | 3,375      | 1,875      | 2,875      | 4,375      | 4,875      | 6,375      | 3,925      | 3,375      |
| 15  | 3,4        | 1,9        | 2,9        | 4,4        | 4,9        | 6,4        | 4          | 3,4        |
| 16  | 3,425      | 1,925      | 2,925      | 4,425      | 4,925      | 6,425      | 4,125      | 3,425      |
| 17  | 3,45       | 1,95       | 2,95       | 4,45       | 4,95       | 6,45       | 4,25       | 3,45       |
| 18  | 3,475      | 1,975      | 2,975      | 4,475      | 4,975      | 6,475      | 4,325      | 3,475      |
| 19  | 3,5        | 2          | 3          | 4,5        | 5          | 6,5        | 4,4        | 3,5        |
| 20  | 3,525      | 2,025      | 3,025      | 4,525      | 5,025      | 6,525      | 4,525      | 3,525      |
| 21  | 3,55       | 2,05       | 3,05       | 4,55       | 5,05       | 6,55       | 4,6        | 3,55       |

Tabelle A.1.: Daten Spot Rate Zinsstrukturkurven (Fortsetzung)

| $t$ | $I^S(1)$ | $I^S(2)$ | $I^S(3)$ | $I^S(4)$ | $I^S(5)$ | $I^S(6)$ | $I^S(7)$ | $I^S(8)$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 22  | 3,575    | 2,075    | 3,075    | 4,575    | 5,075    | 6,575    | 4,675    | 3,575    |
| 23  | 3,6      | 2,1      | 3,1      | 4,6      | 5,1      | 6,6      | 4,7      | 3,6      |
| 24  | 3,625    | 2,125    | 3,125    | 4,625    | 5,125    | 6,625    | 4,775    | 3,625    |
| 25  | 3,65     | 2,15     | 3,15     | 4,65     | 5,15     | 6,65     | 4,85     | 3,65     |
| 26  | 3,675    | 2,175    | 3,175    | 4,675    | 5,175    | 6,675    | 4,925    | 3,675    |
| 27  | 3,7      | 2,2      | 3,2      | 4,7      | 5,2      | 6,7      | 5,05     | 3,7      |
| 28  | 3,725    | 2,225    | 3,225    | 4,725    | 5,225    | 6,725    | 5,125    | 3,725    |
| 29  | 3,75     | 2,25     | 3,25     | 4,75     | 5,25     | 6,75     | 5,25     | 3,75     |
| 30  | 3,8      | 2,3      | 3,3      | 4,8      | 5,3      | 6,8      | 5,35     | 3,8      |

### A.1.2. Forward Rate Zinsstrukturkurven

In der folgenden Tabelle sind die Daten der Forward Rate Zinsstrukturkurven angegeben, die in Abbildung 4.1 ( $I^F(1), I^F(2)$ ), Beispiel 4.8 ( $I^F(3), \dots, I^F(6)$ ) und Beispiel 5.7 ( $I^F(6)$ ) verwendet wurden.

Tabelle A.2.: Daten Forward Rate Zinsstrukturkurven

| $t$ | $I^F(1)$ | $I^F(2)$ | $I^F(3)$ | $\Delta I^F(4)$ | $I^F(4)$ | $\Delta I^F(5)$ | $I^F(5)$ | $\Delta I^F(6)$ | $I^F(6)$ |
|-----|----------|----------|----------|-----------------|----------|-----------------|----------|-----------------|----------|
| 1   | 0,002    | -0,0348  | 0,041    | 0,0008          | 0,0418   | 0,0002          | 0,0412   | -0,0002         | 0,0408   |
| 2   | 0,0057   | -0,0249  | 0,0404   | 0,0012          | 0,0416   | 0,0012          | 0,0416   | -0,0012         | 0,0392   |
| 3   | 0,0091   | -0,0158  | 0,0399   | 0,0014          | 0,0413   | 0,002           | 0,0419   | -0,002          | 0,0379   |
| 4   | 0,0123   | -0,0075  | 0,0393   | 0,0017          | 0,041    | 0,003           | 0,0423   | -0,003          | 0,0363   |
| 5   | 0,0153   | 0        | 0,0388   | 0,002           | 0,0408   | 0,0038          | 0,0426   | -0,0038         | 0,035    |
| 6   | 0,018    | 0,0069   | 0,0383   | 0,0024          | 0,0407   | 0,0046          | 0,0429   | -0,0046         | 0,0337   |
| 7   | 0,0205   | 0,0131   | 0,0378   | 0,0027          | 0,0405   | 0,0055          | 0,0433   | -0,0055         | 0,0323   |
| 8   | 0,0229   | 0,0188   | 0,0373   | 0,0031          | 0,0404   | 0,0063          | 0,0436   | -0,0063         | 0,031    |
| 9   | 0,025    | 0,0239   | 0,0367   | 0,0035          | 0,0402   | 0,0071          | 0,0438   | -0,0071         | 0,0296   |
| 10  | 0,027    | 0,0285   | 0,036    | 0,0041          | 0,0401   | 0,0081          | 0,0441   | -0,0081         | 0,0279   |
| 11  | 0,0288   | 0,0327   | 0,0354   | 0,0045          | 0,0399   | 0,009           | 0,0444   | -0,009          | 0,0264   |
| 12  | 0,0305   | 0,0365   | 0,0348   | 0,0049          | 0,0397   | 0,0099          | 0,0447   | -0,0099         | 0,0249   |
| 13  | 0,0321   | 0,0399   | 0,0342   | 0,0054          | 0,0396   | 0,0107          | 0,0449   | -0,0107         | 0,0235   |
| 14  | 0,0335   | 0,0429   | 0,0336   | 0,0057          | 0,0393   | 0,0116          | 0,0452   | -0,0116         | 0,022    |
| 15  | 0,0348   | 0,0456   | 0,0329   | 0,0062          | 0,0391   | 0,0125          | 0,0454   | -0,0125         | 0,0204   |
| 16  | 0,0359   | 0,048    | 0,0324   | 0,0064          | 0,0388   | 0,0133          | 0,0457   | -0,0133         | 0,0191   |
| 17  | 0,037    | 0,0502   | 0,0318   | 0,0068          | 0,0386   | 0,0141          | 0,0459   | -0,0141         | 0,0177   |
| 18  | 0,038    | 0,0521   | 0,0312   | 0,0071          | 0,0383   | 0,0149          | 0,0461   | -0,0149         | 0,0163   |
| 19  | 0,0389   | 0,0538   | 0,0307   | 0,0073          | 0,038    | 0,0157          | 0,0464   | -0,0157         | 0,015    |

Tabelle A.2.: Daten Forward Rate Zinsstrukturkurven (Fortsetzung)

| $t$ | $I^{F(1)}$ | $I^{F(2)}$ | $I^{F(3)}$ | $\Delta I^{F(4)}$ | $I^{F(4)}$ | $\Delta I^{F(5)}$ | $I^{F(5)}$ | $\Delta I^{F(6)}$ | $I^{F(6)}$ |
|-----|------------|------------|------------|-------------------|------------|-------------------|------------|-------------------|------------|
| 20  | 0,0397     | 0,0553     | 0,0302     | 0,0075            | 0,0377     | 0,0164            | 0,0466     | -0,0164           | 0,0138     |
| 21  | 0,0405     | 0,0566     | 0,0297     | 0,0077            | 0,0374     | 0,0172            | 0,0469     | -0,0172           | 0,0125     |
| 22  | 0,0411     | 0,0577     | 0,0293     | 0,0078            | 0,0371     | 0,0179            | 0,0472     | -0,0179           | 0,0114     |
| 23  | 0,0417     | 0,0586     | 0,0289     | 0,008             | 0,0369     | 0,0186            | 0,0475     | -0,0186           | 0,0103     |
| 24  | 0,0423     | 0,0595     | 0,0284     | 0,0082            | 0,0366     | 0,0194            | 0,0478     | -0,0194           | 0,009      |
| 25  | 0,0427     | 0,0602     | 0,028      | 0,0083            | 0,0363     | 0,0202            | 0,0482     | -0,0202           | 0,0078     |
| 26  | 0,0432     | 0,0608     | 0,0276     | 0,0085            | 0,0361     | 0,0211            | 0,0487     | -0,0211           | 0,0065     |
| 27  | 0,0436     | 0,0612     | 0,0272     | 0,0086            | 0,0358     | 0,022             | 0,0492     | -0,022            | 0,0052     |
| 28  | 0,0439     | 0,0616     | 0,0269     | 0,0086            | 0,0355     | 0,0228            | 0,0497     | -0,0228           | 0,0041     |
| 29  | 0,0442     | 0,0619     | 0,0265     | 0,0087            | 0,0352     | 0,0237            | 0,0502     | -0,0237           | 0,0028     |
| 30  | 0,0444     | 0,0622     | 0,0261     | 0,0088            | 0,0349     | 0,0247            | 0,0508     | -0,0247           | 0,0014     |
| 31  | 0,0447     | 0,0623     | 0,0258     | 0,0088            | 0,0346     | 0,0256            | 0,0514     | -0,0256           | 0,0002     |
| 32  | 0,0448     | 0,0624     | 0,0255     | 0,0088            | 0,0343     | 0,0266            | 0,0521     | -0,0266           | -0,0011    |
| 33  | 0,045      | 0,0625     | 0,0252     | 0,0088            | 0,034      | 0,0277            | 0,0529     | -0,0277           | -0,0025    |
| 34  | 0,0451     | 0,0625     | 0,0249     | 0,0088            | 0,0337     | 0,0286            | 0,0535     | -0,0286           | -0,0037    |
| 35  | 0,0452     | 0,0624     | 0,0245     | 0,0088            | 0,0333     | 0,0297            | 0,0542     | -0,0297           | -0,0052    |
| 36  | 0,0453     | 0,0623     | 0,024      | 0,009             | 0,033      | 0,0309            | 0,0549     | -0,0309           | -0,0069    |
| 37  | 0,0454     | 0,0622     | 0,0236     | 0,009             | 0,0326     | 0,0319            | 0,0555     | -0,0319           | -0,0083    |
| 38  | 0,0454     | 0,0621     | 0,0232     | 0,0091            | 0,0323     | 0,033             | 0,0562     | -0,033            | -0,0098    |
| 39  | 0,0455     | 0,0619     | 0,0228     | 0,0091            | 0,0319     | 0,034             | 0,0568     | -0,034            | -0,0112    |
| 40  | 0,0455     | 0,0617     | 0,0224     | 0,0091            | 0,0315     | 0,035             | 0,0574     | -0,035            | -0,0126    |

In der folgenden Tabelle ist die Forward Rate Zinsstrukturkurve angegeben, die in Beispiel 5.32 verwendet wurde und in Abbildung 5.6 dargestellt ist.

Tabelle A.3.: Daten Zinsstrukturkurve in Beispiel 5.32

| $t$ | $i_t$  |
|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|
| 1   | 0,0344 | 12  | 0,0301 | 23  | 0,0235 | 34  | 0,0175 | 45  | 0,0147 | 56  | 0,0112 |
| 2   | 0,0341 | 13  | 0,0296 | 24  | 0,0229 | 35  | 0,0172 | 46  | 0,0144 | 57  | 0,0109 |
| 3   | 0,0337 | 14  | 0,0291 | 25  | 0,0221 | 36  | 0,0169 | 47  | 0,0141 | 58  | 0,0105 |
| 4   | 0,0334 | 15  | 0,0285 | 26  | 0,0214 | 37  | 0,0166 | 48  | 0,0138 | 59  | 0,0102 |
| 5   | 0,0330 | 16  | 0,0280 | 27  | 0,0208 | 38  | 0,0164 | 49  | 0,0136 | 60  | 0,0098 |
| 6   | 0,0327 | 17  | 0,0274 | 28  | 0,0202 | 39  | 0,0161 | 50  | 0,0133 | 61  | 0,0093 |
| 7   | 0,0323 | 18  | 0,0268 | 29  | 0,0197 | 40  | 0,0159 | 51  | 0,0129 | 62  | 0,0089 |
| 8   | 0,0319 | 19  | 0,0262 | 30  | 0,0192 | 41  | 0,0157 | 52  | 0,0126 | 63  | 0,0085 |
| 9   | 0,0315 | 20  | 0,0255 | 31  | 0,0187 | 42  | 0,0154 | 53  | 0,0123 | 64  | 0,0082 |
| 10  | 0,0310 | 21  | 0,0249 | 32  | 0,0182 | 43  | 0,0152 | 54  | 0,0119 | 65  | 0,0077 |
| 11  | 0,0306 | 22  | 0,0242 | 33  | 0,0178 | 44  | 0,0149 | 55  | 0,0116 |     |        |

## A.2. Sterbetafeln

### A.2.1. Allgemeine deutsche Sterbetafel (ADSt) 2014/16

Dargestellt sind Sterbewahrscheinlichkeiten des statistischen Bundesamtes, die durch die Allgemeine deutsche Sterbetafel 2014/16 [Sta18] gegeben sind. Neben den Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x$  für Männer und  $q_y$  für Frauen sind die Anzahlen lebender Männer  $\ell_x$  und lebender Frauen  $\ell_y$  angegeben.

Die Daten wurden in Abbildung 5.2 und 5.3 verwendet.

Tabelle A.4.: Allgemeine deutsche Sterbetafel (ADSt) 2014/16

| Alter $x/y$ | $\ell_x$ | $\ell_y$ | $q_x$    | $q_y$    |
|-------------|----------|----------|----------|----------|
| 0           | 100.000  | 100.000  | 0,003547 | 0,003064 |
| 1           | 99.645   | 99.694   | 0,000272 | 0,000231 |
| 2           | 99.618   | 99.671   | 0,000156 | 0,000119 |
| 3           | 99.603   | 99.659   | 0,000129 | 0,000119 |
| 4           | 99.590   | 99.647   | 0,000116 | 0,000091 |
| 5           | 99.578   | 99.638   | 0,000094 | 0,000075 |
| 6           | 99.569   | 99.630   | 0,000104 | 0,000066 |
| 7           | 99.559   | 99.624   | 0,000084 | 0,000049 |
| 8           | 99.550   | 99.619   | 0,000081 | 0,000062 |
| 9           | 99.542   | 99.613   | 0,000080 | 0,000065 |

Tabelle A.4.: ADSt 2014/16 (Fortsetzung)

| Alter $x/y$ | $\ell_x$ | $\ell_y$ | $q_x$    | $q_y$    |
|-------------|----------|----------|----------|----------|
| 10          | 99.534   | 99.606   | 0,000077 | 0,000059 |
| 11          | 99.526   | 99.600   | 0,000089 | 0,000074 |
| 12          | 99.518   | 99.593   | 0,000078 | 0,000079 |
| 13          | 99.510   | 99.585   | 0,000096 | 0,000086 |
| 14          | 99.500   | 99.576   | 0,000121 | 0,000105 |
| 15          | 99.488   | 99.566   | 0,000150 | 0,000125 |
| 16          | 99.473   | 99.554   | 0,000258 | 0,000141 |
| 17          | 99.448   | 99.540   | 0,000293 | 0,000146 |
| 18          | 99.418   | 99.525   | 0,000383 | 0,000204 |
| 19          | 99.380   | 99.505   | 0,000418 | 0,000193 |
| 20          | 99.339   | 99.485   | 0,000451 | 0,000185 |
| 21          | 99.294   | 99.467   | 0,000447 | 0,000166 |
| 22          | 99.250   | 99.451   | 0,000451 | 0,000173 |
| 23          | 99.205   | 99.433   | 0,000459 | 0,000217 |
| 24          | 99.159   | 99.412   | 0,000483 | 0,000170 |
| 25          | 99.111   | 99.395   | 0,000481 | 0,000186 |
| 26          | 99.064   | 99.376   | 0,000474 | 0,000195 |
| 27          | 99.017   | 99.357   | 0,000528 | 0,000218 |
| 28          | 98.965   | 99.335   | 0,000515 | 0,000249 |
| 29          | 98.914   | 99.311   | 0,000573 | 0,000259 |
| 30          | 98.857   | 99.285   | 0,000576 | 0,000297 |
| 31          | 98.800   | 99.255   | 0,000688 | 0,000319 |
| 32          | 98.732   | 99.224   | 0,000701 | 0,000347 |
| 33          | 98.663   | 99.189   | 0,000710 | 0,000356 |
| 34          | 98.593   | 99.154   | 0,000805 | 0,000391 |
| 35          | 98.513   | 99.115   | 0,000888 | 0,000402 |
| 36          | 98.426   | 99.075   | 0,000887 | 0,000469 |
| 37          | 98.339   | 99.029   | 0,000937 | 0,000460 |
| 38          | 98.246   | 98.983   | 0,001049 | 0,000586 |
| 39          | 98.143   | 98.925   | 0,001091 | 0,000596 |
| 40          | 98.036   | 98.866   | 0,001257 | 0,000679 |
| 41          | 97.913   | 98.799   | 0,001325 | 0,000763 |
| 42          | 97.783   | 98.724   | 0,001490 | 0,000830 |
| 43          | 97.638   | 98.642   | 0,001638 | 0,000900 |
| 44          | 97.478   | 98.553   | 0,001796 | 0,001020 |
| 45          | 97.303   | 98.453   | 0,002044 | 0,001112 |
| 46          | 97.104   | 98.343   | 0,002185 | 0,001270 |

Tabelle A.4.: ADSt 2014/16 (Fortsetzung)

| Alter $x/y$ | $\ell_x$ | $\ell_y$ | $q_x$    | $q_y$    |
|-------------|----------|----------|----------|----------|
| 47          | 96.892   | 98.218   | 0,002486 | 0,001434 |
| 48          | 96.651   | 98.078   | 0,002785 | 0,001600 |
| 49          | 96.382   | 97.921   | 0,003147 | 0,001811 |
| 50          | 96.078   | 97.743   | 0,003518 | 0,001971 |
| 51          | 95.740   | 97.551   | 0,003861 | 0,002209 |
| 52          | 95.371   | 97.335   | 0,004425 | 0,002455 |
| 53          | 94.949   | 97.096   | 0,004986 | 0,002733 |
| 54          | 94.475   | 96.831   | 0,005574 | 0,003010 |
| 55          | 93.949   | 96.539   | 0,006148 | 0,003313 |
| 56          | 93.371   | 96.220   | 0,006830 | 0,003619 |
| 57          | 92.733   | 95.871   | 0,007540 | 0,003992 |
| 58          | 92.034   | 95.489   | 0,008440 | 0,004411 |
| 59          | 91.257   | 95.067   | 0,009250 | 0,004830 |
| 60          | 90.413   | 94.608   | 0,010041 | 0,005391 |
| 61          | 89.505   | 94.098   | 0,010988 | 0,005595 |
| 62          | 88.522   | 93.572   | 0,012127 | 0,006077 |
| 63          | 87.448   | 93.003   | 0,013068 | 0,006584 |
| 64          | 86.305   | 92.391   | 0,014277 | 0,007287 |
| 65          | 85.073   | 91.717   | 0,015367 | 0,008012 |
| 66          | 83.766   | 90.983   | 0,016346 | 0,008735 |
| 67          | 82.397   | 90.188   | 0,017954 | 0,009694 |
| 68          | 80.917   | 89.314   | 0,018703 | 0,010215 |
| 69          | 79.404   | 88.401   | 0,020635 | 0,011172 |
| 70          | 77.765   | 87.414   | 0,022404 | 0,012184 |
| 71          | 76.023   | 86.349   | 0,024391 | 0,013390 |
| 72          | 74.169   | 85.192   | 0,026149 | 0,014409 |
| 73          | 72.229   | 83.965   | 0,028296 | 0,015483 |
| 74          | 70.186   | 82.665   | 0,030919 | 0,017108 |
| 75          | 68.016   | 81.251   | 0,034032 | 0,019068 |
| 76          | 65.701   | 79.701   | 0,037642 | 0,021826 |
| 77          | 63.228   | 77.962   | 0,041255 | 0,024452 |
| 78          | 60.619   | 76.055   | 0,046242 | 0,028100 |
| 79          | 57.816   | 73.918   | 0,052277 | 0,032923 |
| 80          | 54.794   | 71.485   | 0,058585 | 0,038408 |
| 81          | 51.583   | 68.739   | 0,066533 | 0,044063 |
| 82          | 48.151   | 65.710   | 0,074771 | 0,050342 |
| 83          | 44.551   | 62.402   | 0,084802 | 0,058082 |

Tabelle A.4.: ADSt 2014/16 (Fortsetzung)

| Alter $x/y$ | $\ell_x$ | $\ell_y$ | $q_x$    | $q_y$    |
|-------------|----------|----------|----------|----------|
| 84          | 40.773   | 58.778   | 0,095323 | 0,067221 |
| 85          | 36.886   | 54.827   | 0,107514 | 0,077221 |
| 86          | 32.921   | 50.593   | 0,120021 | 0,088908 |
| 87          | 28.969   | 46.095   | 0,132989 | 0,101190 |
| 88          | 25.117   | 41.430   | 0,147534 | 0,114825 |
| 89          | 21.411   | 36.673   | 0,162444 | 0,130918 |
| 90          | 17.933   | 31.872   | 0,179555 | 0,147937 |
| 91          | 14.713   | 27.157   | 0,202404 | 0,167335 |
| 92          | 11.735   | 22.613   | 0,224232 | 0,187558 |
| 93          | 9.104    | 18.371   | 0,243834 | 0,209198 |
| 94          | 6.884    | 14.528   | 0,273501 | 0,235173 |
| 95          | 5.001    | 11.112   | 0,285932 | 0,249033 |
| 96          | 3.571    | 8.344    | 0,312609 | 0,269486 |
| 97          | 2.455    | 6.096    | 0,338019 | 0,277056 |
| 98          | 1.625    | 4.407    | 0,361584 | 0,304730 |
| 99          | 1.037    | 3.064    | 0,384722 | 0,330527 |
| 100         | 638      | 2.051    | 0,407181 | 0,358605 |

### A.2.2. Ausgewählte Sterbetafeln der DAV

Dargestellt sind die Sterbetafeln DAV2004R für Rentenversicherungen, DAV1994T und DAV2008T für Todesfallversicherungen, die von der deutschen Aktuarvereinigung zur Verfügung gestellt werden [DAV05; Loe94; DAV09a].

Für die Tafel DAV2004R sind die Sterbewahrscheinlichkeiten der Basistafel 1. Ordnung für Männer und Frauen angegeben. Diese wurden in Beispiel 5.9, Beispiel 5.7 und Beispiel 5.32 verwendet.

Die Daten der Tafeln DAV1994T und DAV2008T wurden in Abbildung 5.1 dargestellt.

Tabelle A.5.: Ausgewählte Sterbetafeln der DAV

| Alter<br>$x/y$ | DAV2004R         |                  | DAV1994T         |                  | DAV2008T         |                  |
|----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
|                | DAV04RM<br>$q_x$ | DAV04RF<br>$q_y$ | DAV94TM<br>$q_x$ | DAV94TF<br>$q_y$ | DAV08TM<br>$q_x$ | DAV08TF<br>$q_y$ |
| 0              | 0,003439         | 0,002694         | 0,011687         | 0,009003         | 0,006113         | 0,005088         |
| 1              | 0,000317         | 0,000280         | 0,001008         | 0,000867         | 0,000423         | 0,000387         |
| 2              | 0,000214         | 0,000160         | 0,000728         | 0,000624         | 0,000343         | 0,000318         |
| 3              | 0,000158         | 0,000124         | 0,000542         | 0,000444         | 0,000275         | 0,000255         |
| 4              | 0,000122         | 0,000101         | 0,000473         | 0,000345         | 0,000220         | 0,000202         |

Tabelle A.5.: Ausgewählte Sterbetafeln der DAV (Fortsetzung)

| Alter<br>$x/y$ | DAV2004R |          | DAV1994T |          | DAV2008T |          |
|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|                | $q_x$    | $q_y$    | $q_x$    | $q_y$    | $q_x$    | $q_y$    |
| 5              | 0,000108 | 0,000078 | 0,000452 | 0,000307 | 0,000182 | 0,000163 |
| 6              | 0,000102 | 0,000081 | 0,000433 | 0,000293 | 0,000155 | 0,000134 |
| 7              | 0,000087 | 0,000080 | 0,000408 | 0,000283 | 0,000139 | 0,000115 |
| 8              | 0,000099 | 0,000069 | 0,000379 | 0,000275 | 0,000129 | 0,000105 |
| 9              | 0,000084 | 0,000068 | 0,000352 | 0,000268 | 0,000125 | 0,000099 |
| 10             | 0,000083 | 0,000066 | 0,000334 | 0,000261 | 0,000129 | 0,000102 |
| 11             | 0,000098 | 0,000071 | 0,000331 | 0,000260 | 0,000143 | 0,000111 |
| 12             | 0,000104 | 0,000075 | 0,000340 | 0,000267 | 0,000173 | 0,000127 |
| 13             | 0,000114 | 0,000079 | 0,000371 | 0,000281 | 0,000222 | 0,000153 |
| 14             | 0,000140 | 0,000092 | 0,000451 | 0,000307 | 0,000303 | 0,000188 |
| 15             | 0,000192 | 0,000120 | 0,000593 | 0,000353 | 0,000417 | 0,000228 |
| 16             | 0,000276 | 0,000144 | 0,000792 | 0,000416 | 0,000557 | 0,000271 |
| 17             | 0,000364 | 0,000166 | 0,001040 | 0,000480 | 0,000709 | 0,000310 |
| 18             | 0,000596 | 0,000235 | 0,001298 | 0,000537 | 0,000850 | 0,000324 |
| 19             | 0,000630 | 0,000238 | 0,001437 | 0,000560 | 0,000953 | 0,000330 |
| 20             | 0,000627 | 0,000230 | 0,001476 | 0,000560 | 0,001012 | 0,000328 |
| 21             | 0,000636 | 0,000211 | 0,001476 | 0,000560 | 0,001022 | 0,000322 |
| 22             | 0,000625 | 0,000215 | 0,001476 | 0,000560 | 0,001004 | 0,000314 |
| 23             | 0,000642 | 0,000201 | 0,001476 | 0,000560 | 0,000963 | 0,000304 |
| 24             | 0,000622 | 0,000222 | 0,001476 | 0,000560 | 0,000911 | 0,000297 |
| 25             | 0,000617 | 0,000225 | 0,001476 | 0,000560 | 0,000856 | 0,000293 |
| 26             | 0,000616 | 0,000225 | 0,001476 | 0,000560 | 0,000808 | 0,000292 |
| 27             | 0,000627 | 0,000235 | 0,001476 | 0,000581 | 0,000772 | 0,000292 |
| 28             | 0,000613 | 0,000258 | 0,001476 | 0,000612 | 0,000752 | 0,000296 |
| 29             | 0,000603 | 0,000280 | 0,001476 | 0,000645 | 0,000745 | 0,000302 |
| 30             | 0,000598 | 0,000291 | 0,001476 | 0,000689 | 0,000752 | 0,000311 |
| 31             | 0,000605 | 0,000302 | 0,001476 | 0,000735 | 0,000768 | 0,000327 |
| 32             | 0,000626 | 0,000318 | 0,001489 | 0,000783 | 0,000791 | 0,000351 |
| 33             | 0,000663 | 0,000344 | 0,001551 | 0,000833 | 0,000820 | 0,000386 |
| 34             | 0,000713 | 0,000385 | 0,001641 | 0,000897 | 0,000855 | 0,000433 |
| 35             | 0,000775 | 0,000434 | 0,001747 | 0,000971 | 0,000895 | 0,000490 |
| 36             | 0,000850 | 0,000488 | 0,001869 | 0,001057 | 0,000945 | 0,000555 |
| 37             | 0,000944 | 0,000547 | 0,002007 | 0,001156 | 0,001005 | 0,000624 |
| 38             | 0,001047 | 0,000605 | 0,002167 | 0,001267 | 0,001083 | 0,000701 |
| 39             | 0,001153 | 0,000666 | 0,002354 | 0,001390 | 0,001181 | 0,000783 |
| 40             | 0,001261 | 0,000735 | 0,002569 | 0,001524 | 0,001301 | 0,000872 |

Tabelle A.5.: Ausgewählte Sterbetafeln der DAV (Fortsetzung)

| Alter<br>$x/y$ | DAV2004R |          | DAV1994T |          | DAV2008T |          |
|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|                | $q_x$    | $q_y$    | $q_x$    | $q_y$    | $q_x$    | $q_y$    |
| 41             | 0,001372 | 0,000809 | 0,002823 | 0,001672 | 0,001447 | 0,000972 |
| 42             | 0,001483 | 0,000885 | 0,003087 | 0,001812 | 0,001623 | 0,001084 |
| 43             | 0,001603 | 0,000959 | 0,003387 | 0,001964 | 0,001833 | 0,001213 |
| 44             | 0,001732 | 0,001033 | 0,003726 | 0,002126 | 0,002082 | 0,001359 |
| 45             | 0,001871 | 0,001113 | 0,004100 | 0,002295 | 0,002364 | 0,001524 |
| 46             | 0,002025 | 0,001203 | 0,004522 | 0,002480 | 0,002669 | 0,001706 |
| 47             | 0,002194 | 0,001301 | 0,004983 | 0,002676 | 0,002983 | 0,001903 |
| 48             | 0,002373 | 0,001406 | 0,005508 | 0,002902 | 0,003302 | 0,002109 |
| 49             | 0,002563 | 0,001512 | 0,006094 | 0,003151 | 0,003630 | 0,002324 |
| 50             | 0,002762 | 0,001616 | 0,006751 | 0,003425 | 0,003981 | 0,002546 |
| 51             | 0,002981 | 0,001720 | 0,007485 | 0,003728 | 0,004371 | 0,002782 |
| 52             | 0,003212 | 0,001822 | 0,008302 | 0,004066 | 0,004812 | 0,003035 |
| 53             | 0,003449 | 0,001931 | 0,009215 | 0,004450 | 0,005308 | 0,003306 |
| 54             | 0,003684 | 0,002052 | 0,010195 | 0,004862 | 0,005857 | 0,003593 |
| 55             | 0,003911 | 0,002186 | 0,011236 | 0,005303 | 0,006460 | 0,003898 |
| 56             | 0,004134 | 0,002340 | 0,012340 | 0,005777 | 0,007117 | 0,004228 |
| 57             | 0,004370 | 0,002516 | 0,013519 | 0,006302 | 0,007831 | 0,004585 |
| 58             | 0,004627 | 0,002706 | 0,014784 | 0,006884 | 0,008604 | 0,004974 |
| 59             | 0,004932 | 0,002914 | 0,016150 | 0,007530 | 0,009454 | 0,005402 |
| 60             | 0,005299 | 0,003145 | 0,017625 | 0,008240 | 0,010404 | 0,005884 |
| 61             | 0,005777 | 0,003402 | 0,019223 | 0,009022 | 0,011504 | 0,006449 |
| 62             | 0,006383 | 0,003692 | 0,020956 | 0,009884 | 0,012818 | 0,007126 |
| 63             | 0,007119 | 0,004021 | 0,022833 | 0,010839 | 0,014429 | 0,007935 |
| 64             | 0,007963 | 0,004384 | 0,024858 | 0,011889 | 0,016415 | 0,008898 |
| 65             | 0,008886 | 0,004830 | 0,027073 | 0,013054 | 0,018832 | 0,010025 |
| 66             | 0,009938 | 0,005278 | 0,029552 | 0,014371 | 0,021704 | 0,011323 |
| 67             | 0,011253 | 0,005905 | 0,032350 | 0,015874 | 0,025016 | 0,012797 |
| 68             | 0,012687 | 0,006674 | 0,035632 | 0,017667 | 0,028738 | 0,014460 |
| 69             | 0,014231 | 0,007548 | 0,039224 | 0,019657 | 0,032822 | 0,016332 |
| 70             | 0,015887 | 0,008525 | 0,043127 | 0,021861 | 0,037219 | 0,018440 |
| 71             | 0,017663 | 0,009679 | 0,047400 | 0,024344 | 0,041880 | 0,020813 |
| 72             | 0,019598 | 0,010965 | 0,052110 | 0,027191 | 0,046597 | 0,023475 |
| 73             | 0,021698 | 0,012341 | 0,057472 | 0,030576 | 0,051181 | 0,027035 |
| 74             | 0,023990 | 0,013909 | 0,063440 | 0,034504 | 0,056110 | 0,030413 |
| 75             | 0,026610 | 0,015706 | 0,070039 | 0,039030 | 0,061477 | 0,034287 |
| 76             | 0,029533 | 0,017672 | 0,077248 | 0,044184 | 0,067433 | 0,038749 |

Tabelle A.5.: Ausgewählte Sterbetafeln der DAV (Fortsetzung)

| Alter<br>$x/y$ | DAV2004R |          | DAV1994T |          | DAV2008T |          |
|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|                | $q_x$    | $q_y$    | $q_x$    | $q_y$    | $q_x$    | $q_y$    |
| 77             | 0,032873 | 0,019722 | 0,085073 | 0,050014 | 0,074160 | 0,043937 |
| 78             | 0,036696 | 0,022102 | 0,093534 | 0,056574 | 0,081806 | 0,049993 |
| 79             | 0,041106 | 0,024975 | 0,102662 | 0,063921 | 0,090478 | 0,057024 |
| 80             | 0,046239 | 0,028535 | 0,112477 | 0,072101 | 0,100261 | 0,065113 |
| 81             | 0,052094 | 0,032947 | 0,122995 | 0,081151 | 0,111193 | 0,074288 |
| 82             | 0,058742 | 0,038340 | 0,134231 | 0,091096 | 0,123283 | 0,084590 |
| 83             | 0,066209 | 0,044665 | 0,146212 | 0,101970 | 0,136498 | 0,096095 |
| 84             | 0,074583 | 0,051737 | 0,158964 | 0,113798 | 0,150887 | 0,109028 |
| 85             | 0,083899 | 0,059541 | 0,172512 | 0,126628 | 0,166500 | 0,123611 |
| 86             | 0,094103 | 0,068187 | 0,186896 | 0,140479 | 0,183344 | 0,140022 |
| 87             | 0,105171 | 0,077684 | 0,202185 | 0,155379 | 0,201323 | 0,158257 |
| 88             | 0,116929 | 0,087911 | 0,218413 | 0,171325 | 0,220284 | 0,178185 |
| 89             | 0,129206 | 0,098662 | 0,235597 | 0,188318 | 0,240073 | 0,199669 |
| 90             | 0,141850 | 0,109614 | 0,253691 | 0,206375 | 0,260556 | 0,222504 |
| 91             | 0,154860 | 0,120510 | 0,272891 | 0,225558 | 0,281602 | 0,246453 |
| 92             | 0,168157 | 0,131383 | 0,293142 | 0,245839 | 0,303079 | 0,271195 |
| 93             | 0,181737 | 0,142265 | 0,314638 | 0,267270 | 0,324872 | 0,295584 |
| 94             | 0,195567 | 0,153185 | 0,337739 | 0,289983 | 0,346887 | 0,319362 |
| 95             | 0,209614 | 0,164128 | 0,362060 | 0,314007 | 0,369051 | 0,343441 |
| 96             | 0,223854 | 0,175065 | 0,388732 | 0,340119 | 0,391305 | 0,367818 |
| 97             | 0,238280 | 0,185958 | 0,419166 | 0,367388 | 0,413938 | 0,392493 |
| 98             | 0,252858 | 0,196824 | 0,452008 | 0,397027 | 0,437313 | 0,417460 |
| 99             | 0,267526 | 0,207667 | 0,486400 | 0,428748 | 0,461101 | 0,442716 |
| 100            | 0,278816 | 0,229739 | 0,527137 | 0,462967 | 0,485304 | 0,468258 |
| 101            | 0,293701 | 0,243350 |          |          | 0,509924 | 0,494075 |
| 102            | 0,308850 | 0,257319 |          |          | 0,534957 | 0,520164 |
| 103            | 0,324261 | 0,271655 |          |          | 0,560407 | 0,546514 |
| 104            | 0,339936 | 0,286368 |          |          | 0,586265 | 0,573114 |
| 105            | 0,355873 | 0,301467 |          |          | 0,612529 | 0,599953 |
| 106            | 0,372069 | 0,316962 |          |          | 0,639188 | 0,627014 |
| 107            | 0,388523 | 0,332860 |          |          | 0,666233 | 0,654283 |
| 108            | 0,405229 | 0,349169 |          |          | 0,693651 | 0,681741 |
| 109            | 0,422180 | 0,365896 |          |          | 0,721425 | 0,709364 |
| 110            | 0,439368 | 0,383046 |          |          | 0,749533 | 0,737130 |
| 111            | 0,456782 | 0,400622 |          |          | 0,777950 | 0,765011 |
| 112            | 0,474411 | 0,418626 |          |          | 0,806647 | 0,792974 |

Tabelle A.5.: Ausgewählte Sterbetafeln der DAV (Fortsetzung)

| Alter<br>$x/y$ | DAV2004R |          | DAV1994T |       | DAV2008T |          |
|----------------|----------|----------|----------|-------|----------|----------|
|                | $q_x$    | $q_y$    | $q_x$    | $q_y$ | $q_x$    | $q_y$    |
| 113            | 0,492237 | 0,437055 |          |       | 0,835585 | 0,820987 |
| 114            | 0,510241 | 0,455906 |          |       | 0,864722 | 0,849009 |
| 115            | 0,528401 | 0,475170 |          |       | 0,894008 | 0,876998 |
| 116            | 0,546689 | 0,494832 |          |       | 0,923382 | 0,904905 |
| 117            | 0,565074 | 0,514872 |          |       | 0,952778 | 0,932675 |
| 118            | 0,583517 | 0,535264 |          |       | 0,982113 | 0,960249 |
| 119            | 0,601976 | 0,555969 |          |       | 1        | 0,987564 |
| 120            | 0,620400 | 0,576942 |          |       | 1        | 1        |
| 121            | 1        | 1        |          |       | 1        | 1        |

### A.3. Daten Beispiel Inflation

Die in Abschnitt 6.2 verwendeten Werte für die Kapitalmarktstrukturkurven, sowie die Inflationsraten sind in folgender Tabelle angegeben.

Tabelle A.6.: Verwendete Werte in Beispiel 6.2

| Jahr | Ausgangswerte |                     | Szenario 1        |                                 | Szenario 2        |                                 |
|------|---------------|---------------------|-------------------|---------------------------------|-------------------|---------------------------------|
|      | $i_t$         | $i_{\text{infl},t}$ | $\Delta^{(1)}i_t$ | $\Delta^{(1)}i_{\text{infl},t}$ | $\Delta^{(2)}i_t$ | $\Delta^{(2)}i_{\text{infl},t}$ |
| 1992 | 0,0791        | 0,050               | 0,0791            | 0,050                           | 0,05955           | 0,0350                          |
| 1993 | 0,0651        | 0,045               | 0,0651            | 0,045                           | 0,05255           | 0,0325                          |
| 1994 | 0,0687        | 0,026               | 0,0687            | 0,026                           | 0,05435           | 0,0230                          |
| 1995 | 0,0685        | 0,018               | 0,0685            | 0,018                           | 0,05425           | 0,0190                          |
| 1996 | 0,0622        | 0,013               | 0,0622            | 0,013                           | 0,05110           | 0,0165                          |
| 1997 | 0,0564        | 0,020               | 0,0564            | 0,020                           | 0,04820           | 0,0200                          |
| 1998 | 0,0457        | 0,009               | 0,0457            | 0,009                           | 0,04285           | 0,0145                          |
| 1999 | 0,0449        | 0,006               | 0,0449            | 0,006                           | 0,04245           | 0,0130                          |
| 2000 | 0,0526        | 0,014               | 0,0526            | 0,014                           | 0,04630           | 0,0170                          |
| 2001 | 0,0480        | 0,020               | 0,0480            | 0,020                           | 0,04400           | 0,0200                          |
| 2002 | 0,0478        | 0,013               | 0,0478            | 0,013                           | 0,04390           | 0,0165                          |
| 2003 | 0,0407        | 0,011               | 0,0407            | 0,011                           | 0,04035           | 0,0155                          |
| 2004 | 0,0404        | 0,017               | 0,0404            | 0,017                           | 0,04020           | 0,0185                          |
| 2005 | 0,0335        | 0,015               | 0,0335            | 0,015                           | 0,03675           | 0,0175                          |
| 2006 | 0,0376        | 0,016               | 0,0376            | 0,016                           | 0,03880           | 0,0180                          |
| 2007 | 0,0422        | 0,023               | 0,0422            | 0,023                           | 0,04110           | 0,0215                          |
| 2008 | 0,0398        | 0,026               | 0,0398            | 0,026                           | 0,03990           | 0,0230                          |
| 2009 | 0,0322        | 0,003               | 0,0322            | 0,003                           | 0,03610           | 0,0115                          |

Tabelle A.6.: Verwendete Werte in Beispiel 6.2 (Fortsetzung)

| Jahr | Ausgangswerte |                     | Szenario 1        |                                 | Szenario 2        |                                 |
|------|---------------|---------------------|-------------------|---------------------------------|-------------------|---------------------------------|
|      | $i_t$         | $i_{\text{infl},t}$ | $\Delta^{(1)}i_t$ | $\Delta^{(1)}i_{\text{infl},t}$ | $\Delta^{(2)}i_t$ | $\Delta^{(2)}i_{\text{infl},t}$ |
| 2010 | 0,0274        | 0,011               | 0,0274            | 0,011                           | 0,03370           | 0,0155                          |
| 2011 | 0,0261        | 0,021               | 0,0261            | 0,021                           | 0,03305           | 0,0205                          |
| 2012 | 0,0150        | 0,020               | 0,0150            | 0,020                           | 0,02750           | 0,0200                          |
| 2013 | 0,0157        | 0,014               | 0,0157            | 0,014                           | 0,02785           | 0,0170                          |
| 2014 | 0,0116        | 0,010               | 0,0116            | 0,010                           | 0,02580           | 0,0150                          |
| 2015 | 0,0050        | 0,005               | 0,0050            | 0,005                           | 0,02250           | 0,0125                          |
| 2016 | 0,0009        | 0,005               | 0,0009            | 0,005                           | 0,02045           | 0,0125                          |
| 2017 | 0,0032        | 0,015               | 0,0032            | 0,015                           | 0,02160           | 0,0175                          |
| 2018 | 0,0040        | 0,018               | 0,0040            | 0,018                           | 0,02200           | 0,0190                          |
| 2019 | -0,0025       | 0,014               | -0,0025           | 0,014                           | 0,01875           | 0,0170                          |
| 2020 | -0,0072       | 0,006               | 0,0028            | 0,021                           | 0,0164            | 0,0130                          |
| 2021 | -0,0104       | 0,012               | 0,0016            | 0,032                           | 0,0148            | 0,0160                          |

## A.4. Beweis zu Monotonie-Aussagen

### A.4.1. Beweis zu Satz 5.21

Zu zeigen ist:

Falls  $Z_j \geq 0$  für  $j = 0, \dots, n$  und  $\Delta q_{x+j} \geq 0$ , für  $j = 0, \dots, n-1$ , dann ist für  $t \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  die Größe  $aD(Q_x, \Delta Q_x)$  monoton fallend in Werten von  $q_{x+t}$ .

**Beweis** Sei  $D_0 \in \mathbb{R}$  beliebig, aber fest. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial q_{x+t}} \left( \frac{\sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=0}^{j-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \right) j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)}}{\sum_{j=0}^n j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)}} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_{x+t}} \left( \frac{\sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=0}^{j-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \right) j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)}}{\sum_{j=0}^n j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)}} \cdot \frac{(1 - q_{x+t})^{D_0}}{(1 - q_{x+t})^{D_0}} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_{x+t}} \left( \frac{\sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=0}^{j-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \right) j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot (1 - q_{x+t})^{D_0}}{\sum_{j=0}^n j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot (1 - q_{x+t})^{D_0}} \right) \quad (\text{A.1})
\end{aligned}$$

Für die Ableitung des Nenners in (A.1) gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial q_{x+t}} \left( \sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot (1 - q_{x+t})^{D_0} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_{x+t}} \left( \sum_{j=0}^t {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot (1 - q_{x+t})^{D_0} + \sum_{j=t+1}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot (1 - q_{x+t})^{D_0} \right) \\
&= \sum_{j=0}^t \left( -D_0 \cdot (1 - q_{x+t})^{(D_0-1)} \right) \cdot {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \\
&\quad + \sum_{j=t+1}^n \left( -(D_0 + 1) \cdot (1 - q_{x+t})^{(D_0-1)} \right) \cdot {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \\
&= (1 - q_{x+t})^{(D_0-1)} \cdot \left( -D_0 \cdot \sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} - \sum_{j=t+1}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \right). \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt für die Ableitung des Zählers aus (A.1):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial q_{x+t}} \left( \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k \leq j-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \right) {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot (1 - q_{x+t})^{D_0} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_{x+t}} \left( \sum_{j \leq t} \left( \sum_{k \leq j-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \right) {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot (1 - q_{x+t})^{D_0} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j > t} \left( \sum_{k \leq j-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \right) {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot (1 - q_{x+t})^{D_0} \right) \\
&= \sum_{j \leq t} (-D_0) \cdot \left( \sum_{k \leq j-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \right) \cdot {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot (1 - q_{x+t})^{(D_0-1)} \\
&\quad + \left[ \sum_{j > t} \left[ \left( (1 - q_{x+t})^{-2} \cdot \Delta q_{x+t} \right) \cdot {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot (1 - q_{x+t})^{D_0} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( \sum_{k \leq j-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \right) \cdot {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot (-1) \cdot (D_0 + 1) \cdot (1 - q_{x+t})^{(D_0-1)} \right] \right] \\
&= -D_0 \cdot (1 - q_{x+t})^{(D_0-1)} \cdot \sum_{j \geq 1} \left( \sum_{k \leq j-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \right) \cdot {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \\
&\quad - (1 - q_{x+t})^{(D_0-1)} \cdot \sum_{j > t} \left( \sum_{k \leq j-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} - (1 - q_{x+t})^{-1} \cdot \Delta q_{x+t} \right) \\
&\quad \cdot {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - q_{x+t})^{(D_0-1)} \cdot \left[ -D_0 \cdot \sum_{j \geq 1} \left( \sum_{k \leq j-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \right) \cdot {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \right. \\
&\quad - \sum_{j > t} \left( \sum_{k \leq j-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \right) \cdot {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \\
&\quad \left. + \sum_{j > t} \left( (1 - q_{x+t})^{-1} \cdot \Delta q_{x+t} \right) \cdot {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \right] \tag{A.3}
\end{aligned}$$

Wähle nun

$$D_0 := D_0(t) = - \frac{\sum_{j=t+1}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)}}{\sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)}}.$$

Damit erhält man für die Ableitung des Nenners aus (A.2):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial q_{x+t}} \left( \sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot (1 - q_{x+t})^{D_0} \right) \\
&= (1 - q_{x+t})^{(D_0-1)} \cdot \left( -D_0 \cdot \sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} - \sum_{j=t+1}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \right) \\
&= (1 - q_{x+t})^{(D_0-1)} \cdot \left( \frac{\sum_{j=t+1}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)}}{\sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)}} \cdot \sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} - \sum_{j=t+1}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Für die Ableitung des Zählers folgt, unter Umbenennung der Indizes, weiter aus (A.3):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial q_{x+t}} \left( \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k \leq j-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \right) {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot (1 - q_{x+t})^{D_0} \right) \\
&= (1 - q_{x+t})^{(D_0-1)} \cdot \left[ \frac{\sum_{j=t+1}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)}}{\sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)}} \cdot \sum_{l \geq 1} \left( \sum_{k \leq l-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \right) \cdot {}_l p_x \cdot Z_l v^{(l)} \right. \\
&\quad - \sum_{j > t} \left( \sum_{k \leq j-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \right) \cdot {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \\
&\quad \left. + \sum_{j > t} \left( (1 - q_{x+t})^{-1} \cdot \Delta q_{x+t} \right) \cdot {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \right] \\
&= (1 - q_{x+t})^{(D_0-1)} \cdot \sum_{j=t+1}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \underbrace{\frac{\sum_{l \geq 1} \left( \sum_{k \leq l-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \right) \cdot {}_l p_x \cdot Z_l \cdot v^{(l)}}{\sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)}}}_{=aD(Q_x), \text{ d.h. konstant}} \right. \\
& \quad \left. - \underbrace{\left( \sum_{k \leq j-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \right) + \left( (1 - q_{x+t})^{-1} \cdot \Delta q_{x+t} \right)}_{<0, \text{ für alle } j \geq t+1} \right] \\
& \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=0, \text{ für } t=0 \text{ und monoton fallend in } t, \text{ d.h. } \leq 0 \text{ für alle } t}
\end{aligned}$$

< 0.

Mit  $aBW(Q_x) = \sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot (1 - q_{x+t})^{-D_0} \geq 0$  für nicht-negative Zahlungsreihen folgt aus (A.1) schließlich

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial q_{x+t}} \left( \frac{\sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=0}^{j-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \right) {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)}}{\sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)}} \right) \\
& \quad = \frac{\frac{\partial}{\partial q_{x+t}} \left( \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=0}^{j-1} (1 - q_{x+k})^{-1} \cdot \Delta q_{x+k} \right) {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot (1 - q_{x+t})^{-D_0} \right)}{\sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot Z_j \cdot v^{(j)} \cdot (1 - q_{x+t})^{-D_0}} \\
& \quad < 0
\end{aligned}$$

und damit die Monotonie-Aussage. □



# Literatur

- [Baf11] Bafin Rundschreiben 11/2011. “Zinsänderungen im Anlagebuch; Ermittlung der Auswirkungen einer plötzlichen und unerwarteten Zinsänderung”. In: (9.11.2011).  
<https://www.bafin.de/dok/7846554>.
- [Bau+08] D. Bauer u. a. “The volatility of mortality”. In: *Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance* 3.1 (2008).
- [Bec+16] T. Becker u. a. *Stochastische Risikomodellierung und statistische Methoden*. Springer, 2016.
- [BFH03] G. W. Buetow, F. J. Fabozzi und B. Hanke. “A note on common interest rate risk measures”. In: *The Journal of Fixed Income* 13.2 (2003), S. 46–54.
- [BH95] A. Bühler und M. Hies. “Zinsrisiken und Key-Rate-Duration”. In: *Die Bank: Zeitschrift für Bankpolitik und Praxis* 2 (1995), S. 112–118.
- [Bie02] B. Biermann. “Modernes Risikomanagement in Banken”. In: *Handbuch des Risikomanagements*. Hrsg. von R. Eller, W. Gruber und M. Reif. 2002, S. 103–125.
- [Bif05] E. Biffis. “Affine processes for dynamic mortality and actuarial valuations”. In: *Insurance: mathematics and economics* 37.3 (2005), S. 443–468.
- [BK77] G. O. Bierwag und G. G. Kaufman. “Coping with the risk of interest-rate fluctuations: a note”. In: *The Journal of Business* 50.3 (1977), S. 364–370.
- [CBD06] A. J. Cairns, D. Blake und K. Dowd. “Pricing death: Frameworks for the valuation and securitization of mortality risk”. In: *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA* 36.1 (2006), S. 79–120.
- [CD09] C. Cottin und S. Döhler. *Risikoanalyse: Modellierung, Beurteilung und Management von Risiken mit Praxisbeispielen*. Springer. Wiesbaden, 2009.
- [CES20] CESifo-Gruppe. *Gemeinschaftsdiagnose: Inflationsrate in Deutschland von 2008 bis 2019 sowie Prognose bis 2021 (Veränderung gegenüber Vorjahr)*. Statista, zugegriffen am 07. Oktober 2020). 2020.  
<https://de.statista.com/statistik/daten/studie/5851/umfrage/prognose-zur-entwicklung-der-inflationsrate-in-deutschland/>.
- [Chr07] M. C. Christiansen. “Vergleich von ökonomischen und biometrischen Risiken in der Personenversicherung”. In: *Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft* 96.1 (2007), S. 197–205.

- [Cou+07] G. Coughlan u. a. “LifeMetrics: A toolkit for measuring and managing longevity and mortality risks”. In: *Technical document, Life Metrics, JP Morgan* (2007).
- [Cou09] G. Coughlan. “Longevity risk transfer: Indices and capital market solutions”. In: *The Handbook of Insurance-Linked Securities* (2009), S. 261–281.
- [Dah04] M. Dahl. “Stochastic mortality in life insurance: market reserves and mortality-linked insurance contracts”. In: *Insurance: mathematics and economics* 35.1 (2004), S. 113–136.
- [DAV05] DAV-Unterarbeitsgruppe Rentensterblichkeit. “Herleitung der DAV-Sterbetafel 2004 R für Rentenversicherungen”. In: *Blätter der DGVM* 27.2 (2005), S. 199–314.
- [DAV09a] DAV-Unterarbeitsgruppe Todesfallrisiko. “Herleitung der Sterbetafel DAV 2008 T für Lebensversicherungen mit Todesfallcharakter”. In: *Blätter der DGVM* 30.1 (2009), S. 189–224.
- [DAV09b] DAV-Unterarbeitsgruppe Todesfallrisiko. “Raucher- und Nichtrauchersterbetafeln für Lebensversicherungen mit Todesfallcharakter”. In: *Blätter der DGVM* 30.1 (2009), S. 141–187.
- [Ell01a] R. Eller. *Modernes Bondmanagement*. Gabler, 2001.
- [Ell01b] R. Eller. “Risikomanagement festverzinslicher Wertpapiere”. In: *Modernes Bondmanagement*. 2001, S. 41–62.
- [Elt+09] E. J. Elton u. a. *Modern Portfolio Theory And Investment Analysis*. John Wiley & Sons, 2009.
- [Eur02] Europäische Union. “Richtlinie 2002/83/EG des europäischen Parlaments und des Rates vom 05. November 2002 über Lebensversicherungen”. In: *Amtsblatt der Europäischen Gemeinschaften L* 345.1 (2002).
- [Eur09] Europäische Union. “Richtlinie 2009/138/EG des europäischen Parlaments und des Rates vom 25. November 2009 betreffend die Aufnahme und Ausübung der Versicherungs- und der Rückversicherungstätigkeit (Solvabilität II)”. In: *Amtsblatt der Europäischen Union L* 335.2 (2009).
- [Fab07] F. J. Fabozzi. *Fixed Income Analysis*. John Wiley & Sons, 2007.
- [FG10] C. Führer und A. Grimmer. *Einführung in die Lebensversicherungsmathematik*. VVW GmbH, 2010.
- [FMC03] F. J. Fabozzi, S. V. Mann und M. Choudhry. *Measuring and controlling interest rate and credit risk*. Bd. 104. John Wiley & Sons, New Jersey, 2003.
- [For16] O. Forster. *Analysis 1*. Bd. 12. Springer, 2016.
- [For17] O. Forster. *Analysis 2*. Bd. 11. Springer, 2017.

- [FW71] L. Fisher und R. L. Weil. “Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations”. In: *The Journal of Business* 44.4 (1971), S. 408–431.
- [Gar17] F. J. P. García. *Financial Risk Management: Identification, Measurement and Management*. Springer International Publishing, 2017.
- [Ger86] H. U. Gerber. *Lebensversicherungsmathematik*. Springer-Verlag, 1986.
- [Ges20] Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft e. V. (GDV). “Die deutsche Lebensversicherung in Zahlen 2020”. In: (2020).
- [Gra02] T. Graf. “Zinsrisikomanagement mit dem Zinselastizitätenkonzept am Beispiel einer Sparkasse”. In: *Handbuch des Risikomanagements*. Hrsg. von R. Eller, W. Gruber und M. Reif. 2002, S. 257–290.
- [Grü+17] H. Gründl u. a. *Solvency II-Eine Einführung: Grundlagen der neuen Versicherungsaufsicht*. VVW GmbH, 2017.
- [GW14] N. Gatzert und H. Wesker. “Mortality risk and its effect on shortfall and risk management in life insurance”. In: *Journal of Risk and Insurance* 81.1 (2014), S. 57–90.
- [HHD06] K. Heubeck, R. Herrmann und G. D’Souza. “Die Richttafeln 2005 G-Modell, Herleitung, Formeln”. In: *Blätter der DGVM* 27.3 (2006), S. 473–517.
- [Hic39] J. R. Hicks. “The Foundations of Welfare Economics”. In: *The Economic Journal* 49.196 (1939), S. 696–712.
- [Hic46] J. R. Hicks. “Value and capital, 1939”. In: *Mathematical Appendix* (1946).
- [Ho92] T. S. Ho. “Key Rate Durations: Measures of Interest Rate Risks”. In: *The Journal of Fixed Income* (1992), S. 29–44.
- [HP07] J. Hartinger und M. Predota. “Vogelgrippe, Terror, Naturkatastrophen-Szenarioanalysen im Risikomanagement von Lebensversicherern”. In: *in Versicherungen und Pensionskassen* (2007), S. 23–40.
- [Hul14] J. C. Hull. *Risikomanagement: Banken, Versicherungen und andere Finanzinstitutionen*. Pearson, 2014.
- [HWPW15] T. Hartmann-Wendels, A. Pfingsten und M. Weber. *Bankbetriebslehre*. 6. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2015.
- [Jor+03] P. Jorion u. a. *Financial risk manager handbook*. John Wiley & Sons, 2003.
- [Kah18] J. Kahlenberg. *Lebensversicherungsmathematik*. Springer, 2018.
- [Kar01] C. Karl. “Der Einsatz der Duration nach Macaulay in einem modernen Bond-Management”. In: *Modernes Bondmanagement*. Gabler, 2001, S. 29–40.
- [KH12] L. Kruschwitz und S. Husmann. *Finanzierung und Investition*. Internationale Standardlehrbücher der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften. De Gruyter, 2012.

- [KV17] E. Kovács und P. Vékás. “Mortality and Longevity Risk”. In: *The Palgrave Handbook of Unconventional Risk Transfer*. Springer, 2017, S. 269–297.
- [Lee56] P. Leepin. “Über den Einfluß von Änderungen der Rechnungsgrundlagen auf Prämien und Prämienreserven”. In: *Blätter der DGVFM* 3.1 (1956), S. 3–22.
- [LH11] J. S.-H. Li und M. R. Hardy. “Measuring basis risk in longevity hedges”. In: *North American Actuarial Journal* 15.2 (2011), S. 177–200.
- [LL12] J. S.-H. Li und A. Luo. “Key  $q$ -duration: A framework for hedging longevity risk”. In: *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA* 42.2 (2012), S. 413–452.
- [Loe94] H. Loebus. “Bestimmung einer angemessenen Sterbetafel für Lebensversicherungen mit Todesfallcharakter”. In: *Blätter der DGVFM* 21.4 (1994), S. 497–524.
- [LRV12] E. Luciano, L. Regis und E. Vigna. “Delta–Gamma hedging of mortality and interest rate risk”. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 50.3 (2012), S. 402–412.
- [LT13] T. Lin und C. C.-L. Tsai. “On the mortality/longevity risk hedging with mortality immunization”. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 53.3 (2013), S. 580–596.
- [Mac38] F. R. Macaulay. *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856*. 1938.
- [MH08] H. Milbrodt und M. Helbig. *Mathematische Methoden der Personenversicherung*. Walter de Gruyter, 2008.
- [MP01] M. A. Milevsky und S. D. Promislow. “Mortality derivatives and the option to annuitise”. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 29.3 (2001), S. 299–318.
- [MPP] L. Martellini, P. Priaulet und S. Priaulet. *Fixed Income Securities: Valuation, Risk Management and Portfolio Strategies*.
- [Mül12] T. Müller. *Finanzrisiken in der Assekuranz: Moderne Finanz- und Risikokonzepte in der Versicherungswirtschaft*. Studienbücher Wirtschaftsmathematik. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2012.
- [Neu64] J. Neuhaus. “Über den Begriff der Invalidität”. In: *Blätter der DGVFM* 7.1 (1964), S. 39–46.
- [Ort16] K. M. Ortman. *Praktische Lebensversicherungsmathematik*. 2. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2016.
- [Ort17] K. M. Ortman. *Praktische Finanzmathematik*. Springer-Verlag, 2017.
- [Pla11] R. Plat. “One-year value-at-risk for longevity and mortality”. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 49.3 (2011), S. 462–470.

- [PS12] L. Perridon und M. Steiner. *Finanzwirtschaft der Unternehmung*. Vahlens Handbücher. Vahlen, 2012.
- [RB05] M. Renz und G. Best. “Was bedeutet Solvency II für die Lebensversicherung?” In: *Solvency II & Risikomanagement*. Springer, 2005, S. 317–336.
- [Rei92] R. R. Reitano. “Non-parallel yield curve shifts and immunization”. In: *Journal of portfolio management* 18.3 (1992), S. 36–43.
- [Reu08] S. Reuse. “Definition und Ausprägung des Zinsänderungsrisikos”. In: *Zinsrisikomanagement*. Hrsg. von S. Reuse. 2. Aufl. Finanz Colloquium, Heidelberg, 2008.
- [Rue64] F. Rueff. “Neue Grundlagen für die Berufsunfähigkeitsversicherung als Zusatzversicherung zur Kapital- und Rentenversicherung”. In: *Blätter der DGVFM* 7.1 (1964), S. 3–37.
- [Ös20] Österreichische Nationalbank. *Entwicklung des Kapitalmarktzinssatzes in Deutschland in den Jahren 1975 bis 2019*. zugegriffen am 07. Oktober 2020. 2020. <https://de.statista.com/statistik/daten/studie/201419/umfrage/entwicklung-des-kapitalmarktzinssatzes-in-deutschland/>.
- [SB17] M. Steiner und C. Bruns. *Wertpapiermanagement*. Professionelle Wertpapieranalyse und Portfoliostrukturierung. 11. überarbeitete und erweiterte. 2017.
- [Sch05] K. D. Schmidt. *Versicherungsmathematik*. 2. Springer, 2005.
- [Sch06] D. F. Schrage. “Affine stochastic mortality”. In: *Insurance: mathematics and economics* 38.1 (2006), S. 81–97.
- [Sch97] S. Schich. “Schätzung der deutschen Zinsstrukturkurve”. In: *Diskussionspapier der deutschen Bundesbank, Serie 1, Nummer 4* (1997).
- [SLK08] H. Schierenbeck, M. Lister und S. Kirmße. *Ertragsorientiertes Bankmanagement - Band 2: Risiko-Controlling und integrierte Rendite-/Risikosteuerung*. 9. Auflage. Gabler, GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2008.
- [Sta18] Statistisches Bundesamt (Destatis). “Sterbetafel 2014/16 - Ergebnisse aus der laufenden Berechnung von Periodensterbetafeln für Deutschland und die Bundesländer”. In: (2018, Zugriff am 30.08.2018, Verfügbar unter [www.destatis.de](http://www.destatis.de)).
- [Sta20] Statistisches Bundesamt (Destatis). *Verbraucherpreisindex (inkl. Veränderungsraten), Deutschland*. zugegriffen am 07. Oktober 2020. 2020. <https://www-genesis.destatis.de/genesis/online?sequenz=statistikTabellen\\newline&selectionname=61111>.
- [SU01] P. Steiner und H. Uhlir. *Wertpapieranalyse*. Vierte, vollständig überarbeitete und erweiterte. Heidelberg, Physica-Verlag, 2001.

- [Sun09] S. Sundaresan. *Fixed Income Markets and Their Derivatives*. Academic Press, 2009.
- [Tie15] J. Tietze. *Einführung in die Finanzmathematik. Klassische Verfahren und neuere Entwicklungen: Effektivzins- und Renditeberechnung, Investitionsrechnung, Derivative Finanzinstrumente*. 12. erweiterte. Springer Spektrum, 2015.
- [Tra07] S. Trautmann. *Investitionen: Bewertung, Auswahl und Risikomanagement*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [TS11] B. Tuckman und A. Serrat. *Fixed Income Securities: Tools For Today's Markets*. Bd. Third Edition. John Wiley & Sons, 2011.
- [Wag17] F. Wagner. *Gabler Versicherungslexikon*. Springer, 2017.
- [Wal90] W. Walter. *Analysis II*. Grundwissen Mathematik 4. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990.
- [Wan+10] J. L. Wang u. a. "An optimal product mix for hedging longevity risk in life insurance companies: The immunization theory approach". In: *Journal of Risk and Insurance* 77.2 (2010), S. 473–497.
- [Wic19a] B. Wichert. *Die häufigsten Ursachen für Erwerbsminderungsrenten*. VersicherungsJournal.de, Ausgabe vom 26.07.2019. 2019.  
<https://www.versicherungsjournal.de/versicherungen-und-finanzen/die-haeufigsten-ursachen-fuer-erwerbsminderungsrenten-136189.php>.
- [Wic19b] B. Wichert. *GDV nennt die häufigsten Invaliditätsursachen*. VersicherungsJournal.de, Ausgabe vom 07.06.2019. 2019.  
<https://www.versicherungsjournal.de/versicherungen-und-finanzen/gdv-nennt-die-haeufigsten-invaliditaets-ursachen-134225.php>.